

Frédéric Meunier

---

**INTRODUCTION À LA RECHERCHE  
OPÉRATIONNELLE**

---

*Frédéric Meunier*

Université Paris Est, CERMICS, Ecole des Ponts Paristech, 6-8 avenue Blaise Pascal, 77455  
Marne-la-Vallée Cedex.

*E-mail* : frederic.meunier@cermics.enpc.fr

# INTRODUCTION À LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Frédéric Meunier



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1. Généralités</b> .....	1
Présentation .....	1
Histoire .....	1
Modélisation et optimisation .....	3
Objectif de ce cours .....	5
 <b>partie I. Fondements</b> .....	 7
<b>2. Bases</b> .....	9
2.1. Graphes .....	9
2.2. Retour sur les ponts et sur le voyageur .....	13
2.3. Programmation mathématique .....	15
2.4. Problème .....	18
2.5. Algorithme et complexité .....	19
2.6. Exercices .....	23
<b>3. Plus courts chemins et programmation dynamique</b> .....	27
3.1. Cas du graphe orienté et programmation dynamique .....	27
3.2. Cas du graphe non-orienté .....	34
3.3. Résumé .....	36
3.4. Exercices .....	36
<b>4. Programmation linéaire</b> .....	43
4.1. Définition et exemples .....	43
4.2. Quelques éléments théoriques .....	45
4.3. Algorithmes .....	50
4.4. Dualité .....	52
4.5. Une application de la dualité : jeux matriciels à somme nulle .....	54
4.6. Exercices .....	55
<b>5. Flots et Coupes</b> .....	59
5.1. Flots et coupes .....	59
5.2. Multiflots .....	66
5.3. Exercices .....	67
<b>6. Graphes bipartis : problème d'affectation, problème de transport, mariages stables</b> .....	71
6.1. L'objet .....	71
6.2. Problème du couplage optimal .....	71

6.3. Couplages généralisés .....	73
6.4. Problème de l'affectation optimale .....	74
6.5. Mariages stables .....	74
6.6. Exercices .....	76
<b>7. Que faire face à un problème difficile ? .....</b>	<b>77</b>
7.1. Introduction .....	77
7.2. Séparation et évaluation ou branch-and-bound .....	78
7.3. Métaheuristiques .....	82
7.4. Exercices .....	85
<b>partie II. Problématiques .....</b>	<b>87</b>
<b>8. Remplissage de conteneurs .....</b>	<b>89</b>
8.1. Sac-à-dos .....	89
8.2. Bin-packing .....	91
8.3. Exercices .....	94
<b>9. Positionnement d'entrepôts .....</b>	<b>97</b>
9.1. Formalisation .....	97
9.2. Branch-and-bound .....	98
9.3. Recherche locale .....	100
9.4. Exercices .....	100
<b>10. Ordonnancement industriel .....</b>	<b>105</b>
10.1. Préliminaires .....	105
10.2. Management de projet .....	106
10.3. Ordonnancement d'atelier .....	108
10.4. Exercices .....	116
<b>11. Tournées .....</b>	<b>121</b>
11.1. Problème du voyageur de commerce .....	121
11.2. Problème du postier .....	129
11.3. Exercices .....	131
<b>12. Conception de réseaux .....</b>	<b>135</b>
12.1. Quelques rappels .....	135
12.2. Arbre couvrant de poids minimal .....	136
12.3. Arbre de Steiner .....	138
12.4. Quelques remarques pour finir .....	142
12.5. Exercices .....	143
<b>13. Ouverture .....</b>	<b>147</b>
13.1. Quelques outils absents de ce livre .....	147
13.2. Trois domaines à la frontière de la recherche opérationnelle .....	148
<b>Eléments de correction .....</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>163</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>165</b>
<b>Quelques outils de R.O. ....</b>	<b>167</b>
Quelques sociétés .....	167
Ressources en ligne .....	167

Quelques SSII spécialisées dans la RO .....	168
Quelques sociétés éditrices de logiciels de RO .....	168
Entreprises françaises ayant des départements avec compétences en RO .....	169
Quelques solveurs de programmation linéaire .....	169
Quelques langages de modélisation .....	169



# CHAPITRE 1

## GÉNÉRALITÉS

### Présentation

La recherche opérationnelle (RO) est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RO s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

**Exemples d'application.** — Planifier la tournée d'un véhicule de livraison qui doit passer par des points fixés à l'avance puis revenir à son point de départ en cherchant à minimiser la distance parcourue est un problème typique de recherche opérationnelle. On appelle ce problème le *problème du voyageur de commerce* (étudié plus en détail au Chapitre 11).

Remplir un conteneur avec des objets de tailles et de valeurs variables. Si le conteneur a une capacité finie, on va chercher à maximiser la valeur placée dans le conteneur. On appelle ce problème le *problème du sac-à-dos* (étudié plus en détail au Chapitre 8).

Ordonnancer les tâches sur un chantier. Pour chaque tâche  $T$ , on connaît sa durée. De plus, on connaît les autres tâches dont  $T$  dépend directement et combien de temps avant ou après le début de chacune d'elles  $T$  doit démarrer. On désire minimiser la durée totale du chantier. On dit que ce problème est un *problème d'ordonnancement* (étudié plus en détail au Chapitre 10).

Chacun de ces problèmes peut bien sûr être compliqué à l'envie. Dans ce cours, on restera relativement simple – quelques contraintes de plus suffisent en effet à faire de ces problèmes de véritables sujets de thèse (par exemple pour le remplissage de conteneur un sujet de thèse peut consister en : plusieurs types de conteneurs, plusieurs produits à stocker, des incompatibilités).

### Histoire

La recherche opérationnelle est née pendant la Seconde Guerre mondiale des efforts conjugués d'éminents mathématiciens (dont von Neumann, Dantzig, Blackett) à qui il avait été demandé de fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires. Le premier succès de cette approche a été obtenue en 1940 par le Prix Nobel de physique Patrick Blackett qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance. Le qualificatif « opérationnelle » vient du fait que les premières applications de cette discipline avait trait aux opérations militaires. La dénomination est restée par la suite, même si le domaine militaire n'est plus le principal champ d'application de cette discipline, le mot « opérationnelle » prenant alors plutôt

le sens d'« effectif ». Ce sont donc ces mathématiciens qui ont créé une nouvelle méthodologie caractérisée par les mots-clés *modélisation* et *optimisation*.

A partir des années 50, la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises. En France, des entreprises comme EDF, Air France, la SNCF créent à cette époque des services de recherche opérationnelle (qui existent toujours). La discipline commence à être enseignée dans les universités et les grandes écoles. Puis, au milieu des années 70, sans doute à cause d'un excès d'enthousiasme au départ et à l'inadéquation des moyens informatiques à l'application des méthodes de la RO, la discipline s'essouffle. A partir du milieu des années 90, on assiste à un retour en force la RO, les outils informatiques étant maintenant à la hauteur des méthodes proposées par la recherche opérationnelle. On assiste depuis à une explosion du nombre de logiciels commerciaux et l'apparition de nombreuses boîtes de conseil. Pour la France, notons Ilog (65 millions d'euros de CA), Eurodécision (2,8 millions d'euros de CA), Artelys (1,6 millions d'euros de CA) à l'étranger Dash-Optimization (racheté début 2008 pour 32 millions de dollars par Fair Isaac), IBM Optimization et beaucoup d'autres (le site de INFORMS Institute of Operations Research and Management Science en liste près de 240).

**Les racines.** — Si l'on cherche à trouver des précurseurs à la Recherche Opérationnelle, on peut penser à Alcuin ou à Euler qui se sont tous deux intéressés à des problèmes du type RO, bien qu'aucune application n'ait motivé leur travail.

Alcuin est le moine irlandais chargé par Charlemagne de construire l'école palatine et qui inventa le problème du loup, de la chèvre et du chou devant traverser une rivière dans une barque où au plus un élément peut prendre place.

Un homme devait transporter de l'autre côté d'un fleuve un loup, une chèvre et un panier de choux. Or le seul bateau qu'il put trouver ne permettait de transporter que deux d'entre eux. Il lui a donc fallu trouver le moyen de tout transporter de l'autre côté sans aucun dommage. Dite qui peut comment il a réussi à traverser en conservant intacts le loup, la chèvre et les choux <sup>(1)</sup>.

Euler est le mathématicien allemand à qui les notables de Königsberg demandèrent s'il était possible de parcourir les ponts de la ville en passant sur chacun des 7 ponts exactement une fois (voir Figure 1). Ce genre de problème se rencontre maintenant très souvent dans les problèmes de tournées du type facteur ou ramassage de déchets ménagers, dans lesquels il faut parcourir les rues d'une ville de façon optimale. Euler trouva la solution en 1736 – un tel parcours est impossible – en procédant à une modélisation subtile par des mots. La solution actuelle, beaucoup plus simple, utilise une modélisation par un *graphe* (voir Chapitre 2). On voit sur cet exemple qu'une bonne modélisation peut simplifier de manière drastique la résolution d'un problème.

Le premier problème de recherche opérationnelle à visée pratique a été étudié par Monge en 1781 sous le nom du problème des déblais et remblais. Considérons  $n$  tas de sable, devant servir à combler  $m$  trous. Notons  $a_i$  la masse du  $i$ ème tas de sable et  $b_j$  la masse de sable nécessaire pour combler le  $j$ ème trou. Quel plan de transport minimise la distance totale parcourue par le sable ?

La solution que proposa Monge est intéressante et procède par une modélisation dans un espace continu dans lequel on cherche une géodésique – malheureusement, elle n'est pas correcte.

---

1. Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum, capram, et fasciculum cauli. Et non potuit aliam navem invenire nisi quae duos tantum ex ipsis ferre valebat. Praeceptum itaque ei fuerat ut omnia haec ultra illaesa omnino transferret. Dicat, qui potest, quomodo eis illaesis transire potuit.

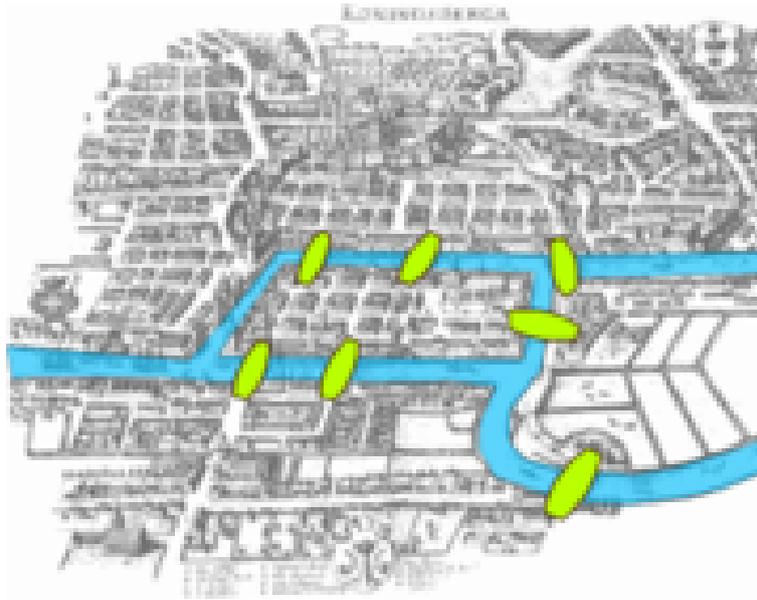


FIGURE 1. Königsberg et ses 7 ponts

La solution correcte pour trouver l'optimum est connue depuis les années 40 et utilise la programmation linéaire (que nous verrons au Chapitre 4), ou mieux, la théorie des flots (que nous verrons au Chapitre 5).

### Modélisation et optimisation

[Wikipedia] Un modèle mathématique est une traduction de la réalité pour pouvoir lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel.

Les problèmes d'organisation rencontrés dans une entreprise ne sont pas mathématiques dans leur nature. Mais les mathématiques peuvent permettre de résoudre ces problèmes. Pour cela, il faut traduire le problème dans un cadre mathématique, cadre dans lequel les techniques de la recherche opérationnelle pourront s'appliquer. Cette traduction est le modèle du problème.

Cette phase essentielle s'appelle la *modélisation*. La résolution d'un problème dépend cruciallement du modèle choisi. En effet, pour un même problème, différentes modélisations sont possibles et il n'est pas rare que le problème semble insoluble dans une modélisation et trivial dans une autre.

D'autre part, tous les éléments d'un problème ne doivent pas être modélisés. Par exemple, lorsqu'on souhaite planifier une tournée, la couleur du véhicule n'a pas d'intérêt. Le statut du conducteur, la nature du véhicule ou du produit transporté peuvent, eux, en avoir, et seule une compréhension de l'objectif de l'optimisation de la tournée peut permettre de trancher. Souvent, la phase de modélisation est accompagnée ou précédée de nombreuses discussions avec le commanditaire (lequel n'a d'ailleurs pas toujours une idée claire de ce qu'il cherche à obtenir – ces discussions lui permettent alors également de préciser ses objectifs).

Une des vrais difficultés de départ est de savoir quels éléments doivent être modélisés et quels sont ceux qui n'ont pas besoin de l'être. Il faut parvenir à trouver le juste équilibre entre un

modèle simple, donc plus facilement soluble, et un modèle compliqué, plus réaliste, mais plus difficile à résoudre. Cela dit, pour commencer, un modèle simple est toujours préférable et permet souvent de capturer l'essence du problème<sup>(2)</sup>, de se construire une intuition et de proposer des solutions faciles à implémenter.

Ce qui est demandé au chercheur opérationnel, c'est de proposer une meilleure utilisation des ressources, voire une utilisation optimale. Les bonnes questions à se poser, face à un problème du type recherche opérationnelle, sont les suivantes :

- Quelles sont les *variables de décision*? C'est-à-dire quels sont les éléments de mon modèle que j'ai le droit de faire varier pour proposer d'autres solutions ?
- Quelles sont les *contraintes*? Une fois identifiées les variables de décision, quelles sont les valeurs autorisées pour ces variables ?
- Quel est l'*objectif* ou le *critère*? Quelle est la quantité que l'on veut maximiser ou minimiser ?

Rappelons immédiatement que, en toute rigueur, on n'optimise qu'une seule quantité à la fois. On ne peut pas demander d'optimiser à la fois la longueur d'un trajet et son temps de parcours : le trajet le plus court peut très bien passer par un chemin vicinal et le trajet le plus rapide être très long mais sur autoroute. L'optimum par rapport à un critère n'a pas de raison de coïncider avec l'optimum par rapport à l'autre critère. Il existe bien ce qu'on appelle l'*optimisation multi-objectif* ou *multi-critère*, mais ce n'est jamais directement une optimisation. C'est une méthode qui consiste à hiérarchiser les objectifs, ou leur donner une certaine pondération, ce qui revient in fine à un vrai problème d'optimisation ; ou alors de proposer toute une famille de solutions dite Pareto-optimale.

Une fois le modèle écrit, le chercheur opérationnel va proposer un algorithme de résolution qui tiendra compte de l'objectif qui lui a été fixé. Comme nous le verrons à de nombreuses reprises dans ce cours, pour un même modèle, un grand nombre d'algorithmes peut être proposé. Ces algorithmes se différencient par la qualité de la solution qu'ils fournissent, le temps d'exécution, la simplicité d'implémentation. Dans certains cas, il peut être cruciale de pouvoir fournir une solution en 1 ms, avec une certaine tolérance sur la qualité de la solution. Dans d'autres cas, 1 semaine de calcul peut être acceptable mais en revanche on souhaite trouver l'optimum. En général, on se situe entre ces deux extrêmes.

La recherche opérationnelle dispose d'outils théoriques qui permettent a priori d'apprécier ces points (rapidité de l'algorithme, qualité de la solution,...) sans avoir à expérimenter. On parle de *validation théorique*. Ensuite, il faut réaliser un prototype de l'algorithme (on peut parler de « code académique » si ce prototype est développé en laboratoire) qui permet de démontrer sa réalisabilité pratique – on parle de *validation pratique*. Enfin, si ces étapes sont validées, on passe au *déploiement de la solution*, qui consiste à produire un code robuste, programmer une interface, discuter les formats des fichiers d'input, de discuter la question de la maintenance du code, etc. mais là on s'éloigne du cœur du métier du chercheur opérationnel.

En résumé, la méthodologie de la recherche opérationnelle suit en général le schéma suivant.

1. Objectifs, contraintes, variables de décision.
2. Modélisation.
3. Proposition d'un algorithme, validité théorique de l'algorithme (temps d'exécution pour trouver la solution, qualité de la solution fournie).
4. Implémentation, validation pratique de la solution.

---

2. En physique ou en économie, beaucoup de modèles simples, comme le modèle d'Ising ou le modèle de concurrence parfaite, sont très fructueux pour expliquer le réel.

5. Déploiement de la solution.

### **Objectif de ce cours**

La recherche opérationnelle occupe une place grandissante dans l'industrie, la logistique et les transports. Pour un ingénieur souhaitant faire un travail technique dans ces disciplines, elle est quasi-incontournable. L'objectif de ce cours est de donner les bases de recherche opérationnelle : la méthodologie, les problèmes et les modèles typiques, les principales techniques de résolution. Un étudiant maîtrisant les exercices de ce cours est capable de proposer une modélisation d'une grande part des problèmes de recherche opérationnelle rencontrés dans l'industrie, de proposer des approches de résolution et d'en discuter les qualités respectives. Le cours se focalisera principalement sur les étapes 2. et 3. ci-dessus.



# Première PARTIE I

## FONDEMENTS



## CHAPITRE 2

### BASES

#### 2.1. Graphes

Une brique de base dans la modélisation est le *graphe*. Les graphes apparaissent naturellement lorsqu'on est confronté à un réseau (réseau de transport, réseau informatique, réseau d'eau ou de gaz, etc.). Comment parcourir le réseau de manière optimale? C'est la question du voyageur de commerce par exemple. Comment concevoir un réseau informatique robuste, tout en minimisant le nombre de connexions? C'est le thème de la conception de réseau (Network Design), abordé au Chapitre 12.

Mais les graphes apparaissent également de manière plus subtile dans certaines modélisations de problèmes où la structure du graphe n'est pas physique. Un exemple classique est le problème de l'affectation optimale d'employés à des tâches qui sera étudié aux Chapitres 5 et 6. Les sommets représentent des tâches et des employés, et les arêtes les appariements possibles entre tâches et employés. Ils apparaissent également dans des problèmes d'ordonnancement, où les sommets représentent des tâches et les arcs les relations de précédence.

**2.1.1. Graphe non-orienté.** — Un *graphe*  $G = (V, E)$  est la donnée d'un ensemble fini  $V$  de *sommets* et d'une famille finie  $E$  d'*arêtes*, chacune associée à une paire de sommets, les *extrémités* de l'arête. On écrit indifféremment  $e = uv$  ou  $e = vu$ , où  $e$  est une arête et où  $u$  et  $v$  sont les sommets auxquels l'arête est associée. Si  $e = uv$ , on dit que  $u$  et  $v$  sont *voisins* à  $e$ , et que  $e$  est *incidente* à  $u$  et à  $v$ . Un sommet auquel aucune arête n'est incidente est dit *isolé*.

On parle de famille d'arêtes pour souligner le fait que les répétitions sont autorisées. En cas de répétition, on parle d'*arêtes parallèles*. La paire associée à une arête peut également être la répétition d'un sommet, auquel cas on parle de *boucle*. Un graphe est souvent représenté dans le plan par des points – ce sont les sommets – reliés par des lignes – ce sont les arêtes. Voir la Figure 1.

L'ensemble des arêtes dont une extrémité exactement est un sommet  $u$  est noté  $\delta(u)$ . Une boucle dont les extrémités sont  $u$  n'est donc pas dans  $\delta(u)$ . Le *degré* d'un sommet  $u$  et noté  $\deg(u)$  est la quantité  $|\delta(u)|$ . On note  $\delta(X)$  l'ensemble des arêtes de la forme  $uv$  avec  $u \in X$  et  $v \notin X$ .

Un graphe est dit *complet* si toute paire de sommets est reliée par une arête. Voir exemple Figure 2. Un graphe est dit *biparti* si l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux parties n'induisant chacune aucune arête. Voir exemple Figure 3.

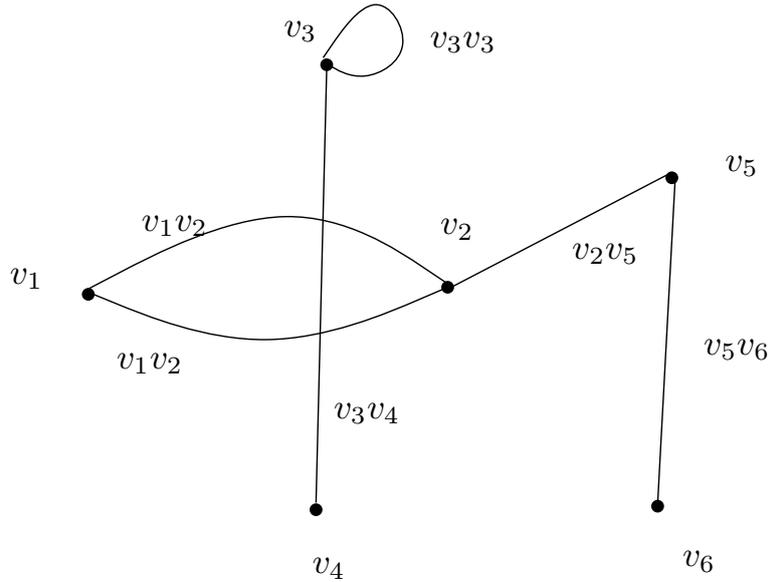


FIGURE 1. Exemple de graphe. Ce graphe est non connexe, possède 6 sommets, 6 arêtes, dont deux arêtes parallèles et une boucle.

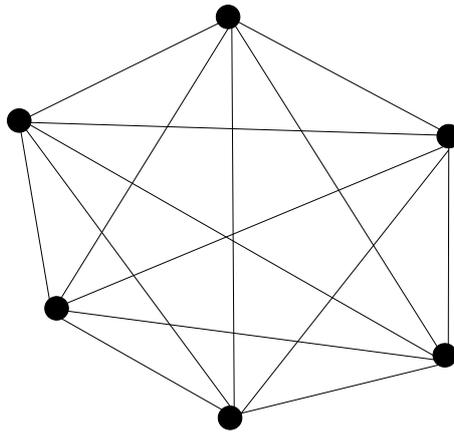


FIGURE 2. Exemple de graphe complet.

Un *sous-graphe (induit)*  $H$  d'un graphe  $G$  a pour ensemble de sommets un sous-ensemble  $V' \subseteq V$ . Les arêtes de  $H$  sont alors **toutes** celles de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $V'$  <sup>(1)</sup>.

2.1.1.1. *Chaîne, cycle, connexité.* — Une *chaîne* est une suite de la forme

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

où  $k$  est un entier  $\geq 0$ ,  $v_i \in V$  pour  $i = 0, \dots, k$  et  $e_j \in E$  pour  $j = 1, \dots, k$  avec  $e_j = v_{j-1}v_j$ . L'entier  $k$  est la *longueur* de la chaîne. En d'autres termes, une chaîne est un trajet possible dans la représentation d'un graphe lorsqu'on suit les arêtes sans rebrousser chemin sur une arête. Si les  $e_i$  sont distincts deux à deux, la chaîne est dite *simple*. Si de plus la chaîne ne passe jamais

1. Dans la terminologie anglaise, un tel sous-graphe est appelé *induced subgraph*. Ces arêtes sont notées  $E[V']$ .

On parle aussi en français de *graphe partiel* de  $G$ , qui a le même ensemble de sommets que  $G$ , mais n'a qu'une partie de ses arêtes, et de *sous-graphe partiel*, qui a comme ensemble de sommets une partie des sommets de  $G$  et comme ensemble d'arêtes une partie de celles de  $E$  – en anglais, on parle alors de *subgraph*.

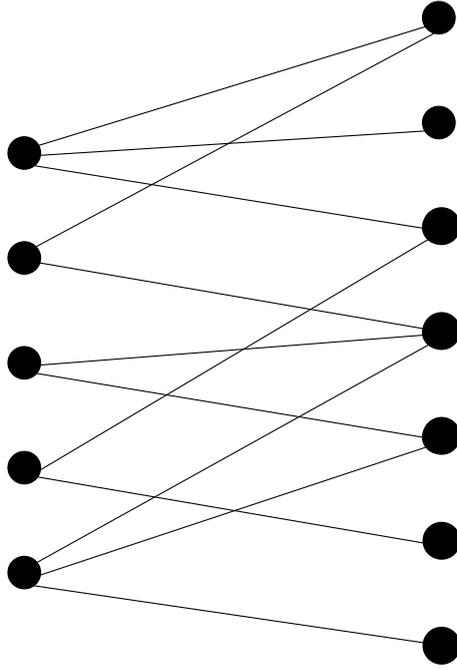


FIGURE 3. Exemple de graphe biparti.

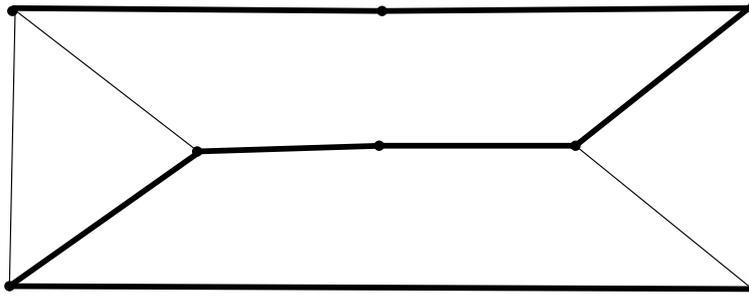


FIGURE 4. Graphe possédant une chaîne hamiltonienne. La chaîne hamiltonienne est mise en gras.

plus d'une fois sur un sommet, elle est dite *élémentaire*. Une chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe est dite *eulérienne*. Une chaîne élémentaire passant par tous les sommets du graphe est dite *hamiltonienne* (voir un exemple Figure 4).

Un *cycle* est une chaîne de longueur  $\geq 1$ , simple et fermée. C'est donc une suite de la forme

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_0$$

avec  $e_j = v_{j-1}v_j$  pour  $j < k$ , et  $e_k = v_0v_{k-1}$ . Un cycle est *élémentaire* si les  $v_i$  pour  $i = 0, \dots, k-1$  sont distincts deux à deux. Un cycle passant par toutes les arêtes d'un graphe est dit *eulérien*. Un cycle élémentaire passant par tous les sommets du graphe est dit *hamiltonien*.

Un graphe est dit *connexe* si entre toute paire de sommets il existe une chaîne.

*2.1.1.2. Couplage.* — Un *couplage* dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble d'arêtes  $M \subseteq E$  telles que deux arêtes quelconques de  $M$  soient disjointes. Une *couverture par les sommets* est un sous-ensemble de sommets  $C \subseteq V$  tel que toute arête de  $E$  touche au moins

un sommet de  $C$ . La cardinalité maximale d'un couplage se note  $\nu(G)$ . La cardinalité minimale d'une couverture par les sommets se note  $\tau(G)$ .

On a la propriété très utile suivante, car elle permet par exemple d'évaluer la qualité d'un couplage.

**Proposition 2.1.1.** — Soit  $M$  un couplage et  $C$  une couverture par les sommets d'un graphe  $G$ . Alors

$$|M| \leq |C|.$$

La preuve est laissée en exercice. Cette proposition peut également s'écrire

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

**2.1.1.3. Coloration.** — Une notion fructueuse en théorie des graphes et très utile en Recherche Opérationnelle est la notion de *coloration*. Une *coloration* d'un graphe est une application  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ . Les entiers  $\mathbb{N}$  sont alors appelés *couleurs*. Une *coloration propre* est telle que pour toute paire de voisins  $u, v$  on ait  $c(u) \neq c(v)$  : deux sommets voisins ont des couleurs différentes. Une question que l'on peut se poser, étant donné un graphe, est le nombre minimum de couleurs possible pour une coloration propre. Ce nombre, noté  $\chi(G)$ , s'appelle le *nombre chromatique* de  $G$ .

On a l'inégalité

$$\text{cardinalité du plus grand sous-graphe complet} \leq \chi(G),$$

dont on peut aisément se convaincre.

**2.1.2. Graphe orienté.** — Un *graphe orienté*  $D = (V, A)$  est la donnée d'un ensemble fini  $V$  de *sommets* et d'une famille finie  $A$  d'*arcs*, chacun associé à un couple<sup>(2)</sup> de sommets, les *extrémités* de l'arc. On écrit  $a = (u, v)$ , où  $a$  est un arc et où  $(u, v)$  est le couple de sommets auquel l'arc est associé. Si  $a = (u, v)$ , on dit que  $u$  et  $v$  sont *voisins* à  $a$ , et que  $a$  est *incidente* à  $u$  et à  $v$ . Pour un arc  $(u, v)$ , le sommet  $u$  est appelé *antécédent* de  $v$  et  $v$  est le *successeur* de  $u$ . Si  $v \neq u$ , on dit de plus que l'arc *quitte*  $u$  et *entre en*  $v$ .

Comme pour les graphes non orientés, les répétitions d'arcs sont autorisées et, en cas de répétition, on parle d'*arcs parallèles*. Le couple définissant un arc peut également être la répétition d'un sommet, auquel cas on parle de *boucle*. Lorsqu'on représente un graphe orienté, les lignes deviennent des flèches (voir Figure 5).

L'ensemble des arcs quittant un sommet  $u$  est noté  $\delta^+(u)$  et l'ensemble des arcs entrant en  $u$  est noté  $\delta^-(u)$ . Le *degré sortant* (resp. *degré entrant*) d'un sommet  $u$  est noté  $\text{deg}^+(u)$  (resp.  $\text{deg}^-(u)$ ) est la quantité  $|\delta^+(u)|$  (resp.  $|\delta^-(u)|$ ). On note  $\delta^+(X)$  (resp.  $\delta^-(X)$ ) l'ensemble des arcs de la forme  $(u, v)$  avec  $u \in X$  et  $v \notin X$  (resp.  $u \notin X$  et  $v \in X$ ).

Un *chemin* est une suite de la forme

$$v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{k-1}, a_k, v_k$$

où  $k$  est un entier  $\geq 0$ ,  $v_i \in V$  pour  $i = 0, \dots, k$  et  $a_j \in A$  pour  $j = 1, \dots, k$  avec  $a_j = (v_{j-1}, v_j)$ . L'entier  $k$  est la *longueur* du chemin. En d'autres termes, un chemin est un trajet possible dans la représentation d'un graphe lorsqu'on suit les arcs dans le sens des flèches. Si les  $a_i$  sont distincts deux à deux, le chemin est dite *simple*. Si de plus le chemin ne passe jamais plus d'une fois sur un sommet, elle est dite *élémentaire*. Un chemin simple passant par tous les arcs d'un graphe

---

2. Rappelons que les deux éléments d'un couple sont ordonnés, ceux d'une paire ne le sont pas.

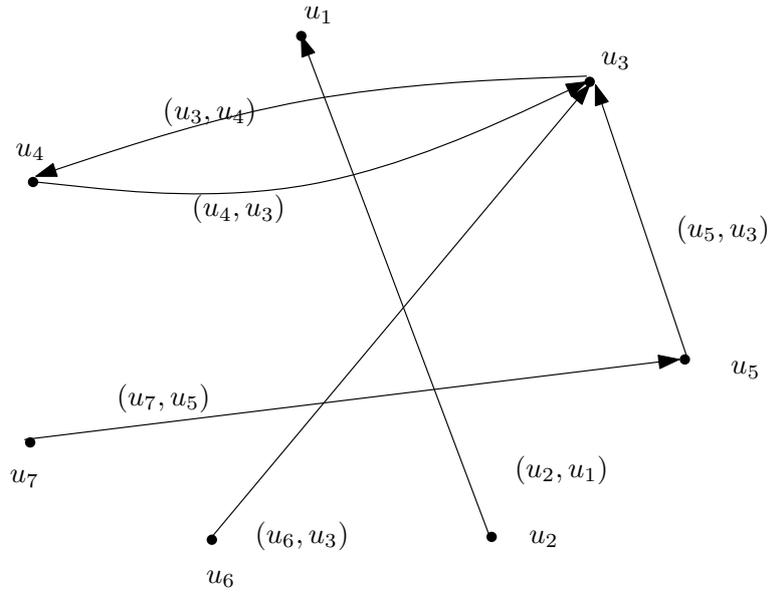


FIGURE 5. Exemple de graphe orienté. Ce graphe possède 7 sommets et 5 arcs.

orienté est dit *eulérien*. Un chemin élémentaire passant par tous les sommets du graphe est dit *hamiltonien*.

Un *circuit* est un chemin de longueur  $\geq 1$ , simple et fermée. C'est donc une suite de la forme

$$v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_0$$

avec  $a_j = (v_{j-1}, v_j)$  pour  $j < k$ , et  $a_k = (v_{k-1}, v_0)$ . Un circuit est *élémentaire* si les  $v_i$  pour  $i = 0, \dots, k - 1$  sont distincts deux à deux. Un circuit passant par tous les arcs d'un graphe orienté est dit *eulérien*. Un circuit élémentaire passant par tous les sommets du graphe est dit *hamiltonien*. Un exemple de circuit eulérien est donné Figure 6.

Un graphe orienté est dit *faiblement connexe* si le graphe non orienté obtenu en "oubliant" les orientations des arcs est connexe. Il est dit *fortement connexe* si pour tout couple  $(u, v)$  de sommets, il existe un chemin allant de  $u$  à  $v$ .

Une dernière remarque : Si rien n'est précisé par ailleurs,  $n$  représentera  $|V|$  le nombre de sommets et  $m$  représentera  $|E|$  (ou  $|A|$ ) le nombre d'arêtes (ou le nombre d'arcs).

## 2.2. Retour sur les ponts et sur le voyageur

Le problème des ponts de Königsberg auquel il a été fait allusion ci-dessus se modélise de la manière suivante : chacune des îles et chacune des berges sont représentées par des sommets. Il y a donc 4 sommets. Chaque pont est représenté par une arête – voir Figure 7. On cherche donc à savoir s'il y a une chaîne eulérienne dans ce graphe.

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne dans un graphe est simple. La preuve est laissée en exercice.

**Théorème 2.2.1.** — *Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il possède au plus deux sommets de degré impair.*

*Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si il n'a pas de sommet de degré impair.*

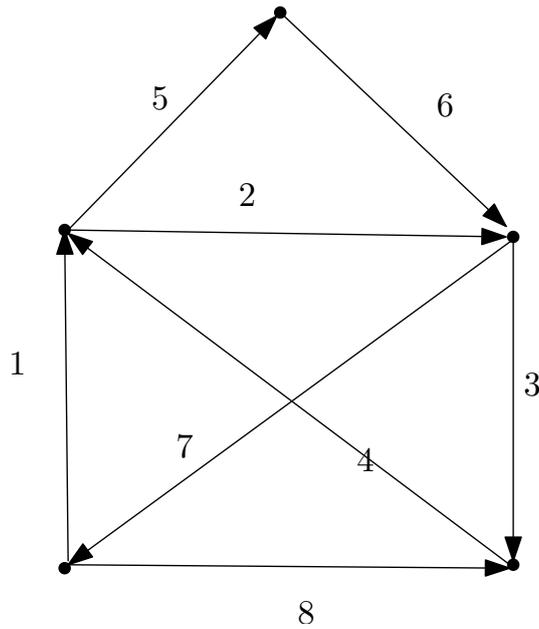


FIGURE 6. Graphe orienté possédant un circuit eulérien. L'ordre des arcs dans un tel circuit est indiqué.

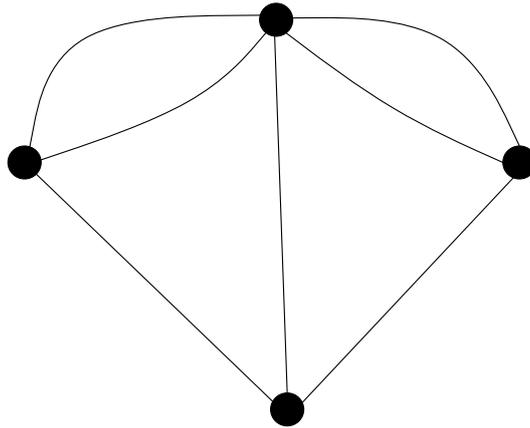


FIGURE 7. Modélisation du problème des ponts de Königsberg. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne?

Avec ce théorème, on voit donc qu'il n'existe pas de parcours passant exactement une fois et une seule sur chaque ponts de la ville de Königsberg.

On appelle *graphe eulérien* un graphe possédant un cycle eulérien.

On peut également tenter une **modélisation du problème du voyageur de commerce**, qui a déjà été évoqué. Un camion doit quitter son entrepôt, livrer différents points d'un réseau puis revenir à son point de départ, et ce, en parcourant la distance minimale. Le point à livrer est représenté par un sommet du graphe, la route la plus courte entre deux points est représentée par une arête. On note ce graphe  $K_n = (V, E)$ , où  $n$  est le nombre de sommets. Ce graphe – simple – est un *graphe complet* puisque toute paire de sommets correspond à une arête. On ajoute encore une fonction  $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui indique la longueur des routes représentées par les

arêtes. Il est à noter que la fonction  $d$  satisfait par construction l'inégalité triangulaire

$$d(uv) + d(vw) \geq d(uw) \quad \text{pour tous sommets } u, v, w.$$

On cherche le **cycle hamiltonien de  $K_n$  le plus court pour la fonction de poids  $d$** . Le Chapitre 11 donne plus de détail sur cette transformation et traitera des méthodes pour résoudre le problème.

Dans le cas orienté, la condition nécessaire et suffisante d'existence de chemin ou circuit eulérien est semblable à celle du Théorème 2.2.1.

**Théorème 2.2.2.** — *Un graphe faiblement connexe admet un chemin eulérien si et seulement si il existe deux sommets  $v$  et  $w$  tels que  $\deg^+(v) = \deg^-(v) + 1$ ,  $\deg^+(w) + 1 = \deg^-(w)$  et  $\deg^+(u) = \deg^-(u)$  pour tout sommet  $u \neq v, w$ .*

*Un graphe faiblement connexe admet un cycle eulérien si et seulement si  $\deg^+(u) = \deg^-(u)$  pour tout sommet  $u$ .*

Notons qu'un graphe admettant un cycle eulérien est automatiquement fortement connexe.

## 2.3. Programmation mathématique

**2.3.1. Définition.** — Le terme *programmation mathématique* est un terme plutôt vague pour désigner le problème mathématique qui consiste à chercher un élément dans un ensemble  $X$  qui minimise ou maximise un *critère*, ou *coût*, ou *fonction de coût*. Puisqu'en général la recherche opérationnelle a pour objectif l'optimisation, la phase de modélisation se termine souvent par l'écriture formelle d'un programme mathématique.

Un programme mathématique s'écrit sous la forme suivante (on supposera que l'on cherche à minimiser une certaine quantité).

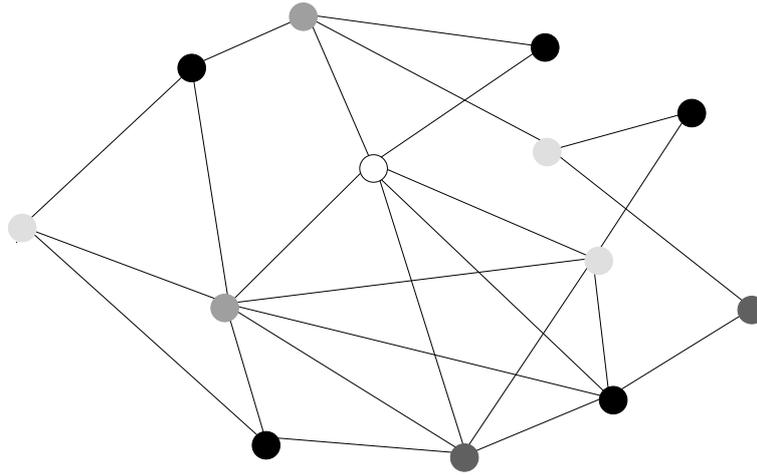
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.c.} & x \in X. \end{array}$$

$f$  est le critère. « s.c. » signifie « sous contraintes ».  $X$  est l'ensemble des solutions possibles ou *réalisables*, et «  $x \in X$  » est la ou les contraintes du programme. On cherche parmi ces solutions réalisables une *solution optimale*  $x^*$ , i.e. ici une solution réalisable qui minimise le critère.  $\inf\{f(x) : x \in X\}$  est appelé *valeur du programme*. Si  $X = \emptyset$ , cette valeur est définie comme étant égale à  $+\infty$ .

En plus de fournir un cadre compact pour formuler un problème, cette notation a l'avantage de rappeler les questions essentielles à se poser lorsqu'on résout un problème. Veut-on minimiser ou maximiser? Que veut-on optimiser? Quelles sont les contraintes de notre système? Quelles sont les variables sur lesquelles on peut jouer?

Une remarque fondamentale et très utile est que tout problème de minimisation peut se réécrire comme un problème de maximisation : il suffit de prendre comme critère  $-f(x)$ . Et réciproquement.

Dans ce cours, nous verrons entre autres la *programmation dynamique* (Chapitre 3), la *programmation linéaire* (Chapitre 4) et la *programmation linéaire en nombres entiers* (dont l'étude sera initiée Chapitre 7). Ces trois types de programmation sont très fréquents en recherche opérationnelle.



Graphe coloré avec 5 couleurs

FIGURE 8. Peut-on colorer proprement ce graphe avec moins de 5 couleurs ?

**2.3.2. Borne et solution approchée.** — Si l'on est capable de trouver une *borne inférieure de  $f$* , c'est-à-dire une fonction  $g$  telle que pour tout  $x \in X$ , on ait  $g(x) \leq f(x)$ , on peut majorer l'écart de la solution  $x$  proposée à la solution optimale  $x^*$  : on est à moins de

$$\frac{f(x) - g(x^*)}{g(x^*)} \%$$

de l'optimum. Il est toujours utile de vérifier si l'on n'a pas une borne inférieure de qualité, facile à calculer. On peut alors éviter de chercher à améliorer une solution en faisant tourner longuement un programme informatique, alors qu'une borne inférieure nous fournit la preuve que l'on est à moins de 0,1% de l'optimum par exemple.

En particulier, un bon minorant peut permettre de montrer l'optimalité d'une solution. Voir Figures 8 et 9.

**2.3.3. Optimisation continue vs optimisation discrète.** — Si  $X$  est une partie d'un espace vectoriel et si  $f$  satisfait certaines conditions de régularité, la résolution de ce programme relève de l'*optimisation continue*. Un outil fréquent est alors la dérivation. Notre seule rencontre avec l'optimisation continue dans ce cours se fera par l'intermédiaire de la programmation linéaire, qui, elle, ne peut pas se résoudre par une simple dérivation.

Dans les problèmes industriels, l'ensemble  $X$  est souvent de nature *discrète*, i.e. qu'il peut être mis en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ . Par exemple, le problème du voyageur de commerce qui consiste à trouver le cycle le plus court passant par des villes fixées à l'avance est de nature discrète.  $X$  est ici l'ensemble des cycles hamiltoniens. Tout cycle de ce type est une solution réalisable. Le critère est la distance parcourue. Il y a un nombre fini de cycles. On est bien dans le cadre de l'optimisation discrète (et l'on voit bien qu'ici la plupart des notions de l'optimisation continue sont sans intérêt : que dériver ici ?).

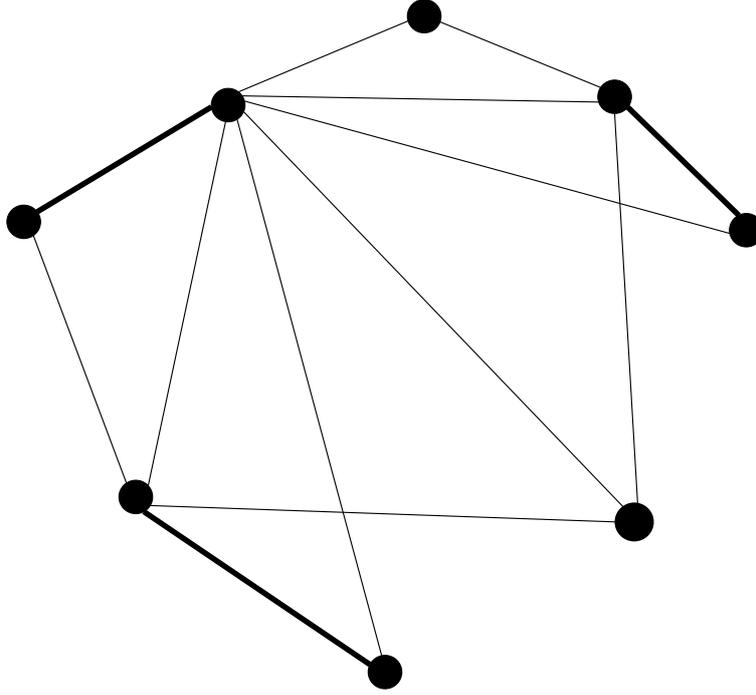


FIGURE 9. Peut-on trouver un couplage de plus de 3 arêtes ?

**2.3.4. Programmation linéaire, programmation convexe.** — Considérons le programme

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0, \quad (\text{P}) \\ & h(x) \leq 0 \\ & x \in X, \end{aligned}$$

avec  $X \neq \emptyset$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $h : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ . On dit que (P) est un *programme linéaire* si  $f$  est une fonction linéaire, et si  $g$  et  $h$  sont toutes deux affines (cf. Chapitre 4). On dit que (P) est un *programme convexe* si  $f$ , et  $h$  sont toutes deux convexes, et si  $g$  est affine. La programmation linéaire est bien entendu un cas particulier de la programmation convexe. Les techniques pour aborder cette dernière ne seront que très sommairement évoquées dans ce cours.

**2.3.5. Lagrangien et dualité faible.** — On définit le *lagrangien* associé au problème (P)

$$\mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := f(x) + \boldsymbol{\lambda}^T g(x) + \boldsymbol{\mu}^T h(x),$$

où  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$  et  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q$ . On vérifie facilement que

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} f(x) & \text{si } g(x) = 0 \text{ et } h(x) \leq 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut donc réécrire l'équation (P) de la manière suivante

$$\min_{x \in X} \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}).$$

On a toujours

$$(1) \quad \min_{x \in X} \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q} \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}).$$

En définissant

$$d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}),$$

on peut regarder le programme mathématique appelé *dual* de (P)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{D}) \\ & \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^q. \end{aligned}$$

(P) est alors appelé programme *primal*.

Notant  $v_P$  (resp.  $v_D$ ) la valeur de (P) (resp. (D)), l'inégalité (1) fournit l'inégalité suivante, appelée *inégalité de dualité faible*

$$v_P \geq v_D.$$

Cette inégalité est extrêmement utile et constitue un moyen "automatique" de générer des bornes inférieures à un problème. Ces notions seront en particulier approfondies dans le Chapitre 4 sur le programmation linéaire et dans le Chapitre 7. En programmation linéaire, nous verrons qu'on dispose d'une relation plus forte, appelée *dualité forte*.

*Remarque.* —  $d$  est une fonction concave car infimum de fonctions affines.

## 2.4. Problème

Une autre notion commode dans la modélisation est la notion de *problème*. Un problème se décompose en deux parties : une partie **Donnée** et une partie **Tâche** ou **Question**. Une telle formalisation permet d'écrire clairement quelles sont les éléments dont on dispose au départ et quelle est précisément la tâche que l'on veut résoudre. L'objectif à atteindre devient donc clair et dans un tel contexte, il est plus facile de discuter des performances de telle ou telle méthode.

Par exemple, le problème de l'existence d'une chaîne eulérienne peut s'écrire :

### Problème de la chaîne eulérienne

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Question** :  $G$  a-t-il une chaîne eulérienne ?

Celui du voyageur de commerce :

### Problème du voyageur de commerce

**Donnée** : Un graphe complet  $K_n = (V, E)$  et une fonction de distance  $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  (qui satisfait l'inégalité triangulaire)

**Tâche** : Trouver le cycle hamiltonien  $C = v_0, e_1, \dots, e_n, v_0$  minimisant  $\sum_{j=1}^n d(e_j)$ .

Le premier problème est un type particulier de problème, qui joue un rôle important en informatique théorique, et s'appelle un *problème de décision*, puisque la tâche à réaliser est de répondre à une question fermée, i.e. dont la réponse est soit « oui », soit « non ». Le second problème est un *problème d'optimisation*.

## 2.5. Algorithme et complexité

**2.5.1. Algorithme, algorithme exact, algorithme approché.** — Une fois que l'on a modélisé notre problème concret en un problème formalisé ou en un programme mathématique, on doit se demander comment le résoudre. Dans ce cours, nous verrons différents problèmes, différents programmes mathématiques, et quelles sont les méthodes pour les résoudre. De nouveaux problèmes sont proposés tout le temps par les chercheurs travaillant en recherche opérationnelle ; dans ce cours, nous nous limiterons bien entendu aux plus classiques.

On se fixe un ensemble d'opérations que l'on considère « facile à faire ». Par exemple, comparaison d'entiers, lire une adresse mémoire, etc. Une suite d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème s'appelle un *algorithme*. La résolution d'un problème de recherche opérationnelle passe toujours par l'application d'un algorithme, qui est ensuite implémenté. Si le problème que l'on tente de résoudre est un programme d'optimisation, on parlera d'*algorithme exact* si l'algorithme est sûr de se terminer avec l'optimum du programme, et d'*algorithme approché* sinon.

La question qui se pose également est celle de l'efficacité de l'algorithme, i.e. du temps qu'il va mettre pour résoudre le problème (une fois admis que l'algorithme est correct et résout bien le problème).

**2.5.2. Question de l'efficacité.** — Une méthode peut être de tester l'algorithme sur de grandes quantités de données. Mais ces tests-là peuvent être très, très longs, et de toute façon, à chaque fois que l'on va penser à un algorithme possible, on ne va pas systématiquement procéder à son implémentation et à des tests. La *théorie de la complexité*, un des fondement théorique de la recherche opérationnelle, a pour but de mesurer a priori l'efficacité d'un algorithme. La petite histoire qui va suivre va montrer l'intérêt de cette théorie, et est librement adapté du livre de Garey et Johnson [10].

**2.5.3. De l'intérêt de la théorie pour sauver son boulot.** — Supposez qu'un jour votre patron vous appelle dans son bureau et vous annonce que l'entreprise est sur le point d'entrer sur le marché compétitif du schmilblick. Il faut donc trouver une bonne méthode qui permette de dire si une collection de spécifications peuvent être satisfaites ou non, et si oui, qui donne la façon de construire ce schmilblick. On peut imaginer qu'un schmilblick est décrit par des variables booléennes  $C_i$  qui indiquent si le composant  $i$  est présent ou non. De plus, on a des règles du type si  $C_1$  et  $C_5$  sont vraies et  $C_3$  est faux, alors  $C_7$  doit être faux. Etc.

Comme vous travaillez au département de Recherche Opérationnelle, c'est à vous de trouver un algorithme efficace qui fasse cela.

Après avoir discuté avec le département de production des schmilblicks afin de déterminer quel est exactement le problème à résoudre, vous retournez dans votre bureau et commencez avec enthousiasme à travailler d'arrache-pied. Malheureusement, quelques semaines plus tard, vous êtes obligé de l'admettre : vous n'avez pas réussi à trouver un algorithme qui fasse substantiellement mieux que d'essayer toutes les possibilités – ce qui ne réjouira certainement pas votre patron puisque cela demandera des années et des années pour tester juste un ensemble de spécifications. Vous ne souhaitez certainement pas retourner dans le bureau de votre patron et lui dire : « Je ne parviens pas à trouver d'algorithme efficace. Je pense que je suis trop bête. »

Ce qui serait bien, c'est que vous soyez capable de démontrer que le problème du schmilblick est intrinsèquement intractable<sup>(3)</sup>. Dans ce cas, vous pourriez sereinement aller voir votre patron

---

3. anglicisme signifiant dans ce contexte qu'il n'existe pas d'algorithme efficace résolvant le problème considéré.

et lui dire : « Je ne parviens pas à trouver d'algorithme efficace car un tel algorithme ne peut exister. »

Malheureusement, personne à ce jour n'a été capable de montrer qu'il existe un problème intrinsèquement intractable. En revanche, les théoriciens de l'informatique ont développé un concept qui est presque aussi bon, celui de problème **NP-complet**. La théorie de la **NP-complétude** fournit des techniques variées pour prouver qu'un problème est aussi difficile qu'une grande quantité d'autres problèmes, pour lesquels aucune méthode efficace n'a été trouvée à ce jour, malgré les efforts répétés des plus grands experts de la planète. Avec ces techniques, vous pourrez peut-être prouver que votre problème est **NP-complet** et donc équivalent à tous ces problèmes difficiles. Vous pourriez alors entrer dans le bureau de votre patron et annoncer : « Je ne parviens pas à trouver d'algorithme efficace, mais aucune star de la RO, aucune star de l'informatique théorique, aucune star de l'optimisation discrète ne peut le faire. » Au pire, cela l'informerait qu'il ne sert à rien de vous virer pour embaucher un autre expert à votre place.

Prouver qu'un problème est **NP-complet** ne signifie pas la fin de l'histoire ; au contraire, c'est le début du vrai travail. Le fait de savoir qu'un problème est **NP-complet** fournit une information sur l'approche la plus productive. Cela montre qu'il ne faut pas se focaliser sur la recherche d'un algorithme exact et efficace et qu'il faut avoir des approches moins ambitieuses. Par exemple, on peut chercher des algorithmes efficaces résolvant divers cas particuliers. On peut chercher des algorithmes sans garantie sur le temps d'exécution, mais qui en général semblent être rapides. Ou alors, on peut « relaxer » le problème et chercher un algorithme rapide qui trouve des schmilblicks satisfaisant presque toutes les spécifications. Dans les chapitres suivants, nous verrons des exemples concrets illustrant de telles approches.

**2.5.4. Notions de base en théorie de la complexité ou comment gagner 1 million de \$.** — Pour évaluer théoriquement l'efficacité d'un algorithme résolvant un problème  $\mathcal{P}$ , on compte le nombre d'opérations élémentaires que cet algorithme effectue pour le résoudre. Comme la taille des données de  $\mathcal{P}$  peut varier, on va avoir une *fonction de complexité*  $f$  qui à  $n$ , la taille des données, va associer le nombre  $f(n)$  d'opérations élémentaires que l'algorithme va effectuer pour trouver une solution. La taille des données, c'est le nombre de bits qu'il faut pour coder les données.

Rappelons qu'en mathématiques, dire qu'une fonction  $f$  est  $O(g(n))$  (lire « grand 'o' de  $g(n)$  »), c'est dire qu'il existe une constante  $B$  telle que  $f(n) \leq Bg(n)$  pour tout  $n$ . Si la fonction de complexité d'un algorithme est un  $O(p(n))$ , où  $p$  est un polynôme, alors l'algorithme est dit *polynomial*. Sinon, il est dit *exponentiel*. Un algorithme polynomial est en général perçu comme efficace, un algorithme exponentiel est en général mauvais. Le Tableau 1 montre le temps qu'il faut à des algorithmes de fonction de complexité variable pour résoudre un problème pour différentes tailles de données.

On entend souvent dire : « Ces problèmes ne se poseront plus lorsque la puissance des ordinateurs aura augmenté ». C'est faux, comme le montre le Tableau 2. Supposons par exemple que l'on ait un algorithme résolvant le problème du schmilblick  $B2^n$  opérations élémentaires, où  $B$  est une constante et où  $n$  est le nombre de spécifications (avec donc un ordinateur effectuant bien plus d'1 milliard d'opérations par seconde). Et supposons que l'on soit capable de résoudre des problèmes de schmilblick en 1 heure jusqu'à  $n = 438$ . L'utilisation d'une machine 1000 fois plus rapide ne permettra que d'aller jusqu'à  $n = 448$  en 1 heure !

Un problème  $\mathcal{P}$  est dite *polynomial* ou *dans P* s'il existe un algorithme polynomial qui le résout.

Fonction de complexité	Taille $n$					
	10	20	30	40	50	60
$n$	0,01 $\mu$ s	0,02 $\mu$ s	0,03 $\mu$ s	0,04 $\mu$ s	0,05 $\mu$ s	0,06 $\mu$ s
$n^2$	0,1 $\mu$ s	0,4 $\mu$ s	0,9 $\mu$ s	1,6 $\mu$ s	2,5 $\mu$ s	3,6 $\mu$ s
$n^3$	1 $\mu$ s	8 $\mu$ s	27 $\mu$ s	64 $\mu$ s	125 $\mu$ s	216 $\mu$ s
$n^5$	0,1 ms	3,2 ms	24,3 ms	102,4 ms	312,5 ms	777,6 ms
$2^n$	$\sim 1 \mu$ s	$\sim 1$ ms	$\sim 1$ s	$\sim 18$ min 20 s	$\sim 13$ jours	$\sim 36$ années et 6 mois

TABLE 1. Comparaison de diverses fonctions de complexité pour un ordinateur effectuant 1 milliard d'opérations par seconde.

Taille de l'instance la plus large que l'on peut résoudre en 1 heure

Fonction de complexité	Avec un ordinateur actuel	Avec un ordinateur 100 fois plus rapide	Avec un ordinateur 1000 fois plus rapide
$n$	$N_1$	$100N_1$	$1000N_1$
$n^2$	$N_2$	$10N_2$	$31.6N_2$
$n^3$	$N_3$	$4.64N_3$	$10N_3$
$n^5$	$N_4$	$2.5N_4$	$3.98N_4$
$2^n$	$N_5$	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
$3^n$	$N_6$	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

TABLE 2. Comparaison de diverses fonctions de complexité.

Un problème de décision  $\mathcal{P}$  est *dans NP* si, lorsque la réponse est « oui », il existe un *certificat* (c'est-à-dire une information supplémentaire) et un algorithme polynomial qui permet de vérifier que la réponse est « oui », sans pour autant être capable de trouver cette réponse (voir des exemples ci-dessous). Le sigle **NP** ne signifie pas « non polynomial » mais « non déterministiquement polynomial ». Le non-déterminisme ici fait référence aux machines de Turing non-déterministes, et dépasse largement le cadre de ce cours.

Un problème de décision est dit **NP-complet** si l'existence d'un algorithme polynomial le résolvant implique l'existence d'un algorithme polynomial pour tout problème **NP**. A ce jour, on ne connaît pas d'algorithme polynomial résolvant un problème **NP-complet**. En revanche, on connaît beaucoup de problèmes **NP-complets**. Le premier a été trouvé en 1970, par un informaticien appelé Cook.

Considérons le problème suivant.

### Problème du cycle eulérien

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Question** :  $G$  a-t-il un cycle eulérien ?

Ce problème de décision est dans **P**. En effet, le Théorème 2.2.1 ci-dessus permet facilement de répondre à la question en temps polynomial : si  $m$  est le nombre d'arêtes de  $G$  et  $n$  son nombre de sommets, tester le fait que tous les sommets sont de degré pair prend  $O(m)$  et que le graphe est connexe prend  $O(n + m)$ , au total  $O(n + m)$ . Il est donc également dans **NP** : le certificat est le graphe lui-même.

De même, le problème suivant est dans **P**.

### Problème de la chaîne eulérienne

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$  et deux sommets  $s, t \in V$ .

**Question** :  $G$  a-t-il une  $s$ - $t$  chaîne eulérienne ?

Considérons maintenant le problème suivant.

### Problème du cycle hamiltonien

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Question** :  $G$  a-t-il un cycle hamiltonien ?

A ce jour, nul n'a pu démontrer que ce problème est dans **P**, ni qu'il n'y était pas. En revanche, il est facile de voir que ce problème est dans **NP** car si la réponse est positive, alors l'algorithme qui consiste à suivre le cycle hamiltonien permet de prouver que la réponse est bien positive. Ici, le cycle hamiltonien joue le rôle de certificat. Il a été également démontré que ce problème est **NP-complet**. Cela signifie que si vous rencontrez quelqu'un vous disant qu'il connaît un algorithme efficace pour répondre à cette question, il est très probable qu'il se trompe car tous les problèmes **NP-complets** pourraient alors être résolus par un algorithme polynomial. Or personne à ce jour n'a pu en trouver, et quantité de gens très brillants ont cherché un tel algorithme. S'il ne se trompe pas, c'est une découverte fondamentale, qui aurait un impact énorme tant dans le monde de l'informatique théorique, que dans la recherche opérationnelle appliquée. De plus, cette personne percevrait le prix d'1 millions de dollars offert par la Fondation Clay pour la résolution de la question ouverte  $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$ .

De même le problème suivant est **NP-complet**.

### Problème de la chaîne hamiltonienne

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$ , deux sommets  $s, t \in V$ .

**Question** :  $G$  a-t-il une  $s$ - $t$  chaîne hamiltonienne ?

On peut définir également les mêmes problèmes pour les graphes orientés, les résultats seront semblables. En résumé, on a

Résultats de complexité pour des parcours.	
Problèmes	Complexité
Graphe non-orienté : Cycle eulérien	<b>P</b>
Graphe non-orienté : Chaîne eulérienne	<b>P</b>
Graphe non-orienté : Cycle hamiltonien	<b>NP-complet</b>
Graphe non-orienté : Chaîne hamiltonienne	<b>NP-complet</b>
Graphe orienté : Circuit eulérien	<b>P</b>
Graphe orienté : Chemin eulérien	<b>P</b>
Graphe orienté : Circuit hamiltonien	<b>NP-complet</b>
Graphe orienté : Chemin hamiltonien	<b>NP-complet</b>

La Figure 10 illustre les relations entre problèmes **P**, **NP**, **NP-complets**, si  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$  (ce qui est le plus probable).

La notion de problème **NP** et a fortiori de problème **NP-complet** est définie pour les problèmes de décision, dont la réponse est « oui » ou « non ». Mais les problèmes que l'on rencontre en RO

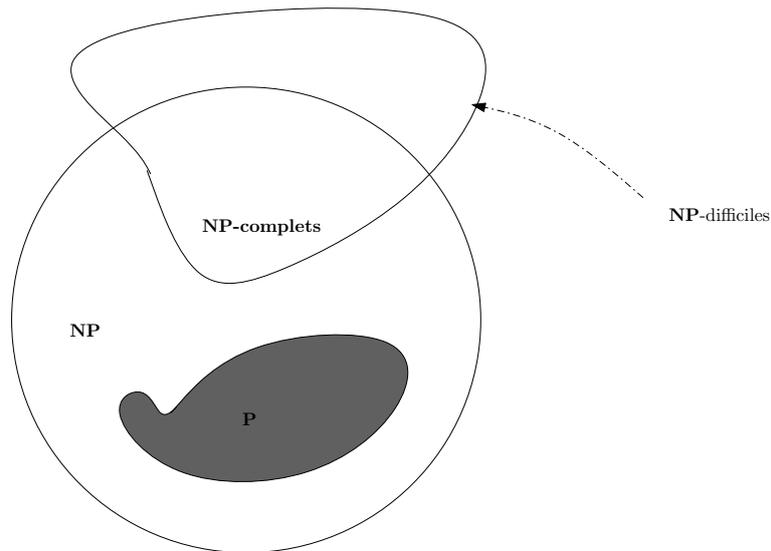


FIGURE 10. Les problèmes NP

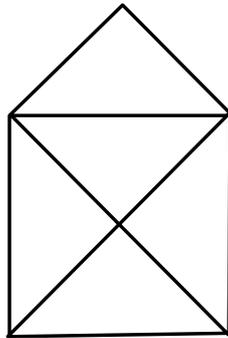


FIGURE 11. Peut-on tracer cette figure sans lever le crayon ?

sont rarement de ce type. Il existe une notion qui permet de caractériser des problèmes difficiles qui ne sont pas des problèmes de décision : c'est celle de problème **NP-difficile**.

Un problème est **NP-difficile** si savoir le résoudre en temps polynomial impliquerait que l'on sait résoudre un problème (de décision) **NP-complet** en temps polynomial. Les problèmes **NP-difficiles** sont donc dans un sens plus dur que les problèmes **NP-complets**. Par exemple :

**Théorème 2.5.1.** — *Le problème du voyageur de commerce est NP-difficile.*

La preuve de ce résultat découle de la **NP-complétude** du problème de cycle hamiltonien.

## 2.6. Exercices

**2.6.1. Dessiner sans lever le crayon.** — Indiquez pour les Figures 11 et 12 quand il est possible de dessiner la figure sans lever le crayon (et sans repasser sur un trait déjà dessiné) et quand il ne l'est pas.

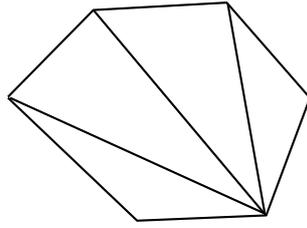
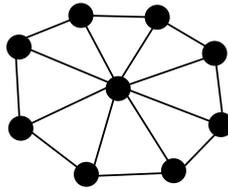
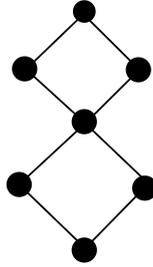


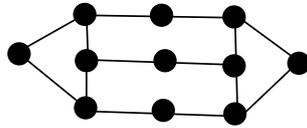
FIGURE 12. Et celle-là?



$G_1$



$G_2$



$G_3$

FIGURE 13. Lequel de ces graphes contient une chaîne hamiltonienne? Lequel contient un cycle hamiltonien?

**2.6.2. Parcours hamiltonien.** — Pour chacune des trois graphes de la Figure 2.6.2, indiquez pour chacun d'eux s'il possède une chaîne hamiltonienne. Même question avec pour le cycle hamiltonien.

Justifiez votre réponse.

**2.6.3. Le jeu Icosian.** — La Figure 14 représente le jeu Icosian inventé en 1859 par le mathématicien Hamilton. Peut-on mettre les chiffres de 1 à 20 dans les cercles de manière à ce que toute paire de nombres consécutifs soit adjacente, 1 et 20 étant aussi considérés comme adjacents?

**2.6.4. Affectation de fréquences.** — Considérons des relais de téléphonie mobile. Chaque relais reçoit et émet des signaux à une certaine fréquence. Pour éviter les interférences, on veut que deux relais à moins de 200 m fonctionnent avec des fréquences différentes. Le coût de gestion du parc de relais est une fonction croissante du nombre de fréquences utilisées. On souhaite minimiser ce coût.

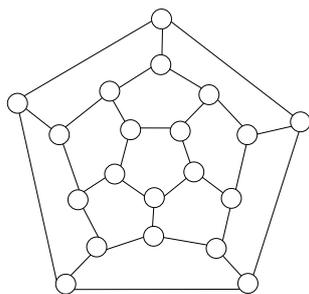


FIGURE 14. Le jeu Icosian.

Modéliser ce problème avec les outils du cours.

**2.6.5. Organisation de formations.** — Considérons maintenant un DRH qui doit assurer un certain nombre de formation à ses employés. Les formations sont  $F_1, \dots, F_n$ . Et les employés sont  $E_1, \dots, E_m$ . Le DRH sait pour chaque employé  $E_i$  quelles sont les formations qu'il doit suivre. Il veut organiser une session de formations – chacune des formation ne peut être dispensée qu'une fois au total dans l'entreprise et un employé peut suivre au plus une formation par jour. En revanche, plusieurs formations peuvent être dispensées le même jour. Le DRH souhaite organiser la session la plus courte possible.

Modéliser ce problème avec les outils du cours.

**2.6.6. Borne inférieure du nombre chromatique.** — Montrer l'optimalité de la coloration de la Figure 8, et proposer une borne inférieure générale pour les nombre chromatique.

**2.6.7. Borne supérieure pour les couplages maximum.** — Montrer l'optimalité du couplage de la Figure 9, et proposer une borne supérieure générale pour les couplages maximum.

**2.6.8. NP-complétude de la chaîne hamiltonienne.** — Montrer que le problème de l'existence de la chaîne hamiltonienne est **NP**-complet, sachant que celui du cycle hamiltonien l'est. Réciproquement, montrer que le problème de l'existence du cycle hamiltonien est **NP**-complet, sachant que celui de la chaîne hamiltonienne l'est.

**2.6.9. Problème de transport.** — Le premier problème de recherche opérationnelle à visée pratique a été étudié par Monge en 1781 sous le nom du problème des déblais et remblais. Considérons  $n$  tas de sable, devant servir à combler  $m$  trous. Notons  $a_i$  la masse du  $i$ ème tas de sable et  $b_j$  la masse de sable nécessaire pour combler le  $j$ ème trou. Pour chaque couple  $(i, j)$  on connaît la distance  $d_{ij}$  du  $i$ ème tas au  $j$ ème trou. Si une masse  $x_{ij}$  est déplacée du tas  $i$  au trou  $j$ , le coût du déplacement est égal à  $d_{ij}x_{ij}$ . On souhaite savoir quel est le plan de transport qui permet de boucher les trous au coût minimum.

Modéliser ce problème sous la forme d'un programme mathématiques. Quelle est sa nature ?



## CHAPITRE 3

### PLUS COURTS CHEMINS ET PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Les problèmes de plus courts chemins apparaissent naturellement dans des contextes variés. Ils peuvent apparaître comme modélisation de problèmes opérationnels (trajet le plus rapide, ou le moins cher, gestion optimal d'un stock, plan d'investissement optimal, etc.), ils sont aussi fréquemment des sous-problèmes d'autres problèmes d'optimisation (flot de coût minimum – Chapitre 5 – ou en théorie de l'ordonnancement – Chapitre 10). Sous cette appellation anodine de plus court chemin, nous verrons qu'il se cache une réalité extrêmement variée, tant du point de vue de la complexité que des types d'algorithmes mis en œuvre. Le graphe peut être orienté ou non, les arêtes ou les arcs avoir des poids positifs ou quelconque, ... Un cas particulier important est la *programmation dynamique* qui traite des situations où des décisions doivent être prises de manière séquentielle, chaque décision faisant passer le système d'un état à un autre. Ce passage d'un état à un autre s'appelle une *transition*. On suppose qu'un coût est associé à chaque transition. L'objectif de la programmation dynamique est de minimiser le coût de la suite des transitions, suite qu'on appelle *trajectoire*.

#### 3.1. Cas du graphe orienté et programmation dynamique

**3.1.1. Les poids sont positifs : algorithme de Dijkstra.** — Le cas le plus naturel est le cas du graphe orienté avec des poids strictement positifs sur les arcs. En effet, le problème du trajet le plus court dans un réseau (routier, de transport, informatique, etc.) rentre dans ce cadre. Le temps de parcours d'un arc, ou sa longueur, sont dans ces contextes strictement positifs.

En 1959, Dijkstra proposa le premier algorithme efficace. On suppose que l'on a un graphe orienté  $D = (V, A)$ , avec une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On se fixe un sommet  $s$  de départ et un sommet  $t$  d'arrivée. On veut le chemin de plus petit poids (le poids d'un chemin étant la somme des poids de ses arcs), ou autrement dit le plus court chemin allant de  $s$  à  $t$ . Noter que dans un graphe dont tous les poids sont positifs, il existe toujours un plus court chemin qui soit un chemin élémentaire (avec répétition de sommets interdite) car si le plus court chemin passe par un circuit, on peut supprimer ce circuit sans détériorer le poids du chemin. Si tous les poids sont strictement positifs, les notions de plus court chemin, plus court chemin simple (avec répétition d'arcs interdite) et plus court chemin élémentaire (avec répétition de sommets interdite) coïncident puisqu'alors suivre un circuit détériore strictement le poids du chemin.

L'algorithme de Dijkstra va calculer les plus courts chemins démarrant en  $s$  pour tous les sommets d'arrivée possibles, donc en particulier pour  $t$ .

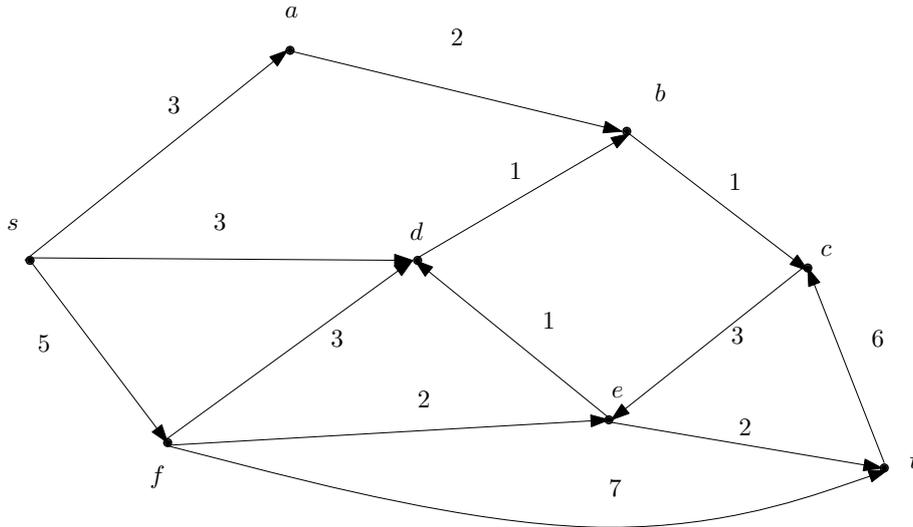


FIGURE 1. Exemple de graphe orienté avec poids positifs sur les arcs.

Au cours de l'algorithme, on maintient un ensemble  $U \subseteq V$  et une fonction  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On dit que  $\lambda(v)$  est le *label* courant de  $v$ . Ce label est la meilleure évaluation courante du poids du plus court chemin de  $s$  à  $v$ . On commence avec  $U := V$  et  $\lambda(s) := 0$  et  $\lambda(v) := +\infty$  pour  $v \neq s$ . Ensuite, on répète la chose suivante de manière itérative :

Choisir  $u$  minimisant  $\lambda(u)$  pour  $u \in U$ . Pour chaque  $(u, v) \in \delta^+(u)$  tel que  $\lambda(v) > \lambda(u) + w(u, v)$ , redéfinir  $\lambda(v) := \lambda(u) + w(u, v)$ . Redéfinir  $U := U \setminus \{u\}$ .

On s'arrête lorsque  $\lambda(u) = +\infty$  pour tout  $u \in U$ . La fonction  $\lambda$  donne alors les distances de  $s$  à tout sommet que l'on peut atteindre en partant de  $s$ . Les sommets dans  $U$  à la fin de l'algorithme sont ceux qui ne peuvent être atteints depuis  $s$ .

De plus, si pour chaque  $v \neq s$ , on garde en mémoire le dernier arc  $a = (u, v)$  pour lequel on a redéfini  $\lambda(v) := \lambda(u) + w(a)$ , on peut reconstruire l'ensemble des plus courts chemins partant de  $s$ .

Il est clair que le nombre d'itérations est au plus  $|V|$ , et chaque itération prend un temps  $O(n)$ . L'algorithme a donc une fonction de complexité qui est en  $O(n^2)$ . D'où le théorème :

**Théorème 3.1.1.** — *Etant donné un graphe orienté  $D = (V, A)$ , un sommet  $s \in V$  et une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ , un ensemble de plus courts chemins de  $s$  à tout sommet  $v \in V$  peut être calculé en  $O(n^2)$ .*

*Éléments de preuve.* — Pour démontrer le théorème, il faut simplement voir que lorsque  $u$  est retiré de  $U$  dans l'itération au-dessus,  $\lambda(u)$  est la vraie distance de  $s$  à  $u$  (la preuve de cette assertion est laissée en exercice). □

*Remarque.* — En utilisant de bonnes structures de données, il est possible d'obtenir une complexité de  $O(m + n \log n)$ .

**Exemple.** — En appliquant l’algorithme de Dijkstra sur la Figure 1, on obtient le tableau suivant indiquant les valeurs successives de  $\lambda$  pour chaque sommet.

$s$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$t$
(0)	( $\infty$ )						
0	(3)	( $\infty$ )	( $\infty$ )	(3)	( $\infty$ )	(5)	( $\infty$ )
0	3	(5)	( $\infty$ )	(3)	( $\infty$ )	(5)	( $\infty$ )
0	3	(4)	( $\infty$ )	3	( $\infty$ )	(5)	( $\infty$ )
0	3	4	(5)	3	( $\infty$ )	(5)	( $\infty$ )
0	3	4	5	3	(8)	(5)	( $\infty$ )
0	3	4	5	3	(7)	5	(12)
0	3	4	5	3	7	5	(9)
0	3	4	5	3	7	5	9

**3.1.2. Les poids sont quelconques mais le graphe est sans circuit.** — On considère maintenant le cas où les poids peuvent prendre des valeurs négatives, mais où le graphe est sans circuit, ou *acircuitique*. Lorsqu’on voit le problème du plus court chemin comme la modélisation d’un plus court chemin dans un réseau physique, cela peut paraître surprenant puisque les temps de parcours ou les distances de portion de réseau sont toujours positifs. Mais dans de nombreux cas le graphe dont on cherche un plus court chemin est issu d’une modélisation et les poids ne correspondent pas à des distances ou des temps qui s’écoulent. Noter que dans ce cas, les notions de plus court chemin, plus court chemin simple et plus court chemin élémentaire coïncident, puisqu’il n’y a pas de circuit. Donc de même que dans le cas où tous les  $w(a)$  sont positifs, il existe toujours un plus court chemin qui soit élémentaire.

Considérons donc maintenant le cas du graphe orienté  $D = (V, A)$  acircuitique, avec une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

L’algorithme de Dijkstra ne fonctionne plus lorsque les poids peuvent être négatifs. En effet, l’invariant de boucle qui fait fonctionner l’algorithme de Dijkstra est le fait que le minimum de  $\lambda(u)$  pour  $u$  dans le  $U$  courant est la vraie distance de  $s$  à  $u$ . Ce qui justifie que l’on retire  $u$  de  $U$ . Or si les poids peuvent être négatifs, il est facile de voir que cette propriété n’est plus vraie.

A la fin des années 50, des mathématiciens comme Ford, Bellman, Moore, et d’autres, remarquèrent que dans ce contexte, un algorithme très simple permet de trouver le plus court chemin.

Pour décrire cet algorithme, définissons pour  $v \in V$  :

$$\lambda(v) := \text{poids minimum d'un } s\text{-}v \text{ chemin,}$$

posant  $\lambda(v) := \infty$  si un tel chemin n’existe pas.

L’algorithme est une traduction de l’équation de Bellman qui dit

$$(2) \quad \lambda(v) = \min_{(u,v) \in A} (\lambda(u) + w(u, v))$$

pour tout  $v \in V$ . Cette équation peut être lue de la manière suivante :

Le plus court chemin de  $s$  à  $v$  est le plus court chemin de  $s$  à  $u$ , où  $u$  est un antécédent de  $v$ , auquel on a ajouté le dernier arc  $(u, v)$ .

En fait, de façon un peu plus compacte, on a le principe suivant qui implique ce qui précède

[Principe d’optimalité de Bellman] La sous-trajectoire d’une trajectoire optimale est encore optimale.

L'équation (2) se traduit facilement en un algorithme. On commence par poser  $\lambda(s) := 0$  et  $\lambda(u) := \infty$  pour tout  $u$  tel qu'il n'existe pas de  $s$ - $u$  chemin. Ensuite, on répète la boucle suivante

Chercher un sommet  $v$  dont on connaît  $\lambda$  pour tous les prédécesseurs (on peut démontrer que, puisque le graphe est acircuitique, un tel sommet existe toujours). L'équation (2) permet de calculer  $\lambda(v)$ .

On s'arrête lorsque  $\lambda$  aura été calculé pour tous les sommets.

Remarquons qu'il n'est pas difficile de reconstruire le plus court chemin : en même temps que  $\lambda(v)$ , on peut stocker  $p(v)$  qui est le sommet  $u$  antécédent de  $v$  qui a permis d'obtenir le poids  $\lambda(v)$ . Comme pour l'algorithme de Dijkstra, on récupère ainsi un plus court chemin de  $s$  à  $v$ , pour tout  $v \in V$ .

**Théorème 3.1.2.** — *Etant donné un graphe acircuitique  $D = (V, A)$  et une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ , un ensemble de plus courts chemins de  $s$  à tout sommet  $v \in V$  peut être calculé en  $O(m)$ .*

L'outil central de l'algorithme qui sous-tend ce théorème est l'ordre topologique. Un *ordre topologique* des sommets d'un graphe orienté  $D = (V, A)$  est une indexation  $v_1, v_2, \dots, v_n$  des sommets de  $D$  telle que pour tout  $i, j$  tels que  $(v_i, v_j) \in A$  on ait  $i < j$ . Un graphe orienté admet un ordre topologique si et seulement si il est acircuitique. On peut alors trouver un ordre topologique en  $O(m)$  avec l'algorithme suivant.

*Scanner* un sommet consiste à « ouvrir » le sommet, scanner ses successeurs puis « fermer » le sommet (définition récursive, consistante puisque le graphe est sans circuit). On choisit un sommet  $s$  sans prédécesseur. On scanne  $s$ . L'ordre opposé à celui dans lequel on « ferme » les sommets est un ordre topologique.

En effet, s'il y a un arc de  $u$  à  $v$ , alors  $v$  sera « fermé » avant  $u$  et son indice sera plus grand que celui de  $u$ .

*Preuve du Théorème 3.1.2.* — Pour prouver ce théorème, il faut montrer que l'on peut trouver en  $O(m)$  un ordre  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sur les sommets de  $D$  tel que tous les antécédents de  $v_i$  ont un indice  $< i$ , ce qui assure que l'on peut toujours calculer  $\lambda(v_i)$  une fois calculés les  $\lambda(v_j)$  pour  $j < i$ . Or, c'est l'ordre n'est rien d'autre qu'un ordre topologique.  $\square$

*Remarque.* — Dans le cas acircuitique, on sait en particulier trouver un plus long chemin d'une origine  $s$  à une destination  $t$  : en effet, en définissant des poids  $w'(a) := -w(a)$ , on voit que le même algorithme fonctionne (en gardant les mêmes poids, il suffit de changer les min en max).

**3.1.3. Programmation dynamique.** — Un cas particulier important est celui de la *programmation dynamique* qui traite de situations où les décisions peuvent ou doivent être prises de manière séquentielle. Ce qui caractérise la programmation dynamique<sup>(1)</sup> est la présence

1. un système dynamique à temps discret caractérisé par un ensemble  $X_k$  d'états possibles à l'instant  $k$  et
2. une fonction de coût additive dans le temps.

---

1. On se limite au cas déterministe discret.

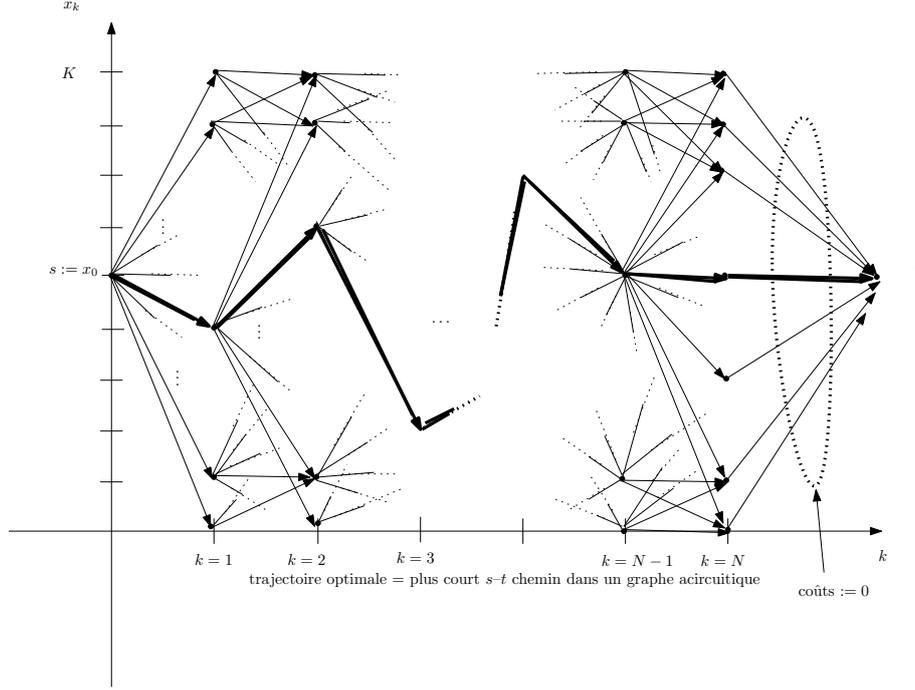


FIGURE 2. La programmation comme problème de plus court chemin.

Le système dynamique décrit l'évolution de l'état du processus au fil de  $N$  périodes et a la forme

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

où  $k$  numérote les périodes et où  $x_k \in X_k$  est l'état du système au début de la période  $k$ . Passer de  $x_k$  à  $x_{k+1}$  s'appelle une *transition*. On a de plus un coût  $c(x_k, x_{k+1})$  pour toute transition de l'état  $x_k$  à l'état  $x_{k+1}$ . Ces coûts s'additionnent au fil des périodes et pour la *trajectoire* complète  $x_1, \dots, x_N$ , on a un coût total de

$$\sum_{k=1}^N c(x_k, x_{k+1}).$$

Le problème de la programmation dynamique consiste à trouver la trajectoire optimale, i.e. minimisant le coût total.

Ce problème de la programmation dynamique se modélise très bien comme celui du plus court chemin dans un graphe orienté, pondéré et sans circuit. En effet, pour chaque période  $k$ , on représente les états possibles par des sommets. Les transitions possibles sont des arcs. Le coût de la transition  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  est le poids de l'arc  $(x_k, x_{k+1})$ . Noter que ce graphe est sans circuit (ou *acircuitique*) : en effet, un arc va toujours d'un état de période  $k$  à un état de période  $k+1$ . En ajoutant des états de départ  $s$  et d'arrivée  $t$ , on va chercher le chemin de  $s$  à  $t$  qui a le plus petit poids. Voir Figure 2.

Si on définit

$\lambda(k, x) :=$  coût minimum de la trajectoire allant de l'état de départ  $s$  à l'état  $x$  en  $k$  étapes, posant  $\lambda(k, x) := +\infty$  s'il n'est pas possible d'amener le système dans l'état  $x$  en  $k$  étapes, l'équation de Bellman (2) se réécrit

$$(3) \quad \lambda(k, x) = \min_{y \in X_{k-1}} (\lambda(k-1, y) + c(y, x)).$$

Cette équation permet de calculer de proche en proche les valeurs de  $\lambda(k, x)$  : à l'itération  $k$ , on calcule tous les  $\lambda(k, x)$  pour  $x \in X_k$ , en utilisant les valeurs  $\lambda(k-1, x)$  calculées à l'itération  $k-1$ . En voyant ce calcul comme un calcul de plus court chemin dans un graphe acircuitique (Section 3.1.2), cela revient à dire qu'un ordre topologique est donné facilement par le découpage temporel.

Remarquons enfin que tout graphe orienté acircuitique n'est pas issu d'une modélisation d'un système dynamique. En effet, un graphe modélisant un processus de programmation dynamique a tous ses chemins de  $s$  à  $t$  ayant le même nombre d'arcs, à savoir  $N$ .

Venons-en maintenant à quelques exemples de modélisation par la programmation dynamique.

**Exemple : Gestion de stock.** — Considérons le problème de la gestion d'un stock pour  $N$  périodes consécutives.

Un stock suit une dynamique de la forme  $x_{k+1} = x_k - d_k + u_k$ , où  $d_k$  désigne la demande pour la période  $k$ , supposée connue,  $x_k$  désigne le nombre d'unités disponibles en début de  $k$ ème période et  $u_k$  désigne le nombre d'unités commandées (et reçues immédiatement) en début de  $k$ ème période. On prendra  $x_k \in \mathbb{Z}$ , une quantité négative signifiant une pénurie. De plus, on a en général l'existence d'une capacité maximale de stockage  $K$  qui implique que  $x_k \leq K$ . On supposera  $x_0$  fixé.

Les coûts de gestion de stock se décomposent pour chaque période  $k$  en

- un coût de réapprovisionnement  $c(u_k)$ , c'est-à-dire le coût d'achat des  $u_k$  unités, et
- un coût de gestion  $g(x_{k+1})$ , qui comprend le coût de stockage des unités en excès en fin de période et le coût de pénurie si la demande ne peut être totalement satisfaite sur la période.

Typiquement, on a  $c(u) = b + au$ , où  $a$  est un coût unitaire d'achat et  $b$  un coût fixe et

$$g(x) = \begin{cases} sx & \text{si } x \geq 0 \\ px & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

où  $s$  est le coût unitaire de stockage et  $p$  le coût unitaire de défaillance. Si on veut interdire les stocks négatifs, on pose  $p = +\infty$ .

On veut minimiser

$$\sum_{k=0}^{N-1} c(u_k) + g(x_{k+1}).$$

Dans le vocabulaire de la programmation dynamique, les états sont les valeurs possibles de niveau de stock, les transitions possibles sont tous les  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  tels que  $x_{k+1}$  satisfasse simultanément  $x_{k+1} \in \mathbb{Z}$ ,  $x_{k+1} \leq K$  et  $x_{k+1} \geq x_k - d_k$ . Le coût de la transition  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  est  $c(x_{k+1} - x_k + d_k) + g(x_{k+1})$ . On souhaite donc trouver la trajectoire optimale pour ce modèle de programmation dynamique.

On applique l'algorithme de plus court chemin dans le graphe acircuitique suivant. Pour chaque période  $k$ , on aura un sommet pour chaque niveau de stock possible (inférieur à  $K$  et supérieur à  $x_0 - d_0 - d_1 - \dots - d_{k-1}$ ) en début de période. On notera un tel sommet  $(x, k)$ , où  $x$  est le niveau de stock, et  $k$  la période. Entre un sommet de période  $k$  et un sommet de période  $k+1$ , on a un arc  $((x, k), (x', k+1))$  seulement si  $x' \geq x - d_k$ . Le poids de l'arc  $((x, k), (x', k+1))$  est égal à  $c(x' - x + d_k) + g(x')$ . On cherche un plus court chemin de  $(x_0, 0)$  à un sommet de la forme  $(x, N)$ . Le poids de ce plus court chemin sera le coût optimal de la gestion du stock.

**Exemple : Remplissage d'un conteneur ou problème du sac-à-dos.** — Considérons un assortiment de  $N$  objets  $k = 1, \dots, N$ , l'objet  $k$  ayant une valeur  $c_k \geq 0$  et un volume  $a_k > 0$ , et supposons que l'on ait à stocker ces objets dans un conteneur de volume fini  $W$ . Si  $\sum_{k=1}^N a_k > W$ ,

on va devoir sélectionner des objets afin de maximiser la valeur des objets stockés. Ce problème est connu sous le nom du *problème du sac-à-dos*, car le conteneur est vu comme un sac-à-dos avec lequel on veut transporter des objets de plus grand valeur totale, sous des contraintes de capacité. On note  $x(j, W')$  la valeur maximale qui peut être transportée dans un sac de capacité  $W'$ , en ne se servant que des  $j$  premiers objets.

On a l'équation (programmation dynamique)

$$x(j, W') = \max(x(j-1, W'), x(j-1, W' - w_j) + c_j)$$

qui se lit : le remplissage optimal  $x(j, W')$  d'un sac de capacité  $W'$ , avec les objets de 1 à  $j$ ,

- soit n'utilise pas le  $j$ ème objet, et dans ce cas  $x(j, W') = x(j-1, W')$
- soit utilise le  $j$ ème objet, et dans ce cas  $x(j, W') = x(j-1, W' - w_j) + c_j$ .

La complexité de l'algorithme est :  $O(nW)$ . En effet, il faut calculer tous les  $x(j, W')$  qui sont au nombre de  $nW$ , et une fois calculés  $x(j-1, W')$  et  $x(j-1, W' - w_j)$ , la quantité  $x(j, W')$  se calcule en temps constant. Ce n'est pas polynomial car  $W$  nécessite  $\log_2(W)$  bits pour être codés. On dit que c'est un algorithme *pseudo-polynomial*.

### 3.1.4. Les poids sont quelconques, mais le graphe est sans circuit absorbant : encore la programmation dynamique.

— Supposons maintenant que l'on se demande comment calculer un plus court chemin dans un graphe orienté pondéré, non nécessairement acircuitique. C'est encore possible si le graphe ne possède pas de *circuit absorbant*, i.e. de circuit dont la somme des poids est  $< 0$ . Ce cas contient les deux cas précédents (graphe avec poids  $\geq 0$  et graphe acircuitique). Noter qu'une fois encore, il existe toujours un plus court chemin qui soit un chemin élémentaire car si le plus court chemin passe par un circuit, on peut supprimer ce circuit sans détériorer le poids du chemin.

En fait, pour calculer un plus court chemin dans un graphe sans circuit absorbant, on peut appliquer la méthode de la programmation dynamique vue ci-dessus.

On considère que les états sont les sommets ( $X_k = V$ ) et qu'à chaque instant on traverse un arc. Le coût de la transition  $u \rightarrow v$ , c'est  $w(u, v)$  si  $(u, v) \in A$ , et  $+\infty$  sinon. Avec les notations de la programmation dynamique,  $\lambda(k, v)$ , c'est donc le poids minimal d'un  $s$ - $v$  chemin comportant exactement  $k$  arcs.

L'algorithme sera une traduction de l'équation de la programmation dynamique ou *équation de Bellman*

$$(4) \quad \lambda(k, v) = \min_{(u,v) \in A} (\lambda(k-1, u) + w(u, v))$$

pour tout  $v \in V$ . Cette équation peut être lue de la manière suivante :

Le plus court chemin de  $s$  à  $v$  utilisant  $k$  arcs est le plus court chemin de  $s$  à un certain antécédent  $u$  de  $v$ , utilisant  $k-1$  arcs, chemin auquel on a ajouté le dernier arc  $(u, v)$ .

En utilisant l'algorithme de la programmation dynamique, on calcule donc les  $\lambda(k, v)$  de proche en proche, en augmentant progressivement  $k$ . Il est inutile de considérer le cas  $k > n$ , où  $n$  est le nombre de sommets, car l'absence de circuit absorbant garantit l'existence d'un chemin de poids minimal qui soit sans circuit. En effet, supprimer un circuit dans un chemin fait diminuer son poids total. Puisqu'un chemin sans circuit a moins d'arcs qu'il y a de sommets dans le graphe, on peut dérouler l'algorithme de programmation dynamique en s'arrêtant au calcul des  $\lambda(n-1, v)$ , pour  $v \in V$ .

Une fois tous les  $\lambda(k, v)$  calculés pour  $k = 0, \dots, n - 1$  et pour  $v \in V$ , le poids minimal d'un  $s$ - $t$  chemin pour un sommet  $t$  donné est obtenu en cherchant le  $k$  minimisant  $\lambda(k, t)$ .

Remarquons qu'il n'est pas difficile de reconstruire le plus court chemin : en même temps que  $\lambda(k, v)$ , on peut stocker  $p_k(v)$  qui est le sommet qui a permis d'obtenir le poids  $\lambda(k, v)$ . Comme ci-dessus, on récupère ainsi un plus court chemin de  $s$  à  $v$  pour tout  $v \in V$ .

**Théorème 3.1.3.** — *Etant donné un graphe  $D = (V, A)$  et une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il n'y ait pas circuit absorbant, un ensemble de plus courts chemins de  $s$  à tout sommet  $v \in V$  peut être calculé en  $O(nm)$ .*

**Remarque :** En utilisant des techniques totalement différentes [12], on peut obtenir une complexité de  $O(n^{1/2}m \log C)$  où  $C$  est la valeur absolue du plus petit poids négatif (en supposant que  $C \geq 2$ ).

**3.1.5. Les poids sont quelconques.** — Dans le cas général, il n'y a pas d'algorithme polynomial qui trouve un plus court chemin élémentaire. Rappelons qu'un chemin élémentaire est un chemin dans lequel chaque sommet apparaît au plus une fois. Si l'on ne se restreint pas au chemin élémentaire, le problème peut ne pas avoir de solution : en effet, en faisant passer un chemin par un circuit absorbant, on peut répéter un nombre arbitraire de fois le passage sur le circuit absorbant et décroître le coût autant qu'on le souhaite.

Considérons le problème

### Problème du plus court chemin élémentaire

**Donnée :** Un graphe orienté  $D = (V, A)$ , une fonction de poids  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ , deux sommets  $s \in V$  et  $t \in V$ .

**Tâche :** Trouver un plus court chemin élémentaire de  $s$  à  $t$ .

On a le théorème suivant dont la preuve est laissée en exercice.

**Théorème 3.1.4.** — *Le problème du plus court chemin élémentaire avec des poids quelconques, dans un graphe orienté quelconque, est NP-difficile.*

## 3.2. Cas du graphe non-orienté

**3.2.1. Les poids sont positifs : toujours l'algorithme de Dijkstra.** — Considérons un graphe (non-orienté)  $G = (V, E)$ , avec une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Supposons fixés deux sommets  $s$  et  $t$ . On veut trouver la plus courte chaîne de  $s$  à  $t$ . Remarquons que le raisonnement fait précédemment s'applique encore : on sait qu'il existe une chaîne élémentaire de même poids que la chaîne de plus petit poids puisqu'on peut supprimer les cycles d'une chaîne de plus petit poids (ces cycles sont alors forcément de poids nul).

L'algorithme de Dijkstra permet encore de résoudre le problème : en effet, il suffit de remplacer chaque arête  $uv$  du graphe par deux arcs  $(u, v)$  et  $(v, u)$  et de mettre sur chacun d'eux le poids de l'arête  $uv$ . Voir Figure 3. Un plus court chemin dans ce graphe orienté induit alors une plus courte chaîne dans le graphe de départ et réciproquement.

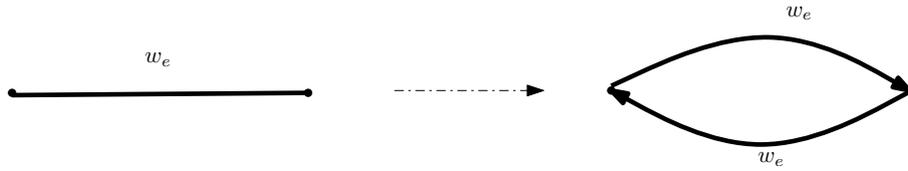


FIGURE 3. Une transformation qui fait apparaître des circuits.

**3.2.2. Les poids sont quelconques, mais sans cycle absorbant.** — Il peut être tentant de vouloir refaire la même transformation que dans la sous-section précédente, à savoir de remplacer chaque arête par deux arcs de sens opposés, chacun recevant le poids de l'arête dont ils sont issus. Le problème, c'est que dans cette transformation, on fait apparaître quantité de circuits absorbants : toute arête de poids  $< 0$  induit un circuit absorbant à deux arcs. Les algorithmes de style programmation dynamique ne peuvent pas appliquer. Il n'y a pas de raison particulière de penser que ce problème soit **NP**-difficile car le problème qui est **NP**-difficile est celui où l'on accepte des circuits absorbants avec un nombre d'arcs non borné. Ici nos circuits absorbants ont deux arcs seulement.

En fait, il y a bien un algorithme polynomial mais curieusement elle provient d'un tout autre domaine de l'optimisation discrète et nous en reparlerons dans le chapitre sur les tournées (Chapitre 11). L'outil dont on a besoin est le *T-joint* qui apparaît naturellement dans les problèmes de tournée du style « facteur ». Avec cet outil, on peut trouver une plus courte chaîne élémentaire en  $O(n^3)$ .

**3.2.3. Les poids sont quelconques.** — Dans le cas général, le problème est à nouveau **NP**-difficile.

Considérons le problème

### Problème de la plus courte chaîne élémentaire

**Donnée :** Un graphe  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , deux sommets  $s \in V$  et  $t \in V$ .

**Tâche :** Trouver une plus courte chaîne élémentaire de  $s$  à  $t$ .

On a le théorème suivant.

**Théorème 3.2.1.** — *Le problème de la plus courte chaîne élémentaire avec des poids quelconques, dans un graphe quelconque, est **NP**-difficile.*

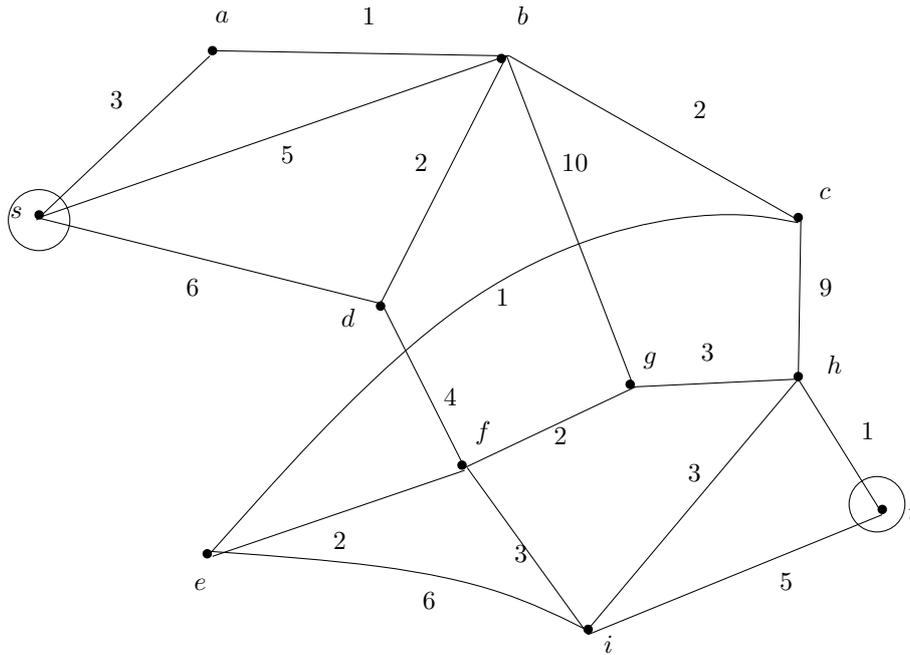


FIGURE 4. On cherche la plus courte chaîne de  $s$  à  $t$ .

### 3.3. Résumé

	Complexité
Graphe orienté, poids positifs	$O(n^2)$ (Dijkstra) <sup>(1)</sup>
Graphe orienté, poids quelconques, acircuitique	$O(m)$ (Programmation dynamique)
Graphe orienté, poids quelconques, sans circuit absorbant	$O(nm)$ (Programmation dynamique, algorithme de Ford-Bellman) <sup>(2)</sup>
Graphe orienté, poids quelconques	<b>NP-difficile</b>
Graphe non-orienté, poids positifs	$O(n^2)$ (Dijkstra) <sup>(1)</sup>
Graphe non-orienté, poids quelconques, pas de cycle absorbant	$O(n^3)$ (voir Chapitre 11)
Graphe non-orienté, poids quelconques	<b>NP-difficile</b>

### 3.4. Exercices

**3.4.1. Plus court chemin.** — Trouver la plus courte chaîne de  $s$  à  $t$  dans le graphe de la Figure 3.4.1 et le plus court chemin de  $s$  à  $t$  dans le graphe de la Figure 3.4.2.

**3.4.2. Problème du goulot.** — Soit  $N$  un réseau (de gaz par exemple) modélisé par un graphe orienté. Une origine  $o$  et une destination  $d$  sont données. Pour chaque arc, on dispose d'une capacité  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . La *capacité* d'un chemin est le minimum des capacités de ses arcs. Proposer un algorithme efficace qui trouve la capacité maximale d'un chemin de  $o$  à  $d$ .

1. On peut atteindre, avec les bonnes structures de données,  $O(m + n \log n)$ .

2. On peut atteindre avec des techniques différentes  $O(n^{1/2}m \log C)$ .

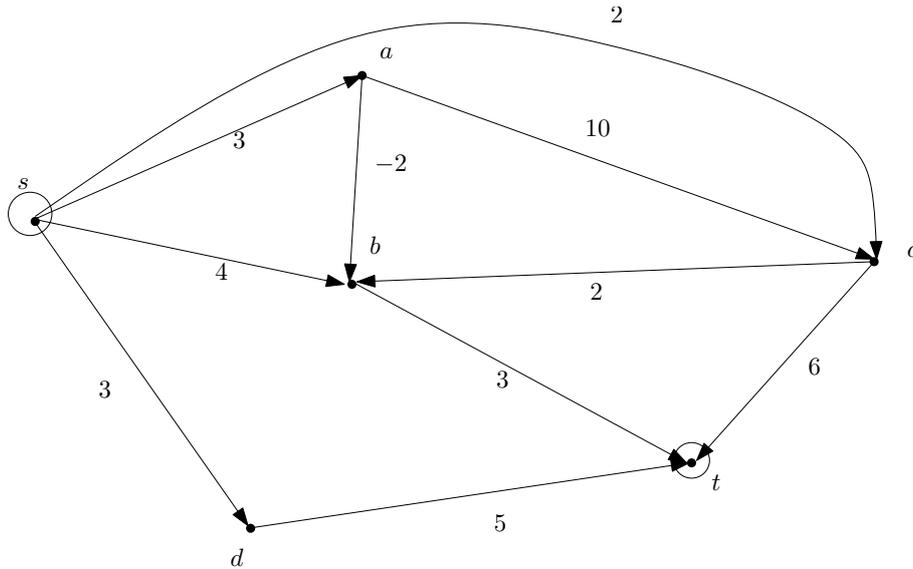


FIGURE 5. On cherche le plus court chemin de  $s$  à  $t$ .

**3.4.3. Gestion de stock.** — Un stock suit une dynamique  $x_{k+1} = x_k - d_k + u_k$ , avec  $x_1 = 2$

et  $\begin{array}{c|c|c|c} k & 1 & 2 & 3 \\ \hline d_k & 3 & 2 & 4 \end{array}$

La quantité  $d_k$  est la demande pour la période  $k$  (supposée connue).  $x_k \in \mathbb{N}$  est nombre d'unités disponibles en début de période  $k$ .  $u_k$  est le nombre d'unités commandées (et reçues immédiatement) en début de période  $k$ . On a une capacité maximale de stockage de 6, i.e que l'on doit toujours avoir  $x_k + u_k \leq 6$  (ou de manière équivalente  $x_{k+1} + d_k \leq 6$ ).

Le coût de gestion de stock pour la période  $k$  se décompose en un coût d'approvisionnement et un coût de stockage et s'écrit  $4u_k + 3 + x_{k+1}$  si  $u_k \neq 0$  et  $x_{k+1}$  sinon.

Trouver la stratégie qui minimise le coût total de la gestion du stock.

**3.4.4. Problème du sac-à-dos.** — Un bateau peut transporter une cargaison formée à partir de  $N$  conteneurs. Le poids total ne doit pas dépasser  $W$ . Le  $k$ ième conteneur pèse  $w_k$  et son transport rapporte  $c_k$ . On veut déterminer un chargement qui maximise le bénéfice. Montrer que ce problème est un problème de sac-à-dos. Le résoudre sur les données  $W = 6$  et

	Conteneurs		
	1	2	3
Bénéfice $c_k$	9	2	8
Poids $w_k$	5	3	2

Même question avec le tableau suivant,  $W = 13$  et avec la possibilité de prendre autant de conteneurs de type  $k$  que l'on veut.

	Conteneurs		
	1	2	3
Bénéfice $c_k$	12	25	50
Poids $w_k$	4	5,5	6,5

**3.4.5. Remplacement de machine.** — Une entreprise vient de faire l'acquisition d'une machine neuve, dont elle a besoin pour assurer son bon fonctionnement pour les cinq années à venir. Une telle machine a une durée de vie de trois ans. A la fin de chaque année, l'entreprise peut

décider de vendre sa machine et d'en racheter une neuve pour 100 000€. Le bénéfice annuel assuré par la machine est noté  $b_k$ , son coût de maintenance  $c_k$  et son prix de revente  $p_k$ . Ces quantités dépendent de l'âge  $k$  de la machine et sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

$k$	Age $k$ de la machine en début d'année		
	0	1	2
$b_k$	80 000€	60 000€	30 000€
$c_k$	10 000€	14 000€	22 000€
$p_k$	50 000€	24 000€	10 000€

Proposer la stratégie de remplacement de la machine maximisant le profit de l'entreprise, sachant qu'à la fin de ces cinq années elle n'aura plus besoin de la machine.

**3.4.6. Problème d'investissement - d'après Hêche, Liebling et de Werra [6].** — Une entreprise dispose d'un budget de 500 000€ pour l'amélioration de ses usines pendant l'année à venir. L'entreprise possède trois sites de production dont les bénéfices annuels espérés, en fonction de la somme investie pour leur amélioration, sont données dans le tableau suivant.

Sites	Montants investis (en centaines de milliers d'euros)					
	0	1	2	3	4	5
	Bénéfices annuels					
1	1	3	4	5	5,5	6
2	0,5	2,5	4	5	6	6,5
3	2	4	5,5	6,5	7	7,5

**3.4.7. Un problème d'intérimaires.** — Une entreprise a une tâche à réaliser, qui va prendre 5 mois. Pour chaque mois, elle a besoin des nombres suivants d'intérimaires en plus de ses salariés.

Mois	Nombre d'intérimaires
1	10
2	7
3	9
4	8
5	11

Embaucher un intérimaire coûte 800€ (embauche + formation). La fin d'une embauche coûte 1200€. Enfin, le coût mensuel d'un des ces intérimaires est de 1600€ (salaire + charges). Trouver la stratégie de recrutement qui minimise les coûts.

**3.4.8. Livraisons avec fenêtres de temps : cas linéaire.** — Supposons qu'un camion ait à livrer des points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tous situés sur une droite. Pour chaque point  $x_i$ , on connaît l'instant le plus tard  $d_i$  où la livraison peut se faire. Le camion se situe au départ en un point  $x_0$ , et veut terminer sa tournée au plus tôt. Le camion n'a pas à retourner à son point de départ. De plus, on suppose que la livraison en chaque point se fait de manière instantanée, et que le temps pour aller de  $x_i$  à  $x_j$  est proportionnel à la distance les séparant. Montrer que l'on peut trouver la tournée optimale en  $O(n^2)$  par un algorithme de type programmation dynamique (c'est un résultat de Tsitsiklis).

**3.4.9. Biologie : plus long sous-mot commun.** — Un mot  $w$  sur un alphabet  $\Sigma$  est une suite finie  $w_1 w_2 \dots w_n$  d'éléments de  $\Sigma$ . La quantité  $n$  est appelé *longueur* du mot  $w$ . On dit qu'un mot  $w' = w'_1 \dots w'_{n'}$  de longueur  $n'$  est un *sous-mot* de  $w$  s'il existe une application  $f$  strictement

croissante de  $\{1, 2, \dots, n'\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que  $w'_i = w_{f(i)}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n'\}$ . En d'autres termes, en effaçant des lettres de  $w$ , on peut obtenir  $w'$ . Par exemple :  $ABC$  est un sous-mot de  $AEBBAC$ , mais n'est pas un sous-mot de  $AECAB$ .

On se donne deux mots  $w_1$  et  $w_2$  sur un alphabet  $\Sigma$ . On cherche leur sous-mot commun  $w'$  le plus long. Montrer que c'est un problème de type programmation dynamique, et qu'il peut se résoudre en  $O(n_1 n_2)$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont les longueurs de  $w_1$  et de  $w_2$ .

Ce problème a des applications en biologie, lorsque on veut évaluer la "distance" séparant deux brins d'ADN.

**3.4.10. Déplacement de wagonnet dans un mine souterraine avec contrainte d'orientation.** — Les mines souterraines sont souvent dotées d'un réseau ferré souterrain sur lequel circulent des wagonnets. Ces derniers servent essentiellement à évacuer la roche sans valeur extraite lors des forages. Un wagonnet récupère la roche dans sa benne en un point d'extraction et se déplace le long du réseau, jusqu'à atteindre un point d'évacuation. Un wagonnet peut se déplacer en avant ou en arrière, mais la benne se trouve à l'avant. Cela signifie que lorsque le wagonnet arrive en un point d'extraction ou un point d'évacuation, il faut impérativement qu'il arrive en marche avant, les demi-tours étant impossibles. L'objectif de ce problème est de proposer une méthode qui trouve les trajets les plus courts satisfaisant cette contrainte additionnelle. On se limite au cas à un seul wagonnet (dans le problème réel, la question de la congestion induite par les autres wagonnets se pose également).

La Figure 6 représente un tel réseau souterrain. Un wagonnet ne peut suivre que des trajectoires  $\mathcal{C}^1$  (pas de changement d'orientation discontinu) ou faire des marches arrière. La Figure 7 reprend ce réseau et met en exergue quelques points. L'enchaînement

$$A \rightarrow B \rightarrow G$$

est impossible car l'orientation du wagonnet changerait brusquement en  $B$ . En revanche, l'enchaînement

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$$

est possible.

Concernant l'orientation du wagonnet, l'enchaînement

$$H \rightarrow I \rightarrow J,$$

également possible, fait changer l'orientation du wagonnet : s'il se déplaçait en marche avant en  $H$ , il se déplace en marche arrière en  $J$ .

1. Est-il possible pour le réseau de la Figure 6 de passer de n'importe quel point de réseau à n'importe quel autre ? Peut-on de plus le faire avec les orientations du wagonnet au départ et à l'arrivée imposées ? Justifier brièvement vos réponses.

2. Considérons le graphe dont les sommets sont les tronçons, et les arêtes les enchaînements possibles entre les tronçons. La construction est explicitée sur la Figure 8. Oublions momentanément l'orientation. Quitte à modifier un peu le graphe, expliquer comment utiliser ce graphe pour trouver le plus court trajet entre deux points particuliers du réseau.

3. Montrer que, en introduisant une copie de ce graphe et au prix de quelques transformations, on peut de plus trouver le plus court trajet entre deux points avec les orientations du wagonnets au départ et à l'arrivée imposées.

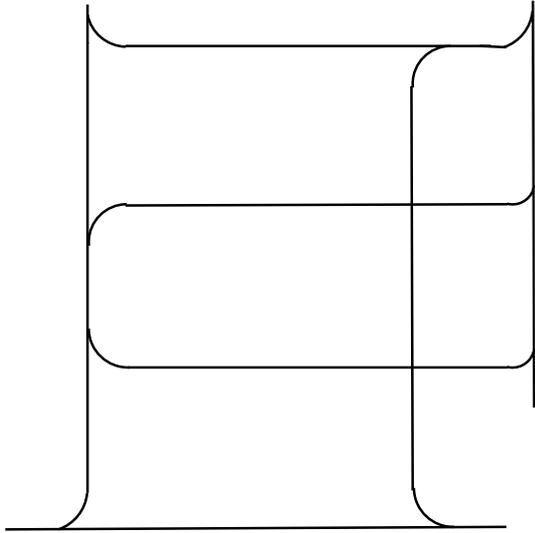


FIGURE 6. Un exemple de réseau souterrain

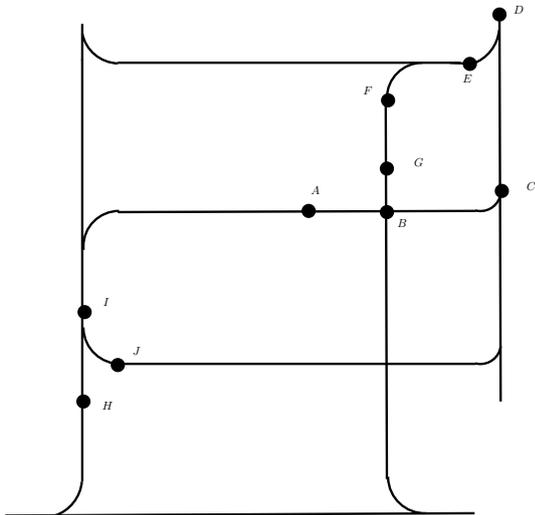


FIGURE 7. Quelques points explicités dans le réseau de la Figure 6

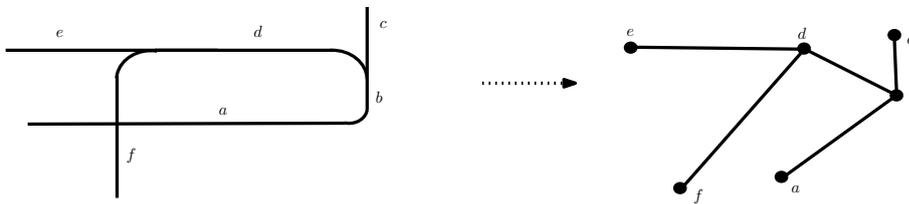


FIGURE 8. Illustration de la construction du graphe de la question 2.

**3.4.11. Intervalles disjoints et locations rentables.** — On suppose donnée une collection finie  $\mathcal{C}$  d'intervalles fermés bornés de la droite réelle. On dispose d'une application poids  $w : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que l'on sait trouver le sous-ensemble d'intervalles de  $\mathcal{C}$  deux à deux disjoints de poids maximal en temps polynomial (indication : construire un graphe orienté acircuitique pondéré).

2. Application : Vous êtes chargé de la location d'un appartement. Vous connaissez un ensemble de demandes, chacune d'entre elles étant caractérisée par un instant de début, un instant de fin et le gain qu'apporterait la satisfaction de cette demande. Montrez que grâce à la question 1., on sait proposer une stratégie rapide maximisant le gain total de la location de l'appartement.



## CHAPITRE 4

### PROGRAMMATION LINÉAIRE

#### 4.1. Définition et exemples

Un programme linéaire est un programme qui peut s'écrire sous la forme (*forme inéquationnelle*)

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{array}$$

où  $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  et où  $A$  est une  $m \times n$  matrice réelle.

La programmation linéaire est peut-être le cas particulier de programmation mathématique, i.e. d'optimisation d'une fonction sous contrainte, le plus fréquemment rencontré dans l'industrie. Beaucoup de problèmes se modélisent comme des programmes linéaires, bien plus de problèmes encore font appel à la programmation linéaire pour résoudre des sous-problèmes qui mis bout-à-bout permettent la résolution du problème de départ.

**Exemple.** — Commençons par un exemple de problème de production dans l'agro-alimentaire<sup>(1)</sup>. Supposons que l'on dispose d'une grande surface cultivable sur laquelle il est possible de faire pousser des navets ou des courgettes. Le coût des semences est considéré comme négligeable. On dispose de deux types d'engrais X et Y, ainsi que d'un anti-parasite AP. Le besoin en engrais et en anti-parasite pour les courgettes et pour les navets est synthétisé dans le tableau suivant.

	Engrais X	Engrais Y	Anti-parasite AP
Courgettes	2 l.m <sup>-2</sup>	1 l.m <sup>-2</sup>	0 l.m <sup>-2</sup>
Navets	1 l.m <sup>-2</sup>	2 l.m <sup>-2</sup>	1 l.m <sup>-2</sup>

On dispose comme ressource de 8 l d'engrais X, de 7 l d'engrais Y et de 3 l d'anti-parasite AP.

On peut s'attendre à une productivité de 4 kg.m<sup>-2</sup> pour les courgettes et de 5 kg.m<sup>-2</sup> pour les navets, et à un gain de 1€·kg<sup>-1</sup> tant pour les courgettes que pour les navets.

Quel est le gain maximum qui peut être fait compte tenu des ressources disponibles ?

On modélise ce problème comme un programme linéaire.

Variables de décision :  $x$  : surface de courgettes.

$y$  : surface de navets.

Fonction objectif : Max  $4x + 5y$

---

1. Source : N. Brauner.

Contraintes  $2x + y \leq 8$  (ressources d'engrais A)  
 $x + 2y \leq 7$  (ressources d'engrais B)  
 $y \leq 3$  (ressources d'anti-parasite AB)  
 $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

On veut donc résoudre le programme suivant.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 4x + 5y \\ \text{s.c.} & 2x + y \leq 8 \\ & x + 2y \leq 7 \\ & y \leq 3 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

Ce programme est bien un programme linéaire comme défini par l'équation (5), avec

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons déjà noté lors du premier cours, le fait qu'il y ait Max dans notre problème au lieu d'un Min comme dans l'équation (5) ne pose pas de problème : maximiser une quantité revient à minimiser son opposé.

Comme on n'a que deux variables, on peut procéder à une représentation graphique (voir Figure 1).

**Problème de production.** — On considère une entreprise qui produit des biens de  $n$  types différents. Pour cela, elle dispose de  $m$  types de ressources. Elle possède  $b_i$  unités de la ressource  $i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . La production d'une unité du bien  $j$  entraîne un bénéfice égal à  $c_j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ . Pour produire une unité du bien  $j$ , elle a besoin de  $a_{ij}$  unités de chaque ressource  $i$ . Maximiser le profit revient alors à résoudre le programme linéaire suivant.

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

La variable  $x_j$  représente le nombre d'unités du bien  $j$  produites.

C'est un exemple classique et très fréquent de la programmation linéaire. L'aspect « allocation optimale des ressources » de la RO est particulièrement bien illustré par le problème de production.

Dans l'exemple des navets et des courgettes, nous avons pu résoudre le problème assez facilement car il n'y avait que 2 variables, et donc une représentation graphique était possible. Mais la plupart des problèmes réels le nombre de variables et le nombre de contraintes peuvent dépasser le millier, et ni l'intuition, ni le dessin peuvent alors nous tirer d'affaire. Heureusement, depuis la fin des années 40, de nombreux chercheurs ont travaillé sur la programmation linéaire, et c'est maintenant un problème qui est bien résolu tant sur le plan pratique que sur le plan théorique.

**Plan pratique :** De nombreux logiciels (libres et commerciaux) résolvent des programmes linéaires de grande taille. Voir la liste en annexe du polycopié. Il y a principalement deux algorithmes qui sont utilisés dans ces codes : l'*algorithme du simplexe* et l'*algorithme des points intérieurs*. On devrait plutôt parler de familles d'algorithmes car tant l'algorithme du simplexe que l'algorithme des points intérieurs existent sous de nombreuses variantes.

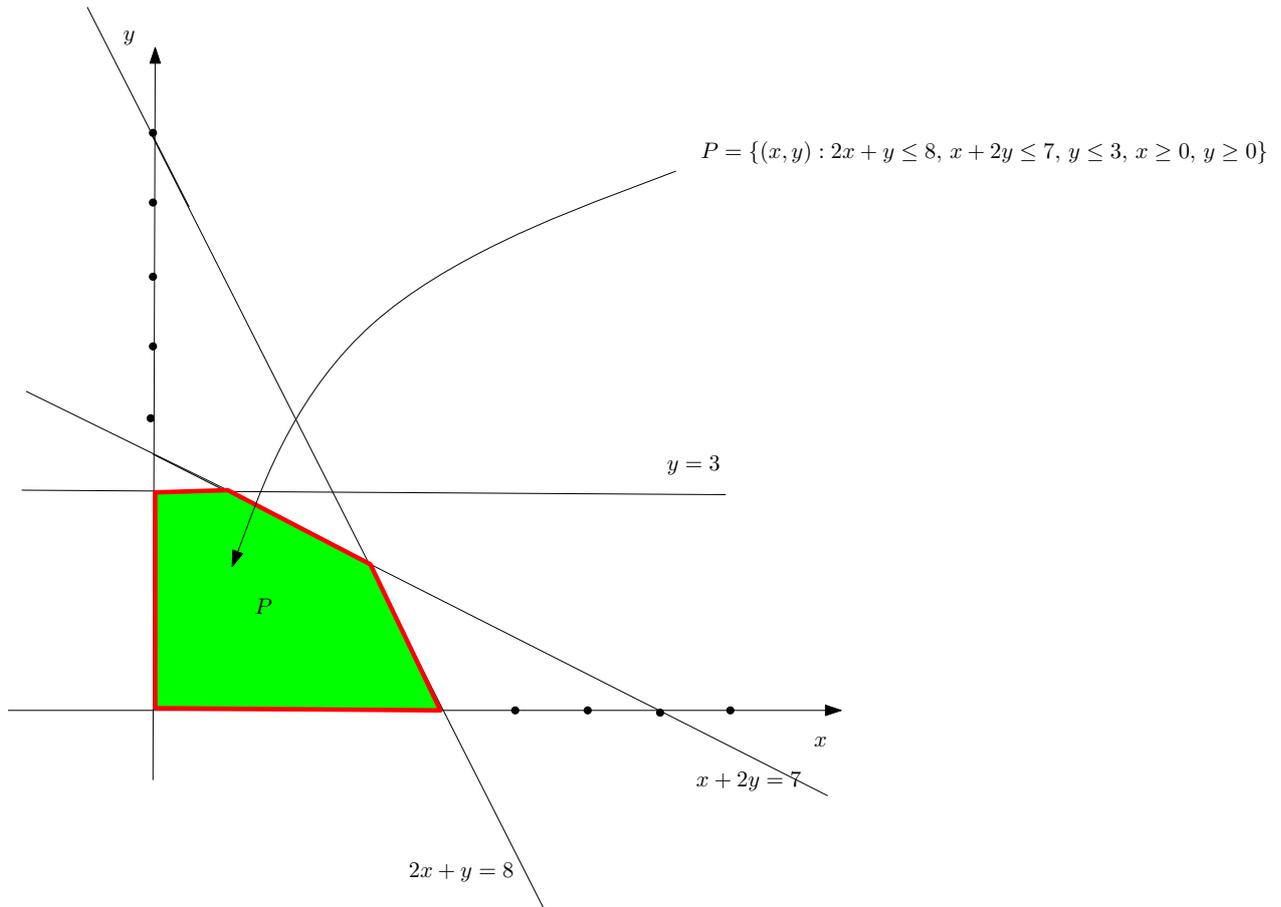


FIGURE 1. Représentation graphique des contraintes du problème des navets et des courgettes.

**Plan théorique :** La programmation linéaire est dans  $\mathbf{P}$ . Cela signifie qu'il existe des algorithmes polynomiaux qui résolvent la programmation linéaire. L'algorithme des points intérieurs est un de ceux-là. L'algorithme du simplexe, bien que très rapide en pratique, ne possède pas pour le moment de version polynomiale : pour chacune de ses versions, on connaît des instances qui nécessitent un nombre exponentiel d'étapes.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques propriétés théoriques de la programmation linéaire (PL), qui ont un grand intérêt pratique (polyèdres, dualité,...). Les différents algorithmes qui résolvent la programmation linéaire sont également présentés.

## 4.2. Quelques éléments théoriques

**4.2.1. Forme standard.** — L'algorithme du simplexe et l'algorithme des points intérieurs utilisent une écriture du programme linéaire différente de celle de l'équation (5). Ils utilisent la *forme standard* qui consiste à écrire le programme linéaire de la façon suivante :

$$(7) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Comme d'habitude,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des variables,  $\mathbf{A}$  est une matrice  $m \times n$  donnée,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  sont deux vecteurs donnés et  $\mathbf{0}$  est le vecteur 0, avec  $n$  composantes.

En plus de la forme standard et de la forme inéquationnelle, il existe la *forme canonique* qui consiste à écrire le programme linéaire de la façon suivante :

$$(8) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Ces trois formes sont équivalentes : à partir d'une solution réalisable d'un programme sous l'une des formes, on peut aisément construire une solution réalisable pour les deux autres formes, donnant une même valeur pour la fonction objectif.

**Passage de la forme standard à la forme canonique et réciproquement.** — Pour passer de la forme standard à la forme canonique, on pose  $A' := \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}' := \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c}' := \mathbf{c}$ . Le programme

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}'^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & A' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}' \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

est alors clairement équivalent au programme (7).

La transformation réciproque consiste à poser  $A' := \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}' := (\mathbf{c}, \mathbf{0})$ . Concrètement, cela revient à ajouter des *variables d'écart*  $\mathbf{y}$  et à considérer le programme

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

**Passage de la forme standard à la forme inéquationnelle et réciproquement.** — Pour passer de la forme standard à la forme inéquationnelle, on pose  $A' := \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}' := \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c}' := \mathbf{c}$ . Le programme

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}'^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & A' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}', \end{array}$$

est alors clairement équivalent au programme (7).

La transformation réciproque est un peu plus subtile. On a alors le programme linéaire sous forme standard suivant :

$$(9) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}'^T \mathbf{x}' \\ \text{s.c.} & A' \mathbf{x}' = \mathbf{b}' \\ & \mathbf{x}' \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

avec  $A' := \begin{pmatrix} A & -A & I_m \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}' := \mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}' := (\mathbf{c}, -\mathbf{c}, \mathbf{0})$ . Il faut montrer que toute solution optimale de l'équation (5) donne une solution optimale de ce programme et réciproquement. Pour ce faire, nous allons montrer que toute solution réalisable de l'équation (5) donne une solution réalisable de même coût pour ce programme.

Prenons une solution réalisable  $\mathbf{x}$  du programme (5). On construit les variables  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  de la manière suivante

$$y_j := b_j - (A\mathbf{x})_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

et

$$u_j := \begin{cases} x_j & \text{si } x_j \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } v_j := \begin{cases} -x_j & \text{si } x_j \leq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Il est alors aisé de vérifier que  $\mathbf{x}' := (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y})$  est une solution réalisable du programme (9), et que l'on a bien  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ .

Réciproquement, soient  $\mathbf{x}' = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y})$  une solution réalisable du programme (9). Posons  $\mathbf{x} := \mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Le vecteur  $\mathbf{x}$  est alors une solution réalisable du programme (7), et l'on a bien  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ .

**4.2.2. Préliminaires.** — Dans la suite, on supposera sans perte de généralité, que la matrice  $A$  de la forme standard (7) est de plein rang, c'est-à-dire que les  $m$  lignes sont linéairement indépendantes. En effet, on peut tester l'existence d'une solution réalisable en résolvant l'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (par des pivots de Gauss par exemple). S'il y a une solution réalisable et si les lignes de  $A$  ne sont pas linéairement indépendantes, alors forcément l'équation correspondante est redondante et on peut la supprimer. D'où

**Hypothèse :** Nos programmes linéaires sous forme standard seront tels que  $A$  est de plein rang.

**4.2.3. Solutions basiques réalisables.** — On suppose toujours que  $A$  est une matrice  $m \times n$ , de plein rang. Pour introduire la notion de solution basique, nous introduisons la notation suivante : pour une partie  $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $A_B$  la sous-matrice de  $A$  réduite aux colonnes indicées par les éléments de  $B$ .

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et si  $B = \{1, 4, 5\}$  alors

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une notation semblable sera utilisée pour les vecteurs : si  $\mathbf{x} = (5, 4, 5, 1, 1, 2)$  et  $B = \{1, 4, 5\}$ , alors  $\mathbf{x}_B = (5, 1, 1)$ .

Remarquons que pour une partie  $B$  fixée, on peut réécrire l'égalité  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  sous la forme

$$(10) \quad A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b},$$

où  $N$  est le complémentaire de  $B$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Une partie  $B \in \{1, 2, \dots, n\}$  à  $m$  éléments est appelée *base* si la matrice  $A_B$  est inversible. Dans ce cas, on peut réécrire le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dans la base  $B$  en transformant l'écriture (10) en

$$\mathbf{x}_B + A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N = A_B^{-1} \mathbf{b}.$$

La solution  $\tilde{\mathbf{x}}$  du système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  obtenue en posant  $\tilde{\mathbf{x}}_B := A_B^{-1} \mathbf{b}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_N := 0$  est une *solution basique*. Si cette solution basique est réalisable (par rapport au programme linéaire (7)), i.e. si  $A_B^{-1} \mathbf{b} \geq 0$ , alors on dit que  $\tilde{\mathbf{x}}$  est une *solution basique réalisable*, et que  $B$  est une base réalisable.

On a alors le théorème important suivant qui constitue la base de l'algorithme du simplexe.

**Théorème 4.2.1.** — *Considérons un programme linéaire sous forme standard (forme (7)).*

*Alors*

- si l'ensemble des solutions réalisables est non-vide et si la fonction objectif est bornée inférieurement sur cet ensemble, alors il existe une solution optimale.
- s'il existe une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui soit basique réalisable.

Ce théorème conduit à un algorithme naïf pour résoudre un programme linéaire : comme il n'y a qu'un nombre fini de bases (au plus  $\binom{n}{m}$ ), on essaye chaque base l'une après l'autre et on garde celle réalisable qui fournit la plus petite valeur pour  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ . Il faudrait encore vérifier que la fonction objectif est bornée inférieurement, mais dans tous les cas, un tel algorithme n'a aucun intérêt pratique. En effet, le nombre d'étapes est exponentiel<sup>(2)</sup>.

L'algorithme du simplexe va également énumérer des bases réalisables, mais dans un ordre intelligent, ce qui va réduire considérablement (en général) le nombre de bases réalisables à évaluer. Pour décrire cet ordre (voir Section 4.3.1), on a besoin de la notion de *base voisine*.  $B'$  est une base voisine de la base  $B$  si c'est une base telle que  $B' \setminus B$  ne contient qu'un élément (et puisque les bases ont toute même cardinalité, elle est également telle que  $B \setminus B'$  ne contient qu'un élément).

Il se peut aussi que l'ensemble des solutions réalisables soit non-vide, mais que la fonction objectif ne soit pas bornée inférieurement sur cet ensemble. Dans ce cas, on a un *rayon infini*.

**Théorème 4.2.2.** — *Considérons un programme linéaire sous forme standard (forme (7)). Si l'ensemble des solutions réalisables est non-vide et si la fonction objectif n'est pas bornée inférieurement sur cet ensemble, alors il existe  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{q}$  tels que les points  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 - t\mathbf{q}$  soient tous réalisables pour  $t \geq 0$ , et tels que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = -\infty$ .*

L'ensemble des points  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 - t\mathbf{q}$  pour  $t \geq 0$  est appelé *rayon infini*. La variable  $t$  est le paramètre de ce rayon,  $\mathbf{x}_0$  son *origine* et  $\mathbf{q}$  sa *direction*.

**4.2.4. Polyèdres.** — On peut également essayer de « voir » ce que signifie le programme (7), un peu comme on l'a fait dans la résolution de l'exemple introductif des navets et des courgettes. Les contraintes  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  délimitent ce qu'on appelle un *polyèdre*, c'est-à-dire une partie de  $\mathbb{R}^n$  obtenue comme intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés délimités par des hyperplans.

On vérifie facilement qu'un polyèdre est *convexe*, c'est-à-dire que pour toute paire de points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  d'un polyèdre  $P$ , l'ensemble des points du segment  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  est inclus dans  $P$ .

Un polyèdre possède en général des *points extrêmes* ou *sommets*, qui sont les “pointes”, ou les “piques” du polyèdre (voir Figure 2). Pour éviter la confusion avec les sommets des graphes, nous utiliserons plutôt l'appellation “points extrêmes” dans ce cours. On définit mathématiquement un point extrême de la manière suivante.  $\mathbf{v} \in P$  est un point extrême de  $P$  si pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ , on a l'implication

$$(\text{le segment } [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \text{ contient } \mathbf{v}) \Rightarrow (\mathbf{v} = \mathbf{x} \text{ ou } \mathbf{v} = \mathbf{y}).$$

Autrement dit, on ne peut avoir un segment inclus dans  $P$  et non réduit à un point qui contienne  $\mathbf{v}$ .

En réalité, comme le montre le théorème suivant, les points extrêmes et les solutions basiques réalisables recouvrent le même concept.

**Théorème 4.2.3.** — *Soit  $P$  l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire (7) ( $P$  est donc un polyèdre). Soit  $\mathbf{v} \in P$ . Les deux assertions sont équivalentes :*

2. Par exemple, pour  $n = 2m$ , on a  $\binom{n}{m} \simeq 4^m$ .

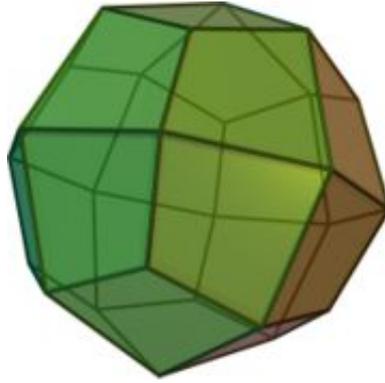


FIGURE 2. Un polyèdre.

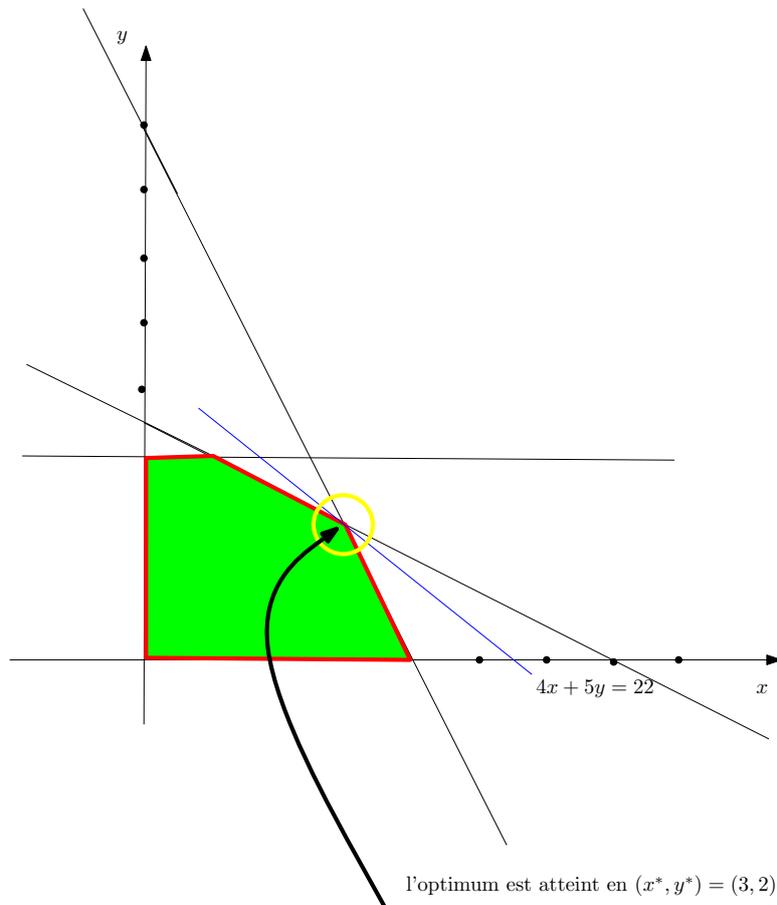


FIGURE 3. La solution optimale au problème des navets et des courgettes est un sommet du polyèdre.

- $\mathbf{v}$  est une solution basique réalisable de (7).
- $\mathbf{v}$  est un point extrême de  $P$ .

On peut voir une illustration sur la Figure 3, qui montre la solution optimale au problème des navets et des courgettes du début du chapitre.

### 4.3. Algorithmes

Il y a trois (familles d') algorithmes résolvant les programmes linéaires : le *simplexe*, les *ellipsoïdes* et les *points intérieurs*.

Nous allons décrire dans ces grandes lignes l'algorithme du simplexe et très brièvement l'algorithme des points intérieurs. Notre objectif est de permettre d'en comprendre les principes et certaines de leurs propriétés. Rappelons que lorsqu'un problème est décrit comme un programme linéaire, il est inutile de programmer un algorithme pour le résoudre : de nombreux logiciels, dont certains libres, le font déjà avec d'excellentes performances. Même EXCEL dispose d'une implémentation de l'algorithme du simplexe.

Pour la description exacte de ces algorithmes, il existe de nombreux ouvrages. Un excellent ouvrage qui couvre l'ensemble de la programmation linéaire et de ces algorithmes est celui de Matoušek et Gärtner [22]. Sur l'algorithme du simplexe, le meilleur livre est certainement celui de Chvátal [4]. Sur l'algorithme des ellipsoïdes, le livre de Grötchel, Lovász et Schrijver est une excellente référence et un grand classique [14]. Enfin, sur les points intérieurs, l'article de Terlaky est une bonne introduction aux points intérieurs [24].

Sur le plan pratique, l'algorithme des ellipsoïdes n'a pas encore fait ses preuves, ce qui explique qu'il ne soit pas décrit dans ce cours. Son intérêt est (pour le moment ?) théorique et historique puisqu'il constitue le premier algorithme polynomial proposé pour la programmation linéaire (en 1979, par Khachyan). Avant 1979, la question, alors ouverte, de savoir s'il était possible de résoudre la programmation linéaire en temps polynomial passionnait beaucoup de chercheurs.

**4.3.1. Le simplexe.** — L'idée de l'algorithme du simplexe est de passer de base réalisable en base réalisable en améliorant à chaque fois la valeur du critère. Comme le nombre de bases est fini, on obtient l'optimum ou la preuve que le programme est non borné en un nombre fini d'étapes.

On suppose que l'on connaît au départ une base réalisable  $B$ . L'algorithme du simplexe commence par réécrire le programme (7) sous la forme équivalente

$$(11) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_N) \mathbf{x}_N \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}_B + A_B^{-1} A_N \mathbf{x}_N = A_B^{-1} \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Il faut bien noter que ce programme et le programme (7) sont complètement équivalents. L'avantage de cette forme, c'est qu'on peut directement lire la valeur de la solution basique réalisable associée à  $B$  : c'est le terme constant  $\mathbf{c}_B^T A_B^{-1} \mathbf{b}$  de la fonction objectif. En effet, la solution basique réalisable associée à  $B$  est  $\tilde{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1} \mathbf{b}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ .

Ensuite, l'algorithme cherche une base réalisable voisine  $B'$  qui améliore le critère (c'est l'opération de *pivot*). Il est en effet assez simple de construire une telle base  $B'$  à partir de  $B$ , simplement à la lecture des entrées de  $\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_N$  et de  $A_B^{-1} A_N$ . On sélectionne d'abord l'élément  $j \notin B$  qui va entrer dans  $B'$  (*la variable entrante*  $x_j$ ), à la lecture des coefficients de  $\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_N$ . Ensuite, à la lecture des coefficients de la colonne correspondante de  $A_B^{-1} A_N$ , on trouve l'élément  $i$  qui va quitter  $B$  (*la variable sortante*  $x_i$ ).

**Variable entrante :** Tout coefficient négatif de  $\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} A_N$  peut faire office de variable entrante.

**Variable sortante :** Soit  $\mathbf{q}$  la colonne de  $A_B^{-1} A_N$  correspondant à la variable entrante et soit  $\mathbf{p} := A_B^{-1} \mathbf{b}$ . On regarde les coefficients strictement positifs de  $\mathbf{q}$  et parmi ceux-là, on choisit la variable sortante  $x_i$  telle que  $p_i/q_i$  soit le plus petit possible.

On réécrit ensuite le programme sous la forme équivalente

$$(12) \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbf{c}_{B'}^T A_{B'}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_{N'}^T - \mathbf{c}_{B'}^T A_{B'}^{-1} A_{N'}) \mathbf{x}_{N'} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{x}_{B'} + A_{B'}^{-1} A_{N'} \mathbf{x}_{N'} = A_{B'}^{-1} \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

pour laquelle on est à nouveau capable de lire la valeur du critère pour la solution basique réalisable associée à  $B'$  (c'est  $\mathbf{c}_{B'}^T A_{B'}^{-1} \mathbf{b}$ ) et la solution basique réalisable elle-même ( $\tilde{\mathbf{x}}_{B'} = A_{B'}^{-1} \mathbf{b}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_{N'} = \mathbf{0}$ ).

Et on recommence.

L'optimalité est atteinte quand tous les coefficients de  $\mathbf{c}_{N'}^T - \mathbf{c}_{B'}^T A_{B'}^{-1} A_{N'}$  sont  $\geq 0$ . En effet, quelque soit alors le choix de  $\mathbf{x}_{N'}$ , qui est à coefficients positifs ou nuls, le critère verra sa valeur augmenter.

De deux choses l'une, soit on termine sur une base optimale, soit à la lecture des coefficients, on voit que le programme est non bornée (i.e.  $-\infty$  est la valeur optimale) : cela arrive lorsque toutes les composantes de la colonne  $\mathbf{q}$  correspondante à la variable entrante sont négatives ou nulles, on a alors un rayon infini d'origine  $\tilde{\mathbf{x}}_{B'}$  et de direction  $\mathbf{q}$ .

On a supposé que l'on disposait d'une base réalisable de départ. C'est en effet souvent le cas. Par exemple, si le programme est sous forme canonique et si  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , l'ajout des variables d'écart fait apparaître une sous-matrice identité, voir Section 4.2.1, dont les colonnes sont une base réalisable naturelle de départ. Sinon, on dispose de techniques standard pour tester la réalisabilité du programme et trouver une base réalisable, voir Exercice 4.6.5.

Interprétation géométrique : L'algorithme du simplexe s'interprète facilement géométriquement. En effet, deux bases réalisables voisines fournissent des solutions basiques réalisables qui sont des points extrêmes confondus ou voisins (au sens des arêtes du polyèdre) du polyèdre des solutions réalisables. L'opération de pivot consiste à "glisser" le long d'une arête du polyèdre<sup>(3)</sup> pour aller vers un point extrême voisin, de meilleur valeur par la fonction objectif.

Par conséquent, la suite des solutions basiques réalisables et des pivots générés par l'algorithme du simplexe fournit une trajectoire qui passe par des points extrêmes et des arêtes du polyèdre et qui cherche à se diriger dans le sens de  $\mathbf{c}$ .

Efficacité de l'algorithme du simplexe : On considère qu'en général, pour un programme à  $m$  contraintes, l'algorithme du simplexe va faire entre  $2m$  et  $3m$  opérations de pivots avant d'arriver à l'optimum. La réécriture du système lors d'un pivot nécessite  $O(m^2)$  opérations. On a donc en général  $O(m^3)$  opérations pour résoudre un programme linéaire par l'algorithme du simplexe, ce qui est tout à fait raisonnable. Sur des instance réelles, le simplexe fonctionne bien.

Cela dit, il existe des instances pour lesquelles le nombre de pivots est exponentiel. La question de savoir s'il existe une règle de pivot – c'est-à-dire une façon de choisir la variable entrante lorsque le choix est possible – conduisant à un comportement polynomial est une (importante) question ouverte.

**4.3.2. Les points intérieurs.** — A l'opposé de l'algorithme du simplexe, l'algorithme des points intérieurs cherche à éviter le bord du polyèdre et à rester le plus possible à l'intérieur. C'est seulement à la dernière étape que l'algorithme atteint le bord, précisément sur une solution optimale.

---

3. ou à rester sur le même points extrême; un pivot ne parvient pas toujours à améliorer directement la valeur du critère.

Concrètement, cela consiste à considérer le coût pénalisé

$$f_\mu(\mathbf{x}) := \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \cdot \sum_{i=1}^n \log x_i$$

et à remplacer le programme (7) par le programme suivant

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & f_\mu(\mathbf{x}) \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} > \mathbf{0}, \end{array}$$

où  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  signifie que  $x_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

L'idée de l'algorithme est de faire tendre progressivement  $\mu$  vers 0, et de chercher la solution optimale  $\mathbf{x}^*(\mu)$  du programme (13) pour chaque valeur de  $\mu$  successive. La suite des  $\mathbf{x}^*(\mu)$  tend alors vers l'optimum du programme (7) (à quelques conditions techniques près). La recherche de la solution optimale  $\mathbf{x}^*(\mu)$  du programme (13) se fait en fait approximativement et utilise la solution optimale approximative du programme pour la valeur de  $\mu$  précédente – cette étape revient alors à une simple résolution d'un système linéaire.

Efficacité de l'algorithme des points intérieurs : La complexité de l'algorithme est  $O(n^3L)$  où  $L$  est le nombre maximum de bits nécessaires pour coder un coefficient du programme, ce qui en fait bien un algorithme polynomial. Le nombre d'itérations (nombre de  $\mu$  distincts pour lequel  $\mathbf{x}^*(\mu)$  est approximativement calculé) est  $O(\sqrt{n}L)$  mais en pratique cela semble plutôt être un  $O(\log n)$ , ce qui en fait un algorithme réellement efficace.

## 4.4. Dualité

**4.4.1. Dualité faible, dualité forte.** — Nous abordons maintenant la propriété théorique fondamentale de la programmation linéaire, dont les applications sont innombrables. Il s'agit de la propriété de dualité.

En suivant la méthode présentée en Section 2.3.5, à tout programme linéaire, on peut associer un autre programme linéaire, son dual. Le premier programme est le *programme primal*. Lors de la transformation, les variables du primal deviennent les contraintes du dual et les contraintes du primal deviennent les variables du dual.

Considérons par exemple, le programme linéaire suivant, sous forme standard :

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Son dual se définit alors

$$(15) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}. \end{array}$$

Cela se vérifie aisément en suivant la méthode présentée à la Section 2.3.5.

Noter que chaque  $y_i$  multiplie la  $i$ ème ligne (la contrainte) de  $A$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , et que chaque colonne de  $A$ , associée chacune à une des  $n$  variables du programme (14), devient une contrainte pour le programme (15).

Nous expliquons maintenant une preuve de l'inégalité de dualité faible, alternative à celle présentée en Section 2.3.5.

Prenons une solution réalisable  $\mathbf{x}$  du primal et une solution réalisable  $\mathbf{y}$  du dual. Multiplions à gauche les contraintes du primal par  $\mathbf{y}$ . On obtient

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{b}.$$

En utilisant les contraintes du dual et le fait que les composantes de  $\mathbf{x}$  sont positives, on obtient  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$  ou plus lisiblement

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

On retrouve bien la *dualité faible*. En particulier, la valeur optimale du dual minore la valeur optimale du primal (si optimum il y a).

En réalité, on a beaucoup plus : *en général, pour la programmation linéaire, les valeurs optimales des programmes primal et dual coïncident*. Plus précisément :

**Théorème 4.4.1 (Théorème fort de la dualité pour la programmation linéaire)**

*Pour les deux programmes linéaires suivants*

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. c.} & A \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (P) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s. c.} & A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad (D) \end{array}$$

*une et une seule des possibilités suivantes se réalise*

1. Ni (P), ni (D) n'ont de solution réalisable.
2. (P) est non borné et (D) n'a pas de solution réalisable.
3. (D) est non borné et (P) n'a pas de solution réalisable.
4. (P) et (D) sont tous deux réalisables. Ils ont alors tous deux des solutions optimales, respectivement  $\mathbf{x}^*$  et  $\mathbf{y}^*$ , et l'on a

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*.$$

*Autrement dit*, le minimum de (P) est égal au maximum de (D).

La preuve est omise, mais ce théorème peut se prouver soit en utilisant un lemme classique en géométrie – le lemme de Farkas – soit en utilisant l'écriture de la base optimale dans l'algorithme du simplexe (voir Exercice 4.6.4).

**4.4.2. Dualité sous toutes ses formes.** — Dans le tableau suivant, on donne toutes les situations possibles. Un bon exercice consiste à redémontrer ces programmes en utilisant la méthode de la Section 2.3.5.

	Programme linéaire primal	Programme linéaire dual
Variables	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$y_1, y_2, \dots, y_m$
Matrice	$A$	$A^T$
Membre de droite	$b$	$c$
Fonction objectif	Min $c^T x$	Max $b^T y$
Contraintes	$i$ ème contrainte a $\leq$	$y_i \leq 0$
	$\geq$	$y_i \geq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \leq 0$	$j$ ème contrainte a $\geq$
	$x_j \geq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Une propriété importante de la dualité en programmation linéaire, qui se vérifie directement sur le tableau ci-dessus mais aussi à partir de la définition de la Section 2.3.5, est que

**Proposition 4.4.2.** — *Le dual du dual est équivalent au primal.*

**4.4.3. Interprétation économique de la dualité.** — Soit le problème de production pour une entreprise E :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Soit une firme F qui veut racheter les ressources de l'entreprise E. A quels prix doit-elle le faire pour tout racheter au coût minimum ?

On note  $y_i$  le prix de la ressource  $i$ . F doit fixer les  $y_i$  de manière à ce que  $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ . En effet, pour tout  $j$ , cela garantit que E a intérêt à vendre les ressources nécessaire pour produire une unité de  $j$  plutôt que de la produire. D'où le programme mathématique suivant auquel se trouve confronté F.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

C'est précisément le dual du problème de production.

## 4.5. Une application de la dualité : jeux matriciels à somme nulle

Soit  $A = ((a_{ji}))$  une matrice réelle à  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Une telle matrice définit ce qu'on appelle un *jeu matriciel à somme nulle* de la manière suivante. On se donne deux joueurs, C pour « colonne » et L pour « ligne ». Le joueur C choisit une colonne  $i$ , et, simultanément, le joueur L choisit une ligne  $j$ . Chacun reçoit  $a_{ji}$ . Le joueur C cherche à minimiser, L cherche à maximiser.

Ce qu'on cherche en théorie des jeux, ce sont les *équilibres de Nash*, i.e. des situations où aucun des joueurs n'a intérêt à changer de choix. Ici, lorsque le choix est restreint au choix d'une ligne et d'une colonne, on parle d'un équilibre en *stratégies pures*. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un couple  $(j, i)$  tel que

$$a_{j'i} \leq a_{ji'}, \text{ pour toute ligne } j' \text{ et toute colonne } i'.$$

On ne peut pas toujours assurer l'existence d'un équilibre en stratégies pures.

En revanche, comme l'avait remarqué von Neumann, si les joueurs choisissent des distributions de probabilité, il y a un équilibre en *stratégies mixtes*, le gain des joueurs étant alors l'espérance de gain. Notons  $\Delta^k$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{z}$  de  $\mathbb{R}_+^k$  tels que  $\sum_{i=1}^k z_i = 1$ . Un élément de  $\Delta^k$  s'interprète comme une distribution de probabilité sur un ensemble à  $k$  éléments. Si  $C$  choisit la distribution  $\mathbf{x} \in \Delta^n$  et  $L$  choisit la distribution  $\mathbf{y} \in \Delta^m$ , alors le gain espéré est  $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$ . Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un couple  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in \Delta^n \times \Delta^m$  tels que

$$\mathbf{y}'^T A \tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{y}}^T A \mathbf{x}' \quad \text{pour tout } \mathbf{x}' \in \Delta^n \text{ et } \mathbf{y}' \in \Delta^m.$$

Le théorème suivant, dû à von Neumann, assure l'existence d'un équilibre en stratégies mixtes pour les jeux matriciels à somme nulle.

**Théorème 4.5.1.** — *Dans tout jeu matriciel à somme nulle, il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

*Démonstration.* — On peut supposer que toutes les entrées de  $A$  sont strictement positives. En effet, ajouter une même constante sur chaque entrée de la matrice ne change rien au jeu.

Considérons le programme linéaire

$$(16) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.c.} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Son dual est

$$(17) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{j=1}^m y_j \\ \text{s.c.} & \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{1}^T \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Le programme (16) est réalisable, car  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  est une solution réalisable. Le programme (17) est également réalisable :  $A$  a toutes ses entrées strictement positives ce qui implique que tout  $\mathbf{y}$  suffisamment grand est solution réalisable. D'après le théorème 4.4.1, il existe  $\mathbf{x}^*$  solution optimale du primal et  $\mathbf{y}^*$  solution optimale du dual, telle que  $\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^*$ . Soit  $w = \sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^*$ . Les solutions  $\tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{w} \mathbf{x}^*$  et  $\tilde{\mathbf{y}} := \frac{1}{w} \mathbf{y}^*$  satisfont les relations demandées.  $\square$

On peut par ailleurs démontrer facilement que, même s'il y a plusieurs équilibres de Nash en stratégies mixtes, la quantité  $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$  – i.e.  $\frac{1}{w}$  dans la preuve ci-dessus – ne change pas. On l'appelle *valeur* du jeu.

## 4.6. Exercices

**4.6.1. Production de boissons.** — Une entreprise fabrique trois types de boissons : XXX, YYY et ZZZ qui rapportent respectivement 1,55, 3,05 et 4,80 le litre. Chaque boisson a un niveau minimal de production hebdomadaire qui sont respectivement de 1020, 1450 et 750 litres. 20 litres de chaque boisson requiert un temps en heures de *fabrication*, un temps de *mélange* et un temps d'*embouteillage*.

	XXX	YYY	ZZZ
fabrication	2	3	6
mélange	4	5,5	7,5
embouteillage	2	1	3,5

Pendant la semaine à venir, l'entreprise aura 708 heures disponibles en fabrication, 932 en mélange et 342 en embouteillage. Formuler un modèle donnant un plan de production qui maximise le profit.

**4.6.2. Un problème de raffinerie - d'après Hêche, Liebling et de Werra [6].** — Une raffinerie doit fournir chaque jour deux qualités A et B d'essence à partir de constituants 1, 2 et 3. On note  $Q_{\max}$  la quantité maximale disponible quotidiennement :

constituant	$Q_{\max}$	coût unitaire
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

essence	spécification	prix de vente unitaire
A	$\leq 30\%$ de 1	5,5
	$\geq 40\%$ de 2	
	$\leq 50\%$ de 3	
B	$\leq 50\%$ de 1	4,5
	$\geq 10\%$ de 2	

Donner un modèle qui permet de maximiser la recette, sachant que toute la production pourra être écoulée.

**4.6.3. Dual du dual.** — En utilisant les recettes de dualisation du cours, montrer que le dual du dual est équivalent au primal.

**4.6.4. Théorème fort de la dualité.** — En s'appuyant sur la caractérisation de l'optimalité de la solution retournée par l'algorithme du simplexe, prouver le théorème fort de la dualité (Théorème 4.4.1). Plus précisément, montrer que le programme (12) écrit dans la base optimale permet de construire des solutions réalisables au dual (15) donnant le même coût à la fonction objectif. Expliquer pourquoi cela permet de conclure.

**4.6.5. Trouver une solution réalisable.** — Considérons le système suivant

$$(18) \quad \begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  et  $A$  est une  $m \times n$  matrice réelle. L'objectif de l'exercice est de proposer une méthode pour tester si un tel système a une solution réalisable, et s'il en existe, en trouver une.

1. Montrer qu'on peut supposer que  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ .

Considérons maintenant le programme

$$(19) \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.c.} \quad & A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

2. Montrer que le système (18) a une solution réalisable si et seulement si le programme (19) a une valeur optimale = 0.

Par conséquent, l'algorithme du simplexe est une méthode pour résoudre un système de la forme du système (18). En effet, le programme (19) a une solution basique réalisable facile à identifier :  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . On peut alors dérouler l'algorithme du simplexe aisément sur le

programme (19) à partir de cette base initiale. Noter que s'il y a une solution au système (18), cette méthode lui trouve une solution basique réalisable. C'est donc également une méthode pour trouver une première solution réalisable à un programme linéaire pour lequel il n'y en a pas d'évidente.

3. Réciproquement, montrer avec la théorie de la dualité que si on a une méthode pour trouver une solution réalisable de n'importe quel système d'équations et d'inéquations linéaires, alors on peut utiliser cette méthode pour résoudre les programmes linéaires.

**4.6.6. Meilleure droite approximante.** — Soit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  des points dans le plan. On cherche la meilleure droite approximante pour la norme sup, i.e. la droite du plan d'équation  $ax + b = y$  telle que  $\sup_{i=1, \dots, n} |ax_i + b - y_i|$  soit le plus petit possible. Montrer que cela revient à résoudre un programme linéaire. Même question en cherchant à minimiser  $\sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|$ .

**4.6.7. Interprétation économique de la dualité.** — Un diététicien utilise six produits comme source de vitamines A et C. Il a une certaine demande en vitamine A et en vitamine C. Il veut la satisfaire au moindre coût.

	Produits (unités/kg)						Demande
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

1. Modéliser ce problème comme un programme linéaire.
2. Ecrire le programme dual. Proposer une interprétation.

**4.6.8. Programmation linéaire en nombres entiers.** — Un programme linéaire du type

$$(20) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & x_j \in \mathbb{N} \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

est appelé programme linéaire en nombres entiers.

Ecrire le problème du sac-à-dos comme un programme linéaire en nombre entiers.

Comme le problème du sac-à-dos est **NP**-difficile, cela prouve que la résolution des programmes linéaires en nombre entiers est également **NP**-difficile.



## CHAPITRE 5

### FLOTS ET COUPES

La notion de flot dans un graphe est naturelle : étant donné un réseau de transport (train, tuyau, câbles électriques), avec des capacités sur les arcs, quelle quantité de biens peut-on faire transiter au maximum ? Ou alors, en supposant qu'à chaque arc est attaché un coût unitaire, à quel coût minimum peut-on faire transiter un volume de biens donné ?

Une notion duale est celle de coupe dans un graphe. Une coupe est un ensemble d'arcs intersectant tout chemin entre deux sommets fixés. Les applications des coupes sont nombreuses en recherche opérationnelle bien sûr, mais également en dehors de la recherche opérationnelle : positionnement de postes d'enquêtes, robustesse de réseaux, imagerie, etc.

#### 5.1. Flots et coupes

**5.1.1. Généralités.** — La notion de flot ne peut exister que par rapport à un réseau. Avant de définir ce qu'est un flot, il nous faut d'abord fixer un réseau. Soit donc un réseau modélisé par un graphe orienté  $D = (V, A)$ , muni d'une capacité  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  et de deux sommets particuliers  $s$  (la *source*) et  $t$  (le *puits*). Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un *s-t flot* si  $f(a) \leq u(a)$  pour tout arc  $a \in A$  et si pour tout sommet  $v \notin \{s, t\}$ , la loi de conservation

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

est respectée.

Étant donnée une *s-t coupe*, il est intuitivement clair qu'un flot aura une valeur inférieure à sa *capacité*, où la capacité d'une *s-t coupe*  $\delta^+(X)$  est définie par  $\sum_{a \in \delta^+(X)} u(a)$ . Le lemme suivant formalise entre autres cette propriété.

**Lemme 5.1.1.** — *Soit  $\delta^+(X)$  une s-t coupe et soit  $f$  un s-t flot quelconque. Alors*

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(X)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(X)} f(a).$$

*En particulier,*

$$(21) \quad \text{value}(f) \leq \sum_{a \in \delta^+(X)} u(a).$$

La preuve de ce lemme est laissée en exercice.

On a également une propriété fondamentale qui est conforme à l'intuition qu'on peut se faire d'un flot : tout flot peut se décomposer en combinaison conique de *s-t chemins élémentaires* et *circuits élémentaires*.

Pour tout  $B \subseteq A$ , on note  $\chi^B$  la fonction qui à  $a \in A$  renvoie 1 si  $a \in B$  et 0 sinon.

**Proposition 5.1.2.** — Soit  $f$  un  $s$ - $t$  flot,  $\mathcal{P}$  l'ensemble des  $s$ - $t$  chemins élémentaires et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des circuits élémentaires. Il existe alors des coefficients réels positifs  $(\lambda_P)_{P \in \mathcal{P}}$  et  $(\mu_C)_{C \in \mathcal{C}}$  tels que

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu_C \chi^C.$$

De plus,

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \lambda_P.$$

La preuve n'est pas triviale, mais constitue tout de même un exercice raisonnable.

### 5.1.2. Flot maximum et coupe minimum. —

*5.1.2.1. Les problèmes.* — Une question naturelle est celle de la valeur maximum d'un flot étant donné un réseau avec des capacités. Informellement, étant donné un réseau avec des capacités sur des arcs, la question est de savoir quelle quantité maximum de matière on peut faire passer de la source  $s$  à la destination  $t$ . Cette question se modélise de la façon suivante.

#### Problème du flot maximum

**Donnée** : Un graphe orienté  $D = (V, A)$ , deux sommets particuliers  $s$  et  $t$  et des capacités  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche** : Trouver un  $s$ - $t$  flot de valeur maximum.

En fait, ce problème est polynomial car il peut se modéliser comme un programme linéaire, voir Exercice 5.3.2. La nature particulière du problème a poussé les chercheurs à concevoir des algorithmes *ad hoc* plus performants. L'un de ces algorithmes est celui d'Edmonds et Karp [8], qui est également polynomial. Il est décrit dans le paragraphe suivant.

Un problème associé est celui de la  $s$ - $t$  coupe minimum. C'est en réalité le problème dual du problème du  $s$ - $t$  flot maximum, au sens de la dualité de la programmation linéaire, voir Exercice 5.3.2.

#### Problème de la $s$ - $t$ coupe minimum

**Donnée** : Un graphe orienté  $D = (V, A)$ , deux sommets particuliers  $s$  et  $t$ , et des capacités  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche** : Trouver une  $s$ - $t$  coupe de capacité minimum.

*5.1.2.2. Graphe résiduel et chemins  $f$ -augmentants.* — Les algorithmes *ad hoc* utilisent souvent les graphes résiduels et les chemins augmentants, que nous définissons maintenant. Informellement, le graphe résiduel est le graphe qui indique les arcs où l'on peut augmenter ou diminuer la quantité de flot sans violer la loi de conservation et les bornes de capacités (voir exemple Figure 1).

Pour un arc  $a = (u, v)$ , on note  $a^{-1} := (v, u)$ . On définit  $A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\}$ . Soit  $f$  un  $s$ - $t$  flot. On définit

$$A_f := \{a : a \in A \text{ et } f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} : a \in A \text{ et } f(a) > 0\}.$$

Le *graphe résiduel* est le graphe  $D_f := (V, A_f)$ . Pour  $a \in A_f$ , on associe une *capacité résiduelle*  $u_f(a) := u(a) - f(a)$  si  $a \in A$  et  $u_f(a) := f(a)$  si  $a^{-1} \in A$ . Tout  $s$ - $t$  chemin dans  $D_f$  est appelé *chemin  $f$ -augmentant*.

5.1.2.3. *Algorithme d'Edmonds et Karp*. — On commence par poser  $f(a) := 0$  pour tout  $a \in A$ . Ensuite on répète

Trouver un chemin  $f$ -augmentant  $P$  dans le graphe résiduel  $D_f$ . S'il n'y en a pas, alors  $f$  est optimal. Sinon, on calcule le plus grand  $\mu$  possible qui permette d'« augmenter »  $f$  le long de  $P$  et on « augmente »  $f$  de la quantité  $\mu$ .

Le calcul de  $\mu$  se formalise par  $\mu := \min_{a \in P} u_f(a)$ . Augmenter  $f$  le long de  $P$  se fait de la manière suivante : si  $a \in P$  est dans le même sens dans  $A$  (i.e.  $a \in A$ ), alors on pose  $f(a) := f(a) + \mu$  ; sinon (i.e.  $a^{-1} \in A$ ), alors on pose  $f(a) := f(a) - \mu$ .

L'algorithme décrit ci-dessus n'est polynomial que si on choisit toujours le chemin  $f$ -augmentant ayant le moins d'arcs possible, ce qui se fait par un algorithme de plus court chemin avec des coûts unitaires sur les arcs<sup>(1)</sup>.

D'où

**Théorème 5.1.3.** — *L'algorithme d'Edmonds et Karp trouve un  $s$ - $t$  flot maximum en  $O(nm^2)$ .*

*Remarque.* — Il existe maintenant de nombreux algorithmes polynomiaux. Le plus rapide de tous est celui de Goldberg et Tarjan : ils ont montré qu'il était possible de trouver un flot maximum en  $O(nm \log n^2/m)$ .

5.1.2.4. *Théorème max flot-min coupe*. — Une application de l'algorithme et du théorème ci-dessus est la célèbre propriété de max flot-min coupe. En effet, lorsque l'algorithme se termine, on a obtenu un flot maximum. En notant  $f$  ce flot maximum, le critère qui a permis de s'arrêter est l'absence de chemin  $f$ -augmentant dans le graphe résiduel, i.e. qu'on ne peut atteindre  $t$

1. Dans ce cas particulier, coût = 1, il n'est pas nécessaire d'appliquer l'algorithme de Dijkstra du Chapitre 3. Une simple recherche en largeur d'abord donne la solution.

Les nombres non-entourés sont les capacités; les nombres entourés forment le flot.

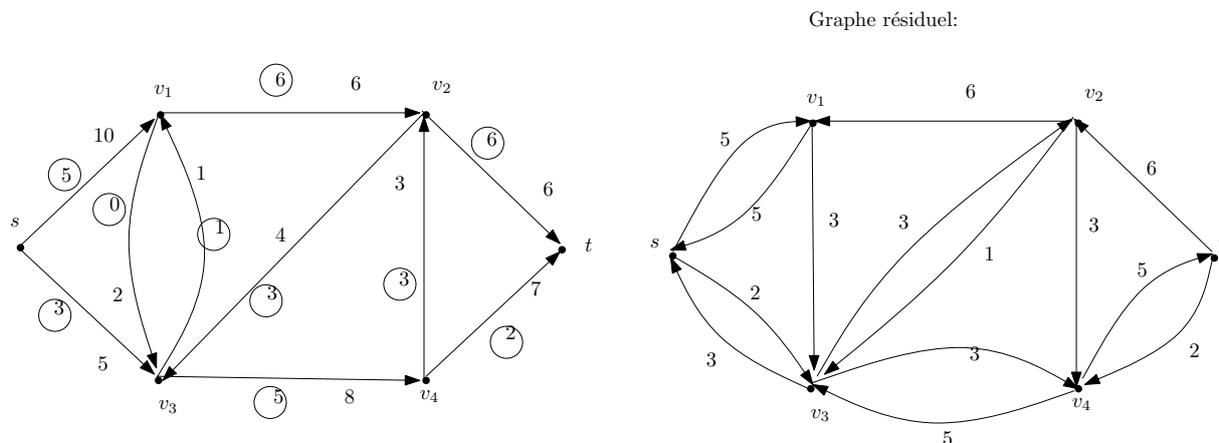


FIGURE 1. Le graphe résiduel.

depuis  $s$  dans  $D_f$ . Posant  $X$  l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis  $s$  dans  $D_f$ , cela signifie que pour les arcs  $a$  quittant  $X$  (formellement  $a \in \delta^+(X)$ ), on a  $f(a) = u(a)$  et que pour ceux entrant dans  $X$  (formellement  $a \in \delta^-(X)$ ), on a  $f(a) = 0$ . Donc  $\sum_{a \in \delta^+(X)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(X)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(X)} u(a)$ . Ce qui signifie d'après le Lemme 5.1.1

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^+(X)} u(a).$$

On obtient donc

**Théorème 5.1.4.** — *La valeur d'un  $s$ - $t$  flot maximum est égale à la capacité d'une  $s$ - $t$  coupe minimum.*

De plus, la discussion précédente implique que l'on peut trouver une  $s$ - $t$  coupe minimum en  $O(nm^2)$ . En effet, après avoir appliqué l'algorithme d'Edmonds et Karp, l'ensemble  $X$  des sommets que l'on peut atteindre dans  $D_f$  depuis  $s$  est tel que  $\delta^+(X)$  est une coupe de capacité minimale.

**Théorème 5.1.5.** — *L'algorithme d'Edmonds et Karp trouve une  $s$ - $t$  coupe minimum en  $O(nm^2)$ .*

Une autre conséquence importante de l'algorithme est la suivante

**Théorème 5.1.6.** — *Si toutes les capacités sont entières, alors il existe un  $s$ - $t$  flot maximum entier, et l'algorithme d'Edmonds et Karp le trouve.*

Dire que le flot  $f$  est entier signifie que  $f(a)$  est entier pour tout  $a \in A$ . En fait, on a aussi l'existence de la décomposition de la Proposition 5.1.2 avec des coefficients  $\lambda_P$  et  $\mu_C$  entiers positifs dans ce cas.

*Remarque.* — On peut définir les  $S$ - $T$  coupes où  $S$  et  $T$  sont des ensembles disjoints de sommets. Une  $S$ - $T$  coupe est un ensemble d'arcs de la forme  $\delta^+(X)$ , avec  $S \subseteq X$  et  $T \cap X = \emptyset$ . Une  $S$ - $T$  coupe de capacité minimum se trouve en ajoutant une source fictive  $s$ , un puits fictif  $t$ , des arcs  $(s, u)$  pour tout  $u \in S$  et des arcs  $(v, t)$  pour tout  $v \in T$ . Ces nouveaux arcs sont alors munis de capacité infinis.

Cette astuce consistant à ajouter une source et un puits fictifs est utile dans de nombreuses situations.

*Remarque.* — Dans le cas non-orienté, on appelle  $s$ - $t$  coupe un ensemble d'arêtes de la forme  $\delta(X)$ , avec  $s \in X$  et  $t \notin X$ . Trouver une  $s$ - $t$  coupe de capacité minimum se ramène simplement à remplacer chaque arête par deux arcs opposés.

*Remarque.* — Considérons le problème suivant.

### Problème de l'ensemble d'arcs déconnectant minimum

**Donnée :** Un graphe orienté  $D = (V, A)$ , deux sommets particuliers  $s$  et  $t$ , et des capacités  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche :** Trouver un sous-ensemble  $B$  d'arcs de capacité minimum tel que pour tout  $s$ - $t$  chemin  $P$ , on a  $P \cap B \neq \emptyset$ .

Ce problème coïncide avec celui de la  $s$ - $t$  coupe de capacité minimum. En effet, une  $s$ - $t$  coupe est une solution réalisable pour le problème de l'ensemble d'arcs déconnectant minimum. Inversement, s'il existe une solution réalisable  $B$  pour le problème de l'ensemble d'arcs déconnectant minimum, alors l'ensemble  $X$  des sommets que l'on peut atteindre dans  $D$  depuis  $s$  sans utiliser

d'arcs de  $B$  est tel que  $\delta^+(X) \subseteq B$ .

**Exemple : Contrôle routier.** — Pour améliorer l'utilisation des flottes de camions (pour diminuer les émissions de CO2 par exemple), on souhaite effectuer des contrôles de poids lourds partant d'une région  $P$  et allant vers une autre région  $Q$  par le biais d'un réseau autoroutier  $R$ . Les contrôles sont effectués sur des tronçons d'autoroute. Faire un contrôle sur le tronçon  $t$  coûte  $c_t$ . Le problème consiste à trouver le sous-ensemble de tronçons sur lesquels les contrôles vont être effectués tel que tout camion allant de  $P$  à  $Q$  passe par un contrôle, et ce, à coût minimum.

Avec les remarques ci-dessus, on peut voir que ce problème se modélise comme un problème de  $s$ - $t$  coupe minimum.

**Exemple : Problème de l'affectation de tâches.** — On suppose que l'on a différentes tâches à accomplir dont on connaît les durées d'exécution, et que l'on dispose d'une ressource de main d'œuvre dont on connaît les compétences. Les tâches sont supposées telles que les employés peuvent y travailler en parallèle. On souhaite minimiser le temps nécessaire pour réaliser l'ensemble des tâches.

### Problèmes de l'affectation des tâches

**Données :**  $n$  tâches et leurs durées  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ;  $m$  employés et des sous-ensembles  $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$  qui correspondent aux employés compétents pour la tâche  $i$ .

**Tâche :** Trouver des réels  $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$  pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, m\}$  (signifiant le temps consacré par l'employé  $j$  à la tâche  $i$ ) tels que toutes les tâches soient finies, i.e. tels que  $\sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Minimiser le temps qu'il faut pour terminer toutes les tâches, i.e. la quantité  $T(x) := \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \sum_{i: j \in S_i} x_{ij}$ .

Ce problème se modélise comme un problème de flot de la manière suivante. On construit un graphe biparti avec d'un côté des sommets  $v_i$  représentant les tâches et de l'autre des sommets  $w_j$  représentant des employés. On met un arc  $(v_i, w_j)$  si l'employé  $j$  est compétent pour effectuer la tâche  $i$ , en d'autres termes, si  $j \in S_i$ . On ajoute deux autres sommets  $s$  et  $t$ , et on construit tous les arcs  $(s, v_i)$  et tous les arcs  $(w_j, t)$ . On dénomme ce graphe  $D$ . Fixons un temps  $T$  et on va se demander s'il est possible d'effectuer toutes les tâches en un temps plus petit que  $T$ .

On munit  $D$  de capacités  $u(s, v_i) := t_i$ , et  $u(a) := T$ .

Prenons maintenant un jeu de réels  $x_{ij}$  satisfaisant les contraintes du problème, et réalisant les tâches en un temps total  $\leq T$ . Associons à chaque arc  $(v_i, w_j)$  la quantité  $x_{ij}$ . A chaque arc  $(s, v_i)$  on associe la quantité  $\sum_{j \in S_i} x_{ij}$  et à chaque arc  $(w_j, t)$  la quantité  $\sum_{i: j \in S_i} x_{ij}$ . On obtient ainsi un flot réalisable de valeur  $\sum_{i=1}^n t_i$ .

Réciproquement, supposons que l'on trouve un flot réalisable  $f$  de valeur  $\sum_{i=1}^n t_i$ . Alors, les réels  $x_{ij} := f(v_i, w_j)$  constituent une solution réalisable du problème de l'affectation de tâches, avec un temps de réalisation total  $\leq T$ .

Par conséquent pour résoudre le problème de l'affectation de tâches (trouver une solution optimale), on cherche un flot maximum sur  $D$ . On sait qu'il y a un flot maximum de valeur  $\sum_{i=1}^n t_i$  si on pose  $T := \sum_{i=1}^n t_i$ . On pose alors  $T := \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{2}$  et  $T' := \sum_{i=1}^n t_i$ . On répète

Si on trouve un flot de valeur  $\sum_{i=1}^n t_i$ , on sait qu'on peut réaliser les tâches en un temps  $\leq T$ . On recommence alors avec  $T := T/2$  et  $T' := T$ .

Sinon, c'est que  $T$  était trop petit, et on pose  $T := \frac{T + T'}{2}$  et on laisse  $T' := T'$ .

La solution optimale  $x^*$  est telle  $T \leq T(x^*) \leq T'$ . On peut s'arrêter dès que  $T' - T$  est plus petit qu'une quantité fixée au préalable.

On a résolu un problème d'optimisation par une recherche binaire, chaque étape étant un problème de décision.

Cette façon de procéder est très efficace en pratique, plus que l'autre solution consistant à voir le problème de l'affectation de tâches comme un programme linéaire.

On peut se demander si, dans le cas où les  $t_i$  sont entiers, on a nécessairement alors une solution optimale entière. L'auteur de ce polycopié ne sait pas. L'intérêt pourrait être de montrer que la recherche binaire termine en un nombre fini d'étapes.

### 5.1.3. Flot de coût minimum. —

*5.1.3.1. Le problème.* — Supposons maintenant que nous ajoutons un coût sur chaque arc. De plus, pour des commodités de modélisation, on va autoriser plusieurs sources et plusieurs puits.

Soit un graphe orienté  $D = (V, A)$ , muni de capacités  $\ell, u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que  $\ell(a) \leq u(a)$  pour tout  $a \in A$ , et des nombres  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{v \in V} b(v) = 0$ . Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un *b-flot* si pour tout arc  $a \in A$ , on a  $\ell(a) \leq f(a) \leq u(a)$  et si pour tout sommet  $v \in V$ , la loi de conservation

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$

est respectée.

Les sommets  $v$  tels que  $b(v) > 0$  sont appelés *sources* et les sommets  $v$  tels que  $b(v) < 0$  sont appelés *puits*. Pour une source,  $b(v)$  est l'*offre* ; pour un puits,  $b(v)$  est la *demande*.

Dans le cas particulier où tous les  $b(v)$  sont nuls, on parle de *circulation*.

On suppose que l'on a une fonction de coût  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

On peut alors se demander, parmi tous les *b*-flots, lequel est de plus petit coût, où le coût d'un *b*-flot  $f$  est défini par

$$\sum_{a \in A} c(a)f(a).$$

Les applications des flots de coût minimum sont innombrables. Nous verrons ce que cela peut apporter au problème d'affectation de tâches vu précédemment. Tout comme le problème de flot maximum, le problème du *b*-flot de coût minimum se formule comme un programme linéaire et peut donc être résolu avec ma méthode des points intérieurs (en temps polynomial donc) ou par l'algorithme du simplexe.

En 1985, Goldberg et Tarjan [13] ont montré qu'il existait un algorithme particulièrement efficace pour résoudre le problème flot de coût minimum. L'algorithme travaille encore sur le graphe résiduel, en définissant  $c(a^{-1}) := -c(a)$  pour  $a \in D$  et

$$A_f := \{a : a \in A \text{ et } f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} : a \in A \text{ et } f(a) > \ell(a)\}.$$

Le graphe résiduel  $D_f$  est donc maintenant muni de coûts.

*5.1.3.2. Algorithme de Goldberg et Tarjan.* — On commence par fixer un *b*-flot (voir ci-dessous : comment trouver un *b*-flot réalisable). Le *coût moyen* d'un circuit  $C$  est défini par

$$\frac{\sum_{a \in C} c(a)}{|C|},$$

somme des coûts des arcs du circuit  $C$  divisée par le nombre d'arcs du circuit  $C$ .

On repète

Repérer un circuit  $C$  de coût moyen minimum dans  $D_f$ . S'il n'y en a pas, alors  $f$  est optimal. Sinon, on calcule  $\mu$  le plus grand possible qui permette d'« augmenter »  $f$  le long de  $C$  et on « augmente »  $f$  de la quantité  $\mu$ .

Le calcul de  $\mu$  se formalise par  $\mu := \min_{a \in C} u_f(a)$ . Augmenter  $f$  le long de  $C$  se fait de la manière suivante : si  $a \in C$  est dans le même sens dans  $A$  (i.e.  $a \in A$ ), alors on pose  $f(a) := f(a) + \mu$ ; sinon (i.e.  $a^{-1} \in A$ ), alors on pose  $f(a) := f(a) - \mu$ .

La difficulté de cet algorithme est de trouver un circuit de coût moyen minimum dans le graphe résiduel  $D_f$ . En fait, pour cela, on peut faire appel à un algorithme de Karp [19] qui trouve un tel circuit en  $O(nm)$ .

**Théorème 5.1.7.** — *On peut trouver un  $b$ -flot de coût minimum en  $O(n^2m^3 \log n)$ .*

Comme pour le problème du flot maximum, si les capacités sont entières, il existe une solution optimale entière, que l'on trouve sans plus de difficulté.

**Théorème 5.1.8.** — *Si toutes les capacités sont entières et tous les  $b(v)$  sont entiers, alors il existe un  $b$ -flot entier de coût minimum, et l'algorithme de Goldberg et Tarjan le trouve.*

Si l'on accepte d'avoir une complexité qui dépend de la taille des nombres de l'input (on parle alors d'algorithme *faiblement polynomial*), on peut avoir d'autres bonnes complexités. Par exemple, l'algorithme classique d'Edmonds et Karp [8] tourne en  $O(m(m+n \log n)L)$ , où  $L$  est le nombre maximum de bits pour coder un coefficient du problème.

**5.1.3.3. Comment trouver un  $b$ -flot réalisable.** — Remarquons d'abord que le cas où  $\ell(a) = 0$  pour tout  $a \in A$  est facile. En effet, en ajoutant une source fictive  $s$ , un puits fictif  $t$ , les arcs  $(s, v)$  avec capacité  $b(v)$  pour les  $v$  tels que  $b(v) > 0$  et les arcs  $(v, t)$  avec capacité  $-b(v)$  pour les  $v$  tels que  $b(v) < 0$ , l'existence d'un  $b$ -flot se résout par un algorithme de flot maximum, par exemple avec l'algorithme d'Edmonds et Karp ci-dessus.

Nous allons voir maintenant comment l'on peut toujours se ramener au cas  $\ell(a) = 0$  pour tout arc  $a$ . On fait la même transformation que ci-dessus, et on ajoute un arc  $(t, s)$  avec  $\ell(t, s) = 0$  et  $u(t, s) = +\infty$ . On cherche donc une circulation  $f(a)$  dans ce graphe. Montrons donc comment trouver une circulation dans un graphe dont les arcs sont munis de bornes inférieures  $\ell(a)$  et de bornes supérieures  $u(a)$ .

Une telle circulation par définition satisfait les contraintes suivantes

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) \quad \text{pour tout } v \in V,$$

$$\ell(a) \leq f(a) \leq u(a) \quad \text{pour tout } a \in A.$$

Posons  $f'(a) = f(a) - \ell(a)$ . On voit que le problème de l'existence de la circulation  $f(a)$  revient à celui de l'existence d'un flot  $f'$  satisfaisant

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} \ell(a) + \sum_{a \in \delta^+(v)} f'(a) = \sum_{a \in \delta^-(v)} \ell(a) + \sum_{a \in \delta^-(v)} f'(a) \quad \text{pour tout } v \in V,$$

$$0 \leq f'(a) \leq u(a) - \ell(a) \quad \text{pour tout } a \in A.$$

Ce dernier est un problème d'existence de  $b'$ -flot avec borne inférieure = 0, où

$$b'(v) := \sum_{a \in \delta^-(v)} \ell(a) - \sum_{a \in \delta^+(v)} \ell(a),$$

lequel est résolu par un problème de flot maximum, comme indiqué au début de cette discussion.

**Exemple : Conception d'un réseau de transport à moindre coût, d'après [6].** — Supposons que l'on souhaite calibrer un réseau de transport de façon à pouvoir assurer des livraisons depuis des sources jusqu'à des destinations. Pour chaque tronçon direct  $(u, v)$ , on connaît le coût  $c(u, v)$  d'établissement d'une liaison de capacité unitaire. Comment construire le réseau dont l'établissement soit de coût minimum ? On suppose que l'on connaît pour les sources, l'offre et pour les destinations, la demande.

Ce problème se modélise comme la recherche d'un  $b$ -flot de coût minimum. En effet, on cherche le  $b$ -flot de coût minimum, où les coûts sont donnés par les  $c(u, v)$  et  $b(v)$  est égal à l'offre si  $v$  est une source, et est égal à l'opposé de la demande si  $v$  est une destination. Noter que d'après le Théorème 5.1.8, on peut trouver une solution entière à ce problème, ce qui est commode si chaque tronçon ne peut avoir que des capacités unitaires.

**Exemple : Problème de l'affectation de tâches avec considération salariale.** — Dans le cas du problème de l'affectation des tâches, mettre de coûts sur les arcs dans la modélisation par les flots permet de prendre en compte des considérations salariale.

Soit le problème

### Problème de l'affectation de tâche avec salaires

**Donnée :**  $n$  tâches et leurs durées  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ;  $m$  employés et des sous-ensembles  $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$  qui correspondent aux employés compétents pour la tâche  $i$ ; un salaire horaire  $c_{ij}$  pour l'employé  $j$  lorsqu'il effectue la tâche  $i$ ; une durée limite  $T$  pour la réalisation de l'ensemble des tâches.

**Tâche :** Trouver des réels  $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$  pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, m\}$  tels que toutes les tâches soient finies en un temps inférieur à  $T$ , i.e. tels que  $\sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  et tels  $\max_{j \in \{1, \dots, m\}} \sum_{i: j \in S_i} x_{ij} \leq T$ . Minimiser le coût qu'il faut pour terminer toutes les tâches, i.e. la quantité  $C(x) := \sum_{j \in \{1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, n\}} c_{ij} x_{ij}$ .

On peut répéter la construction du graphe  $D$  comme dans la sous-section précédente, avec les mêmes capacités. Les coûts sont  $c(v_i, w_j) := c_{ij}$ ,  $c(s, v_i) := 0$  et  $c(w_j, t) := 0$ . Une simple application d'un algorithme de flot de coût minimum donne la solution.

## 5.2. Multiflots

Nous n'avons jusqu'à maintenant envisagé qu'un seul bien traversant le réseau. Dans de nombreuses applications (en particulier dans le transport), il y a plusieurs biens distincts qui utilisent le même réseau. On parle alors de multiflots.

Un multiflot se définit pour un couple de graphes orientés  $(D, H)$ , où  $D = (V, A)$  est le *graphe d'offre* et  $H = (T, R)$  avec  $T \subseteq V$  le *graphe de demande*. Le graphe  $D$  est muni de *capacités*  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Un *multiflot*  $f$  est une collection  $(f_r)_{r \in R}$ , où chaque  $f_r$  est un  $s$ - $t$  flot avec  $r = (s, t)$  dans  $R$ , telle que

$$\sum_{r \in R} f_r(a) \leq u(a) \quad \text{pour tout } a \in A.$$

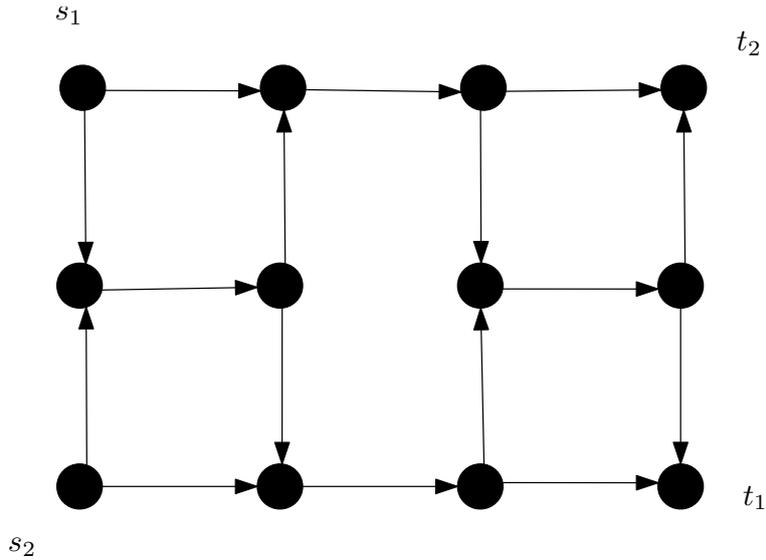


FIGURE 2. Contre-exemple à la propriété d'intégrité des multiflots

Différents objectifs peuvent être cherchés. On peut chercher à maximiser la quantité totale de biens transitant dans le réseau, i.e. la quantité  $\sum_{r \in R} \text{value}(f_r)$ . On peut fixer une *demande*  $d : R \rightarrow \mathbb{R}_+$  et se demander si le réseau permet de la satisfaire, i.e. s'il existe un multiflot  $f$  tel que pour tout  $r$  on ait  $\text{value}(f_r) = d(r)$ . On munit parfois les arcs de coûts  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$  et on cherche à satisfaire la demande au moindre coût, i.e. que l'on cherche le multiflot  $f$  tel que  $\text{value}(f_r) = d(r)$  pour tout  $r \in R$  avec  $\sum_{a \in A} (c(a) \sum_{r \in R} f_r(a))$  minimum.

Toutes ces questions peuvent être résolues en temps polynomial. En effet, elles se formulent comme des programmes linéaires.

L'intérêt de formuler un problème linéaire comme un problème de multiflot réside dans le fait qu'il existe des algorithmes plus efficaces pour le résoudre. Ces algorithmes dépassent largement le cadre de ce cours. Il faut simplement savoir que si un programme linéaire n'a que des  $0, \pm 1$  comme coefficients dans ses contraintes – c'est le cas pour les multiflots –, alors il existe des algorithmes plus efficaces que le simplexe ou les points intérieurs. Par exemple, Tardos a proposé tel un algorithme [23] qui est *fortement polynomial*, i.e. dont le nombre d'itérations ne dépend pas des valeurs prises par  $c$  ou  $d$ . En pratique, il existe des algorithmes encore plus efficaces, et polynomiaux, qui résolvent approximativement le problème (voir par exemple [11]).

Un autre intérêt réside dans la possibilité de faire de la *génération de colonnes* facilement. La génération de colonne dépasse aussi le cadre de ce cours, voir Chapitre 13.

En revanche, dans le cas des multiflots, des capacités entières n'impliquent plus forcément l'existence d'un flot de même valeur entier. L'exemple de la Figure 5.2 permet de s'en convaincre : les capacités sont supposées être égales à 1 sur tous les arcs, et la valeur de chaque flot est égale à 1. On peut voir que le seul flot possible n'est pas entier (on dit qu'il est *fractionnaire*).

Ce dont il faut se souvenir, c'est que si un problème peut être modélisé comme un problème de multiflot, il peut être bon de le souligner, et de chercher des méthodes qui exploitent cette propriété.

### 5.3. Exercices

#### 5.3.1. Valeur d'un $s$ - $t$ flot. — Prouver le Lemme 5.1.1.

**5.3.2. Formulation des problèmes de flots maximum sous forme de programme linéaire.** — Montrer que le problème de flot maximum s'écrit comme un programme linéaire. Ecrire son dual. Quelle remarque pouvez-vous faire ?

**5.3.3. Coupe minimum.** — On se donne un graphe orienté  $D = (V, A)$  avec une capacité  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Montrer que l'on peut trouver en temps polynomial l'ensemble  $X$  non vide tel que  $\sum_{a \in \delta^+(X)} u(a)$  soit minimal. (Attention : il n'y a pas de  $s$  et de  $t$  spécifiés).

**5.3.4. Combat sur un réseau.** — Un centre de commandement est situé en un sommet  $p$  d'un réseau non-orienté. On connaît la position des subordonnés modélisée par un sous-ensemble  $S$  des sommets du réseau. On souhaite détruire un nombre minimum de liens afin d'empêcher toute communication entre le centre de commandement et les subordonnés. Comment résoudre ce problème en temps polynomial ?

**5.3.5. Le problème des représentants – d'après Ahula, Magnanti et Orlin [1].** — Une ville à  $n$  citoyens,  $c$  clubs et  $p$  partis politiques. Chaque citoyen appartient à au moins un club, et à au plus un parti.

Le jour du renouvellement du conseil de la ville approche... Le nombre de conseillers du parti  $P_k$  ne doit pas excéder  $u_k$ . Or, chaque club doit nommer un représentant au conseil de la ville, et certains de ces représentants sont membre d'un parti politique... Un citoyen siégeant au conseil ne peut que représenter qu'un seul club. Proposer un algorithme polynomial permettant de décider si ces contraintes peuvent être satisfaites.

**5.3.6. Théorème de Menger.** — Démontrer le théorème suivant.

*Soit  $D = (V, A)$  une graphe orienté, et  $s$  et  $t$  deux sommets particuliers. Le nombre maximum de  $s$ - $t$  chemins arc-disjoints est égale à la cardinalité minimale d'un sous-ensemble d'arcs intersectant tout  $s$ - $t$  chemin.*

**5.3.7. Problème de transport de Monge bis.** — Montrer que le problème de transport de Monge (Exercice 2.6.9) se modélise comme un problème de flot de coût minimum.

**5.3.8. Flotte d'avions.** — Une compagnie aérienne a  $p$  vols à satisfaire. Pour chacun de ces vols  $i = 1, \dots, p$ , elle connaît son lieu  $o_i$  et son heure de départ  $h_i$ , la durée du vol  $t_i$  et le lieu d'arrivée  $d_i$ . De plus, le temps pour se rendre de  $d_j$  à  $o_i$  est connu pour chaque couple  $(i, j)$ . La compagnie souhaite minimiser le nombre d'avions tout en satisfaisant la demande en vols. Modéliser ce problème comme un problème de flot.

**5.3.9. Flotte d'avions bis.** — Une compagnie aérienne a la possibilité de satisfaire  $p$  vols. Pour chacun de ces vols  $i = 1, \dots, p$ , elle connaît son lieu  $o_i$  et son heure de départ  $h_i$ , la durée du vol  $t_i$ , le lieu d'arrivée  $d_i$  et le produit de la vente des billets. De plus, le temps pour se rendre de  $d_j$  à  $o_i$  est connu pour chaque couple  $(i, j)$ . Enfin, pour chaque vol  $(u, v)$ , le coût  $c(u, v)$  du vol est connu (frais, salaire, carburant). La compagnie souhaite maximiser son gain, sachant qu'elle dispose de  $K$  avions.

Modéliser ce problème comme un problème de flot.

**5.3.10. Remplissage d'un avion.** — Un avion capable d'embarquer au plus  $B$  passagers doit partir de l'aéroport 1 à destination des aéroports  $2, 3, \dots, n$  successivement. Le nombre de passagers voulant voyager de l'aéroport  $i$  à l'aéroport  $j$  (avec  $i < j$ ) est  $d(i, j)$  et le prix de ce trajet est  $p(i, j)$ . Combien de passagers faut-il prendre à chaque aéroport pour maximiser les recettes totales ? Modéliser ce problème comme un problème de flot.

**5.3.11. Gestion dynamique de stock, cas à 1 seul bien.** — On souhaite satisfaire une demande prescrite  $d_t$  pour chacune des  $T$  périodes  $t = 1, 2, \dots, T$ . Pour satisfaire la demande  $d_t$  sur la période  $t$ , on peut produire une quantité  $x_t \in \mathbb{R}_+$  sur la période  $t$  et/ou retirer une certaine quantité du stock  $y_{t-1} \in \mathbb{R}_+$  de la période  $t - 1$  (on suppose  $y_0 = 0$ ). On suppose de plus que la production sur la période  $t$  ne peut pas excéder  $P_t$ .

1. Justifier la dynamique du stock

$$(22) \quad y_t = y_{t-1} + x_t - d_t,$$

pour  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Sur la période  $t$ , le coût unitaire de stockage est  $s_t \geq 0$  et le coût unitaire de production est  $p_t \geq 0$ . On veut gérer le stock au coût minimum.

2. Montrer que ce problème se modélise comme un programme linéaire.

3. *Application numérique* : On considère les données du tableau suivant

$t =$	1	2	3	4
$d_t$	5	4	1	3
$s_t$	1	1	1	xxx
$p_t$	2	3	3	4
$P_t$	9	5	5	5

Indiquer le coût minimal de gestion de stock, ainsi que les niveaux de productions (en p.4 , des programmes linéaires sont donnés).

4. Montrer que ce problème peut également se modéliser comme un problème de  $b$ -flot de coût minimum. (Indication : introduire un sommet "source"  $v$  avec  $b(v) = \sum_{t=1}^T d_t$  et des sommets "puits"  $w_t$  avec  $b(w_t) = -d_t$  ; à vous d'indiquer les arcs, les coûts sur les arcs, les capacités sur les arcs, etc.) Justifier la modélisation.

5. Quel peut être l'intérêt d'une telle modélisation alors qu'on sait résoudre le problème avec un solveur de programmation linéaire ?

**5.3.12. Extraction de mine à ciel ouvert.** — Un domaine d'application de la recherche opérationnelle est l'exploitation des mines à ciel ouvert. Un problème important consiste à déterminer les *blocs* à extraire. Dans toute la suite, la mine sera assimilée à une collection de  $n$  blocs numérotés de 1 à  $n$ . L'extraction du bloc  $i$  rapporte la quantité  $c_i$  ; cette quantité peut être positive ou négative (en fonction de la quantité de minerai présent dans le bloc).

Les blocs ne peuvent pas être extraits dans n'importe quel ordre : pour chaque bloc  $i$ , on connaît l'ensemble  $Y_i$  des blocs qu'il faut avoir extraits pour pouvoir extraire le bloc  $i$ . L'objectif est de proposer un sous-ensemble de blocs à extraire de manière à maximiser le profit total.

Dans un graphe orienté, on dit qu'un ensemble  $S$  de sommets est *fermé* si tout successeur d'un sommet de  $S$  est encore dans  $S$ . Considérons le problème suivant.

**Le problème du fermé maximum.**

**Donnée :** Un graphe  $D = (V, A)$  orienté, des réels  $c_v$  pour tout  $v \in V$ .

**Tâche :** Trouver un sous-ensemble fermé  $S \subseteq V$  tel que  $\sum_{v \in S} c_v$  soit maximal.

1. Expliquez pourquoi le problème peut se modéliser sous la forme d'un problème de fermé maximum.

L'objectif va maintenant être de modéliser le problème du fermé maximum comme un problème de  $s$ - $t$  coupe de capacité minimale.

On construit un nouveau graphe  $\tilde{D} = (\tilde{V}, \tilde{A})$  en ajoutant un sommet source  $s$  et un sommet puits  $t$  à  $V$ . On note  $V^+ = \{v \in V : c_v \geq 0\}$  et  $V^- = \{v \in V : c_v < 0\}$ . L'ensemble  $\tilde{A}$  est alors  $A$  auquel on ajoute les arcs  $\{(s, v) : v \in V^+\}$  et les arcs  $\{(v, t) : v \in V^-\}$ . On met une capacité  $u_{(s,v)} = c_v$  pour  $v \in V^+$  et  $u_{(v,t)} = -c_v$  pour  $v \in V^-$ .

2. Quelles capacités  $u_a$  mettre sur les arcs  $a \in A$  de manière à ce que tout  $X \subseteq V$  tel que  $\delta_{\tilde{D}}^+(X \cup \{s\})$  soit une  $s$ - $t$  coupe de  $\tilde{D}$  de capacité minimale soit un ensemble fermé de  $D$ ?

3. Soit  $X \subseteq V$  un ensemble fermé de  $D$ . Montrez que

$$\sum_{a \in \delta_{\tilde{D}}^+(X \cup \{s\})} u_a = \sum_{v \in V^+} c_v - \sum_{v \in X} c_v.$$

4. En déduire que le problème du fermé maximum se modélise comme un problème de coupe minimale. Conclure sur la résolution pratique de problème.

## CHAPITRE 6

### GRAPHES BIPARTIS : PROBLÈME D'AFFECTATION, PROBLÈME DE TRANSPORT, MARIAGES STABLES

L'objectif de ce cours est d'étudier un objet central de l'optimisation discrète et d'en voir quelques applications parmi les plus importantes. Il s'agit des graphes bipartis.

#### 6.1. L'objet

Un *graphe biparti* est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux parties  $X$  et  $Y$  telles que toute arête a l'une de ces extrémités dans  $X$  et l'autre dans  $Y$ . Voir la Figure 1. On a la proposition suivante, très utile, dont la démonstration est laissée en exercice.

**Proposition 6.1.1.** — *Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de circuit de taille impaire.*

#### 6.2. Problème du couplage optimal

Rappelons qu'un couplage dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble d'arêtes  $M \subseteq E$  disjointes : quelles que soient  $e$  et  $f$  dans  $M$ , les arêtes  $e$  et  $f$  n'ont pas de sommet en commun. On note  $\nu(G)$  la cardinalité maximale d'un couplage d'un graphe  $G$ .

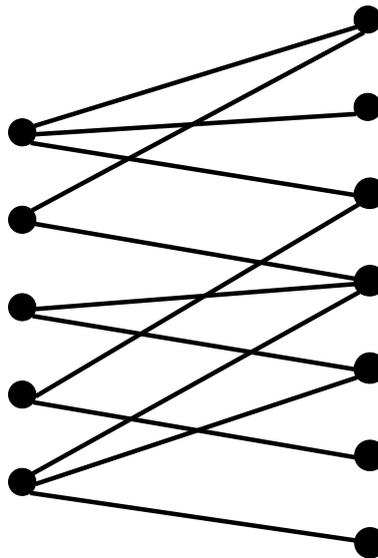


FIGURE 1. Un exemple de graphe biparti.

## Problème du couplage de poids maximum

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$  biparti avec des poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  sur les arêtes.

**Tâche** : Trouver un couplage de poids maximal.

Ce problème modélise typiquement des situations où l'on veut affecter des personnes à des tâches ou à des services. Le poids d'une arête  $uv$  représente alors le bénéfice obtenu en affectant  $u$  à  $v$ .

Le problème du couplage de poids maximum se résout en temps polynomial. En effet, ce problème peut se modéliser comme un problème de flot de coût maximum (qui est un problème de flot de coût minimum avec des coûts opposés) : on oriente toutes les arêtes de  $X$  vers  $Y$ , on ajoute un sommet  $s$  et un sommet  $t$ , on ajoute des arcs  $(s, v)$  pour  $v \in X$  et  $(v, t)$  pour  $v \in Y$  ; enfin, on ajoute un arc  $(s, t)$ , et on pose  $b(s) = |X| = -b(t)$  et  $b(v) = 0$  ailleurs. Enfin, les capacités des arcs sont partout  $= +\infty$  sauf sur les arcs  $(s, v)$  et  $(v, t)$  où elles sont égales à 1, et les coûts sont partout nuls sauf sur les arcs de  $X$  à  $Y$  où ils sont égaux aux poids  $w$ . C'est un problème de flot de coût maximum : en effet, tout flot entier induit un couplage de même poids ; et tout couplage induit un flot entier de même coût.

Tout algorithme trouvant des flots entiers de coût optimal trouve donc la solution (en particulier celui vu au chapitre précédent). En fait, il existe un algorithme plus efficace, appelé *algorithme hongrois*, découvert par Kühn en 1955 [20].

Soit  $G = (V, E)$  notre graphe biparti, avec les ensembles  $X$  et  $Y$  partitionnant  $V$  et n'induisant chacun aucune arête. On a de plus une fonction  $w$  de poids sur  $E$ . L'algorithme hongrois commence avec un couplage  $M = \emptyset$ . Ensuite, on répète

Créer le graphe orienté  $D_M$  de la façon suivante :

- Orienter chaque arête  $e$  de  $M$  de  $Y$  vers  $X$ , et définir  $l(e) := w(e)$ .
  - Orienter chaque arête  $e$  de  $E \setminus M$  de  $X$  vers  $Y$  et définir  $l(e) := -w(e)$ .
- Soit  $X_M$  (resp.  $Y_M$ ) les sommets de  $X$  (resp.  $Y$ ) qui ne sont pas couverts par une arête de  $M$ . S'il y a un chemin de  $X_M$  à  $Y_M$ , en chercher un plus court (pour la fonction  $l$ ), que l'on note  $P$ . Remplacer le  $M$  courant par  $M \triangle E(P)$  (où  $E(P)$  est l'ensemble des arêtes de  $P$ , et où  $B \triangle C$  représente les éléments présents dans exactement l'un des ensembles  $B$  ou  $C$ <sup>(1)</sup>).

L'algorithme s'arrête lorsqu'on ne peut pas trouver de chemin de  $X_M$  à  $Y_M$  dans  $D_M$ . On peut démontrer que  $M$  est alors un couplage de poids maximum.

Un lecteur attentif remarquera qu'il faut calculer un plus court chemin dans  $D_M$  qui est un graphe orienté avec des poids quelconques. Ce problème est **NP**-dur en général. Heureusement ici, on peut montrer que l'algorithme est tel que  $D_M$  ne contient jamais de circuit absorbant et que l'on peut donc calculer un tel plus court chemin avec la méthode Bellman-Ford vue au Chapitre 3.

Avec quelque subtilité d'implémentation, l'algorithme hongrois peut tourner en  $O(n(m + n \log n))$ . On a donc le théorème suivant (donné ici sans preuve).

**Théorème 6.2.1.** — *Le problème du couplage de poids maximal peut être résolu en  $O(n(m + n \log n))$ .*

---

1. On a donc  $B \triangle C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ ; on appelle cette opération la *différence symétrique* de  $B$  et de  $C$ .

Avec un algorithme de flot, on est en  $O(n^2m^3 \log n)$ .

Si on veut simplement trouver le couplage le plus grand (en nombre d'arêtes), on peut aller encore plus vite.

**Théorème 6.2.2.** — Dans un graphe biparti, on peut construire un couplage de cardinalité maximale en  $O(\sqrt{nm})$ .

Dans ce cas, on gardant la même modélisation par un graphe orienté (et en oubliant les coûts), on cherche le  $s$ - $t$  flot de valeur maximale, ce qui donne une complexité de  $O(nm^2)$ . Par une série d'astuces, non détaillées ici, et sans utiliser la modélisation par les flots, on arrive à la complexité donnée dans le théorème ci-dessus.

Le théorème max flot–min coupe permet également de montrer le théorème suivant, dû à König (la preuve est laissée en exercice). On rappelle qu'une *couverture par les sommets* dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble de sommets  $C \subseteq V$  tel que toute arête  $e$  de  $G$  soit incident à au moins un sommet de  $C$  et qu'on note  $\tau(G)$  la cardinalité minimale d'une couverture par les sommets.

**Théorème 6.2.3.** — Dans un graphe biparti, on a

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Rappelons que l'inégalité  $\nu(G) \leq \tau(G)$  est facile à montrer, voir Proposition 2.1.1. L'algorithme de Ford-Fulkerson permet par la même construction que celle utilisée dans la preuve de calculer une telle couverture optimale. Cela dit, il existe des algorithmes plus rapides.

### 6.3. Couplages généralisés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe biparti. Soient  $a, b : V \rightarrow \mathbb{N}$ , avec  $a(v) \leq b(v)$  pour tout  $v$ . On appelle *couplage généralisé* un ensemble d'arêtes  $F \subseteq E$  tel que  $a(v) \leq \deg_F(v) \leq b(v)$  pour tout  $v \in V$ , où  $\deg_F(v) = |\delta(v) \cap F|$  (on compte les arêtes de  $F$  incidentes à  $v$ ). On peut alors considérer le problème suivant.

#### Problème du couplage généralisé de poids maximum

**Donnée :** Un graphe  $G = (V, E)$  biparti, deux fonctions  $a, b : V \rightarrow \mathbb{N}$ , des poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Tâche :** Trouver un couplage généralisé de poids maximal.

Il se résout en temps polynomial par un algorithme de flot de coût minimum, avec une construction similaire à celle de la section précédente. Noter que si on ne veut que maximiser la cardinalité, on peut utiliser un algorithme de flot maximum (plus rapide), toujours avec la même construction.

**Exemple.** — On se place dans un centre de tri de palettes (plateforme logistique, aéroport, etc.). En début de journée, on a  $n$  palettes  $1, \dots, n$  à trier. La palette  $i$  contient  $a_i$  marchandises  $m_{i,1}, \dots, m_{i,a_i}$ . Chaque marchandise est caractérisée par une heure limite de tri  $t_{ij}$ , avec  $j \in \{1, \dots, a_i\}$ . Si la palette où se trouve la marchandise  $m_{ij}$  est triée avant l'heure  $t_{ij}$ , on gagne  $c_i$ , sinon, on perd  $d_i$ . On suppose que

- on dispose de  $k$  personnes pour trier,
- chaque personne met une heure pour trier une palette,

- on dispose de  $T$  créneaux d'une heure, sans contrainte sur le nombre de personnes pouvant travailler sur un créneau.

Trouver la stratégie qui minimise l'amende totale.

C'est un problème de couplage généralisé. En effet, on considère le graphe biparti suivant. D'un côté, on a les palettes  $1, 2, \dots$ , de l'autre les horaires  $1, 2, \dots, T$ . L'arête  $it$  modélise le fait qu'on trie la palette  $i \in \{1, \dots, n\}$  sur le créneau  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Si  $t \leq t_{ij}$ , on met un poids  $c_i$  sur l'arête  $it$ ; sinon, on met  $-d_i$ . On définit  $a(i) = b(i) = 1$  pour les palettes  $i = 1, \dots, n$ , signifiant qu'il faut trier chaque palette exactement une fois. On définit également  $a(t) = 0$  et  $b(t) = k$  pour le créneau  $t$ , signifiant qu'on ne peut pas trier plus de  $k$  palettes sur un créneau horaire.

#### 6.4. Problème de l'affectation optimale

Une situation classique où apparaît un graphe biparti est le problème de l'affectation. On dit qu'un couplage  $M$  est *parfait* lorsque tout sommet de  $G$  est incident à une arête de  $M$ .

##### Problème de l'affectation

**Donnée :** Un graphe  $G = (V, E)$  biparti avec des poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  sur les arêtes.

**Tâche :** Trouver un couplage parfait de poids minimal.

Ce problème apparaît dans quantité de situations. Comme précédemment, les sommets du graphe biparti peuvent être des employés d'une part et des tâches à effectuer de l'autre (on suppose qu'il y a autant d'employés que de tâches). Les poids peuvent modéliser le coût de réalisation de la tâche par un employé donné. On veut réaliser toutes les tâches avec un coût minimal, en supposant que tout employé peut réaliser n'importe quelle tâche.

**Théorème 6.4.1.** — *On sait résoudre le problème de l'affectation en  $O(n(m + n \log n))$ .*

Il y a de nombreux algorithmes qui résolvent ce problème avec cette complexité. On peut également appliquer l'algorithme hongrois auquel il a été fait mention ci-dessus. En effet, l'algorithme hongrois fait en fait mieux que trouver un couplage de poids maximum : il trouve, pour un  $k$  fixé, le couplage de cardinalité  $k$  de plus grand poids. Il suffit alors de multiplier par  $-1$  les poids et de chercher le couplage de cardinalité  $n/2$ .

#### 6.5. Mariages stables

Nous avons vu ci-dessus des problèmes d'affectation ou de couplage où l'on maximise une quantité globale. Dans de nombreuses situations, par exemple la création de binômes, on veut maximiser dans un certain sens une quantité locale (la satisfaction de chaque binôme). On sent bien qu'en général, on ne peut jamais satisfaire de manière optimale tout le monde, mais on a des notions qui s'en approchent, issues de l'économie ou de la théorie des jeux.

Nous présentons le plus célèbre des résultats de cette famille. Bien des généralisations sont possibles, à l'origine d'une littérature spécialisée abondante, mais elles ne seront pas évoquées ici.

Imaginons la situation suivante. On a  $m$  filles et  $n$  garçons et l'on veut former des mariages. Chaque fille accepterait éventuellement de se marier avec certains garçons, et elle a un ordre total de préférence sur ces garçons. De même, chaque garçon accepterait éventuellement de se marier avec certaines filles et a un ordre de préférence total sur ces filles. On modélise cela de la manière

suivante. Les filles et les garçons forment les sommets d'un graphe biparti  $G = (V, E)$ . Il y a une arête entre un sommet fille et un sommet garçon si l'un et l'autre accepteraient éventuellement de se marier ensemble. L'existence de l'ordre de préférence pour chaque fille et chaque garçon se traduit par l'existence d'un ordre total  $\prec_v$  sur  $\delta(v)$  pour tout  $v \in V$ .

Un ensemble de mariages est représenté par un couplage dans  $G$ . Un couplage  $M$  est dit *stable* si la condition suivante est satisfaite pour toute arête  $uv$  de  $G$  : si  $uv$  n'est pas dans  $M$ , alors il existe  $e \in \delta(u) \cap M$  avec  $uv \prec_u e$  ou il existe  $e \in \delta(v) \cap M$  avec  $uv \prec_v e$ . En d'autres termes, si une fille  $u$  et un garçon  $v$  ne sont pas mariés ensemble alors que l'un et l'autre seraient prêts éventuellement à l'être, c'est que l'un des deux est marié avec quelqu'un qu'il préfère. C'est une notion tout à fait naturelle de stabilité : un tel couplage stable ne conduira pas à des réarrangements locaux. Ce sont Gale et Shapley [9] qui ont imaginé ce concept en 1962 et ont prouvé le théorème suivant. Shapley a d'ailleurs obtenu le « prix Nobel » d'économie en 2012 pour ses travaux sur ce sujet. De nombreux domaines en ont en effet bénéficié : ces mariages stables ont été appliqués aux affectations d'internes dans des services hospitaliers, aux attributions de bourses, aux acceptations d'élèves dans les écoles préparatoires, etc.

**Théorème 6.5.1.** — *Il existe toujours un couplage stable dans un graphe biparti. De plus, un tel couplage se trouve en  $O(nm)$ .*

Ce qui est remarquable, c'est que la preuve est simple, algorithmique et peut se raconter sous la forme d'une histoire.

*Démonstration.* — Tous les matins, chaque garçon invite à dîner la fille qu'il préfère parmi celles qui ne lui ont pas déjà refusé une invitation. Chaque fille qui a été invitée dîne le soir avec le garçon qu'elle préfère parmi ceux qui l'ont invitée ce jour là, à condition bien sûr qu'elle accepterait éventuellement de se marier avec lui. Tout garçon qui a vu son invitation refusée par une fille décide de ne plus jamais l'inviter.

L'algorithme se poursuit tant qu'au moins une invitation change. Les couples qui ont dîné entre eux le dernier soir sont mariés.

Pour se convaincre que cet algorithme fournit un couplage stable, il faut d'abord remarquer que

*toute fille qui est invitée un soir à dîner est sûre de dîner le lendemain avec un garçon qui lui plait au moins autant.*

En effet, si une fille, disons Alice, est invitée à dîner par un garçon, disons Bob, c'est que Bob préfère Alice à toutes celles qui ne l'ont pas déjà refusé. Alice est donc sûre d'être réinvitée le lendemain par Bob, mais elle sera peut-être aussi invitée par de nouveaux garçons qui viennent d'essayer des refus et pour qui elle est désormais le meilleur choix restant. Peut-être que Charlie, l'un de ces nouveaux garçons, lui plaît plus que Bob, dans ce cas elle dînera avec Charlie, en congédiant Bob. Dans tous les cas, Alice dîne le lendemain avec un garçon au moins aussi plaisant.

Ensuite, on remarque que

*l'algorithme se termine.*

En effet, une invitation qui a été refusée ne sera jamais répétée. À chaque étape précédant la fin de l'algorithme, au moins une invitation est refusée. Le nombre d'étapes avant que la liste

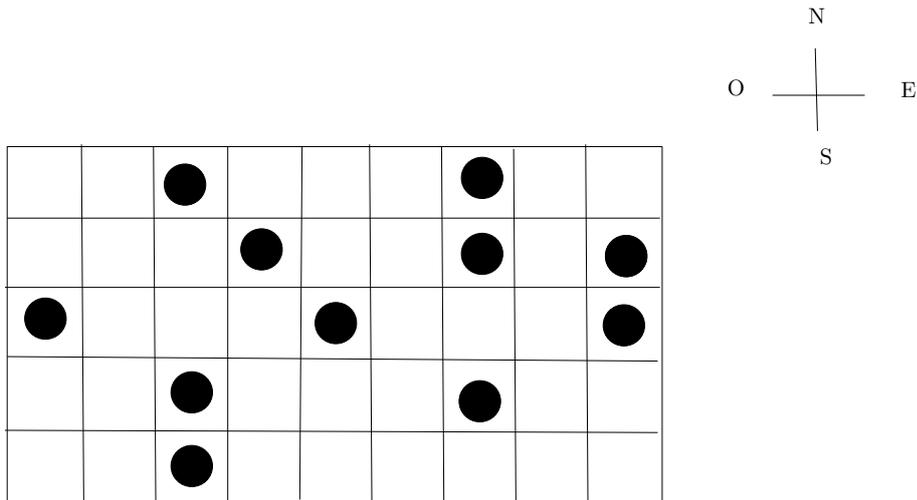


FIGURE 2. Des postes d'observation possibles.

des invitations ne se stabilise est donc borné par le nombre d'invitations possibles, i.e. par le nombre de filles fois le nombre de garçons.

Enfin, lorsque l'algorithme se termine,

*les mariages fournissent un couplage stable.*

En effet, considérons le mariage obtenu à l'issue de l'algorithme.

Supposons qu'Alice et Bob ne sont pas mariés ensemble et qu'Alice préfère Bob à son mari actuel. Cela implique que Bob ne l'a jamais invitée car sinon, en vertu de la remarque ci-dessus, son mari serait forcément mieux que Bob. Si Bob ne l'a jamais invitée, c'est qu'il est marié à une fille qu'il préfère à Alice.

Supposons qu'Alice et Bob ne sont pas mariés ensemble et que Bob préfère Alice à sa femme actuelle. Comme Bob fait ses invitations dans l'ordre décroissant de ses préférences, c'est qu'Alice a refusé une invitation de sa part, et donc qu'Alice, ce matin-là et les suivants, a reçu des invitations plus intéressantes de son point de vue.

Dans tous les cas, si Alice et Bob ne sont pas mariés ensemble, c'est que l'un des deux est mariés à quelqu'un qu'il préfère. L'ensemble des mariages est donc stable.  $\square$

## 6.6. Exercices

**6.6.1. Une caractérisation des graphes bipartis.** — Prouver la Proposition 6.1.1.

**6.6.2. Théorème de König.** — Prouver le Théorème 6.2.3.

**6.6.3. Positionnement de postes d'observation.** — Considérer le domaine de la Figure 2. Chaque point indique une position possible pour un poste d'observation. On veut que chaque poste d'observation ait la vue complètement dégagée dans les 4 directions cardinales (nord, sud, est, ouest) – deux postes d'observation ouverts ne peuvent donc ni se trouver sur la même ligne, ni se trouver sur la même colonne. On veut en ouvrir un nombre maximum. Proposer un nombre maximum dans le cas particulier de la Figure 2. Prouver la qualité de votre solution. Proposer la méthode générale (est-ce polynomial?).

## CHAPITRE 7

### QUE FAIRE FACE À UN PROBLÈME DIFFICILE ?

#### 7.1. Introduction

Jusqu'à présent nous avons vu un certain nombre de problèmes, certains **NP**-durs, d'autres polynomiaux. Pour les problèmes polynomiaux, nous avons discuté les algorithmes possibles pour les résoudre ; pour les autres, rien n'a été indiqué, ce qui pourrait laisser penser qu'on ne sait pas les résoudre. Bien entendu, c'est faux, et heureusement, car de nombreux (la plupart ?) problèmes industriels sont **NP**-durs.

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques méthodes générales, indépendantes du problème, que l'on peut employer lorsqu'on est confronté à un problème d'optimisation **NP**-dur, que l'on écrit sous la forme

$$(23) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{s.c.} & x \in X, \end{array}$$

où  $X$  est supposé fini mais très grand.

Un problème **NP**-dur est tel qu'il n'est pas possible (sauf si finalement il s'avérait que  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ ) de trouver en temps polynomial, i.e. raisonnable, la solution exacte pour toute instance. On peut donc soit relâcher la condition « solution exacte » et vouloir garder un temps raisonnable d'exécution, soit relâcher la condition sur le temps et garder le désir d'avoir une solution exacte.

La première option conduit aux *algorithmes approchés*, qui calculent en temps raisonnable des solutions qui sont proches de l'optimum. Ces algorithmes approchés sont des heuristiques ou des métaheuristiques. Une heuristique n'a de sens que pour un problème donné, c'est un algorithme *ad hoc* pour lequel le bon sens assure son fonctionnement en général. Il n'est pas toujours possible de garantir la qualité de la solution fournie par une heuristique et l'on est parfois obligé de les valider par des batteries de tests prouvant leurs efficacités de manière expérimentales. Nous verrons quelques exemples dans les chapitres suivants, mais il n'existe pas de schéma général qui permettent de dériver de tels algorithmes. Une métaheuristique est une méthodologie très générale pour concevoir un algorithme d'optimisation. Sa vocation est de pouvoir s'adapter à un grand nombre de problèmes d'optimisation, plus ou moins indépendamment de leur structure. Ce sera l'objet de la Section 7.3. Il est en général très difficile de garantir *a priori* leurs performances et l'on ne peut alors échapper à des validations expérimentales.

La seconde option conduit aux *algorithmes exacts*, comme ceux de *séparation et évaluation*, ou *branch-and-bound*, dont nous allons présenter le principe dans la Section 7.2. Plusieurs exemples

seront donnés aux cours des séances suivantes. Un branch-and-bound suppose l'existence de bonnes bornes sur la solution (borne inférieure si on minimise, borne supérieure si on maximise).

Dans un contexte industriel, un algorithme exact, dont le temps d'exécution peut être long, sera plutôt utilisé pour des questions stratégiques. Une heuristique ou une métaheuristique peut avoir des temps d'exécution très courts et sera donc plutôt utilisée pour des questions tactiques ou opérationnelles.

## 7.2. Séparation et évaluation ou branch-and-bound

**7.2.1. Description.** — On suppose que l'on dispose d'une fonction  $\lambda : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à toute partie  $Y$  de  $X$ , associe  $\lambda(Y) \leq \text{Min}_{x \in Y} f(x)$ . La quantité  $\lambda(Y)$  est donc une borne inférieure de  $f$  sur  $Y$ . On supposera de plus que  $\lambda$  se calcule "facilement" (par exemple, en temps polynomial).

Conceptuellement, l'algorithme maintient

- une collection  $\mathcal{Y}$  de parties de  $X$  telle que  $\bigcup \mathcal{Y}$  contient un minimum de  $f(x)$  sur  $X$
- la meilleure solution courante  $\tilde{x}$ .

Une itération est alors

Choisir une partie  $Y$  de  $\mathcal{Y}$ .

- Si  $Y$  est réduit à un singleton  $\{y\}$  : supprimer  $Y$  de  $\mathcal{Y}$  ; si  $f(y) < f(\tilde{x})$ , poser  $\tilde{x} := y$ .
- Sinon : partitionner  $Y$  en parties  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  ; supprimer  $Y$  de  $\mathcal{Y}$  ; faire : pour  $i = 1, \dots, s$ , si  $\lambda(Y_i) < f(\tilde{x})$ , poser  $\mathcal{Y} := \mathcal{Y} \cup \{Y_i\}$ .

L'idée principale du branch-and-bound réside dans cette dernière étape : il ne sert à rien de conserver la partie  $Y_i$  si  $\lambda(Y_i) \geq f(\tilde{x})$ . En effet, comme  $\lambda(Y_i) \leq \text{Min}_{x \in Y_i} f(x)$ , on n'est sûr que sur  $Y_i$  on ne parviendra pas à améliorer strictement la valeur de la fonction objectif. Il ne sert donc à rien d'explorer cette partie.

On représente souvent l'exploration de l'espace des solutions par une arborescence, dont les nœuds sont les  $Y$ , et les arêtes codent la partition (voir exemple ci-dessous).

On comprend qu'un algorithme de branch-and-bound marchera d'autant mieux que la borne  $\lambda$  sera bonne. La *branchement*, i.e. l'opération de partition de  $Y$  est également importante. Souvent, la structure du problème impose assez naturellement les façons de brancher. Enfin, le choix de la partie  $Y$  dans  $\mathcal{Y}$  peut également influencer la qualité de l'algorithme. Deux solutions classiques sont les suivantes :

- *En profondeur d'abord* : brancher toujours sur la dernière partie  $Y_i$  ajoutée à  $\mathcal{Y}$ . On va descendre très vite dans l'arborescence. Cela peut être utile par exemple si on n'a pas de bonne solution réalisable.
- *En largeur d'abord* : brancher toujours sur la partie  $Y$  telle que  $Y = \text{argmin}_{Y \in \mathcal{Y}} \lambda(Y)$ . C'est intéressant si  $\lambda$  est une bonne évaluation par défaut de  $f$ .

Nous allons maintenant voir deux exemples très classiques de calcul de borne, et nous appliquerons ensuite l'algorithme sur un exemple très simple, en guise d'illustration.

**7.2.2. Quelques exemples de calcul de bornes.** — Un grand champ d'application du branch-and-bound est la programmation linéaire en nombres entiers. Comme il va être vu ci-dessous, la programmation linéaire en nombres entiers est **NP**-difficile.

**Remarque importante.** — Il a déjà été noté que si un problème s'écrit sous la forme d'un programme linéaire avec des variables continues, il est inutile de procéder à l'implémentation d'un algorithme pour résoudre ce problème : il existe déjà de nombreux solveurs – libres ou commerciaux – utilisant l'algorithme de simplexe ou l'algorithme des points intérieurs. La même remarque vaut également en grande partie pour les programmes linéaires en nombres entiers : la plupart des solveurs comportent des branch-and-bound intégrés et très performants, voir l'annexe du polycopié. La partie informatique de la résolution du problème consiste alors principalement à écrire le problème dans un *langage de modélisation* simple d'utilisation (comme OPL, AMPL, GPL,...) que peut comprendre le solveur et à « appuyer sur le bouton » pour obtenir la solution. Implémenter son propre branch-and-bound pour un problème linéaire en nombres entiers peut cependant être justifié dans certains cas : par exemple, si le problème a une structure particulière qui n'est pas exploitée par ces solveurs, ou si le nombre de contraintes est exponentiel comme pour le problème du voyageur de commerce, voir Chapitre 11.

*7.2.2.1. Programmation linéaire en nombres entiers.* — Contrairement à la programmation linéaire où les variables prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$ , la programmation linéaire en nombres entiers, où les variables prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , n'est pas polynomiale. De façon générale, la programmation linéaire en nombre entiers se modélise, avec  $A$  une matrice  $m \times n$  à coefficients rationnels, et  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$  et  $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^n$

$$(24) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n. \end{array}$$

Même le cas suivant, où il n'y a qu'une seule contrainte, est **NP-dur**.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \end{array}$$

avec les  $w_i$  et  $W$  entiers. Il s'agit en effet du problème du sac-à-dos, vu au Chapitre 3.

Noter que les algorithmes du simplexe, des points intérieurs ou des ellipsoïdes ne peuvent absolument pas résoudre les programmes linéaires en nombres entiers, ils sont conçus uniquement pour les variables continues.

*7.2.2.2. Relaxation continue.* — Une borne inférieure à la valeur optimale  $v_{\text{plne}}$  de (24) s'obtient en relâchant la contrainte d'intégrité, i.e. en ne demandant plus à ce que  $\mathbf{x}$  soit à coordonnées entières. En effet, considérons

$$(25) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

et notons  $v_{\text{pl}}$  sa valeur optimale. Toute solution réalisable du programme (24) étant solution réalisable de (25), on a  $v_{\text{plne}} \geq v_{\text{pl}}$ .

**Exemple.** — On considère le programme

$$(26) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & -4x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + 8x_2 \leq 39 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

L'arborescence est donnée Figure 1. Remarquer que par deux fois, on évite l'exploration d'une sous-arborescence en utilisant la borne : une fois sur le noeud  $x_1 \leq 1$ , et l'autre fois sur le noeud  $x_1 \geq 4, x_2 \leq 3$ .

7.2.2.3. *Relaxation lagrangienne.* — Considérons le problème

$$(27) \quad \begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & x \in X \\ & g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = p + 1, \dots, p + q \end{aligned}$$

où  $f, g_1, \dots, g_{p+q}$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $X$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que si les fonctions  $g_i$  n'étaient pas présentes, le problème serait facile à résoudre. L'idée consiste à dualiser les contraintes  $g_i$  en écrivant le lagrangien (voir Section 2.3.5)

$$\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i g_i(x),$$

avec  $\lambda \in \Lambda := \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_+)^q$ .

Si on note  $v$  la valeur optimale de (27), on a toujours

$$(28) \quad v = \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{L}(x, \lambda) \geq \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \lambda) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}(\lambda),$$

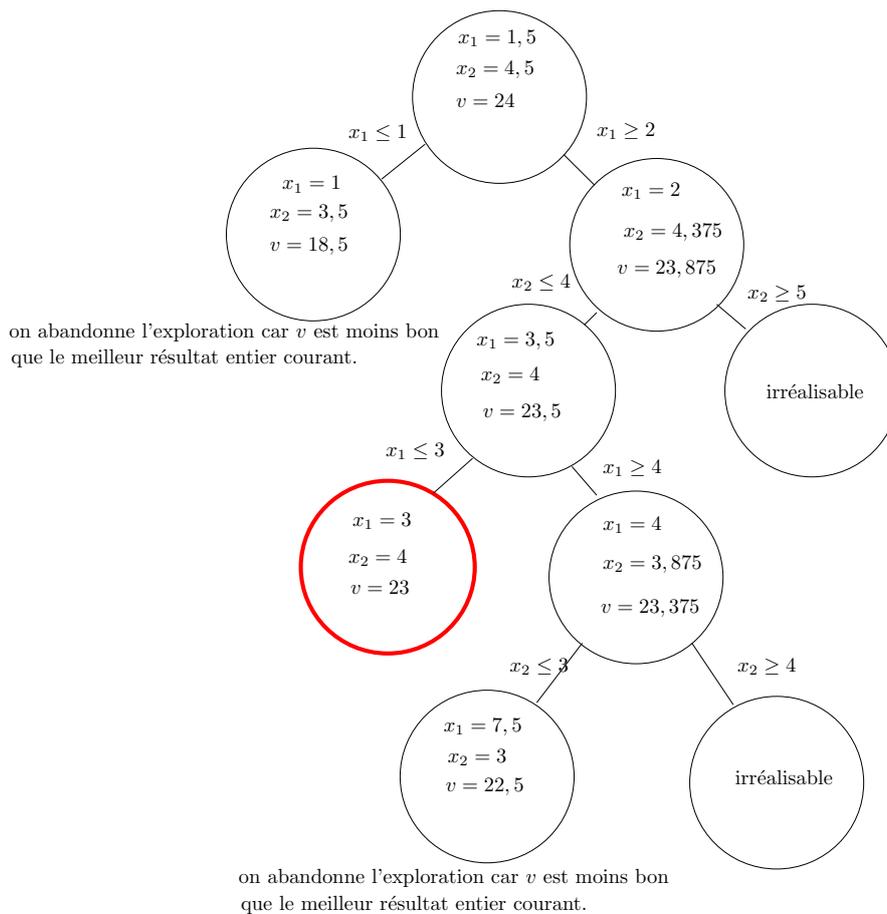


FIGURE 1. Un arbre de branch-and-bound.

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \Lambda &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) &\mapsto \inf_{\boldsymbol{x} \in X} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \end{aligned}$$

est la fonction duale. Elle est concave et affine par morceaux (car infimum de fonctions affines). L'idée de la *relaxation lagrangienne* est d'utiliser  $\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  comme borne inférieure. La question est donc de savoir calculer cette quantité. Pour cela on peut utiliser des techniques de l'optimisation non-différentiable, une méthode de sur-gradient par exemple<sup>(1)</sup>, qui nécessite principalement de savoir calculer un sur-gradient en tout point  $\boldsymbol{\lambda}$ . Cette méthode est décrite à la fin de cette section.

Rappelons qu'un *sur-gradient*  $\boldsymbol{p}$  de  $\mathcal{G}$  au point  $\boldsymbol{\lambda}$  est tel que

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\mu}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) \leq \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\mu} \in \Lambda.$$

En particulier, si  $\mathcal{G}$  est dérivable, le sur-gradient coïncide avec son gradient.

Heureusement, cela se fait facilement, grâce à la proposition suivante.

**Proposition 7.2.1.** — *Si  $X$  est fini, alors  $(g_i(\boldsymbol{x}))_{i=1, \dots, p+q}$  est un sur-gradient de  $\mathcal{G}$  au point  $\boldsymbol{\lambda}$  dès que  $\boldsymbol{x}$  réalise  $\inf_{\boldsymbol{x} \in X} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ .*

*Démonstration.* — Soit un tel  $\boldsymbol{x}$ . Pour tout  $\boldsymbol{\mu}$ , on a  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\mu}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{p+q} g_i(\boldsymbol{x})(\mu_i - \lambda_i)$ .  $\square$

Un des intérêts de la relaxation lagrangienne est contenu dans le théorème suivant (preuve omise).

**Théorème 7.2.2.** — *Pour un programme linéaire en nombres entiers, la borne obtenue par relaxation lagrangienne est toujours au moins aussi bonne que celle obtenue par relaxation linéaire.*

Cela dit, il existe beaucoup de cas où ces deux bornes coïncident. Cela n'empêche pas la relaxation lagrangienne d'être intéressante (comme dans l'exemple ci-dessous), car le calcul de  $\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  peut-être plus rapide que la résolution du programme linéaire.

**Exemple.** — Un exemple très classique est celui du plus court chemin avec contrainte de temps.

Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté, avec deux sommets  $s$  et  $t$ . A chaque arc  $a$  est associé un coût  $c_a \geq 0$  et un temps  $t_a \geq 0$ . On veut trouver le  $s$ - $t$  chemin le moins coûteux qui mette un temps inférieur à  $T$ . Ce problème se résout bien avec un branch-and-bound, utilisant des bornes fournies par la relaxation lagrangienne.  $X$  est alors l'ensemble des  $s$ - $t$  chemins,  $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{a \in A} c_a x_a$  et l'on a une seule contrainte du type  $g_i$ , c'est  $g(\boldsymbol{x}) := \sum_{a \in A} t_a x_a \leq T$ .

Ecrivons  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$ , défini pour  $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ .

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{a \in A} c_a x_a + \boldsymbol{\lambda} \left( -T + \sum_{a \in A} t_a x_a \right).$$

Donc

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) = -T\boldsymbol{\lambda} + \min_{\boldsymbol{x} \in X} \sum_{a \in A} (c_a + t_a \boldsymbol{\lambda}) x_a.$$

Le calcul de  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  se fait donc par un calcul de plus court chemin où les coûts des arcs sont non plus les  $c_a$  mais les  $c_a + \boldsymbol{\lambda} t_a$ . Ce calcul peut se faire par l'algorithme de Dijkstra car les poids

1. ou alors par la méthode des faisceaux, plus efficace mais qui dépasse le cadre de ce cours, voir [5].

sont positifs ou nuls, et la solution  $\mathbf{x}$ , injectée dans  $g$  donne la valeur  $-T + \sum_{a \in A} t_a x_a$ , cette dernière quantité étant alors le sur-gradient de  $\mathcal{G}$  en  $\lambda$  (d’après la Proposition 7.2.1). On sait donc calculer les sur-gradients de  $\mathcal{G}$ , donc on sait maximiser  $\mathcal{G}$  sur  $\Lambda = \mathbb{R}_+$ , donc on sait calculer de bonnes bornes inférieures pour notre problème, et on peut donc faire un branch-and-bound.

*Méthode de sur-gradient.* — Posons  $\Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} : \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i \geq p+1\}$ . Soit  $P_\Lambda$  la projection dans  $\Lambda$  définie par  $P_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}^+, \dots, \lambda_{p+q}^+)$ , avec la notation  $t^+ = \max(0, t)$ . Supposons que l’on veuille maximiser  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  sur  $\Lambda$ , avec  $\mathcal{G}$  concave. L’algorithme de sur-gradient consiste à construire la suite

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = P_\Lambda \left( \boldsymbol{\lambda}_k + \frac{\rho_k}{\|\mathbf{p}_k\|} \mathbf{p}_k \right),$$

où  $\boldsymbol{\lambda}_0$  est choisi arbitrairement dans  $\Lambda$ , où  $\mathbf{p}_k$  est un sur-gradient de  $\mathcal{G}$  au point  $\boldsymbol{\lambda}_k$ , et où  $(\rho_k)$  est une suite prédéterminée de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_k = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k = +\infty.$$

Lorsque  $\mathbf{p}_k$  vaut 0, l’algorithme s’arrête,  $\boldsymbol{\lambda}_k$  est alors le maximum de  $\mathcal{G}$ .

On peut montrer que l’algorithme converge vers le maximum de  $\mathcal{G}$ , mais la convergence est lente (le pas de convergence devant nécessairement tendre vers 0).

### 7.3. Métaheuristiques

Nous allons décrire quelques métaheuristiques, qui sont des méthodes générales d’exploration de l’espace des solutions réalisables, qui peuvent être décrites indépendamment du problème. Les métaheuristiques peuvent parfois donner de très bons résultats ou constituer la seule arme pour attaquer un problème ; il est donc nécessaire de les connaître lorsqu’on fait de la recherche opérationnelle. De plus, il est facile de contrôler leur temps d’exécution. Cela dit, leur implémentation dépend d’un certain nombre de paramètres dont les valeurs nécessitent beaucoup d’expérimentations. De plus, ces algorithmes n’ont généralement pas de garantie sur la qualité de la solution trouvée.

#### 7.3.1. Recherche locale. —

*7.3.1.1. Le principe.* — On cherche toujours à résoudre (23).

L’idée de la *recherche locale* est la suivante. On suppose connue une bonne solution réalisable de départ, trouvée par une heuristique quelconque. Ensuite, on essaie d’améliorer la solution courante en procédant à des “modifications” locales.

Plus précisément,

1. il faut définir sur  $X$  un graphe implicite (ce graphe ne sera jamais explicitement codé en machine), une solutions réalisable étant connectée à une autre solution réalisable si on passe de la première à la seconde par une modification autorisée. Pour une solution réalisable  $x$ , on note  $\Gamma(x)$  l’ensemble de ses voisins dans le graphe implicite, i.e. l’ensemble des solutions réalisables que l’on peut atteindre de  $x$  par une modification locale. Une condition nécessaire pour pouvoir trouver l’optimum global est que la solution réalisable de départ est dans la même composante connexe du graphe implicite que l’optimum cherché.
2. il faut aussi définir à quelle condition on modifie la solution courante. La solution consistant à modifier la solution courante si la modification a amélioré la valeur de  $f$  est naïve : en effet, un tel algorithme va “plonger” vers un optimum local, qu’il ne va plus quitter.

L'implémentation de la version naïve est donc : On part d'une solution réalisable  $x$ . Ensuite on répète

Si  $\{y \in \Gamma(x) : f(y) < f(x)\}$  est non vide, choisir  $y \in \Gamma(x)$  tel que  $f(y) < f(x)$  et poser  $x := y$ .

Puisqu'on a supposé  $X$  fini, l'algorithme se termine sur un  $x \in X$ , qui sera un minimum local de  $f$ .

Pour éviter de se retrouver bloqué sur n'importe quel minimum local, deux stratégies classiques sont employées, la *méthode tabou* et le *recuit simulé*, détaillées plus bas.

*7.3.1.2. Un exemple : la coloration de graphe.* — Considérons le problème de la coloration de graphe (voir Section 2.1.1.3). On veut colorer les sommets d'un graphe  $G = (V, E)$  de manière à ce que deux sommets voisins ont des couleurs distinctes, et en utilisant un nombre minimum de couleurs. C'est un problème **NP**-difficile.

Une recherche locale pour ce problème consiste à définir l'ensemble  $X$  des solutions réalisables comme l'ensemble des colorations propres et à considérer deux colorations propres comme voisines si elles diffèrent uniquement par la couleur d'un sommet. La fonction objectif est le nombre de couleurs utilisées. Cette approche a un inconvénient : la plupart des modifications n'implique pas un changement de la valeur de la fonction objectif. Avec la définition stricte de l'algorithme naïf ci-dessus, on se retrouve très vite bloqué sur des minima locaux. Même en acceptant des modifications à valeur constante de la fonction objectif, ou des modifications détériorant cette valeur (comme dans les métaheuristiques décrites ci-dessous), cela reste problématique car la fonction objectif donne peu d'information sur la direction à prendre.

Une façon plus efficace de résoudre le problème de la coloration [16] est de fixer un entier  $k$  et de résoudre le problème consistant à minimiser  $\sum_{i=1}^k |E[V_i]|$  sur l'ensemble des partitions  $V_1 \cup \dots \cup V_k$  de  $V$ . Rappelons que  $E[V_i]$  est l'ensemble des arêtes de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $V_i$ . Si l'on parvient à atteindre 0, on aura trouvé une coloration en au plus  $k$  couleurs : chaque partie  $V_i$  peut être vue comme l'ensemble des sommets de couleur  $i$  ; comme alors  $E[V_i] = \emptyset$ , on est sûr de ne pas avoir deux sommets de même couleur adjacents. La recherche locale résout extrêmement bien cette tâche : l'ensemble  $X$  des solutions réalisables est alors l'ensemble des partitions  $V_1 \cup \dots \cup V_k$  de  $V$ . La fonction objectif est  $\sum_{i=1}^k |E[V_i]|$ . On accepte de passer de passer d'une solution à une autre si le changement consiste modifier la couleur (l'appartenance à l'un des  $V_i$ ) d'un sommet appartenant à une arête dont les deux extrémités sont de couleur identique. Une dichotomie sur  $k$  permet de trouver *in fine* le nombre chromatique de  $G$ .

*7.3.1.3. Méthode tabou.* — La méthode tabou consiste à maintenir une liste  $L$  de solutions réalisables « tabous », dont la taille, constante, est un paramètre de l'algorithme. Si  $l$  est cette taille<sup>(2)</sup>, on commence par une solution réalisable  $x$  tabou. On choisit une liste  $L$  qui contient  $l$  autres solutions réalisables et on pose  $x^* := x$  ( $x^*$  est la meilleure solution courante). Ensuite, on répète

- choisir  $y$  minimisant  $f(y)$  sur  $\Gamma(x) \setminus L$
- enlever le premier élément de  $L$ , et ajouter  $x$  à la fin de  $L$ ,
- poser  $x := y$ ,
- si  $f(x) < f(x^*)$ , poser  $x^* := x$ .

---

2. par exemple  $l = 7$ .

Puisqu'on a supposé  $X$  fini, l'algorithme se termine avec  $x^* \in X$ , qui sera un minimum local de  $f$ . Rien n'assure qu'on se retrouve sur un optimum global.

*7.3.1.4. Recuit simulé.* — Le recuit simulé imite la pratique du recuit en métallurgie qui consiste à alterner de lents refroidissements et de réchauffages (recuits) pour minimiser l'énergie d'un matériau. L'algorithme maintient une température  $T$  qui va tendre vers 0, et les transitions d'une solution réalisable à une solution réalisable voisine auront lieu avec une probabilité dépendant de la différence de la valeur prise par  $f$  et de la température. Plus précisément, si on a choisi  $y$  voisin de  $x$ , la probabilité de passer effectivement de  $x$  à  $y \in \Gamma(x)$  sera, par analogie avec la physique <sup>(3)</sup>

$$\min(1, e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T}}).$$

Une fois fixée au préalable la suite  $T_k$  des températures (telle que  $T_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ ), on peut écrire l'algorithme. On part d'une solution réalisable  $x$ . Ensuite, on répète

Tirer un voisin  $y$  uniformément dans  $\Gamma(x)$ . Faire  $x := y$  avec la probabilité  $\min(1, e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T_k}})$ . Poser  $k := k + 1$ .

Plusieurs auteurs ont donné des conditions suffisantes pour que  $x$  tende en probabilité vers l'optimum global. Par exemple, Hajek [15] a donné une condition nécessaire et suffisante assez légère pour cette convergence en probabilité avec  $T_k$  de la forme  $\frac{\kappa}{\log 2+k}$ . Cette condition met en jeu les notions d'irréductibilité et de faible réversibilité des chaînes de Markov.

En pratique, on aime bien avoir  $T_k$  de la forme

$$T_k := T_0 \beta^k$$

(4) ou de la forme

$$T_k := \frac{1}{\alpha + sk}$$

avec  $\alpha$  et  $s$  des paramètres bien choisis. La plupart du temps, ces derniers sont déterminés expérimentalement.

**7.3.2. Algorithmes évolutionnaires, colonie de fourmi, etc.** — Il y a bien d'autres exemples de métaheuristiques. L'idée des *algorithmes évolutionnaires* est d'identifier les solutions réalisables à des individus et de coder ces solutions réalisables sur les chromosomes des individus. On autorise les individus à se croiser avec une probabilité d'autant plus grande que les individus sont de qualité. De plus ces individus peuvent muter. On part alors d'une population de taille fixée d'individus, et on laisse évoluer le tout. Ce qui est crucial ici, c'est le codage d'une solution réalisable sur les chromosomes et la nature du croisement, qui doit maintenir les avantages compétitifs de ses parents.

L'*algorithme de colonie de fourmis*, tout comme le recuit simulé ou les algorithmes évolutionnaires, cherche à imiter la nature dans la façon dont elle résout ses problèmes d'optimisation. Les fourmis pour trouver leur nourriture explorent au hasard l'espace des solutions, en ayant une toute petite vue locale, mais grâce à des échanges d'information (phéromones), elles parviennent à trouver la source de nourriture et à trouver le trajet le plus court. Une fourmi qui a trouvé de la nourriture revient à la fourmilière en déposant au sol des phéromones, qui s'évaporent au bout d'un certain temps. D'autre part, une fourmi qui part à la recherche de nourriture va

---

3. Pour un système fermé, à la température  $T$ , la probabilité d'être dans un état d'énergie  $E$  est de la forme  $\frac{e^{-\frac{E}{k_B T}}}{Z}$  où  $Z$  est la fonction de partition,  $k_B$  la constante de Boltzmann.

4. avec par exemple  $\beta = 0,93$ .

suivre préférentiellement ces phéromones au sol. Etant donnés deux chemins conduisant de la fourmière à la nourriture, le plus court sera donc plus attractif que le long car les fourmis qui l'empruntent déposent des phéromones plus fréquemment. L'algorithme va donc simuler l'exploration de l'espace des solutions par des fourmis, qui marqueront leur passage.

## 7.4. Exercices

**7.4.1. Borne inférieure par la relaxation lagrangienne.** — Prouver l'inégalité (28).

**7.4.2. Gestion dynamique de stock, cas à plusieurs biens.** — Cet exercice fait suite à l'exercice 5.3.11.

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas un seul bien, mais  $K$  biens, indicés par  $k = 1, 2, \dots, K$ . Pour chaque bien  $k$ , on a une demande  $d_{kt}$  sur chaque période  $t$ . On satisfait la demande en produisant  $x_{kt}$  de bien  $k$  sur la période  $t$  et/ou en prélevant une certaine quantité sur le stock  $y_{k(t-1)}$  de la période  $t - 1$ . On suppose que la production en période  $t$  pour le bien  $k$  ne peut pas excéder  $P_{kt}$ . De plus, on ne possède qu'une machine, et donc sur une période on ne peut produire qu'un seul type de bien. Le coût de production unitaire du bien  $k$  en période  $t$  est noté  $p_{kt}$ , et celui de stockage unitaire  $s_{kt}$ .

1. Ecrire la dynamique du stock dans ce cas-là.
2. En introduisant une variable  $z_{kt}$  qui indique si le bien  $k$  est produit sur la période  $t$ , proposer une contrainte linéaire (indicée par  $t$ ) qui empêche la production de plusieurs biens sur la période  $t$ .
3. Ecrire une contrainte (indicée par  $k$  et  $t$ ) qui limite la production du bien  $k$  en période  $t$ , en tenant compte du fait que si un autre bien  $k' \neq k$  est produit, alors la production du bien  $k$  doit être nulle.
4. Montrer que ce problème peut se modéliser comme un programme linéaire mixte en nombres entiers (mixte signifie que toutes les variables ne sont pas contraintes à être entières).

Dans une approche par branch-and-bound, on va chercher des bornes inférieures. Une solution est de procéder par relaxation lagrangienne.

5. Montrer qu'en relaxant les bonnes contraintes, le calcul des bornes inférieures par la relaxation lagrangienne se ramène à des calculs de gestion de stock à un seul bien, et expliquer comment calculer ces bornes dans le cas où les  $P_{kt}$  sont suffisamment grands.

6. Si les  $P_{kt}$  ne sont pas suffisamment grands, le problème à un seul bien est **NP-dur**. Proposer une solution pour le calcul de la borne inférieure par la programmation dynamique qui garde une complexité raisonnable.

**7.4.3. Extraction de mine à ciel ouvert – cas dynamique.** — On se remet dans le contexte de l'Exercice 5.3.12. On essaie cette fois de prendre en compte l'aspect dynamique. On cherche à déterminer la séquence d'extraction des *blocs* dans les mines à ciel ouvert. La mine est assimilée à une collection de  $n$  blocs numérotés de 1 à  $n$ , le bloc  $i$  ayant une masse  $m_i$ . On se place dans un contexte à horizon de temps fini. Le temps est discrétisé et est assimilé à des années  $\tau = 1, \dots, T$ . Un bloc  $i$  extrait l'année  $\tau$  entraîne un profit de  $c_{i,\tau}$  dollars. Cette quantité  $c_{i,\tau}$  peut éventuellement être négative si l'extraction du bloc  $i$  coûte plus qu'il ne rapporte. La dépendance en temps permet de tenir compte du taux d'actualisation, des tendances des cours boursiers, etc.

A l'année  $\tau$  donnée, on peut extraire plusieurs blocs, mais pas plus d'une masse totale  $M_\tau$ .

Les blocs ne peuvent pas être extraits dans n'importe quel ordre : pour chaque bloc  $i$ , on connaît l'ensemble  $Y_i$  des blocs qu'il faut avoir extraits pour pouvoir extraire le bloc  $i$ . Si le bloc  $i$  est extrait au cours de l'année  $\tau$ , tout bloc de  $Y_i$  doit être extrait au cours de l'année  $\tau$  ou avant. L'objectif est de proposer un sous-ensemble de blocs à extraire et les années auxquelles extraire ces blocs de manière à maximiser le profit total (on appelle cela un *plan d'extraction*).

On suppose maintenant que les  $c_{i,\tau}$  dépendent bien du temps. On parle alors du *cas dynamique*. Etant donné un plan d'extraction, on note  $x_{i,\tau} = 0$  si le bloc  $i$  est extrait strictement après l'année  $\tau$  et  $x_{i,\tau} = 1$  sinon. On tient à nouveau compte de la contrainte de masse.

1. Proposez un programme linéaire en nombres entiers qui modélise le cas dynamique, en utilisant les variables  $x_{i,\tau}$ . On posera de plus  $x_{i,0} = 0$  pour tout  $i$ . Justifiez votre réponse.

En pratique, ces programmes linéaires peuvent avoir un grand nombre de variables (le produit  $NT$  peut être grand). On va chercher dans la suite des méthodes pour améliorer les temps de calculs lorsqu'on donne un tel programme linéaire à un solveur.

2. Soit  $i^*$  et  $\tau^*$  tels que  $m_{i^*} + \sum_{k \in Y_{i^*}} m_k > \sum_{\tau'=1}^{\tau^*} M_{\tau'}$ . On dit alors que  $(i^*, \tau^*)$  est une *bonne paire*. Expliquez pourquoi toute solution réalisable du programme linéaire en nombres entiers de 1. satisfait  $x_{i^*,\tau^*} = 0$  lorsque  $(i^*, \tau^*)$  est une bonne paire.

3. Considérons deux blocs  $i^*$  et  $j^*$  et une année  $\tau^*$  tels que  $\sum_{k \in Y_{i^*} \cup Y_{j^*} \cup \{i^*\} \cup \{j^*\}} m_k > \sum_{\tau'=1}^{\tau^*} M_{\tau'}$ . On dit alors que  $(i^*, j^*, \tau^*)$  est un *bon triplet*. Expliquez pourquoi toute solution réalisable du programme linéaire en nombres entiers de 1. satisfait  $x_{i^*,\tau^*} + x_{j^*,\tau^*} \leq 1$  lorsque  $(i^*, j^*, \tau^*)$  est un bon triplet (on dira que cette contrainte est induite par le bon triplet).

4. Supposons que le solveur fonctionne par un branch-and-bound qui utilise les bornes de la relaxation continue (ou linéaire). On fixe à 0 les variables indicées par une bonne paire. On ajoute au programme linéaire en nombres entiers de 1. plusieurs contraintes induites par des bons triplets. Expliquez pourquoi cela ne change pas la solution optimale du programme linéaire en nombres entiers, et en quoi cela va améliorer les temps de calculs (au moins pour les grandes instances).

Deuxième PARTIE II

PROBLÉMATIQUES



## CHAPITRE 8

### REPLISSAGE DE CONTENEURS

Le thème de ce chapitre est le suivant : on a des objets et des conteneurs, comment remplir au mieux ? Écrit comme cela, le problème est assez imprécis. Nous allons nous focaliser sur deux problèmes particuliers qui rentrent dans la catégorie des problèmes de remplissage, le problème du *sac-à-dos* et celui du *bin-packing*. Le problème du sac-à-dos a déjà été vu au Chapitre 3, mais allons discuter d'autres aspects de ce problème.

Le problème du sac-à-dos dans sa version la plus simple peut se décrire informellement de la manière suivante : on a des objets de poids et de valeur variable ; on dispose d'un seul conteneur (le sac-à-dos) qui est muni d'une contrainte de poids ; remplir le conteneur de manière à maximiser la valeur des objets stockés.

Le problème du bin-packing dans sa version la plus simple peut se décrire informellement de la manière suivante : on a des objets de taille variée et un seul type de conteneur ; trouver le nombre minimum de conteneur permettant de tout stocker.

Ces problèmes ont des applications directes dans le domaine de la logistique : stocker des produits, remplir des camions, etc.

#### 8.1. Sac-à-dos

**8.1.1. Le problème.** — De façon formelle, le problème du sac-à-dos s'écrit

##### Problème du sac-à-dos

**Donnée** : des entiers  $n, w_1, \dots, w_n$  et  $W$ , et des réels  $c_1, \dots, c_n$ .

**Tâche** : trouver un sous-ensemble  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$  tel que  $\sum_{j \in S} w_j \leq W$  et  $\sum_{j \in S} c_j$  est maximum.

Cela peut s'interpréter de la manière suivante :  $W$  est la charge maximale du conteneur,  $w_i$  est le poids de l'objet  $i$ , et  $c_i$  sa valeur. On a  $n$  objets, mettre dans le conteneur un sous-ensemble  $S$  d'objets de valeur maximale, tout en respectant la contrainte de poids.

Les applications en logistique sont évidentes. Mais il existe bien d'autres domaines où ce problème se retrouve. Par exemple, en finance : on a un budget fini  $W$ , on a des produits financiers  $i$  coûtant chacun  $w_i$  et rapportant  $c_i$  sur l'année à venir ; maximiser le profit.

Comme d'habitude, commençons par cerner la complexité du problème.

**Théorème 8.1.1.** — *Le problème du sac-à-dos est NP-difficile.*

Nous avons déjà vu au Chapitre 3 qu'une façon commode de résoudre ce problème, si les  $w_i$  sont entiers (ce à quoi on peut toujours se ramener en changeant l'unité de mesure) et si  $W$  n'est pas trop grand, passe par l'utilisation de la programmation dynamique, laquelle fournit un algorithme pseudo-polynomial en  $O(nW)$ . Nous allons présenter d'autres façons de résoudre ce problème.

### 8.1.2. Formulation sous forme d'un programme linéaire et branch-and-bound. —

On peut modéliser le problème du sac-à-dos sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Remarquons que dans un sens ce programme linéaire en nombres entiers est le plus simple possible : chaque variable ne peut prendre que deux valeurs, et il n'y a qu'une seule contrainte.

La relaxation continue fournit une borne supérieure naturelle à la solution du programme précédent

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Pour la calculer (pour faire du branch-and-bound par exemple – voir ci-dessous), on pourrait bien sûr faire appel à l'algorithme du simplexe ou à l'algorithme des points intérieurs. Mais il existe un algorithme très simple, glouton, qui calcule la solution optimale du relâché continu.

On suppose que  $\sum_{j=1}^n w_j > W$ , sinon, le problème du sac-à-dos est trivial. Ensuite on fait

Classer les objets de façon à ce que

$$\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{w_n}.$$

Poser  $x_1 = x_2 = \dots = x_{\bar{j}} := 1$  avec  $\bar{j}$  le plus grand entier tel que  $\sum_{j=1}^{\bar{j}} w_j \leq W$ .

Poser  $x_{\bar{j}+1} := \frac{W - \sum_{j=1}^{\bar{j}} w_j}{w_{\bar{j}+1}}$ .

Poser  $x_{\bar{j}+2} = \dots = x_n := 0$ .

**Lemme 8.1.2.** — *Un tel  $\mathbf{x}$  est solution optimale du relâché continu.*

*Éléments de preuve.* — On prouve d'abord que si  $\mathbf{x}$  est optimal avec  $x_i < 1$ ,  $x_k > 0$  et  $i < k$ , alors  $c_i/w_i = c_k/w_k$ . Par conséquent, il existe une solution optimale avec un indice  $\bar{j}$  tel que  $x_i = 1$  pour tout  $i < \bar{j}$  (si  $\bar{j} \geq 2$ ) et tel que  $x_i = 0$  pour tout  $i > \bar{j}$  (si  $\bar{j} \leq n - 1$ ).  $\square$

On sait donc calculer une borne d'assez bonne qualité (relâché continu) en  $O(n \log(n))$ . Cette borne permet de mettre en place un branch-and-bound. Pour le branchement, c'est la technique usuelle pour les programmes linéaires en  $\{0, 1\}$  : fixer certaines variables à 0 et d'autres à 1.

**8.1.3. Une heuristique naturelle.** — La discussion précédente sur la relaxation linéaire permet de construire une heuristique très simple. Reprenons le  $\bar{j}$  calculé par l'algorithme qui résout le relâché continu. Chacun des ensembles  $\{1, \dots, \bar{j}\}$  et  $\{\bar{j} + 1\}$  est une solution réalisable. On prend celui de plus grande valeur.

Une solution construite ainsi a toujours une valeur  $\geq \frac{1}{2}OPT$ , où  $OPT$  est la valeur optimale. En effet,  $\sum_{j=1}^{\bar{j}+1} c_j$  est par définition de  $\bar{j}$  une borne supérieure de  $OPT$ .

## 8.2. Bin-packing

**8.2.1. Le problème.** — Le problème du bin-packing traite du cas où l'on a des objets de tailles variables et un seul type de conteneurs, et où l'on se demande comment utiliser un nombre minimum de conteneurs pour ranger tous les objets. Dans les formes les plus générales de ce problème, on peut aussi prendre en compte la forme des objets (on parle alors de bin-packing 2D ou de bin-packing 3D), des incompatibilités, etc.

Ce problème peut être parfois appelé aussi *cutting-stock*. En effet, les problèmes de découpes (de pièces de textile, métal, etc.), où l'on cherche à minimiser les pertes, se modélisent de façon similaire.

Ici, on se limite au cas le plus simple, 1D. C'est un cas déjà très utile en pratique, puisqu'il peut fournir des bornes, être utilisé en sous-routines, ou être appliqué tel quel (nombre min de CD-rom pour stocker le contenu d'un disque dur, découper des planches de longueurs variables dans des grandes planches de longueur fixée, découpe dans des bandes de tissu, etc.).

Le problème s'écrit alors formellement

### Problème du bin-packing

**Donnée :** Des entiers positifs ou nuls  $a_1, \dots, a_n, W$ .

**Tâche :** Trouver un entier naturel  $k$  minimum et une affectation  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  avec  $\sum_{i: f(i)=j} a_i \leq 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

**Théorème 8.2.1.** — *Le problème du bin-packing est NP-difficile.*

Non seulement il est NP-difficile, mais il existe encore de nombreuses instances de « petite » taille non résolue, ce qui justifie et motive largement des travaux de recherche dans ces domaines. Par exemple, considérons l'instance suivante, dont on ne connaît pas à ce jour la solution optimale<sup>(1)</sup>.

**taille de la boîte :** 150

**nombre d'objets :** 120

**taille des objets :** 100 22 25 51 95 58 97 30 79 23 53 80 20 65 64 21 26 100 81 98 70 85 92 97 86 71 91 29 63 34 67 23 33 89 94 47 100 37 40 58 73 39 49 79 54 57 98 69 67 49 38 34 96 27 92 82 69 45 69 20 75 97 51 70 29 91 98 77 48 45 43 61 36 82 89 94 26 35 58 58 57 46 44 91 49 52 65 42 33 60 37 57 91 52 95 84 72 75 89 81 67 74 87 60 32 76 85 59 62 39 64 52 88 45 29 88 85 54 40 57

**meilleure solution connue :** 51 boîtes.

1. source : la page web du professeur Eric Taillard <http://mistic.heig-vd.ch/taillard/>

Le défi est de trouver une solution en moins de 51 boîtes, ou alors de parvenir à montrer que 51 boîtes est la solution optimale. Nous allons décrire maintenant quelques heuristiques classiques (NEXT-FIT, FIRST-FIT, FIRST-FIT DECREASING), puis nous verrons les approches branch-and-bound.

### 8.2.2. Quelques heuristiques classiques. —

8.2.2.1. *NEXT-FIT*. — Je prends les objets les uns après les autres. Dès que l'objet  $i$  ne peut pas entrer dans la boîte courante, je passe à une nouvelle boîte.

De façon plus formelle :

Commencer par  $k := 1$ ,  $i := 1$  et  $S := 0$ . Répéter

Si  $S + a_i > 1$ , faire  $k := k + 1$  et  $S := 0$ . Sinon, faire  $f(i) := k$ ,  $S := S + a_i$   
et  $i := i + 1$ .

On a

**Théorème 8.2.2.** — *NEXT-FIT* fournit une solution *SOL* telle que

$$SOL \leq 2OPT - 1,$$

où *OPT* est la valeur d'une solution optimale.

*Démonstration.* — On prouve d'abord la borne suivante.

$$(29) \quad \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{W} \right\rceil \leq OPT.$$

Cette équation se montre en numérotant les boîtes de 1 à *OPT* dans la solution optimale. Ensuite, on note  $o(j)$  l'ensemble des indices  $i$  d'objet tels que l'objet  $i$  soit dans la boîte  $j$ . Les  $o(j)$  forment une partition de  $\{1, \dots, n\}$ . On a donc

$$\sum_{j=1}^{OPT} W \geq \sum_{j=1}^{OPT} \sum_{i \in o(j)} a_i = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Le fait que *OPT* soit entier permet de conclure (ajout des parties entières).

On veut prouver que le  $k$  fourni par *NEXT-FIT* est tel que  $k \leq 2OPT - 1$ . On va montrer que  $k \leq 2 \lceil (\sum_{i=1}^n a_i) / W \rceil - 1$  et utiliser la borne (29) pour conclure.

Pour  $j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  on a

$$\sum_{i: f(i) \in \{2j-1, 2j\}} a_i > W,$$

par définition de l'algorithme *NEXT-FIT*.

En sommant :

$$W \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor < \sum_{i=1}^n a_i,$$

qui peut se réécrire

$$\frac{k-1}{2} \leq \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{W} \right\rceil - 1,$$

ce qu'on voulait montrer. □

8.2.2.2. *FIRST-FIT*. — Je prends les objets les uns après les autres. Je mets l'objet  $i$  dans la boîte de plus petit rang où il peut entrer.

De façon plus formelle,

poser  $i := 1$ . Répéter :

$$\text{poser } f(i) := \min \left\{ j \in \mathbb{N} : a_i + \sum_{h < i: f(h)=j} a_h \leq W \right\}; \text{ poser } i := i + 1.$$

Poser  $k := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} f(i)$ .

**Théorème 8.2.3.** — *FIRST-FIT* fournit une solution  $SOL$  telle que

$$SOL \leq \left\lceil \frac{17}{10} OPT \right\rceil,$$

où  $OPT$  est la valeur d'une solution optimale.

La preuve de ce résultat, difficile, est omise. Ce que ce résultat indique et qui est vérifié en pratique, c'est que l'heuristique *FIRST-FIT* marche en général mieux que l'heuristique *NEXT-FIT*.

8.2.2.3. *FIRST-FIT DECREASING*. — Je trie d'abord les objets par  $a_i$  décroissant. Puis j'applique *FIRST-FIT*.

**Théorème 8.2.4.** — *FIRST-FIT DECREASING* fournit une solution  $SOL$  telle que

$$SOL \leq \frac{3}{2} OPT.$$

Tout comme pour le Théorème 8.2.3, la preuve de ce résultat est omise. C'est cette heuristique qui a en général les meilleurs résultats. L'avantage des deux premiers algorithmes sur ce dernier est qu'ils peuvent fonctionner *on-line*, ce qui signifie qu'on peut les faire tourner lorsque les objets arrivent les uns après les autres et qu'on ne connaît pas la taille des objets futurs.

### 8.2.3. Branch-and-bound. —

8.2.3.1. *Formulation PLNE*. — Pour l'approche branch-and-bound, la formulation sous forme d'un programme linéaire va s'avérer utile.

On suppose que l'on a  $K$  boîtes disponibles. Le problème du bin-packing peut alors s'écrire

$$(30) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{j=1}^K z_j \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^K y_{ji} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n a_i y_{ji} \leq W z_j \quad j = 1, \dots, K \\ & y_{ji}, z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, K \end{array}$$

où  $z_j = 1$  si la boîte  $j$  est utilisée et  $y_{ji} = 1$  si l'objet  $i$  est mis dans la boîte  $j$ .

8.2.3.2. *Relaxation continue*. — Comme d'habitude, la borne la plus naturelle s'obtient par relaxation continue :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{j=1}^K z_j \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^K y_{ji} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n a_i y_{ji} \leq W z_j \quad j = 1, \dots, K \\ & y_{ji}, z_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, K \\ & y_{ji}, z_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, K \end{array}$$

C'est un programme linéaire avec un nombre linéaire de contraintes, il n'y a donc pas de problème pour calculer la borne obtenue par relaxation continue.

8.2.3.3. *Relaxation lagrangienne.* — On peut faire de la relaxation lagrangienne en “oubliant” les contraintes  $\sum_{j=1}^K y_{ji} = 1$ .

On écrit le lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, z, \boldsymbol{\lambda}) := \sum_{j=1}^K z_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K y_{ji} - 1 \right).$$

Si on note  $v$  la valeur optimale du programme (30), c’est-à-dire la solution optimale de notre problème de bin-packing, on a toujours

$$v = \inf_{\mathbf{x} \in X} \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \inf_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \quad \Lambda &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) &\mapsto \inf_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \end{aligned}$$

est la fonction duale.

Rappelons que cette dernière est concave et affine par morceaux et que l’idée de la relaxation lagrangienne est d’utiliser  $\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  comme borne inférieure (ou même n’importe quel  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  proche de l’optimum).

Ici,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := \quad \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^K z_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^K y_{ji} - 1 \right) \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^n a_i y_{ji} \leq W z_j & j = 1, \dots, K \\ & y_{ji}, z_i \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, K \end{aligned}$$

se réécrit

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^K S_j$$

avec  $S_j := \min_{\mathbf{y}, z \in \{0,1\}} \{z + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i : \sum_{i=1}^n a_i y_i \leq W z\}$ .

On doit donc résoudre  $K$  problèmes de sac-à-dos

$$S_j := \min_{\mathbf{y}, z \in \{0,1\}} \left\{ z + \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i : \sum_{i=1}^n a_i y_i \leq W z \right\}.$$

On sait donc calculer  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  (assez) facilement et trouver les  $\mathbf{y}, z$  le réalisant. Et par conséquent, on sait calculer les sur-gradients de la fonction concave  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$ , et donc la maximiser.

### 8.3. Exercices

8.3.1. **Inégalités valides pour le sac-à-dos.** — On considère un problème de sac-à-dos avec  $a_1, \dots, a_n, b$  des réels positifs. On note  $S$  l’ensemble des solutions réalisables

$$S := \left\{ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \right\}.$$

On appelle *ensemble dépendant* tout ensemble  $C \subseteq \{1, \dots, n\}$  tel que  $\sum_{i \in C} a_i > b$ .

1. Montrer que tout  $\mathbf{x} \in S$  satisfait l’inégalité

$$\sum_{i \in E(C)} x_i \leq |C| - 1,$$

où  $E(C) = C \cup \{j : a_j \geq \max_{i \in C} a_i\}$ .

2. Expliquer l'intérêt de ce type d'inégalités dans une résolution d'un problème de sac-à-dos dans une approche branch-and-bound.

**8.3.2. Inégalités valides pour le bin-packing.** — On rappelle la modélisation PLNE du problème du bin-packing. On suppose que l'on dispose d'un stock de  $K$  boîtes de taille 1.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^K z_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^K y_{ji} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n a_i y_{ji} \leq z_j \quad j = 1, \dots, K \\ & y_{ji}, z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, K \end{aligned}$$

où  $z_j = 1$  si la boîte  $j$  est utilisée et  $y_{ji} = 1$  si l'objet  $i$  est mis dans la boîte  $j$ .

1. Montrer qu'en ajoutant les contraintes  $z_j \geq z_{j+1}$ , pour  $j = 1, \dots, K - 1$ , on continue à modéliser le problème du bin-packing.
2. Même question avec la contrainte  $\sum_{j=1}^K z_j \geq \lceil \sum_{i=1}^n a_i \rceil$ .
3. Expliquer l'intérêt de ce type d'inégalité dans une résolution d'un problème de bin-packing dans une approche branch-and-bound.

**8.3.3. Gros objets.** — Supposons qu'une instance  $a_1, \dots, a_n$  du bin-packing soit telle que  $a_i > \frac{1}{3}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . On suppose toujours que les conteneurs sont de taille 1.

1. Montrer comment modéliser ce problème de bin-packing comme un problème de couplage de cardinalité maximale dans un graphe.

2. Montrer comment en réalité on peut résoudre ce problème en  $O(n \log(n))$ .

**8.3.4. Calcul glouton de relâché continu de problème de sac-à-dos.** — Compléter la preuve du Lemme 8.1.2.



## CHAPITRE 9

### POSITIONNEMENT D'ENTREPÔTS

De nombreuses décisions économiques mettent en jeu la sélection ou le positionnement de dépôts, d'usines, de relais, d'hôpitaux, etc. afin de répondre de manière optimale à la demande.

#### 9.1. Formalisation

La version la plus simple du problème de positionnement d'entrepôts est la suivante.

#### Problème du positionnement d'entrepôts

**Donnée :** Un ensemble fini de clients  $\mathcal{D}$ , un ensemble fini d'entrepôts potentiels  $\mathcal{F}$ , un coût fixe  $f_i \in \mathbb{R}_+$  d'ouverture pour chaque entrepôt  $i \in \mathcal{F}$  et un coût de service  $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$  pour chaque  $i \in \mathcal{F}$  et  $j \in \mathcal{D}$ .

**Tâche :** Trouver un sous-ensemble  $X \subseteq \mathcal{F}$  (dits *entrepôts ouverts*) et une affectation  $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow X$  des clients aux entrepôts ouverts, de façon à ce que la quantité

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{\sigma(j)j}$$

soit minimale.

Un exemple d'input et d'output pour ce problème est donné Figures 1 et 2.

On dit qu'on est dans le cas *métrique* si

$$c_{ij} + c_{i'j} + c_{ij'} \geq c_{ij'} \quad \text{pour tout } i, i' \in \mathcal{F} \text{ et } j, j' \in \mathcal{D}.$$

C'est en particulier le cas lorsque les coûts de services  $c_{ij}$  sont proportionnels à la distance géométrique. Cette inégalité contient plus de termes que l'inégalité triangulaire classique, à laquelle elle ressemble. C'est dû au fait que les coûts ne sont pas nécessairement définis entre entrepôts ou entre clients.

Commençons par la question de la complexité.

**Proposition 9.1.1.** — *Le problème du positionnement d'entrepôts est NP-difficile, même dans le cas métrique.*

Nous allons un peu discuter des formulations sous forme de programmes linéaires en nombres entiers et parler rapidement de recherche locale.

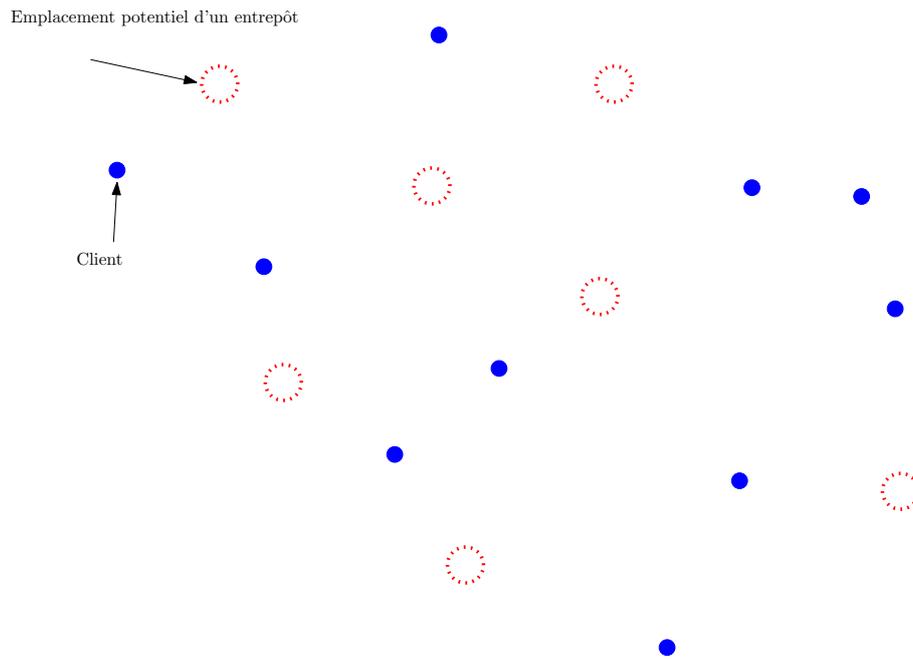


FIGURE 1. Les données d'un problème de positionnement d'entrepôts.

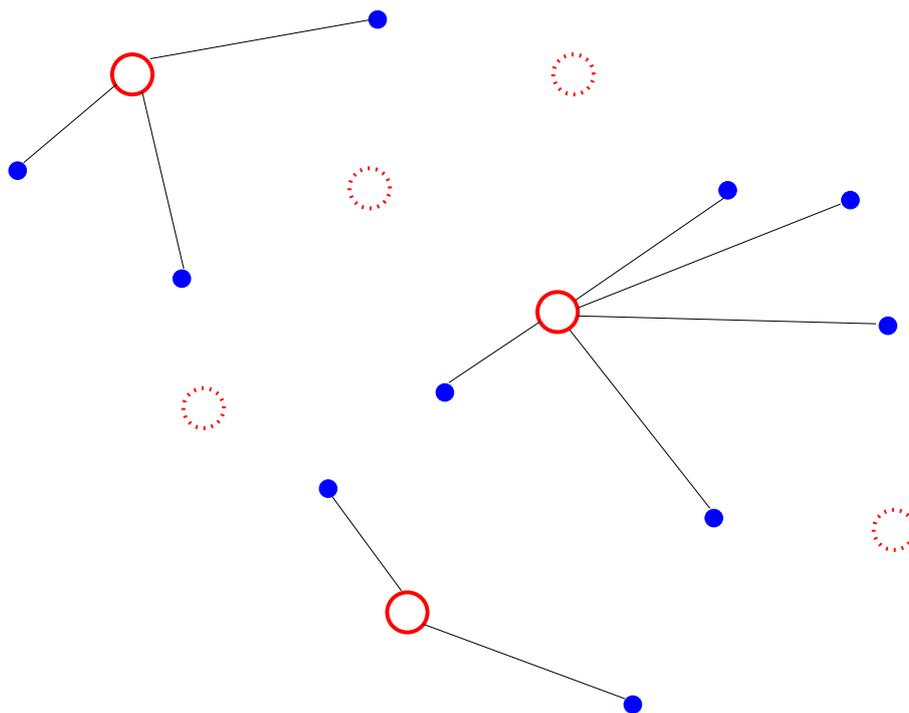


FIGURE 2. Une solution au problème du positionnement d'entrepôts.

## 9.2. Branch-and-bound

**9.2.1. Programme linéaire en nombres entiers.** — Une bonne façon de rechercher un schéma de branch-and-bound est de commencer par la modélisation sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers. Ici, le problème s'écrit facilement sous cette forme.

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i \in \mathcal{F}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & x_{ij} \leq y_i & i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} & (1) \\
& \sum_{i \in \mathcal{F}} x_{ij} = 1 & j \in \mathcal{D} & (2) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} & (3) \\
& y_i \in \{0, 1\} & i \in \mathcal{F}. & (4)
\end{aligned}$$

**9.2.2. Relaxation linéaire.** — On peut appliquer la technique du branch-and-bound dans sa version la plus classique. Le branchement se fait sur les choix de fixer à 0 ou à 1 certaines variables  $x_{ij}$  et  $y_i$ . Les bornes sont obtenues par le relâché continu :

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i \in \mathcal{F}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & x_{ij} \leq y_i & i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} & (1) \\
(31) \quad & \sum_{i \in \mathcal{F}} x_{ij} = 1 & j \in \mathcal{D} & (2) \\
& 0 \leq x_{ij} & i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} & (3) \\
& 0 \leq y_i & i \in \mathcal{F}. & (4)
\end{aligned}$$

**9.2.3. Relaxation lagrangienne.** — On peut également obtenir une borne inférieure par relaxation lagrangienne. Relâchons la contrainte (2)

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} x_{ij} = 1 \text{ pour } j \in \mathcal{F}.$$

On écrit le lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in \mathcal{F}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{D}} \lambda_j \left( 1 - \sum_{i \in \mathcal{F}} x_{ij} \right).$$

Notre problème consiste à résoudre

$$\min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{D}}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^{\mathcal{F}} : x_{ij} \leq y_i} \max_{\lambda_j \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Une borne inférieure à notre problème est donc fournie par

$$\max_{\lambda_j \in \mathbb{R}} \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{D}}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^{\mathcal{F}} : x_{ij} \leq y_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}),$$

c'est-à-dire, en posant

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{D}}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^{\mathcal{F}} : x_{ij} \leq y_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}),$$

on a  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  borne inférieure pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ , la meilleure borne étant

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$$

On veut donc être capable de calculer  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$ , i.e. de résoudre à  $\boldsymbol{\lambda}$  fixé

$$\min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{D}}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^{\mathcal{F}} : x_{ij} \leq y_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Il est facile de résoudre le programme :  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{D}}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^{\mathcal{F}} : x_{ij} \leq y_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})$ .

En effet on peut écrire

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j \in \mathcal{D}} \lambda_j + \sum_{i \in \mathcal{F}} d_i(\boldsymbol{\lambda})$$

avec

$$d_i(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{x_i \in \{0,1\}^{\mathcal{D}}, y_i \in \{0,1\}, x_{ij} \leq y_i} f_i y_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij}.$$

Chacun des  $d_i$  se calcule facilement. Il suffit de comparer la valeur obtenue en posant  $y_i = 0$  qui impose  $d_i = 0$  et celle obtenue en posant  $y_i = 1$  qui impose  $x_{ij} = 0$  si et seulement si  $c_{ij} \geq \lambda_j$ .

### 9.3. Recherche locale

Rappelons que la recherche locale consiste à mettre une notion de voisinage sur l'espace des solutions réalisables. Une fois ce voisinage défini, on peut facilement implémenter des métaheuristiques du type tabou, recuit simulé, etc. Dans le cas du positionnement d'entrepôts, il est très facile de définir un voisinage sur l'espace des solutions et les méthodes de recherche locale sont en général très efficaces.

Remarquons d'abord que l'espace des solutions peut être identifié à l'ensemble des parties  $X$  de  $\mathcal{F}$ . En effet, une fois  $X$  fixé, on a toujours intérêt à affecter le client  $j$  à l'entrepôt ouvert  $i \in X$  minimisant  $c_{ij}$ .

Ensuite, on dit que  $X'$  est *voisin* de  $X$  si l'on est dans une des ces situations

1.  $X' := X \setminus \{x\}$  pour un  $x \in X$ , (*drop*)
2.  $X' := X \cup \{x'\}$  pour un  $x' \in \mathcal{F} \setminus X$  (*add*) ou
3.  $X' := X \setminus \{x\} \cup \{x'\}$  (*swap*).

Dans le cas du problème de positionnement d'entrepôts, on a réalisé dans les années 2000 que la recherche locale était extrêmement efficace (plus que pour les autres problèmes de RO).

On a par exemple le théorème suivant [2]

**Théorème 9.3.1.** — *On se place dans le cas métrique. Si  $X$  est un minimum local pour le voisinage défini précédemment, alors  $X$  vaut au plus 3 fois l'optimum.*

En revanche, on n'a pas a priori d'évaluation du temps de calcul d'un optimum local.

### 9.4. Exercices

**9.4.1. Positionnement d'entrepôts avec capacité.** — On reprend le problème de positionnement d'entrepôts vu en cours, mais avec cette fois une contrainte supplémentaire : chaque entrepôt ne peut desservir qu'un nombre limité de clients. Modéliser le problème suivant comme un problème linéaire en nombres entiers.

**Donnée** : Un ensemble fini de clients  $\mathcal{D}$ , un ensemble fini d'entrepôts potentiels  $\mathcal{F}$ , un coût fixe  $f_i \in \mathbb{R}_+$  d'ouverture et une capacité  $K_i$  pour chaque entrepôt  $i \in \mathcal{F}$ , et un coût de service  $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$  pour chaque  $i \in \mathcal{F}$  et  $j \in \mathcal{D}$ .

**Tâche** : Trouver un sous-ensemble  $X \subseteq \mathcal{F}$  (dits *entrepôts ouverts*) et une affectation  $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow X$  des clients aux entrepôts ouverts, tel que pour tout  $i$ , l'entrepôt  $i$  ne desserve pas plus de  $K_i$  clients, de façon à ce que la quantité

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{\sigma(j)j}$$

soit minimale.

**9.4.2. Relaxation lagrangienne du problème de localisation d'entrepôt.** — On reprend la modélisation PLNE du problème de la localisation d'entrepôt.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i \in \mathcal{F}} f_i y_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{D}} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} & x_{ij} \leq y_i \quad i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} \quad (1) \\ & \sum_{i \in \mathcal{F}} x_{ij} = 1 \quad j \in \mathcal{F} \quad (2) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{D} \quad (3) \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i \in \mathcal{F}. \quad (4) \end{array}$$

Dans le cours, on a relâché la contrainte (2). Relâcher maintenant la contrainte (1) à la place de la contrainte (2) et montrer que la fonction duale se calcule encore très simplement.

**9.4.3. Positionnement d'entrepôts, forward logistique et reverse logistique.** — La logistique traditionnellement prise en compte est la logistique forward, qui concerne l'approvisionnement de clients à partir d'entrepôts, que nous appellerons dans cet exercice *entrepôts forward*. La logistique reverse concerne les retours (biens non consommés par le client) vers des *entrepôts reverse* chargés de traiter ces retours.

Pour de nombreuses raisons (environnementales, durée de vie plus courte des produits, vente à distance), la reverse logistique prend de l'importance dans le management de la supply-chain. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'implication que cela peut avoir dans la modélisation des problèmes de positionnement d'entrepôts.

On suppose donc que l'on dispose d'un ensemble  $I$  de positions potentielles d'entrepôts, et d'un ensemble  $J$  de clients. Les clients souhaitent s'approvisionner en un certain bien, dont la quantité est mesurée par un nombre réel.

Le coût d'ouverture d'un entrepôt forward en la position  $i$  est noté  $f_i \in \mathbb{R}_+$  et celui d'un entrepôt reverse  $r_i \in \mathbb{R}_+$ . La capacité d'un entrepôt forward en position  $i$  (ie la demande totale qu'il peut satisfaire) est notée  $b_i$  et la capacité d'un entrepôt reverse en position  $i$  (ie le retour total qu'il peut accepter) est notée  $e_i$ . Chaque client  $j$  a une demande  $h_j \in \mathbb{R}$ . De plus, chaque client  $j$  a un taux de retour  $\alpha_j \in [0, 1]$ , ce qui signifie qu'il renvoie une quantité  $\alpha_j h_j$  du bien. Le coût de transport d'une unité de bien d'un entrepôt  $i$  à un client  $j$ , ou d'un client  $j$  à l'entrepôt  $i$ , est  $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ .

Le bien étant supposé parfaitement fractionnable, un client peut être approvisionné par plusieurs entrepôts forward ; et de même, plusieurs entrepôts reverse peuvent être destination des retours d'un client. De plus, il est possible d'ouvrir au même endroit  $i$  en entrepôt forward et un entrepôt reverse.

1. Proposer une modélisation par la programmation linéaire mixte (avec des variables entières et des variables réelles) du problème de minimisation des coûts de conception d'un tel système, pouvant traiter toute la demande et tous les retours. Noter que ce problème se décompose en deux sous-problèmes indépendants : un pour le forward et l'autre pour le reverse.

On suppose maintenant que si on parvient à ouvrir un entrepôt forward et un entrepôt reverse au même endroit  $i$ , cela diminue le coût total d'ouverture des deux entrepôts d'une quantité  $s_i$ .

2. Modifier la modélisation précédente pour tenir compte de cette nouvelle possibilité, tout en restant dans la programmation linéaire mixte. Noter que les deux sous-problèmes ne sont plus indépendants.

3. Proposer une définition de l'espace des solutions et d'un voisinage et expliquer comment pourrait être construite une métaheuristique de type recherche locale à partir de cette définition.

4. Toujours dans le cas d'une métaheuristique de type recherche locale, comment adapter la méthode au cas où le bien n'est pas parfaitement fractionnable (les quantités seront donc des entiers) et que les  $\alpha_j h_j$ , les  $h_j$ , les  $b_i$  et les  $e_i$  sont entiers pour tout  $i$  et  $j$  ?

**9.4.4. Réduction du nombre d'entrepôts.** — Un grand groupe industriel dispose dans un pays de  $n$  entrepôts abritant des pièces de rechange. La direction souhaite fermer  $k$  entrepôts et transférer le contenu des entrepôts fermés dans les entrepôts restés ouverts qui disposent encore de place. Tous les entrepôts sont considérés comme identiques et possèdent une capacité de 1.

On note la quantité de pièces de rechange stockés dans l'entrepôt  $i$  par  $q_i$ . Cette quantité est assimilée à un réel dans  $[0, 1]$ . Le coût unitaire de transfert de l'entrepôt  $i$  à l'entrepôt  $j$  est noté  $c_{ij}$  : si l'on transfère  $x \in [0, 1]$  de l'entrepôt  $i$  à l'entrepôt  $j$ , cela coûte  $c_{ij}x$ . On suppose de plus que les coûts  $c_{ij}$  satisfont l'inégalité triangulaire

$$c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$$

pour tout triplet  $(i, j, k)$ . On posera  $c_{ii} = 0$  pour tout  $i$ . Noter que le contenu d'un entrepôt fermé peut très bien être réparti entre plusieurs entrepôts restés ouverts.

1. Écrire sous forme d'un programme linéaire en variables mixtes (entières et continues) le problème consistant à choisir les  $k$  entrepôts à fermer et le plan de transfert des pièces de rechange des entrepôts fermés vers ceux restés ouverts, tout en minimisant le coût total du transfert. Justifier en particulier les contraintes utilisées.

2. Expliquer pourquoi il est facile de voir si ce problème a une solution réalisable.

Il est maintenant demandé d'admettre que l'on peut assez facilement montrer que ce problème est **NP**-difficile (il contient le problème du dominant d'un graphe).

3. Ce problème étant **NP**-difficile, proposer une méthode raisonnable permettant de trouver l'optimum exact de ce problème (quelques lignes donnant le nom de la méthode et son principe sont suffisantes). Est-on certain de pouvoir obtenir l'optimum en quelques minutes ?

4. Y a-t-il des logiciels libres permettant de résoudre un tel problème avec cette méthode ? Si oui, en citer un.

On souhaite maintenant proposer une méthode du type "recherche locale" pour ce problème.

5. Quel peut être l'intérêt d'une telle méthode ?

6. Expliquer pourquoi une recherche locale pour ce problème peut limiter le codage des solutions au choix des  $k$  entrepôts fermés, sans précision sur les transferts. Donner le nom d'un problème traditionnel de recherche opérationnelle dont la résolution rapide permet un tel codage.

7. Proposer une définition du voisinage pour cette recherche locale.

**9.4.5. Positionnement d'ambulances.** — Pour diminuer le temps mis par les ambulances pour atteindre les victimes d'accidents, certains hôpitaux envisagent de les positionner de manière optimisée sur le département dont ils ont la charge. Considérons donc un certain hôpital ayant  $K$  ambulances. L'ensemble des communes est noté  $C$ . On dispose d'un ensemble  $S$  de points de stationnement potentiel et on suppose que  $|S| \geq K$ . Pour  $c \in C$  et  $s \in S$ , on note  $t_{s,c}$  le temps nécessaire à une ambulance positionnée en  $s$  pour atteindre  $c$ . Si  $S' \subseteq S$  est l'ensemble des points où sont positionnées les ambulances (avec bien sûr  $|S'| \leq K$ ), dans le pire des cas, une ambulance atteindra la commune où a eu lieu l'appel en un temps égal à  $\max_{c \in C} \min_{s \in S'} t_{s,c}$ . C'est ce temps maximum que l'hôpital souhaite rendre le plus petit possible.

1. Montrer que ce problème est **NP**-difficile. Indication : soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté ; on appelle *dominant* un sous-ensemble  $Y \subseteq V$  tel que tout  $v \in V$  est soit dans  $Y$ , soit à un voisin dans  $Y$  ; décider s'il existe un dominant de taille  $\leq K$  est **NP**-complet.

2. Démontrer que le programme linéaire suivant modélise le problème. Pour cela, procédez en deux temps : montrez que toute solution optimale du problème donne une solution de même

valeur au programme linéaire ; puis montrez que toute solution optimale du programme linéaire donne une solution de même valeur au problème.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & h \\
 \text{s.c.} \quad & \sum_{s \in S} y_s \leq K \quad (\text{i}) \\
 & \sum_{c \in C} x_{s,c} \leq |C| y_s \quad s \in S \quad (\text{ii}) \\
 & \sum_{s \in S} x_{s,c} = 1 \quad c \in C \quad (\text{iii}) \\
 & t_{s,c} x_{s,c} \leq h \quad s \in S; c \in C \quad (\text{iv}) \\
 & x_{s,c} \in \{0, 1\} \quad s \in S; c \in C \quad (\text{v}) \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad s \in S \quad (\text{vi}) \\
 & h \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{vii})
 \end{aligned}$$

Un tel programme linéaire se résout par branch-and-bound. La borne dont on se sert alors peut être celle obtenue en relâchant les contraintes d'intégrité de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{y}$ . On se propose de voir si l'on peut également obtenir des bornes par relaxation lagrangienne.

3. Ecrire le programme d'optimisation obtenu lorsqu'on procède à la relaxation lagrangienne de la contrainte (ii).

4. Montrer que ce programme se ramène à deux programmes distincts et indépendants, l'un ne mettant en jeu que les variables  $\mathbf{y}$ , l'autre ne mettant en jeu que les variables  $\mathbf{x}$  et  $h$ .

5. Montrer que chacun de ces deux programmes se résout en temps polynomial.

6. Expliquer pourquoi la polynomialité de ces deux programmes permet d'espérer un calcul efficace d'une borne inférieure au programme linéaire de la question 2.



## CHAPITRE 10

### ORDONNANCEMENT INDUSTRIEL

Dans un contexte de tâches ou d'opérations à effectuer sous des contraintes de temps et de ressource, un problème d'*ordonnancement* consiste à donner les instants auxquels commencer les tâches, en vue d'optimiser un certain critère. Dans l'industrie, dans le bâtiment, sur les gros chantiers, les problèmes d'ordonnancement sont souvent très présents, et de leur solution peut dépendre la réussite du projet. Nous verrons que pour une certaine famille de problèmes d'ordonnancement (les problèmes d'*atelier*), les problèmes sont non seulement **NP**-difficiles, mais même mal résolus en pratique.

#### 10.1. Préliminaires

De manière un peu générique, un problème d'ordonnancement se formule avec des *tâches*, qui elles-mêmes se découpent éventuellement en *opérations*. Etant données des *contraintes*, on appellera *ordonnancement* la donnée des instants auxquels commencent les différentes tâches ou opérations.

Les *contraintes de temps* peuvent être de deux natures :

- Durées des tâches
- Précédences

Les *contraintes de ressource* peuvent également être de deux natures :

- *Disjonctive* : « si les tâches  $i$  et  $j$  sont effectuées sur la machine  $k$ , elles doivent être faites dans tel ordre »
- *Cumulative* : « la tâche  $i$  consomme  $a_{ik}$  de la ressource  $k$ . La ressource  $k$  a une capacité  $A_k$ . A tout instant, la somme des consommations sur la machine  $k$  doit être inférieure à sa capacité. »

Les critères à optimiser peuvent être variés. Exemples :

- *Coût* : Coût total de l'ordonnancement. Cela suppose défini le coût d'affectation d'une tâche  $i$  sur une machine  $k$ .
- *Makespan* : Temps pour effectuer l'ensemble des tâches.
- *Temps moyen* : Temps moyen mis par une tâche pour être traitée. Son intérêt peut être varié. Par exemple si le problème d'ordonnancement s'insère dans un processus plus grand, ce genre de critère peut être intéressant.

Une façon commode de représenter un ordonnancement est le *diagramme de Gantt* : en abscisse, on met le temps, et on ordonne, les différentes tâches. Sur chaque ligne repérée par une tâche, on met des intervalles qui occupent les instants pendant lesquels la tâche est traitée. Un exemple est donné Figure 1.

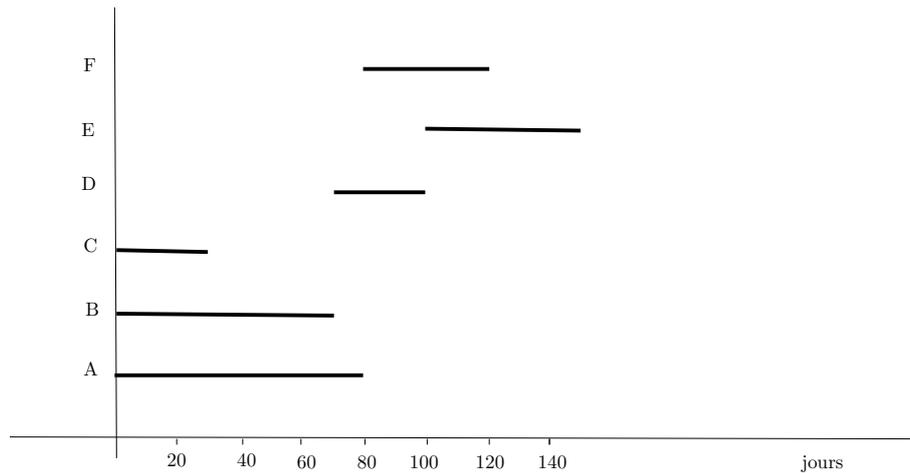


FIGURE 1. Le diagramme de Gantt qui correspond à l'exemple de la section qui suit.

## 10.2. Management de projet

Lorsqu'on a un projet à conduire et différentes tâches à effectuer, connaissant la durée des tâches et les relations de précédence, une question naturelle est celle de la durée minimale du projet. Différentes méthodes peuvent être utilisées, certaines informelles, en jouant avec le diagramme de Gantt, d'autres exactes, comme la méthode PERT ou la méthode potentiel-tâches. C'est cette dernière que nous allons maintenant présenter.

On se donne une collection  $I$  de tâches, pour chaque tâche  $i$ , on se donne sa durée  $d_i$ , et des contraintes par rapport aux autres tâches de cette forme : « la tâche  $i$  ne peut commencer que lorsque  $r\%$  de la tâche  $j$  au moins a été effectué ».

On veut trouver

- la durée minimale du projet.
- *les tâches critiques* : les tâches pour lesquelles une modification de l'instant de début rallonge la durée du projet.
- *les marges* : la marge d'une tâche est l'intervalle de temps sur lequel on peut faire démarrer la tâche sans rallonger la durée du projet. En particulier, une marge nulle signifie une tâche critique.

On modélise ce problème sous la forme d'un graphe dont les sommets sont les débuts des tâches et les arcs sont les relations de précédence. On ajoute deux tâches fictives : **Début** et **Fin**. De plus, chaque arc  $(u, v)$  est muni d'une longueur égale à la durée minimale séparant le début de  $u$  de celui de  $v$ .

La première remarque que l'on peut faire est la suivante

*Si ce projet a un sens, le graphe est acircuitique.*

En effet, un circuit traduirait l'obligation de remonter dans le temps. Considérons l'exemple suivant.

Tâches	Description	Durée (j)	Contraintes
$A$	Construction voie ferrée	80	Début
$B$	Forage des puits	70	Début
$C$	Construction logements provisoires	30	Début
$D$	Pompage de l'eau (Fonds de mine)	30	$B$
$E$	Aménagement fonds + ascenseurs	50	$A, D$
$F$	Construction logements définitifs	40	$A, C$

On fait la modélisation décrite ci-dessus : voir Figure 2.

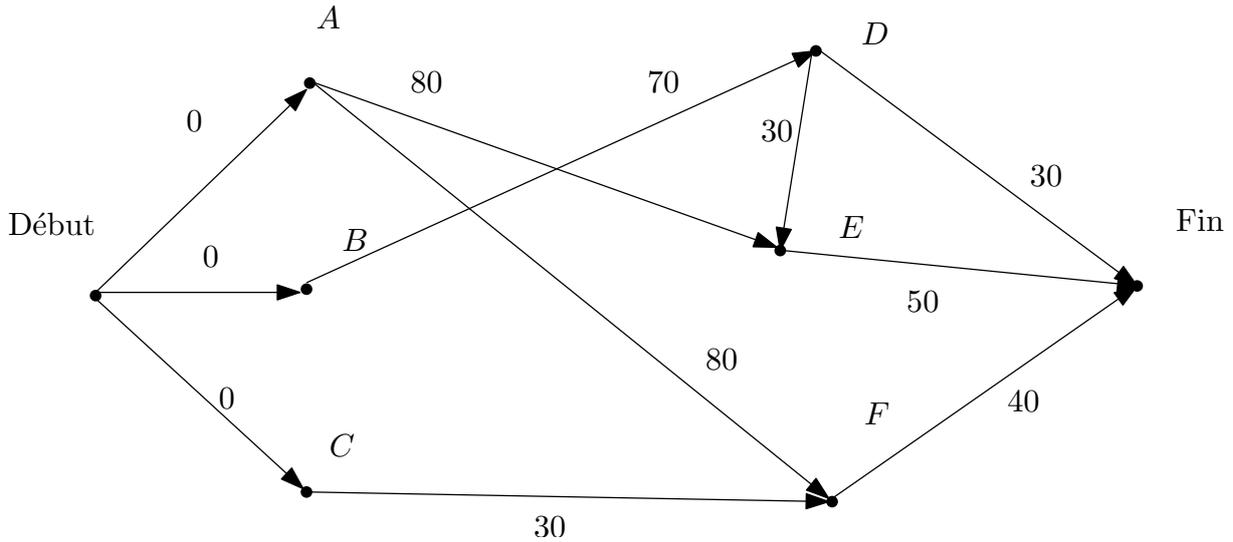


FIGURE 2. Le graphe de la méthode potentiel tâche.

Notons  $t_I$  et  $t'_I$  les instants au plus tôt et au plus tard auxquels commencer la tâche  $I$ .

**Proposition 10.2.1.** —  $t_I$  est la longueur du plus long chemin de **Début** à  $I$ .  $t'_I$ , c'est  $t_{\text{Fin}}$  moins la longueur du plus long chemin de  $I$  à **Fin**.

*Démonstration.* — En effet,

- pour chaque tâche  $I$ , on ne peut pas commencer avant la somme des longueurs des arcs du plus long chemin de **Début** à  $I$ .
- on faisant débiter chaque tâche  $I$  précisément à la somme des longueurs des arcs du plus long chemin de **Début** à  $I$ , on peut commencer chaque tâche à l'instant  $t_I$ .

De même pour  $t'_I$ . □

Pour trouver la durée minimale du projet, les tâches critiques, etc. il faut donc savoir calculer les plus longs chemins dans un graphe acircuitique  $D = (V, A)$ , muni d'une longueur  $l : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Cela se fait par la programmation dynamique, comme nous l'avons vu au Chapitre 3. Si on note  $\eta_I$  la longueur du plus long chemin de **Début** à  $I$ , on peut écrire (équation de Bellman)

$$\eta_I = \max_{(J,I) \in A} (\eta_J + l(J,I)).$$

On peut calculer tous les  $\eta_I$  en  $O(m)$  où  $m$  est le nombre d'arcs. On peut calculer de même les  $\pi_I$ , plus longs chemins de  $I$  à **Fin**. On pose alors  $t_I := \eta_I$ ,  $t'_I := t_{\text{Fin}} - \pi_I$  et la marge  $m_I := t'_I - t_I$ . Les *chemins critiques* sont les plus longs chemins de **Début** à **Fin**; toutes les tâches d'un chemin critique sont caractérisées par une marge nulle.

### 10.3. Ordonnancement d'atelier

**10.3.1. Introduction.** — Un problème d'ordonnancement d'atelier se décrit sous la forme d'un ensemble de tâches  $J_1, \dots, J_n$  et d'un ensemble de machines  $M_1, \dots, M_m$ . Une tâche  $j$ , pour être réalisée, nécessite son exécution sur différentes machines successivement. Le temps d'exécution de la tâche  $j$  sur la machine  $k$  est une donnée du problème et se note  $p_{jk}$ . L'exécution d'une tâche  $j$  sur une machine  $k$  s'appelle une *opération*, on parle également de *passage* de la tâche  $j$  sur la machine  $k$ .

Dans ce cours, on fait de plus les suppositions suivantes.

- Chaque tâche passe exactement une fois sur chaque machine. (Quitte à accepter des temps d'exécution nuls, cela est sans perte de généralité.)
- Deux tâches ne peuvent passer simultanément sur une machine.
- A l'exception du cas traité dans la Section 10.3.3.5, le passage d'une tâche sur une machine doit se faire d'une traite. En d'autres termes, une opération, une fois commencée, ne peut être interrompue. On dit qu'on est dans le cas *non-préemptif*.

Il y a trois modèles de base pour les problèmes d'ordonnancement d'atelier.

- *flow-shop* : Toutes les tâches doivent passer sur les machines dans le même ordre.
- *job-shop* : L'ordre dans lequel on passe chaque tâche sur les machines est fixé, mais peut différer d'une tâche à l'autre.
- *open-shop* : L'ordre dans lequel on passe chaque tâche sur les machines n'est pas fixé.

*Remarque.* — Le flow-shop est un cas particulier du job-shop.

Trouver l'*ordonnancement*, c'est fixer les instants  $t_{jk}$  de début du passage de toute tâche  $j$  sur toute machine  $k$ . On note  $C_j$  l'instant d'achèvement de la tâche  $j$ .

Comme indiqué au début de ce chapitre, deux objectifs classiques sont

- minimiser "la durée moyenne", lequel s'écrit donc  $\sum_j C_j$ , et
- minimiser le *makespan*, lequel s'écrit  $C_{\max} = \max_j C_j$ .

L'essentiel du cours se focalisera sur la minimisation du makespan. L'objectif de minimisation des coûts n'est pas abordé dans ce cours.

**10.3.2. Difficulté.** — Les problèmes d'ordonnancement sont difficiles, dans tous les sens du terme.

**Théorème 10.3.1.** — — *Le problème du flow-shop non-préemptif à trois machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$  est NP-difficile.*

- *Le problème du flow-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du  $\sum_j C_j$  est NP-difficile.*
- *Le problème de l'open-shop non-préemptif à trois machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$  est NP-difficile.*
- *Le problème de l'open-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du  $\sum_j C_j$  est NP-difficile.*

Mais en plus d'être NP-difficile, on a du mal en pratique à résoudre de manière optimale ces problèmes, contrairement au problème du voyageur de commerce par exemple, que l'on étudiera au Chapitre 11. Même avec des métaheuristiques ou des techniques de branch-and-bound, des instances job-shop à 15 machines et 15 tâches sont encore non résolues à ce jour !

Par exemple, on ne connaît pas l'ordonnement optimal pour l'instance suivante de flow-shop à 20 tâches et 5 machines<sup>(1)</sup>

54	83	15	71	77	36	53	38	27	87	76	91	14	29	12	77	32	87	68	94
79	3	11	99	56	70	99	60	5	56	3	61	73	75	47	14	21	86	5	77
16	89	49	15	89	45	60	23	57	64	7	1	63	41	63	47	26	75	77	40
66	58	31	68	78	91	13	59	49	85	85	9	39	41	56	40	54	77	51	31
58	56	20	85	53	35	53	41	69	13	86	72	8	49	47	87	58	18	68	28

Ce tableau se lit de la manière suivante : il faut effectuer 20 tâches. Chaque tâche se décompose en 5 opérations 1, 2, 3, 4 et 5, identifiées avec 5 machines. Les opérations doivent être faites dans cet ordre (flow-shop), le temps pour faire la  $k$ ème opération de la tâche  $j$  se lit sur l'entrée qui est à l'intersection de la  $k$ ème ligne et de la  $j$ ème colonne.

Nous allons voir maintenant

- des cas particuliers polynomiaux.
- un cas *préemptif* : l'open-shop avec un nombre quelconque de machines, qui est encore un problème polynomial.
- un schéma de branch-and-bound pour le job-shop.
- un schéma de recherche locale pour le job-shop.

**10.3.3. Quelques cas particuliers polynomiaux.** — Les cas particuliers polynomiaux les plus célèbres sont les suivants.

1. Le problème du flow-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$  : *algorithme de Johnson*.
2. Le problème du job-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$  : *algorithme de Jackson*.
3. Le problème du job-shop non-préemptif à deux tâches et minimisation du makespan  $C_{\max}$  : *algorithme de Brucker*.
4. Le problème de l'open-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$  : *algorithme de Gonzalez et Sahni*

*10.3.3.1. Flow-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .* — C'est résolu par l'algorithme de Johnson [18]. On a  $n$  tâches  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Chaque tâche  $J_j$  a une durée  $p_{j1}$  sur la machine 1 et  $p_{j2}$  sur la machine 2. On doit d'abord passer par la machine 1, puis par la machine 2.

L'algorithme produit une séquence  $j_1, j_2, \dots, j_n$  : ce sera l'ordre dans lequel effectuer les tâches sur les deux machines. En effet, comme nous le verrons ci-dessous, il y a toujours une solution optimale pour laquelle les tâches sont réalisées dans le même ordre sur les deux machines.

On définit pour chaque tâche  $j$  la durée  $q_j = \min(p_{j1}, p_{j2})$ . Classer les tâches par  $q_j$  croissant. Quitte à renuméroter, on a  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . Commencer à  $j = 1$ . Fixer  $r, s = 0$ . Répéter jusqu'à  $j = n$  :

si  $q_j$  est atteint sur la première machine, définir  $j_{r+1} := j$  et  $r := r + 1$  ;  
 si  $q_j$  est atteint sur la seconde machine, définir  $j'_{s+1} := j$  et  $s := s + 1$ .  
 Faire  $j := j + 1$ .

---

1. Source : la page web du professeur Eric Taillard <http://mistic.heig-vd.ch/taillard/>

Retourner l'ordre  $j_1, \dots, j_r, j'_s, \dots, j'_1$ .

Il y a deux autres formulations alternatives de cet algorithme.

1. Faire deux paquets : un paquet  $A$  avec les  $j$  tels que  $p_{j1} \leq p_{j2}$ , un paquet  $B$  avec les  $j$  tels que  $p_{j1} > p_{j2}$ . Ordonner  $A$  selon les  $p_{j1}$  croissants,  $B$  selon les  $p_{j2}$  décroissants. Concaténer la suite des  $j$  de  $A$  à celle de  $B$  dans cet ordre.
2. **Choisir** la tâche  $J_j$  ayant le plus petit  $p_{j1}$  ou  $p_{j2}$  parmi tous les  $p_{ji}$ .

**Appliquer** récursivement l'algorithme sur les tâches  $\neq j$  : cela donne une séquence  $j_1, j_2, \dots, j_r, j'_s, \dots, j'_1$ , avec  $r + s = n - 1$ .

Les tâches  $j_1, \dots, j_r$  sont choisies de façon à ce que le temps sur la machine 1 soit plus court que sur la machine 2. Les tâches  $j'_s, \dots, j'_1$  sont choisies de façon à ce que le temps sur la machine 2 soit strictement plus court que sur la machine 1.

Si  $p_{j1} \leq p_{j2}$ , **retourner**  $j, j_1, j_2, \dots, j_r, j'_s, \dots, j'_1$ .

Si  $p_{j1} > p_{j2}$ , **retourner**  $j_1, j_2, \dots, j_r, j'_s, \dots, j'_1, j$ .

Considérons l'exemple suivant.

Tâches	temps sur la machine 1	temps sur la machine 2
$A$	12	3
$B$	14	11
$C$	25	13
$D$	9	17
$E$	6	15

L'algorithme va successivement fixer :

$$\begin{aligned}
 & \dots, A \\
 & E, \dots, A \\
 & E, D, \dots, A \\
 & E, D, \dots, B, A \\
 & E, D, C, B, A.
 \end{aligned}$$

**Théorème 10.3.2.** — *L'algorithme de Johnson résout correctement le problème du flow-shop à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .*

*Démonstration.* — Déroulons maintenant l'algorithme et plaçons nous à l'itération  $j$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $q_j$  est atteint sur la première machine.  $j - 1$  tâches ont déjà été fixées : pour fixer les notations, supposons que les tâches fixées sont celles d'indices  $j_1, \dots, j_r$  et  $j'_1, \dots, j'_s$ . On suppose donc que  $j = r + s + 1$ . On peut mettre les autres dans un ordre quelconque, pas forcément le même sur la première et la seconde machine. On suppose que l'on a les instants de démarrage de chacune des opérations et que cet ordonnancement est réalisable. On a donc un ordre de tâches sur la première machine  $j_1, \dots, j_r, i_1^{(1)}, \dots, i_{n-r-s}^{(1)}, j'_s, \dots, j'_1$  et sur la seconde  $j_1, \dots, j_r, i_1^{(2)}, \dots, i_{n-r-s}^{(2)}, j'_s, \dots, j'_1$ .

On fait maintenant commencer  $j$  sur la machine 1 à l'instant auquel commençait  $i_1^{(1)}$ , et sur la machine 2 à l'instant auquel commençait  $i_1^{(2)}$ . On décale vers la droite les tâches qui étaient à gauche de  $j$  sur la machine 1 et sur la machine 2 en conséquence. Cette opération est illustrée sur le Figure 3.

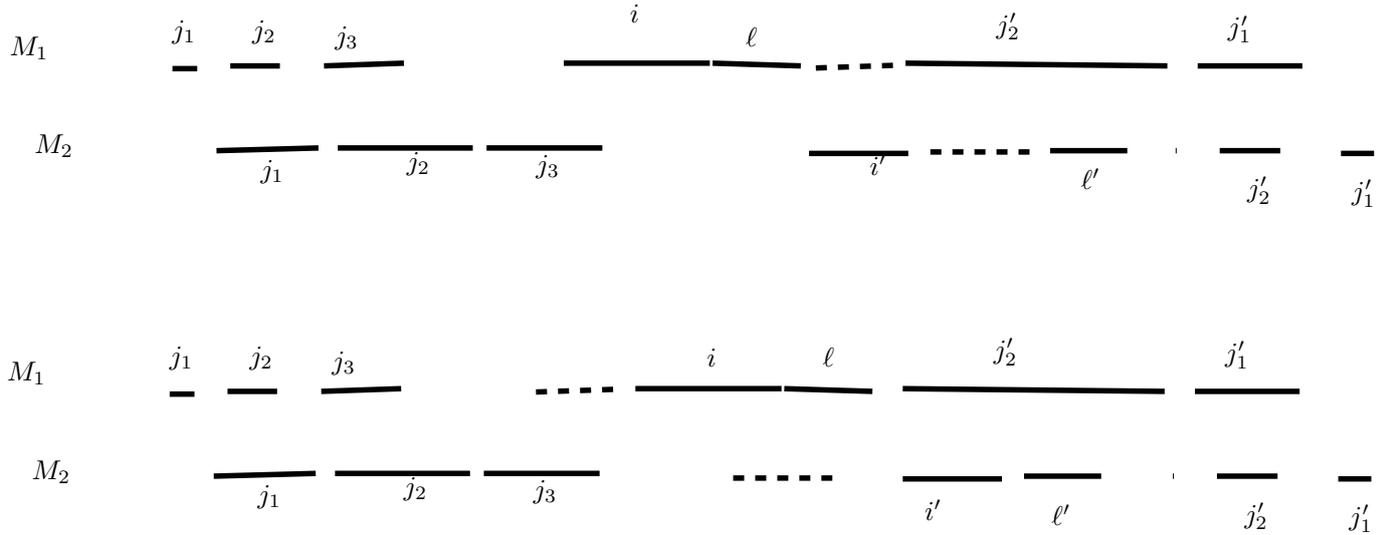


FIGURE 3. Illustration d'une itération de l'algorithme de Johnson : changer la position relative de la tâche en pointillés par rapport à  $i$  et  $\ell$  ne détériore pas la durée de l'ordonnement

Montrons que ce nouvel ordonnancement est encore réalisable et garde le même makespan. Une fois l'itération  $j$  finie, les tâches décalées ont vu leur temps de démarrage augmenter de  $p_{j1}$  sur la machine 1, et de  $p_{j2}$  sur la machine 2. Comme  $p_{j1} < p_{j2}$ , on reste réalisable, en tout cas pour les tâches différentes de  $j$ . Il faut encore vérifier que la tâche  $j$  démarre sur la machine 2 lorsqu'elle a été terminée sur la machine 1. Mais c'est évident car  $j$  commence sur la machine 1 au plus tard à l'instant auquel commençait  $i_1^{(2)}$  sur la machine 1 et  $p_{i_1^{(2)}1} \geq p_{j1}$ .

En conclusion, partant d'un ordonnancement quelconque, on peut toujours obtenir un ordonnancement de même makespan tel que les tâches soient classées de la même façon que par l'algorithme de Johnson. □

*10.3.3.2. Job-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .* — C'est résolu par l'algorithme de Jackson [17], qui est une simple adaptation de l'algorithme de Johnson. On a  $n$  tâches  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Chaque tâche  $J_j$  a une durée  $p_{j1}$  sur la machine 1 et  $p_{j2}$  sur la machine 2. Pour chaque tâche  $j$ , l'ordre de passage sur les machines 1 et 2 est fixé.

L'algorithme consiste à définir

$$\mathcal{J}_{12} := \{J_j : J_j \text{ doit d'abord être effectué sur 1 puis sur 2}\}$$

$$\mathcal{J}_{21} := \{J_j : J_j \text{ doit d'abord être effectué sur 2 puis sur 1}\}$$

et à faire les opérations suivantes :

- sur la machine 1 :  $\mathcal{J}_{12}\mathcal{J}_{21}$ ,
- sur la machine 2 :  $\mathcal{J}_{21}\mathcal{J}_{12}$ ,

où  $\mathcal{J}_{12}$  et  $\mathcal{J}_{21}$  sont ordonnés selon l'algorithme de Johnson.

**Théorème 10.3.3.** — *L'algorithme de Jackson résout correctement le problème du job-shop à deux machines, au plus deux opérations par tâche, et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .*

*Démonstration.* — Similaire à celle du Théorème 10.3.2. □

10.3.3.3. *Job-shop non-préemptif à deux tâches et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .* — On a deux tâches et des machines numérotées de 1 à  $m$ . Chaque tâche  $j = 1, 2$  est décrite par l'ordre  $(m_{ji})_{i=1, \dots, m}$  des machines dans lequel elle doit passer.

On note  $q_{ji}$  le temps pour effectuer la  $i$ ème opération de la tâche  $j$ , i.e.  $q_{ji} := p_{jm_{ji}}$ .

Pour résoudre ce problème, on peut appliquer l'algorithme de Brucker [3], qui est en fait un algorithme de plus court chemin dans un certain graphe.

On se place dans le quart de plan positif. Pour toute paire  $i, i'$  telle que  $m_{1i} = m_{2i'}$  (i.e. la  $i$ ème opération de la tâche 1 utilise la même machine que la  $i'$ ème opération de la tâche 2), on dessine un obstacle rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, dont le point inférieur gauche est de coordonnées  $(\sum_{k=1}^{i-1} p_{1k}, \sum_{k=1}^{i'-1} p_{2k})$  et dont les côtés sont de longueurs  $q_{1i}$  et  $q_{2i'}$ .

Un ordonnancement réalisable induit un chemin partant de  $(0, 0)$  et allant jusqu'à

$$\left( \sum_{i=1}^m q_{1i}, \sum_{i=1}^m q_{2i} \right).$$

Ce chemin se déplace soit de gauche à droite, soit de haut en bas, soit vers le nord-est. On cherche donc le plus court chemin : c'est un problème de plus court chemin dans un graphe acircuitique – le poids d'un arc étant la durée correspondant à la transition représentée par l'arc – qui conduit à un algorithme en  $O(m^2 \log(m))$  (le plus court chemin lui-même met  $O(m^2)$ , mais la construction du graphe est un peu plus coûteuse).

En toute rigueur, le nombre de chemins respectant ce genre de déplacement est infinis : si la tâche 1 met en jeu la machine 1 sur une certaine plage de temps, et si la tâche 2 peut pendant ce temps passer sur la machine 2, avec un temps de passage beaucoup plus court, on peut faire débiter à un grand nombre de moment sur la plage horaire l'opération sur la machine 2. La démonstration du Théorème 10.3.4 ci-dessous, omise ici, consiste dans un premier temps à montrer qu'en se limitant à un nombre fini de mouvements possibles (voir Figure 5), on ne diminue pas la longueur du plus court chemin.

D'après cette discussion, on a

**Théorème 10.3.4.** — *L'algorithme de Brucker résout correctement le problème du job-shop à deux tâches et minimisation du makespan.*

L'algorithme est illustré sur les Figures 4 et 5.

*Remarque.* — Cet algorithme peut se généraliser au problème à  $n$  tâches, mais la complexité devient alors  $O(nm^n \log(m))$ , ce qui n'est pas polynomial...

10.3.3.4. *Open-shop non-préemptif à deux machines et minimisation du makespan  $C_{\max}$ .* — On a  $n$  tâches et deux machines. Chaque tâche est constituée de deux opérations, identifiées avec les machines. Comme on est en open-shop, il n'y a pas de contrainte sur l'ordre dans lequel doivent être faites les opérations d'une tâche. On a alors le résultat suivant.

**Théorème 10.3.5.** — *Pour ce cas, on a à l'optimum*

$$C_{\max} = \max \left( \max_j (p_{j1} + p_{j2}), \sum_{j=1}^n p_{j1}, \sum_{j=1}^n p_{j2} \right).$$

*Un tel ordonnancement peut se trouver en temps polynomial.*

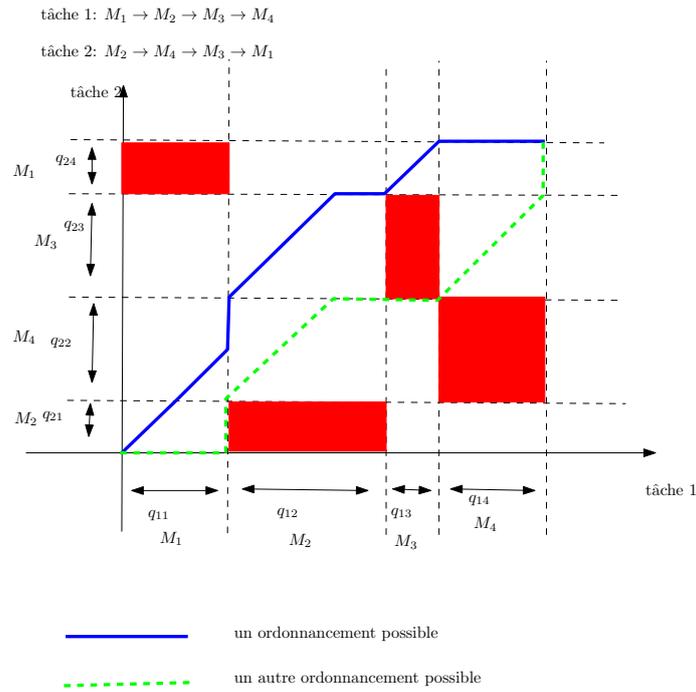


FIGURE 4. Illustration de l'algorithme de Brucker qui résout le job-shop à deux tâches et minimisation du makespan.

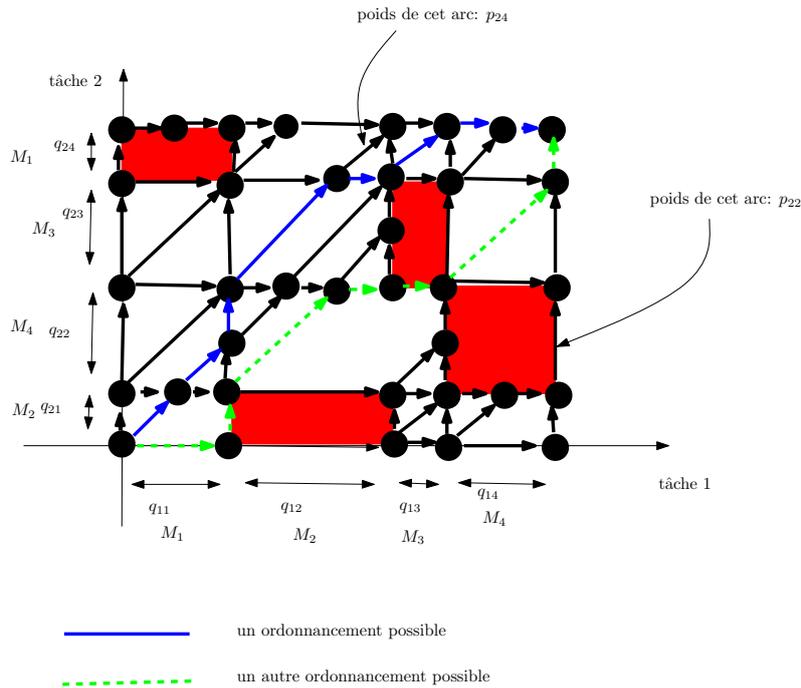


FIGURE 5. Graphe acircuitique associé à l'algorithme de Brucker.

*Démonstration.* — Il est clair que l'on ne peut pas faire mieux que la valeur  $T$  ci-dessus. Montrons qu'on peut l'atteindre. Quitte à ajouter des tâches fictives, on peut supposer que  $\sum_{j=1}^n p_{j1} = \sum_{j=1}^n p_{j2} = T$ .

On peut définir  $j_1$  le plus grand indice  $j$  tel que

$$(p_{11} + p_{12}) + (p_{21} + p_{22}) + \dots + (p_{j_1} + p_{j_2}) \leq T.$$

On considère que cela donne une seule grande tâche  $J_1^*$ , avec  $p_{11}^* := \sum_{j=1}^{j_1} p_{j1}$  et  $p_{12}^* := \sum_{j=1}^{j_1} p_{j2}$ .

De même, on peut définir  $j_2$  le plus grand indice  $j$  tel que

$$(p_{(j_1+1)1} + p_{(j_1+1)2}) + (p_{(j_1+2)1} + p_{(j_1+2)2}) + \dots + (p_{j_1} + p_{j_2}) \leq T.$$

On considère que cela donne une seule grande tâche  $J_2^*$ , avec  $p_{21}^* := \sum_{j=j_1+1}^{j_2} p_{j1}$  et  $p_{22}^* := \sum_{j=j_1+1}^{j_2} p_{j2}$ .

Enfin, on définit de même  $j_3$ . On considère que cela donne une seule grande tâche  $J_3^*$ , avec  $p_{31}^* := \sum_{j=j_2+1}^n p_{j1}$  et  $p_{32}^* := \sum_{j=j_2+1}^n p_{j2}$ .

Après avoir défini  $J_3^*$ , toutes les tâches sont soit dans  $J_1^*$ , soit dans  $J_2^*$ , soit dans  $J_3^*$ . En effet,  $p_{11}^* + p_{12}^* + p_{(j_1+1)1} + p_{(j_1+1)2} > T$  et  $\sum_{j=1}^n p_{j1} + \sum_{j=1}^n p_{j2} = 2T$ , donc  $\sum_{j=j_1+2}^n p_{j1} + \sum_{j=j_1+2}^n p_{j2} < T$ .

On se retrouve donc avec l'open shop à trois tâches  $J_1^*, J_2^*, J_3^*$ , avec  $p_{11}^* + p_{21}^* + p_{31}^* = T$  et  $p_{12}^* + p_{22}^* + p_{32}^* = T$ , et  $p_{j1}^* + p_{j2}^* \leq T$  pour tout  $j = 1, 2, 3$ .

En renumérotant, on peut supposer que  $p_{11}^* \geq p_{22}^*$  et  $p_{12}^* \geq p_{31}^*$ . On vérifie ensuite que l'on peut effectuer  $J_1^*, J_2^*, J_3^*$  sur la machine 1 dans cet ordre, et  $J_2^*, J_3^*, J_1^*$  sur la machine 2 dans cet ordre. C'est un ordonnancement de durée  $T$ . Pour chaque  $J_s^*$ , on effectue les  $J_j$  dont il est composé, consécutivement selon les indices.  $\square$

*10.3.3.5. Open-shop préemptif.* — On a  $n$  tâches et  $m$  machines, chaque tâche  $j$  est décrite par un vecteur  $\mathbf{p}_j = (p_{j1}, \dots, p_{jm})$ , le nombre  $p_{jk}$  indiquant le temps que la tâche  $j$  doit passer sur la machine  $k$ . Chaque tâche peut passer dans un ordre quelconque sur les machines (open-shop). De plus, chaque opération (passage sur une machine) peut être interrompue et reprise plus tard, et ce, autant de fois que nécessaire (cas préemptif). L'important est qu'au total, chaque tâche  $j$  ait passé un temps  $p_{jk}$  sur la machine  $k$ , et ce pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

On a le résultat suivant.

**Théorème 10.3.6.** — *A l'optimum, on a*

$$C_{\max} = \max \left( \max_j \left( \sum_{k=1}^m p_{jk} \right), \max_k \left( \sum_{j=1}^n p_{jk} \right) \right).$$

*De plus, un tel ordonnancement se trouve en temps polynomial.*

En fait, c'est une application directe du théorème de Birkhoff-von Neumann dont la preuve est laissée en exercice.

**Théorème 10.3.7 (Théorème de Birkhoff-von Neumann).** — *Soit  $A = ((a_{ij}))$  une matrice carrée bistochastique (ie  $a_{ij} \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  pour tout  $j$  et  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  pour tout  $i$ ).*

*Alors  $A$  est combinaison convexe de matrices de permutation (matrices 0–1 ayant exactement un 1 par ligne et par colonne).*

*Preuve du Théorème 10.3.6.* — Considérons la matrice  $P := ((p_{jk}))$ . Définissons

$$A := \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & P \\ P^T & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice  $(n + m) \times (n + m)$ . Quitte à ajouter des quantités positives sur la diagonale de  $A$ , on peut supposer que  $A$  a toutes ses sommes par ligne et par colonne égale à

$$T := \max \left( \max_j \left( \sum_{k=1}^m p_{jk} \right), \max_k \left( \sum_{j=1}^n p_{jk} \right) \right).$$

On applique Birkhoff-von Neumann à  $A$ . On obtient que  $P$  peut s'écrire comme  $T \sum_i \lambda_i Q_i$  où les  $Q_i$  sont des matrices ayant au plus un 1 par ligne et par colonne, et où  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i$  et  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

Cela donne un ordonnancement : sur les  $\lambda_1 T$  premiers instants, on fait passer la tâche  $j$  sur la machine  $k$ , pour tout  $(j, k)$  entrée non nulle de la matrice  $Q_1$  ; on fait passer la tâche  $j$  sur la machine  $k$ , pour tout  $(j, k)$  entrée non nulle de la matrice  $Q_2$ , etc.  $\square$

**10.3.4. Cas non-polynomiaux.** — Comme il a été indiqué dans l'introduction de ce chapitre, les problèmes d'ordonnancement sont mal résolus en pratique, contrairement au problème du voyageur de commerce où l'on sait résoudre des instances à plusieurs dizaine de milliers de villes. Pour le job-shop par exemple, il existe à ce jours un grand nombre d'instances à 15 tâches et 15 opérations par tâches (soit des instances occupant l'équivalent mémoire de 225 nombres réels) dont on est très loin de connaître l'optimum.

Les techniques employées en pratique pour résoudre les problèmes d'ordonnancement sont donc en général très sophistiquées et dépassent largement le cadre d'un tel cours. Nous n'allons donc qu'effleurer certaines notions utiles à la conception d'algorithmes branch-and-bound pour le problème job-shop.

*10.3.4.1. Graphe disjonctif.* — Un outil particulièrement commode pour les cas difficiles, et qui peut servir tant pour les algorithmes de recherche locale que les méthodes exactes du type branch-and-bound est le *graphe disjonctif*.

Le graphe disjonctif est un graphe *mixte* (à la fois des arcs et des arêtes) dont les sommets sont les opérations, les arcs les relations conjonctives (un arc est mis entre deux opérations consécutives d'une même tâche), les arêtes les relations disjonctives (une arête est mise entre toute paire d'opérations utilisant la même machine). La longueur d'un arc est la durée de l'opération dont il est issu.

Considérons par exemple le job-shop suivant, à trois tâches, et trois machines.

$J_1$	$M_1 : 2$	$M_2 : 5$	$M_3 : 4$
$J_2$	$M_2 : 1$	$M_1 : 6$	$M_3 : 7$
$J_3$	$M_3 : 6$	$M_2 : 8$	$M_1 : 3$

Le graphe disjonctif correspondant est donné sur la Figure 6.

La remarque fondamentale qui motive l'introduction du graphe disjonctif est la suivante

*Trouver un ordonnancement, c'est orienter les arêtes du graphe disjonctif de manière acirculaire.*

En mettant sur chaque arc obtenu par orientation d'une arête la durée de l'opération dont elle est issue, il est facile de calculer le makespan, c'est-à-dire la durée totale de l'ordonnancement. On se retrouve en effet dans la même situation que dans la méthode potentiel-tâche (Section 10.2) où les durées et les précédences sont entièrement fixées.

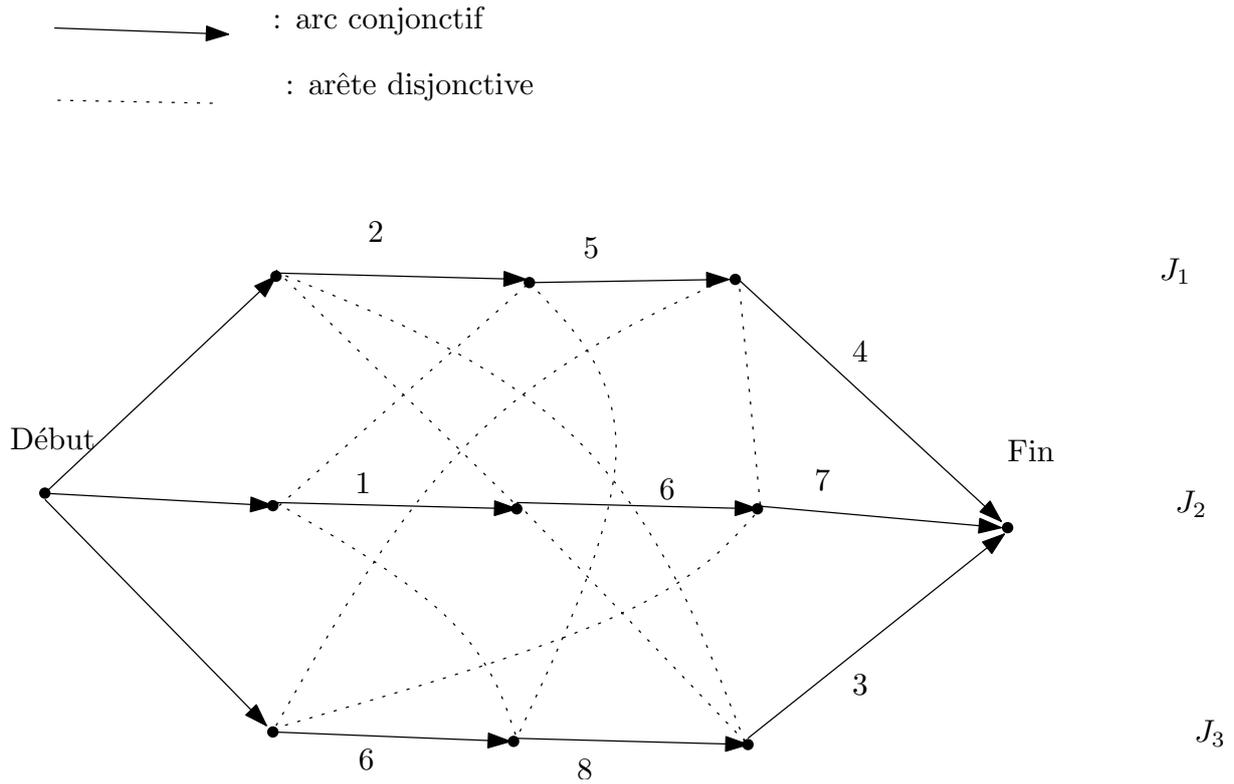


FIGURE 6. Un exemple de graphe disjonctif.

10.3.4.2. *Branch-and-bound.* — On définit alors comme dans la Section 10.2, pour toute opération  $O$ , la quantité  $\eta_O$  qui est la longueur du plus long chemin de **Début** à  $O$ , et de même  $\pi_O$  (en ne gardant que les arcs). Les calculs sont décrits Section 10.2.

On définit  $\eta(\mathcal{O}) := \min_{O \in \mathcal{O}} \eta_O$ ,  $\pi(\mathcal{O}) := \min_{O \in \mathcal{O}} \pi_O$  et  $p(\mathcal{O}) := \sum_{O \in \mathcal{O}} p(O)$ .

Cela permet de définir un schéma de branch-and-bound. On a en effet alors la borne suivante sur la durée des ordonnancements :

$$\max_{k=1, \dots, m} \left( \max_{\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k} \eta(\mathcal{O}) + \pi(\mathcal{O}) + p(\mathcal{O}) \right),$$

où  $\mathcal{O}_k$  est l'ensemble des opérations devant être effectuées sur la machine  $k$ . Carlier a montré qu'elle se calculait en temps polynomial. Le branchement le plus naturel consiste à fixer progressivement les arcs depuis l'origine **Début**.

10.3.4.3. *Recherche locale.* — Pour faire de la recherche locale (recuit simulé, tabou, etc.), il faut définir une notion de voisinage sur les ordonnancements réalisables, ces derniers étant identifiés avec les orientations acicuitive du graphe disjonctif. Par exemple, on peut dire que deux ordonnancements réalisables sont *voisins* si on passe de l'un à l'autre par

- retournement d'arc
- retournement des arcs disjonctifs d'un chemin critique.

## 10.4. Exercices

10.4.1. **Management de projet.** — Considérons le projet de construction d'immeuble suivant, découpé en différentes tâches. Pour la ligne d'une tâche  $T$  donnée, la colonne contraintes

indique quelles tâches doivent être terminées pour pouvoir commencer  $T$ . Trouver la durée minimale de ce projet. Justifier la réponse.

Tâches	Description	Durée (j)	Contraintes
$A$	préparation, fondations	6	Début
$B$	construction des murs	10	$A$
$C$	plomberie extérieure	4	$B$
$D$	plomberie intérieure	5	$A$
$E$	électricité	7	$A$
$F$	toit	6	$B$
$G$	peinture et finitions extérieures	16	$B, C, F$
$H$	lambris	8	$D, E$
$I$	sol	4	$D, E$
$J$	peinture et finitions intérieures	11	$H, I$

**10.4.2. Ordonnancement de travaux sur un chantier, d'après de Werra, Liebling, Hêche.** — Trouver le temps minimum nécessaire pour réaliser les tâches suivantes. Trouver également les chemins critiques.

Tâches	Durées	Contraintes
$A$ Pose de cloisons	10	Début
$B$ menuiserie	12	$A, G$
$C$ vitrerie	14	$B$
$D$ construction de l'ossature	10	au plus tôt 2 jours après Début
$E$ plomberie	9	$D$
$F$ charpente	11	au plus tôt lorsque les 4/5 de $D$ sont terminés et au plus tard 30 jours avant le début $B$
$G$ pose de la couverture	13	$F$
$H$ installation des radiateurs	15	$E, I$
$I$ revêtement des murs et des cloisons	16	$C$

**10.4.3. Cas à une seule machine.** — On considère les problèmes d'ordonnancement d'atelier dans le cas à une seule machine. On se met dans le cas non préemptif, chaque tâche est faite d'une

seule opération (flow-shop, job-shop et open-shop identiques). Résoudre le minimum makespan, minimum  $\sum_j C_j$ , minimum  $\sum_j w_j C_j$  (où chaque tâche  $j$  est munie d'un poids  $w_j$ ).

**10.4.4. Retour sur le problème de l'affectation de tâche (cours sur les flots).** — On revient sur l'exercice d'affectation des tâches, mais cette fois on ne suppose plus que les employés puissent travailler en parallèle.

On suppose que l'on a différentes tâches à accomplir dont on connaît les durées d'exécution, et que l'on dispose d'une ressource de main d'œuvre dont on connaît les compétences. A un instant donné, un employé ne peut se consacrer qu'à une seule tâche à la fois. Enfin, on se met dans un cadre préemptif, c'est-à-dire qu'un employé peut interrompre son travail sur une tâche, et le reprendre plus tard.

On veut trouver un ordonnancement, c'est-à-dire à tout instant la donnée pour chaque employé  $i$  de la tâche  $j$  sur lequel il travaille. On souhaite minimiser le temps nécessaire pour réaliser l'ensemble des tâches (makespan).

**Problème de l'affectation de tâches**

**Donnée :**  $n$  tâches et leurs durées  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ;  $m$  employés et des sous-ensembles  $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$  qui correspondent aux employés compétents pour la tâche  $i$ .

**Tâche :** Trouver un ordonnancement, c'est-à-dire à tout instant la donnée pour chaque employé  $i$  de la tâche  $j$  sur lequel il travaille, minimisant le temps nécessaire pour réaliser l'ensemble des tâches (makespan).

Montrer que ce problème peut se résoudre en temps polynomial.

**10.4.5. Preuve du théorème de Birkhoff-von Neumann.** — Nous allons montrer le théorème de Birkhoff-von Neumann, qui dit que toute matrice *bistochastique*  $A$  (matrice carrée à coefficients positifs, dont la somme des termes de chaque ligne fait 1, et la somme des termes de chaque colonne fait 1) est combinaison convexe de *matrices de permutation* (matrice carrée à coefficients dans  $\{0, 1\}$  ayant exactement un 1 par ligne et par colonne).

1. Avec l'aide du théorème de König (qui dit que la cardinalité minimale d'une couverture par les sommets est égale à la cardinalité maximale d'un couplage), montrer le théorème de Hall suivant : *Soit  $G$  un graphe biparti, de classes  $U$  et  $V$ . Supposons que pour tout  $X \subseteq U$ , on a  $|N(X)| \geq |X|$ , où  $N(X)$  est le voisinage de  $X$  dans  $G$ . Alors il existe un couplage couvrant  $U$ .*

2. En déduire le théorème de Birkhoff-von Neumann (indication : le faire par récurrence sur le nombre d'entrées non-nulles de  $A$ , et construire un graphe biparti  $G$  dont les classes sont les lignes d'une part, et les colonnes d'autre part.)

**10.4.6. Job-shop à deux machines.** — Considérons l'instance job-shop non-préemptif suivante, la flèche indique l'ordre des tâches.

	$M_1$		$M_2$
$J_1$	6	→	3
$J_2$	5	→	4
$J_3$	7		∅
$J_4$	∅		3
$J_5$	2	←	6
$J_6$	4	←	3

Proposer un ordonnancement optimal.

**10.4.7. Open-shop à deux machines.** — Considérons l'instance open-shop non-préemptif suivante.

	$M_1$	$M_2$
$J_1$	7	0
$J_2$	3	7
$J_3$	9	14
$J_4$	7	3
$J_5$	7	3
$J_6$	7	0

Proposer un ordonnancement optimal.

**10.4.8. Déchargement et chargement d'une flotte de camions.** — Un site d'une entreprise logistique est constitué de deux entrepôts : l'un de déchargement (entrepôt  $D$ ) et l'autre de chargement (entrepôt  $C$ ). Le matin, à 6h, 15 camions se présentent, chacun contenant un nombre de caisses connu, indiqué dans le tableau ci-dessous. Chacun de ces camions doit être intégralement vidé dans l'entrepôt  $D$  avant d'accéder à l'entrepôt  $C$ , où il sera à nouveau chargé avec un nombre de caisses connu, indiqué également dans le tableau ci-dessous. Pour des raisons liées aux effectifs en personnel et aux contraintes de manutention, un seul camion peut être traité à la fois par chaque entrepôt, et lorsqu'on commence à traiter un camion, on ne peut interrompre cette opération. On souhaite finir au plus tôt le traitement des 15 camions, sachant que le temps de chargement et de déchargement est exactement proportionnel au nombre de caisses : 1 minute par caisse. On néglige le temps pour se rendre d'un entrepôt à l'autre. A quelle heure peut-on avoir fini au plus tôt ? Justifier votre réponse.

Camions	Nbre de caisses à décharger	Nbre de caisses à charger
1	2	6
2	1	2
3	20	11
4	2	3
5	7	6
6	6	6
7	2	3
8	1	4
9	8	7
10	6	4
11	12	11
12	5	8
13	7	3
14	6	9
15	5	1



# CHAPITRE 11

## TOURNÉES

Les problèmes de tournées sont parmi les plus naturels en Recherche Opérationnelle et en Logistique. Le thème général est le suivant : un réseau étant donné, il s'agit de le visiter entièrement en minimisant le coût. Les variations sont alors infinies et peuvent concerner la nature du réseau, la notion de visite, la définition du coût. Des contraintes peuvent également être ajoutées à l'envie : fenêtre de temps, retour au point de départ, etc.

Dans cette séance, nous nous intéresserons aux deux problèmes les plus simples à formuler dans cette famille, tous deux d'un grand intérêt pratique : le *problème du voyageur de commerce* et le *problème du postier*. De plus, nous verrons qu'ils illustrent les deux aspects de la recherche opérationnelle car, bien que très semblables dans leur formulation, ils diffèrent radicalement quant à leur résolution puisque l'un d'eux peut être résolu en temps polynomial par un algorithme simple à implémenter, et l'autre au contraire est **NP**-difficile et nécessite pour être résolu un mélange de techniques avancées et d'heuristiques.

### 11.1. Problème du voyageur de commerce

#### 11.1.1. Version non orientée. —

*11.1.1.1. Formulation du problème.* — Le problème du voyageur de commerce (Traveling Salesman Problem ou TSP en anglais) se formule de la manière suivante.

#### Problème du voyageur de commerce

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction de coût sur les arêtes  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche** : Trouver une chaîne fermée  $C$  passant par tous les sommets telle que  $\sum_{e \in C} c(e)$  soit minimum.

Rappelons que c'est un problème difficile, comme il a été déjà signalé au Chapitre 2.

***Théorème 11.1.1.** — Le problème du voyageur de commerce est **NP**-difficile.*

Il faut donc mettre en œuvre des stratégies de résolutions plus intelligentes, et donc se tourner vers les techniques de la recherche opérationnelle. Nous allons présenter trois approches : heuristique, branch-and-bound, recherche locale. Les grands progrès de ces dernières années dans la résolution du problème du voyageur de commerce résident principalement dans les techniques de branch-and-bound, et plus précisément dans le calcul des bornes. On sait de nos jours résoudre des instances à 100'000 villes, alors qu'il y a une vingtaine d'années, on ne dépassait pas quelques

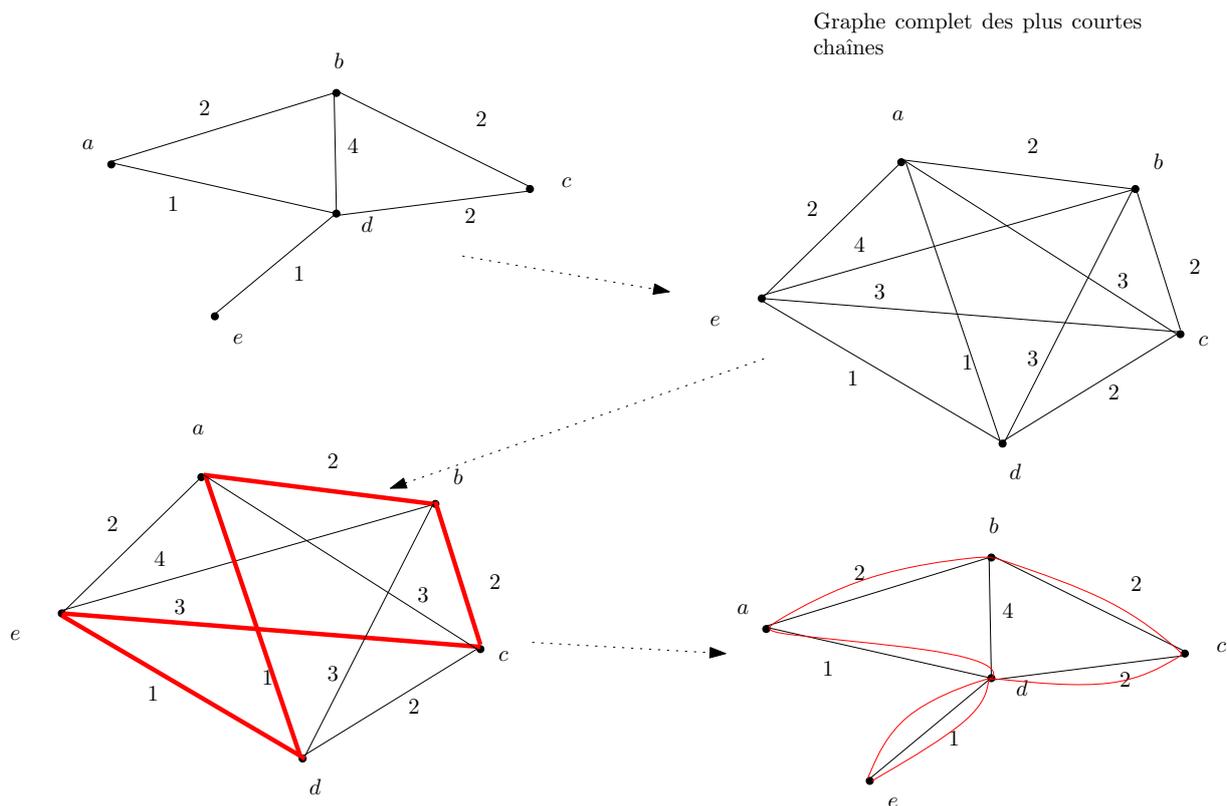


FIGURE 1. Le problème du voyageur de commerce peut se reformuler comme un problème de cycle hamiltonien dans un graphe complet.

centaines de villes (la puissance de calcul joue un rôle très secondaire dans ces performances – voir la discussion sur la complexité du Chapitre 2).

Les approches que nous allons décrire s'énoncent plus facilement sous la reformulation suivante sur le graphe complet  $K_n$ . Elle s'obtient en prenant le même ensemble de sommets et en mettant comme coût  $c(xy)$  le coût du plus court chemin dans  $G$  de  $x$  à  $y$ . En effet, prenons une chaîne fermée de  $G$  passant par tous les sommets. La succession des premiers passages en chaque sommet plus le sommet de départ induit un cycle hamiltonien de coût inférieur dans  $K_n$ . Réciproquement, un cycle hamiltonien de coût minimum dans  $K_n$  induit une chaîne fermée de même coût dans  $G$ . Cela permet de conclure que le cycle hamiltonien de plus petit coût dans  $K_n$  induit une tournée de coût minimum dans  $G$ .

Voir l'illustration de cette reformulation sur la Figure 1.

### Problème du voyageur de commerce (reformulation)

**Donnée** : Le graphe complet  $K_n = (V, E)$  avec  $n$  sommets et une fonction de coût sur les arêtes  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $c(xy) + c(yz) \geq c(xz)$  pour tout  $x, y, z \in V$ .

**Tâche** : Trouver un cycle hamiltonien de coût minimum.

*11.1.1.2. Une heuristique naturelle.* — L'heuristique la plus naturelle est probablement celle consistant à toujours se rendre à la ville la plus proche non encore visitée. Cette heuristique s'appelle *nearest-neighbor*. Ses performances sont en général très mauvaises.

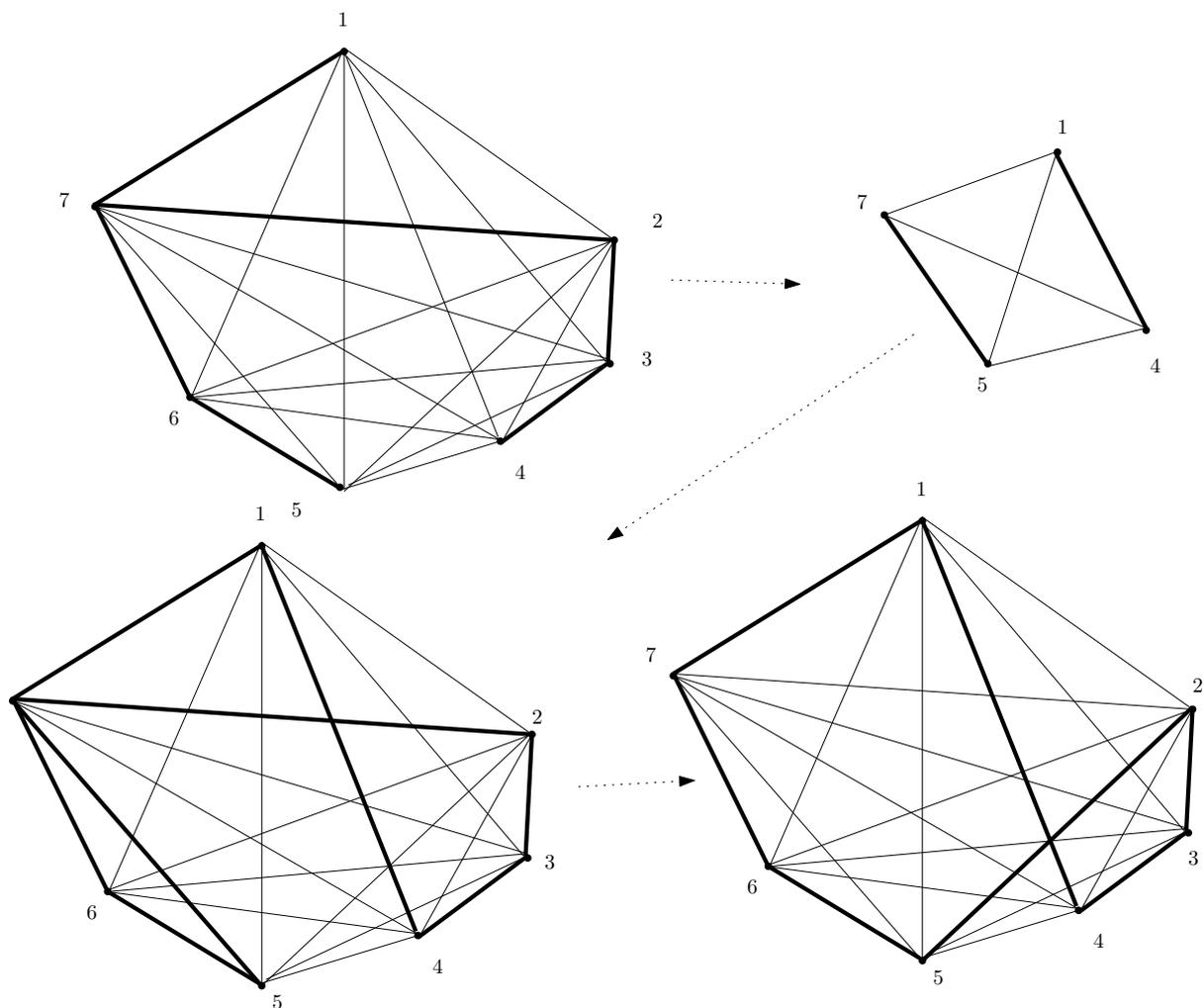


FIGURE 2. L'heuristique de Christofidès.

11.1.1.3. *Heuristique de Christofidès.* — La plus célèbre heuristique du voyageur de commerce dans le cas non-orienté est l'*heuristique de Christofidès* qui fournit une  $3/2$ -approximation. L'algorithme est très simple (voir l'illustration Figure 2).

Trouver un arbre couvrant  $T$  de poids minimum ; définir  $J$  comme l'ensemble de sommets de  $T$  ayant un degré impair dans  $T$  ; trouver un couplage  $M$  de  $K_n$  de poids minimum, reliant les sommets de  $J$ .

$M \cup T$  est un graphe eulérien contenant tous les sommets de  $K_n$  ; suivre un cycle eulérien ; prendre des « raccourcis » quand nécessaire.

Cet algorithme utilise deux routines : celle de l'arbre couvrant de poids minimum, qui est décrite au chapitre sur la conception de réseau (Chapitre 12) ; et celle du couplage parfait de poids minimum, non décrit dans ce cours. Il suffit de savoir qu'un *couplage parfait* est un couplage qui couvre tous les sommets d'un graphe. Si le graphe est pondéré, et s'il existe un tel couplage, on sait trouver un couplage parfait de poids minimum avec un algorithme d'Edmonds.

**Théorème 11.1.2.** — *L'algorithme polynomial décrit ci-dessus fournit une  $3/2$ -approximation au problème du voyageur de commerce.*

$H$  = cycle hamiltonien de plus petit coût

$J$  = sommets de degré impair dans  $T$ .

$J = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$

inégalité triangulaire :

$$c(M) + c(M) \leq c(H)$$

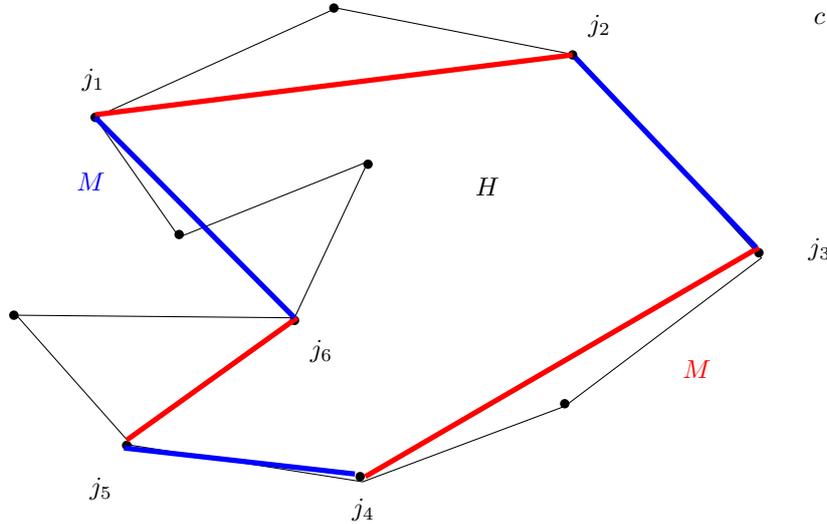


FIGURE 3. Illustration de la preuve du facteur d'approximation de l'heuristique de Christofides.

*Démonstration.* — Soit  $H$  le cycle hamiltonien obtenu à la fin. Il faut prouver que l'on obtient bien

$$\sum_{e \in H} c_e \leq \frac{3}{2} OPT.$$

Pour cela, il faut prouver que le poids de  $M$  est  $\leq \frac{1}{2} OPT$ .

Soit  $\tilde{H}$  un cycle hamiltonien optimal.  $J = \{j_1, \dots, j_s\}$  sont les sommets de degré impair de  $T$ , numéroté dans l'ordre de parcours de  $\tilde{H}$ . Considérons le couplage  $j_i j_{i+1}$  pour  $i = 1, 3, \dots$ , ainsi que son « complémentaire »  $j_i j_{i+1}$  pour  $i = 2, 4, \dots$ . La somme de leur poids est  $\leq OPT$ , par inégalité triangulaire. Par conséquent, l'un des deux a un poids  $\leq \frac{1}{2} OPT$ . A fortiori, c'est le cas pour  $M$  (car c'est le couplage de plus petit poids sur  $J$ ). La preuve est illustrée Figure 3.  $\square$

*11.1.1.4. Recherche locale.* — On peut aussi se demander si l'on peut attaquer le problème du voyageur de commerce par des méta-heuristiques. Il faut alors définir la notion de **voisinage**. Le **voisinage 2-OPT** est le plus classique. On dit que deux cycles hamiltoniens  $C, C'$  sont **voisins** s'ils diffèrent d'exactly deux arêtes  $|C \setminus C'| = |C' \setminus C| = 2$ , voir Figure 4. On peut alors intégrer ce voisinage dans n'importe quel schéma de métaheuristique du type "recherche locale" (méthode tabou, recuit simulé,...).

Des généralisations du voisinage 2-OPT existent, ce sont des voisinages  $k$ -OPT avec  $k \geq 2$ , et consistent à échanger  $k$  arêtes. En multipliant ce type de voisinages, on peut parvenir à des recherches locales extrêmement performantes, tout en restant prudent sur la taille du voisinage à explorer : un  $k$  trop grand conduirait à un voisinage trop grand, complètement ingérable par une recherche locale.

Il existe une recherche locale spécifique au voyageur de commerce : l'heuristique de Lin-Kernigan [21]. C'est considérée comme la meilleure heuristique pour le problème du voyageur

de commerce. Il en existe différentes versions, toutes basées sur le voisinage  $k$ -OPT, avec en général  $k \in \{2, 3\}$ . On considère que cette heuristique, bien implémentée, est capable de trouver en moins d'une minute sur une machine du commerce l'optimum d'instances jusqu'à 1000 villes.

11.1.1.5. *Formulation sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.* — Rappelons qu'un **vecteur d'incidence** d'une partie  $A$  d'un ensemble  $B$  est le vecteur  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^B$  où

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut modéliser le problème du voyageur de commerce de façon très compacte sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.

**Proposition 11.1.3.** — *Les vecteurs d'incidences des cycles hamiltoniens sont exactement les vecteurs entiers du système*

$$\begin{aligned} 0 \leq x_e \leq 1 & \quad e \in E \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \quad v \in V \\ \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2 & \quad X \subseteq V, X \neq \emptyset, V. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathbf{x}$  le vecteur d'incidence d'un cycle hamiltonien. Il est clair que ce vecteur satisfait les contraintes ci-dessus. Réciproquement, soit  $\mathbf{x}$  un vecteur satisfaisant les contraintes ci-dessus. Comme

$$\begin{aligned} 0 \leq x_e \leq 1 & \quad e \in E \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \quad v \in V, \end{aligned}$$

les arêtes  $e$  telles que  $x_e = 1$  forment une collection disjointe de cycles élémentaires couvrant tous les sommets du graphe. Il suffit donc de montrer qu'il n'y a qu'un seul cycle dans la collection. C'est une conséquence des inégalités  $\sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2$  pour tout  $X \subseteq V, X \neq \emptyset, V$ . En effet, s'il y a un cycle qui ne couvre pas tous les sommets, en posant  $X$  l'ensemble des sommets couverts par ce cycle, on obtient une contradiction.  $\square$

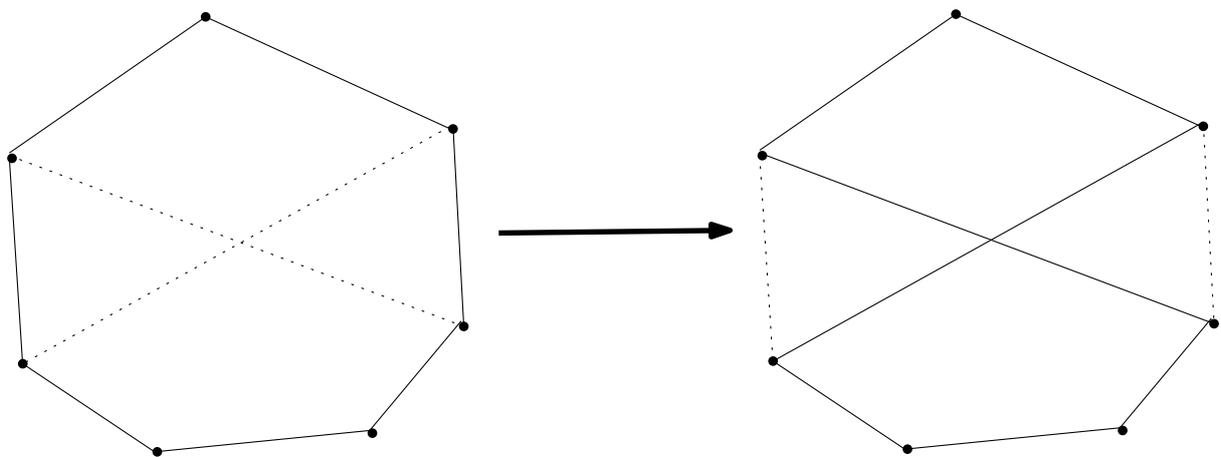


FIGURE 4. Illustration du voisinage 2-OPT.

Résoudre le problème du voyageur de commerce, c'est donc résoudre le programme

$$(32) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{e \in E} c(e)x_e \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \quad e \in E \\ & x_e \in \mathbb{Z} \quad e \in E \\ & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad v \in V \\ & \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2 \quad X \subseteq V, X \neq \emptyset, V. \end{array}$$

11.1.1.6. *Branch-and-cut*. — On peut essayer d'en tirer une borne pour construire une méthode de branch-and-bound. Le problème, c'est que les contraintes sont en nombre exponentiel. On peut en prendre moins de contraintes, de manière à obtenir des bornes calculables en temps raisonnable, mais la qualité des bornes est moindre.

$$(33) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{e \in E} c(e)x_e \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \quad e \in E \\ & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad v \in V \\ & \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2 \quad \text{pour certains } X \subseteq V, X \neq \emptyset, V. \end{array}$$

Dans les branch-and-bound, la qualité de la borne est cruciale. Une technique efficace, appelée *branch-and-cut*, permet d'améliorer la qualité de la borne. Elle consiste à suivre le schéma d'un branch-and-bound en agrandissant le programme linéaire qui fournit les bornes au fur et à mesure de l'exploration de l'arbre de branchement.

On résout le programme (33). Supposons que l'on ait une solution  $\mathbf{x}^*$  du programme linéaire. Il y a **3 possibilités**

1.  $\mathbf{x}^*$  est le vecteur d'incidence d'un cycle hamiltonien. On a trouvé une solution optimale pour le nœud courant de l'arbre de branchement.
2. On trouve une inégalité du type  $\sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2$  qui soit violée. Cela se fait en temps polynomial : c'est un problème de coupe minimum (voir le Chapitre 5). On ajoute la contrainte violée au programme linéaire, et on résout le nouveau programme linéaire.
3. On ne trouve aucune inégalité de ce type qui soit violée, mais  $x^*$  n'est pas entier. On a une borne pour le nœud de l'arbre de branchement. Il faut brancher sur ce nœud et recommencer pour les fils.

11.1.1.7. *Relaxation lagrangienne*. — Nous avons vu que dans certains cas, la **relaxation lagrangienne** pouvait fournir de bonnes bornes, si une partie des contraintes est « facile ».

C'est le cas ici (Held et Karp 1970). On peut réécrire le système linéaire (32)

$$\begin{array}{ll} 0 \leq x_e \leq 1 & e \in E \\ x_e \in \mathbb{Z} & e \in E \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & v \in V \\ \sum_{e \in E[X]} x_e \leq |X| - 1 & X \subseteq V, X \neq \emptyset, V. \end{array}$$

où  $E[X]$  désigne l'ensemble des arêtes induites par  $X$ , i.e. l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans  $X$ .

En effet  $2 \sum_{e \in E[X]} x_e + \sum_{e \in \delta(X)} x_e = \sum_{v \in X} \sum_{e \in \delta(v)} x_e$ . Donc, si  $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2$  pour tout  $v \in V$ , on a  $2 \sum_{e \in E[X]} x_e + \sum_{e \in \delta(X)} x_e = 2|X|$ , d'où l'équivalence des deux formulations. En faisant jouer un rôle particulier au sommet 1, on peut réécrire le système sous la forme

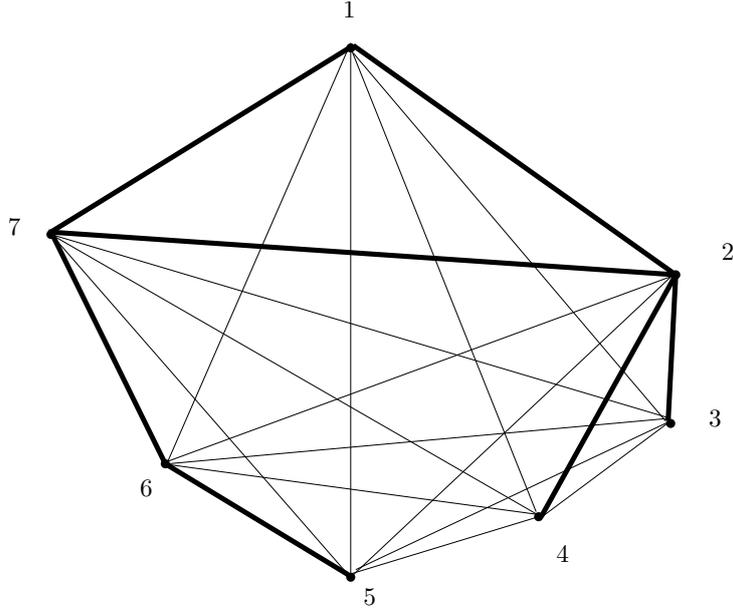


FIGURE 5. Un 1-arbre.

$$\begin{aligned}
0 \leq x_e \leq 1 & & e \in E \\
x_e \in \mathbb{Z} & & e \in E \\
\sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2 & & \\
\sum_{e \in E[X]} x_e \leq |X| - 1 & & X \subseteq \{2, \dots, n\}, X \neq \emptyset \\
\sum_{e \in E} x_e = n & & \\
\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & & v \in \{2, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

En « oubliant » les contraintes  $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2$  pour  $v \in \{2, \dots, n\}$ , on obtient un système linéaire qui décrit les 1-*arbres*. Un 1-*arbre* est un arbre couvrant  $\{2, \dots, n\}$ , avec deux arêtes supplémentaires quittant 1 (voir la Figure 5) et se calcule en temps linéaire (la routine de calcul des arbres couvrants de poids minimum est décrite au Chapitre 12).

On a tout ce qu'il faut pour calculer une borne par relaxation lagrangienne. Le lagrangien est

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{i=2}^n \lambda_i \left( \sum_{e \in \delta(i)} x_e - 2 \right).$$

La borne inférieure sur le cycle hamiltonien est donnée par

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$$

où

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := -2 \sum_{i \in V} \lambda_i + \min_{x \text{ vecteur d'incidence d'un 1-arbre}} \mathcal{L}(x, \boldsymbol{\lambda})$$

en posant  $\lambda_1 := 0$ , soit encore

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) = -2 \sum_{i \in V} \lambda_i + \min_{T \text{ est un 1-arbre}} \sum_{ij \in T} (c_{ij} + \lambda_i + \lambda_j).$$

On sait calculer  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  en temps polynomial, pour tout  $\boldsymbol{\lambda}$ , cela suffit (voir Chapitre 7) pour pouvoir calculer  $\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  par une méthode de sur-gradient.

Cette borne est très bonne.

**Théorème 11.1.4 (Held Karp 1970).** —  $\max_{\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{G}(\lambda)$  est égal à la solution de la relaxation linéaire (32).

*11.1.1.8. Branchement.* — En général, dans un branch-and-bound ou dans un branch-and-cut, le problème résolu en un nœud de l'arbre est de même nature qu'à la racine de l'arbre, laquelle consiste en la résolution du relâché continu du problème de départ. Dans le cas du voyageur de commerce, ce n'est pas le cas. En un nœud de l'arbre de branchement, on doit résoudre des tournées contraintes à passer par certaines arêtes ou à en éviter d'autres, ce qui est *a priori* un problème plus général que le problème de départ. Nous expliquons maintenant une façon classique de traiter cette difficulté.

La façon classique de brancher pour le voyageur de commerce est de choisir une arête  $e$ , et d'écrire l'ensemble des solutions  $X = X_e \cup (X \setminus X_e)$  où  $X_e$  est l'ensemble des solutions empruntant l'arête  $e$ . Par conséquent, tout nœud de l'arbre de branch-and-bound est de la forme

$$\mathcal{S}_{A,B} = \{S \in \mathcal{S} : A \subseteq S, B \cap S = \emptyset\} \quad \text{avec } A, B \subseteq E.$$

Résoudre le problème au niveau du nœud  $\mathcal{S}_{A,B}$  consiste donc à chercher le cycle hamiltonien de plus petit coût empruntant toutes les arêtes de  $A$ , et aucune de  $B$ . Il reste à décrire la façon de calculer des bornes lorsqu'on branche. On pourrait se dire qu'il suffit de calculer des 1-arbres avec des arêtes prescrites (celles de  $A$ ) et des arêtes interdites (celles de  $B$ ), mais il n'y a pas d'algorithme simple qui effectue cette tâche. Une petite astuce permet de pallier cette difficulté.

On niveau d'un nœud de l'arbre de branchement, on a donc un problème de voyageur de commerce avec contraintes (ensemble d'arêtes prescrites et interdites). Une petite astuce permet d'écrire ce problème de voyageur de commerce « avec contraintes », comme un problème de voyageur de commerce sans contrainte, simplement en modifiant la fonction de coût.

Si on pose

$$c'(e) := \begin{cases} c(e) & \text{si } e \in A \\ c(e) + C & \text{si } e \notin A \cup B \\ c(e) + 2C & \text{si } e \in B, \end{cases}$$

où  $C := \sum_{e \in E} c(e) + 1$ , on a la propriété, qui peut se démontrer assez aisément,

*Les cycles hamiltoniens de  $\mathcal{S}_{A,B}$  sont exactement ceux dont le nouveau coût est  $\leq (n+1-|A|)C$ . De plus, les cycles hamiltoniens dans  $\mathcal{S}_{A,B}$  ont un coût qui diffère de l'ancien coût d'exactly  $(n - |A|)C$ .*

On peut donc calculer des bornes pour un problème de voyageur de commerce non contraint, avec la nouvelle fonction de coût, pour obtenir des bornes inférieures pour le problème avec contraintes.

### 11.1.2. Version orientée. —

*11.1.2.1. Formulation.* — On a aussi une version orientée de ce problème :

#### Problème du voyageur de commerce, version orientée

**Donnée :** Un graphe  $D = (V, A)$  avec  $n$  sommets et une fonction de coût sur les arêtes  $w : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche :** Trouver un chemin fermé de coût minimum passant par tous les sommets.

De même que dans le cas non-orienté, on peut reformuler la problème sur le graphe complet orienté (toute paire de sommets est reliée par deux arcs de sens opposé).

## Problème du voyageur de commerce, version orientée (reformulation)

**Données** : Un graphe  $K_n = (V, A)$ , avec un arc  $(i, j)$  pour tout  $i \neq j \in V$ , et une fonction de coût sur les arcs  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche** : Trouver un circuit hamiltonien  $C$  passant par tous les sommets tel que  $\sum_{a \in C} c(a)$  soit minimum.

Comme dans le cas non-orienté, on a :

**Théorème 11.1.5.** — *Le problème du voyageur de commerce dans sa version orientée est NP-difficile.*

Cela peut se retrouver à partir du Théorème 11.1.1. En effet, en prenant un graphe non-orienté, on peut dédoubler les arêtes pour en faire deux arcs parallèles mais de sens opposés. On se ramène alors au problème du voyageur de commerce sur un graphe orienté, et si on avait un algorithme polynomial le résolvant, on en aurait également un dans la version non-orientée, ce qui contredit le Théorème 11.1.1.

*11.1.2.2. Algorithmes.* — Le problème dans sa version orientée est considéré comme plus difficile.

Voici un résumé de la situation.

- Complexité : pareil, c'est **NP**-difficile.
- Heuristique nearest-neighbor : également mauvaise.
- Heuristique avec un ratio d'approximation (à la Christofidès) : c'est une question ouverte. On ne connaît à ce jour aucun algorithme fournissant en temps polynomial une solution dans un rapport borné avec l'optimum.
- Recherche locale : même voisinage. En revanche, Lin-Kernighan fonctionne beaucoup moins bien.
- Branch-and-Bound : pareil :
  - La formulation par programme linéaire semblable.
  - La relaxation lagrangienne semblable : on cherche alors un *1-arbre orienté*, voir ci-dessous.

Un *1-arbre orienté* est un ensemble  $F$  d'arcs tel que le

- $F$  est un arbre sur  $\{2, \dots, n\}$
- $\deg_{\text{in}}(v) = 1$  si  $v \in \{2, \dots, n\}$
- $\deg_{\text{in}}(1) = \deg_{\text{out}}(1) = 1$ .

On sait trouver un tel ensemble en temps polynomial (théorie des  $r$ -arborescences).

## 11.2. Problème du postier

### 11.2.1. Version non orientée. —

*11.2.1.1. Formulation.* — Le problème du postier se formule de la manière suivante :

#### Problème du postier

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction de coût sur les arêtes  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche** : Trouver une chaîne fermée de coût minimum passant par toutes les arêtes au moins une fois.

Ici,  $G$  peut être vu comme la modélisation d'une ville, les sommets étant les intersections de rues et les arêtes les portions de rues. Les poids peuvent être le temps de parcours des rues. Le problème est alors celui que se pose un facteur voulant déposer tout son courrier en un minimum de temps.

*11.2.1.2. Algorithme.* — Contrairement au problème du voyageur de commerce, il existe un algorithme polynomial simple qui trouve la tournée optimale. Remarquons déjà que dans le cas où le graphe est eulérien, la question est triviale.

Sinon, on a la propriété suivante.

**Lemme 11.2.1.** — *La chaîne fermée de coût minimum qui passe par toutes les arêtes au moins une fois passe au plus deux fois par chaque arête.*

*Démonstration.* — Soit  $G = (V, E)$  le graphe. Soit une chaîne  $C$  passant par toutes les arêtes au moins une fois. Pour chaque arête  $e$ , on construit des arêtes  $e_1, \dots, e_r$  correspondant à chacun des passages sur  $e$ . Notons  $G'$  ce nouveau (multi)graphe.  $G'$  est eulérien. On a donc créé des copies de certaines arêtes de manière à rendre  $G$  eulérien. Réciproquement, si on crée des copies d'arêtes pour rendre  $G$  eulérien, on a la possibilité de parcourir le multigraphe en passant par chaque arête du multigraphe une fois et une seule, et cela induit sur  $G$  une chaîne  $C$  passant par toutes les arêtes au moins une fois.

Soit un multigraphe  $G'$  eulérien, et soit une arête  $e$  présente un nombre  $s$  de fois  $s \geq 3$ . Alors, si on enlève  $2p$  représentant de  $e$ , avec  $p \in \mathbb{N}$  et  $s > 2p$ , alors  $G'$  reste eulérien.

Chercher la chaîne de  $G$  qui passe à moindre coût par toutes les arêtes consiste donc à dupliquer à moindre coût des arêtes de  $G$  afin de le rendre eulérien. Ici, le coût de la duplication est égal à la somme des coûts des arêtes dupliquées.  $\square$

On peut donc reformuler le problème du postier de la manière suivante.

### Problème du postier

**Donnée :** Un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction de coût sur les arêtes  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche :** Trouver  $F \subseteq E$  tel que  $\deg_F(v) = \deg_E(v) \pmod{2}$  pour tout  $v \in V$ , et tel que  $\sum_{e \in F} c(e)$  soit minimal.

**Trouver  $F \subseteq E$  tel que  $\deg_F(v) = \deg_E(v) \pmod{2}$  pour tout  $v \in V$  et tel que  $\sum_{e \in F} c(e)$  soit minimal :** On peut vérifier que, si les  $c(e) \geq 0$ , un tel  $F$  est constitué de chaînes appariant les sommets de degré impairs de  $G$  (qui sont en nombre pair).

Un tel  $F$  est alors facile à trouver : soit  $J$  l'ensemble des sommets de degré impair de  $G$ . On considère le graphe complet  $K$  sur  $J$ , et on met un coût

$$c(jj') = \text{le coût de la chaîne de plus petit coût entre } j \text{ et } j'$$

sur chaque arête  $jj'$  de  $K$ . Le couplage parfait de plus petit coût donne alors la solution (on sait trouver un tel couplage en temps polynomial, comme indiqué dans le paragraphe sur l'heuristique de Christofidès).

D'où

**Théorème 11.2.2.** — *Il existe un algorithme polynomial qui résout le problème du postier .*

### 11.2.2. Version orientée. —

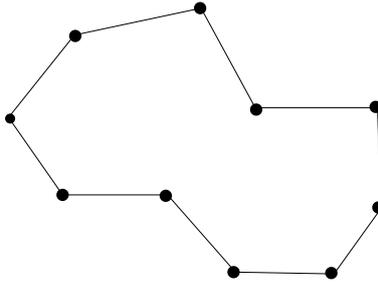


FIGURE 6. Une tournée dans le plan.

11.2.2.1. *Formulation.* — La version orientée existe également. Dans l'exemple de notre facteur, cela permet de prendre en compte l'existence de sens interdits.

### Problème du postier, version orientée

**Donnée :** Un graphe  $D = (V, A)$  et une fonction de coût sur les arcs  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Tâche :** Trouver un chemin fermé de coût minimum passant par tous les arcs au moins une fois.

11.2.2.2. *Algorithme.* — Et de même que pour la version non orientée, on a un algorithme de résolution exacte en temps polynomial, simple à implémenter. En effet, un tel chemin est une *circulation*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^A$  de coût minimum, étudiée au Chapitre 5, pour des capacités inférieures  $l_a = 1$  et des capacités supérieures  $u_a = +\infty$  pour tout  $a \in A$ . (Rappelons qu'une circulation satisfait la loi de Kirchoff en tous les sommets – c'est un flot sans source ni puits). Réciproquement, si on a une circulation  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^A$  entière satisfaisant ces contraintes, et si  $D$  est faiblement connexe, en vertu du Théorème 2.2.2, il existe un chemin fermé passant par chaque arc un nombre  $x_a$  de fois.

**Théorème 11.2.3.** — *Il existe un algorithme polynomial qui résout le problème du postier, dans sa version orientée.*

## 11.3. Exercices

11.3.1. **Nombre de sommets de degré pair.** — Montrer que dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

11.3.2. **Voyageur de commerce dans le plan.** — On considère la tournée de la Figure 6. Les distances sont les distances euclidiennes (« à vol d'oiseau »). Montrez que cette tournée est optimale en vous inspirant de la Figure 7.

11.3.3. **Voyageur de commerce, cas orienté.** —

- Ecrire la relaxation linéaire du problème du voyageur de commerce dans le cas orienté, comme cela a été fait pour le cas non-orienté dans le cours.
- Expliquer pourquoi une relaxation lagrangienne dans ce cas conduit au calcul des « 1-arbres orientés ».

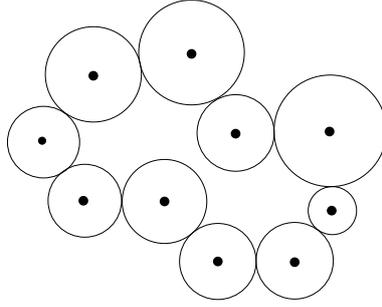


FIGURE 7. Cela permet-il de prouver l'optimalité de la tournée de la Figure 6 ?

**11.3.4.  $T$ -joins.** — Soit  $G$  un graphe avec des coûts  $c : E \rightarrow \mathbb{R}$  (contrairement au cours, on accepte des coûts négatifs). Soit  $T$  un ensemble de cardinalité paire. Notons  $E^-$  l'ensemble des arêtes de coût négatif,  $T^-$  l'ensemble des sommets incidents à un nombre impair d'arêtes de  $E^-$ , et enfin  $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $d(e) := |c(e)|$ . On dit que  $J$  est un  $T$ -join si  $\deg_J(v)$  est impair si  $v \in T$  et pair sinon. (rappel  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ).

1. Montrer que  $c(J) = d(J \Delta E^-) + c(E^-)$ .
2. Montrer que  $J$  est un  $T$ -join si et seulement si  $J \Delta E^-$  est un  $(T \Delta T^-)$ -join.
3. Conclure que  $J$  est un  $T$ -join de coût minimal pour le coût  $c$  si et seulement si  $J \Delta E^-$  est un  $(T \Delta T^-)$ -join de coût minimal pour le coût  $d$ .
4. Conclure que l'on sait trouver en temps polynomial un  $T$ -joint de coût minimum, quel que soit le coût.

**11.3.5. Plus courte chaîne dans les graphes sans cycle absorbant.** — Utiliser l'exercice précédent pour montrer que l'on sait calculer en  $O(n^3)$  une plus courte chaîne dans les graphes sans cycle absorbant (rappel : un cycle absorbant est un cycle de coût total  $< 0$ ; trouver un couplage parfait de coût min se fait en  $O(n^3)$ ).

**11.3.6. Tournées avec contraintes de temps.** — Un représentant de commerce doit visiter des clients situés en des villes différentes. Il a fixé un rendez-vous pour chacun de ses clients, i.e. pour tout client  $i$ , le représentant sait qu'il doit passer après l'instant  $a_i$ , mais avant l'instant  $b_i$ . Il souhaite optimiser sa tournée (et en passant vérifier que les contraintes ne sont pas contradictoires). On suppose qu'il sait le temps qu'il lui faut pour aller d'une ville à une autre.

Proposer une formulation sous la forme d'un programme linéaire mixte (variables entières et continues), qui, contrairement au problème du voyageur de commerce usuel, ne contient pas un nombre exponentiel de contraintes.

**11.3.7. Voyageur de commerce et programmation dynamique.** — Considérons l'instance suivante : un graphe complet  $K_n = (V, E)$  à  $n$  sommets ( $n \geq 3$ ), des coûts positifs  $c(vw)$  définis pour toute paire  $v, w$  de sommets, et un sommet particulier  $s \in V$ . On cherche la chaîne hamiltonienne de plus petit coût dont une des extrémités est  $s$ .

1. En prenant comme états les couples  $(X, v)$  tels que  $v \in X \subseteq V \setminus \{s\}$ , montrer que l'on peut écrire une équation de programmation dynamique permettant le calcul de la chaîne optimale.

Pour les questions suivantes, on peut se servir des identités indiquées à la fin de l'examen.

2. Quel est le nombre d'états possibles ?

On prend comme opération élémentaire l'addition.

3. Estimez le nombre d'additions que ferait un algorithme exploitant cette équation de programmation dynamique. Comparez ce nombre au nombre d'additions que ferait un algorithme qui énumérerait toutes les solutions.

4. Si votre ordinateur est capable de faire 1 million d'opérations élémentaires par seconde, pour chacune des valeurs suivantes de  $n$ , indiquez (par un calcul "à la louche") si vous serez capable de résoudre le problème avec cet algorithme en 1 seconde, 1 heure, 1 jour, 1 semaine, 1 mois, 1 an, 1 siècle :

$$n = 15 \quad n = 30 \quad n = 45.$$

5. Comment utiliser l'algorithme pour résoudre le problème du voyageur de commerce (cycle hamiltonien de plus petit coût) sur  $K_n$  ?



## CHAPITRE 12

### CONCEPTION DE RÉSEAUX

Les réseaux sont omniprésents. Qu'ils soient routiers, ferrés, informatiques, électriques ou gaziers, ils ont souvent des rôles stratégiques et économiques cruciaux, et leur robustesse (i.e. leur capacité à assurer leur mission même en cas de défaillance locale) est une qualité souvent recherchée.

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques modèles et algorithmes de base dans le domaine de la conception de réseau robuste – champ essentiel de la recherche opérationnelle.

Nous étudierons deux problèmes :

- celui de l'arbre couvrant de poids minimal : étant donné un graphe pondéré, trouver un arbre inclus dans ce graphe, de poids minimal, tel que tous les sommets soient reliés par l'arbre.
- celui de l'arbre de Steiner de poids minimal, qui généralise le problème précédent : étant donné un graphe pondéré, trouver un arbre inclus dans ce graphe, de poids minimal, tel que tous les sommets d'un sous-ensemble prédéterminé soient reliés par l'arbre.

#### 12.1. Quelques rappels

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. On a la propriété suivante.

**Proposition 12.1.1.** — *Tout arbre à  $n$  sommets a  $n - 1$  arêtes.*

*Démonstration.* — Par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , c'est évident. Pour  $n \geq 2$ , prendre un sommet de degré 1<sup>(1)</sup>. Retirer ce sommet de l'arbre. Le graphe restant reste un arbre. Par récurrence, il a  $n - 1$  sommets et  $n - 2$  arêtes. En remettant le sommet que l'on vient de retirer, on ajoute un sommet et une arête.  $\square$

Un *arbre couvrant* un graphe  $G = (V, E)$  est un arbre  $T := (V, F)$  avec  $F \subseteq E$ . En d'autres termes, tous les sommets de  $G$  sont couverts par  $T$ , et les arêtes de  $T$  sont des arêtes de  $G$ . Voir une illustration sur la Figure 1.

Un graphe sans cycle mais pas forcément connexe est appelé *forêt*.

---

1. Si on veut être précis, il faut encore prouver qu'un tel sommet existe. Cela a l'air évident, ... mais il faut parfois se méfier des évidences en théorie des graphes. Pour le prouver, on prend un sommet quelconque de l'arbre. On suit une chaîne partant de ce sommet en s'interdisant de repasser par un même sommet. Par finitude de l'arbre, la chaîne s'arrête en un sommet  $v$ . Si  $v$  est de degré  $\geq 2$ , alors il existe une autre arête que par celle par laquelle on est arrivé dont l'autre extrémité est sur la chaîne. Or ceci est impossible, car il y aurait alors un cycle sur l'arbre. Donc le sommet  $v$  est de degré 1.

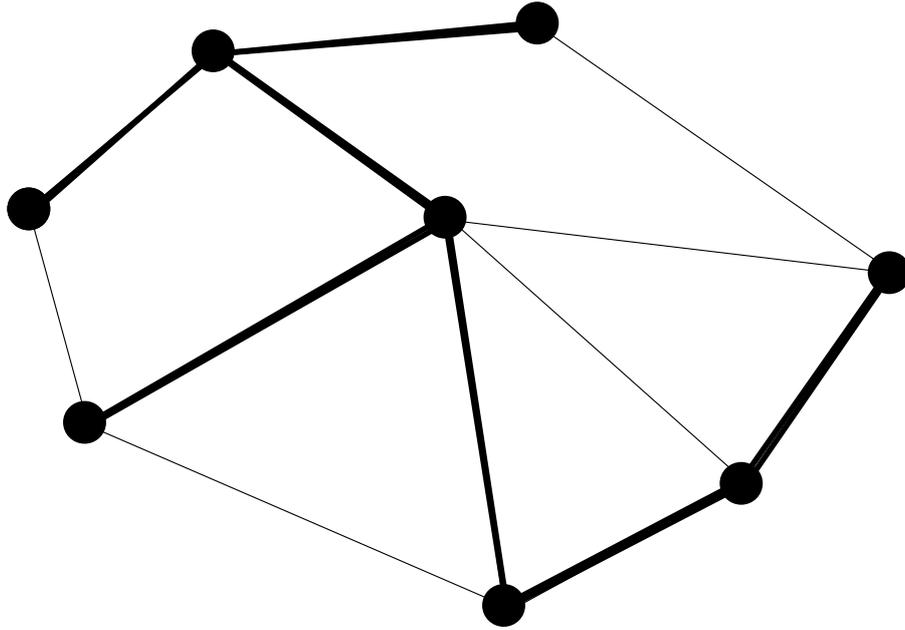


FIGURE 1. Un exemple d'arbre couvrant.

### 12.2. Arbre couvrant de poids minimal

Considérons le problème suivant. On a  $n$  villages, les distances entre le village  $i$  et le village  $j$  sont données dans le tableau suivant ( $n = 7$ )

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$
$A$	0	3	8	9	10	5	5
$B$	3	0	9	9	12	5	4
$C$	8	9	0	2	10	9	9
$D$	9	9	2	0	11	9	8
$E$	10	12	10	11	0	11	11
$F$	5	5	9	9	11	0	1
$G$	5	4	9	8	11	1	0

On veut trouver le réseau routier de distance totale minimale qui relie tous les villages, sachant qu'un tronçon relie toujours deux villages (il n'y a pas d'embranchement sur les routes).

On peut modéliser le problème précédent par un graphe complet  $K_n = (V, E)$ , où  $V$  est l'ensemble des villages et  $E$  tous les tronçons possibles, i.e. toutes les paires  $ij$  avec  $i \neq j$  des éléments de  $V$ . On a une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

On cherche alors un sous-ensemble  $F \subseteq E$  tel que  $\sum_{e \in F} w(e)$  soit minimal et tel que le graphe  $(V, F)$  soit connexe.

*Remarque.* — Le problème ci-dessus admet toujours une solution qui soit un arbre. En effet, s'il ne l'était pas, il y aurait nécessairement un cycle puisqu'il est connexe. On pourrait alors supprimer une arête de ce cycle sans faire disparaître la connexité et sans détériorer le poids total puisque la fonction de poids est à valeur  $\geq 0$ .

On cherche donc à résoudre un problème d'arbre couvrant de poids minimal.

Une autre application a déjà été vue : les arbres couvrants apparaissent dans la relaxation lagrangienne du problème du voyageur de commerce (borne du 1-arbre), voir Chapitre 11.

Cela justifie la formulation sous forme de problème.

### Problème de l'arbre couvrant de poids minimal

**Donnée** : Un graphe  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Tâche** : Trouver un arbre couvrant de plus petit poids.

Pour ce problème, il y a un « petit miracle » puisque nous allons voir qu'il existe un algorithme polynomial glouton qui le résout : l'algorithme de Kruskal. Rappelons qu'un algorithme est dit *glouton* si à chaque itération on fait le meilleur choix local. Ces algorithmes sont rarement optimaux (penser aux algorithmes FIRST-FIT et NEXT-FIT du bin-packing : ils sont gloutons, mais non-optimaux ; de même pour l'algorithme glouton pour le sac-à-dos).

L'algorithme de Kruskal se décrit de la manière suivante.

- Trier les arêtes par poids croissant :  $e_1, \dots, e_m$ .
- Poser  $F := \{e_1\}$ ,  $i := 1$ .
- Répéter

Faire  $i := i + 1$ . Si  $F \cup \{e_i\}$  ne contient pas de cycle, faire  $F := F \cup \{e_i\}$ .

**Théorème 12.2.1.** — *L'algorithme de Kruskal résout le problème de l'arbre couvrant de poids minimal.*

La preuve s'appuie sur le lemme suivant, illustré Figure 2. On dit qu'une forêt  $\mathcal{F} = (V, F)$  est *bonne* s'il existe un arbre couvrant  $T = (V, F')$  de poids minimal avec  $F \subseteq F'$

**Lemme 12.2.2.** — *Soit  $\mathcal{F} = (V, F)$  une bonne forêt, soit une coupe  $\delta(X)$  (avec  $X \subseteq V$ ) disjointe de  $F$  et  $e$  une arête de poids minimal dans  $\delta(X)$ . Alors  $(V, F \cup \{e\})$  est encore une bonne forêt.*

*Démonstration.* — Soit  $T$  un arbre couvrant de poids minimal contenant  $F$ . Soit  $P$  le chemin reliant dans  $T$  les extrémités de  $e$ .  $P$  intersecte  $\delta(X)$  en au moins une arête  $f$ . Alors  $T' := T \setminus \{f\} \cup \{e\}$  est encore un arbre couvrant. D'après la définition de  $e$ , on a  $w(e) \leq w(f)$ , et donc  $w(T') \leq w(T)$ . Par conséquent,  $T'$  est encore un arbre couvrant de poids minimal. Comme  $F \cup \{e\}$  est contenu dans  $T'$ , c'est encore une bonne forêt.  $\square$

*Preuve du Théorème 12.2.1.* — L'algorithme de Kruskal ajoute à chaque itération l'arête de plus petit poids dans la coupe  $\delta(K)$ , où  $K$  est l'une des deux composantes connexes de  $\mathcal{F} = (V, F)$  incidentes à  $e_i$ . Comme  $\delta(K)$  est disjointe de  $F$ , le Lemme 12.2.2 s'applique.

Tout au long de l'algorithme,  $(V, F \cup \{e_i\})$  est donc une bonne forêt. En particulier à la dernière itération où la forêt se transforme en arbre. Par définition d'une bonne forêt, cet arbre est optimal.  $\square$

*Remarque.* — Cet algorithme fonctionne quelque soit le signe des poids des arêtes. Dans l'exemple introductif, on supposait que les poids étaient tous positifs ; cela pour permettre de conclure que le problème du graphe connexe couvrant de plus petit poids pouvait se ramener au problème de l'arbre couvrant de plus petit poids. Ce dernier problème lui se résout par l'algorithme de Kruskal indépendamment du signe du poids des arêtes.

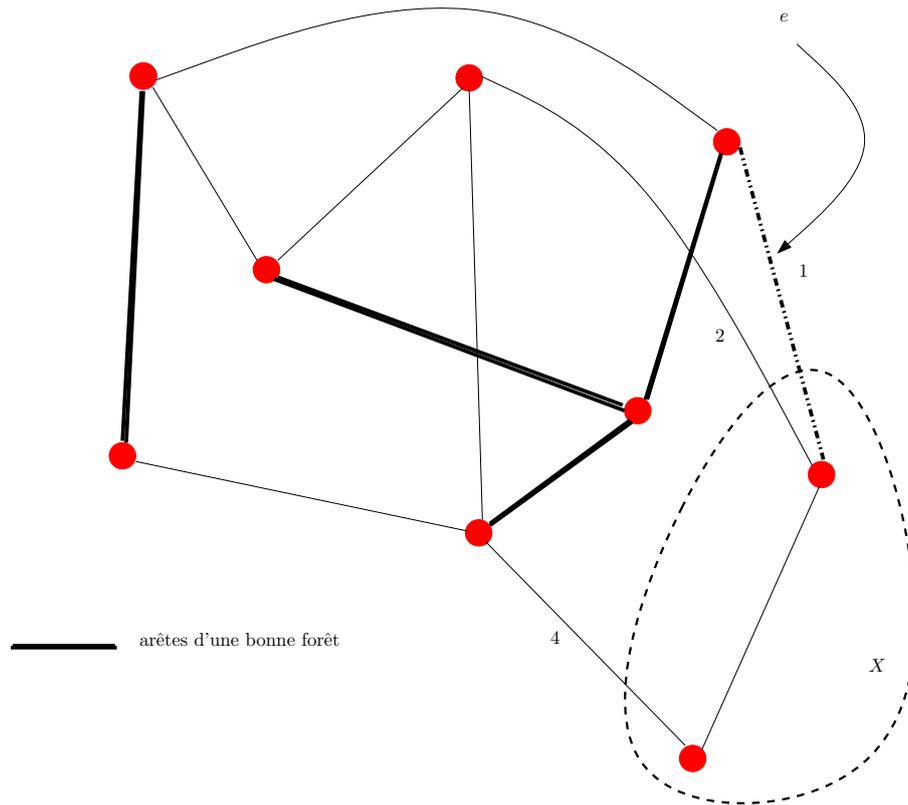


FIGURE 2. Une bonne forêt, qui reste une bonne forêt lorsqu'on ajoute l'arête  $e$  (on suppose que  $e$  est de poids minimal dans  $\delta(X)$ ).

### 12.3. Arbre de Steiner

**12.3.1. Généralités.** — Dans le problème de l'arbre de Steiner, c'est seulement un sous-ensemble des sommets du graphe que l'on souhaite voir relié par un arbre. Curieusement, alors que le problème de l'arbre couvrant de poids minimal est polynomial, celui de l'arbre de Steiner est **NP**-difficile.

Le problème se formalise comme suit.

#### Problème de l'arbre de Steiner

**Donnée :** Un graphe  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  et un ensemble de sommets  $S \subseteq V$ , appelés *terminaux*.

**Tâche :** Trouver un arbre  $T$  de plus petit poids couvrant  $S$ .

Les applications sont innombrables, et ce problème apparaît fréquemment dans la conception de réseau en tant que tel ou en tant que sous-routine.

**Théorème 12.3.1.** — *Le problème de l'arbre de Steiner est **NP**-difficile, même si tous les poids sont égaux à 1.*

Comme d'habitude dans ce cas-là, il faut se poser la question de l'existence d'algorithmes d'approximation, d'algorithmes exacts efficaces ou de cadre adapté à la recherche locale. C'est ce que nous allons voir maintenant.

**12.3.2. Une heuristique « à la Christofidès ».** — Il existe une heuristique similaire à celle de Christofidès pour le problème du voyageur de commerce, qui se décrit très simplement.

On suppose  $G = (V, E)$  connexe. On construit le graphe complet  $K = (S, E')$  sur  $S$  et sur chaque arête  $uv \in E'$  on met le poids  $\bar{w}$  du plus court chemin de  $u$  à  $v$  dans  $G$  (même construction que pour le problème du voyageur de commerce – voir Chapitre 11).

On prend l'arbre  $T'$  de plus petit poids couvrant  $K$  pour le poids  $\bar{w}$ .

$T'$  induit un graphe partiel  $H$  de  $G$ . On en prend un arbre couvrant de plus petit poids  $w$ .

L'algorithme est illustré Figure 12.3.2.

**Théorème 12.3.2.** — *L'algorithme décrit ci-dessus fournit une solution de poids au plus 2 fois plus grand que la solution optimale.*

*Démonstration.* — Il suffit de prouver que  $\bar{w}(T')$  est au plus deux fois plus grand que celui de l'arbre de Steiner  $T$  de poids minimum  $w(T)$ .

Soit  $T$  l'arbre de Steiner de plus petit poids. Dupliquons chacune des arêtes de  $T$ . On a donc maintenant un graphe eulérien que l'on peut parcourir en passant exactement une fois sur chaque arête : cycle  $C$ . Cela induit un cycle hamiltonien  $C'$  dans  $K$  : on parcourt  $S$  dans l'ordre de leur première apparition dans  $C$ . On a finalement

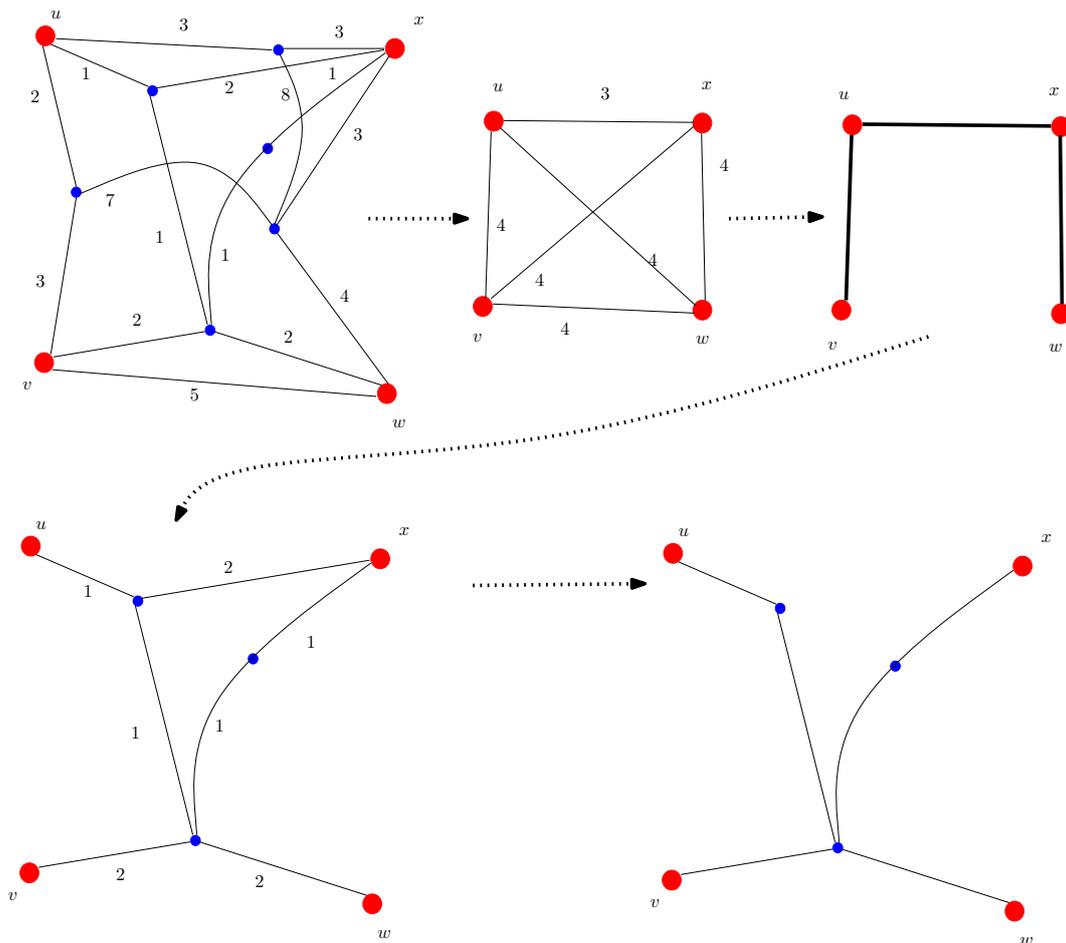


FIGURE 3. Illustration de l'heuristique « à la Christofidès » pour le problème de l'arbre de Steiner.

$$\bar{w}(T') \leq \bar{w}(C') \leq w(C) = 2w(T).$$

□

**12.3.3. Programmation dynamique.** — Dreyfus et Wagner [7] ont trouvé une méthode assez astucieuse – basée sur la programmation dynamique (voir Chapitre 3) – qui permet de calculer un arbre de Steiner de poids minimum, quand le nombre d'éléments de  $S$  n'est pas trop grand.

En effet, si on pose pour  $U \subseteq V$  et  $x \notin U$

$$p(U) := \min\{w(T) : T \text{ est arbre de Steiner pour } U\},$$

on a l'équation de programmation dynamique suivante

$$(34) \quad p(U \cup \{x\}) = \min_{y \in V, \emptyset \subsetneq U' \subsetneq U} (\mathbf{dist}(x, y) + p(U' \cup \{y\}) + p(U \setminus U' \cup \{y\})).$$

où  $\mathbf{dist}(x, y)$  est la *distance* de  $x$  à  $y$ , i.e. la longueur d'une plus courte chaîne de  $x$  à  $y$  en prenant  $w$  comme longueur des arêtes (voir Chapitre 3 pour ces calculs de plus courts chemins).

Pour voir que l'équation (34) est vraie, supposons d'abord que  $x$  est une feuille. Dans ce cas,  $x$  est relié par une chaîne à un sommet  $y$  qui est tel que

- soit  $y \in U$
- soit  $y \notin U$  et  $y$  de degré au moins 2.

Pour le premier point, l'équation (34) est vraie en posant  $U' := \{y\}$ . Pour le second point, l'équation est vraie car alors  $y$  est le point de rencontre d'une chaîne partant de  $x$ , d'un arbre couvrant  $U' \cup \{y\}$  et d'un arbre couvrant  $U \setminus U' \cup \{y\}$ .

Enfin, supposons que  $x$  ne soit pas une feuille. Dans ce cas l'équation est vraie pour  $y = x$ .

L'équation (34) calculées de proche en proche conduit à

**Théorème 12.3.3.** — *Le problème de l'arbre de Steiner de poids minimum se résout de manière exacte en  $O(3^s ns + mn + n^2 \log n)$ , où  $s$  est le nombre d'éléments de  $S$ .*

*Elements de preuve.* — La preuve de l'équation (34) a été esquissée ci-dessus. Il reste à expliquer la complexité.

Le terme  $O(3^s n^2)$  vient du calcul de  $p(U)$ . Supposons que l'on ait calculé tous les  $p(U)$  pour un cardinal  $|U| = i$ . Le calcul d'un  $p(U)$  pour une cardinalité  $|U| = i+1$  se fait en  $n2^i$  (interprétation de l'équation (34)). La complexité totale est donc de l'ordre de  $\sum_{i=0}^{s-1} n2^i \binom{s}{i+1} = O(3^s ns)$ .

Le terme  $O(mn + n^2 \log n)$  vient du calcul des plus courtes distances. □

Une approche par la programmation dynamique peut donc être pertinente si le nombre  $s$  de terminaux est petit.

**12.3.4. Branch-and-cut.** — L'approche branch-and-cut (voir le Chapitre 11 pour une première approche du branch-and-cut) repose sur la proposition suivante.

**Proposition 12.3.4.** — *Soit  $r$  un sommet arbitraire,  $r \in S$ . Résoudre le problème de l'arbre de Steiner de coût minimum revient à résoudre*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^E} \quad & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 1 \quad \text{pour tout } X \subseteq V \text{ tel que } r \notin X \\ & \text{et } X \cap S \neq \emptyset \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad e \in E. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Si  $\mathbf{x}$  est vecteur d'incidence d'un arbre de Steiner, il est clair qu'il satisfait les inégalités ci-dessus. Réciproquement, soit  $\mathbf{x}^*$  une solution optimale du programme linéaire. Notons  $T := \{e \in E : x_e = 1\}$ . D'après l'inégalité  $\sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 1$ , l'ensemble  $T$  est connexe. Et si  $T$  contient un cycle  $C$ , on peut trouver une arête  $e \in C$  telle que  $w(e) = 0$ , arête que l'on peut supprimer sans que les contraintes se retrouvent violées.  $\square$

Le programme linéaire en nombres entiers précédent a deux caractéristiques qui le rende difficile à résoudre.

- il est en nombres entiers.
- il a un nombre exponentiel de contraintes.

On est exactement dans la même situation que pour la formulation PLNE du problème du voyageur de commerce. La relaxation continue lève le premier problème : la solution de ce problème fournit une borne inférieure sur la solution optimale. Cela indique qu'une méthode de branch-and-cut peut être appropriée. Pour résoudre le programme linéaire précédent, on peut utiliser une approche branch-and-cut très semblable à celle suivie pour le voyageur de commerce.

Pour pouvoir appliquer un branch-and-cut, il faut pouvoir trouver s'il existe  $X \subseteq V$  avec  $r \notin X$  et  $X \cap S \neq \emptyset$  tel que  $\sum_{e \in \delta(X)} x_e < 1$ . Cela se fait par une recherche de coupe minimum : on recherche le  $v$ - $r$  flot maximum pour tout  $v \in S$  (voir Chapitre 5).

On a donc tout ce qu'il faut pour faire du branch-and-cut. L'algorithme suit le même schéma que celui décrit au Chapitre 11.

**12.3.5. Relaxation lagrangienne.** — La ressemblance avec les problèmes d'arbres couvrants suggère la modélisation suivante

**Proposition 12.3.5.** — Soit  $r$  un sommet arbitraire,  $r \in S$ . Soit  $v_0$  un nouveau sommet, relié à tout sommet de  $V \setminus S$  et à  $r$ . On étend  $w$  par  $w(v_0v) := 0$ . On appelle  $G_0 = (V_0, E_0)$  ce nouveau graphe. Résoudre le problème de l'arbre de Steiner de poids minimum revient à résoudre

$$(35) \quad \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E} & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{s.c.} & x_e \in \{0, 1\} \quad \text{et est le vecteur indicateur} \\ & \quad \quad \quad \text{d'un arbre couvrant } G_0, \\ & x_{v_0v} + x_e \leq 1 \quad v \in V \setminus S; e \in \delta_G(v) \end{array}$$

*Démonstration.* — Si  $\mathbf{x}$  est vecteur d'incidence d'un arbre de Steiner, il est clair qu'il satisfait les inégalités ci-dessus, quitte à ajouter des  $x_{v_0v} := 1$ , sans modifier le poids. Réciproquement, soit  $\mathbf{x}^*$  une solution optimale du programme linéaire. Notons  $T := \{e \in E : x_e = 1\}$ . En ne gardant que les arêtes qui sont non incidentes à  $v_0$ , on obtient un arbre de Steiner de même coût.  $\square$

Comme d'habitude pour ce genre de problème, on peut avoir de meilleures bornes en utilisant la relaxation lagrangienne, ce qui peut être cruciale pour les problèmes de grande taille. Il faut donc se demander si la suppression de certaines contraintes du programme (35) rend le problème soluble.

Il est clair que la suppression des contraintes  $x_{v_0v} + x_e \leq 1$  rend le problème polynomial, grâce à l'algorithme de Kruskal. On écrit donc le lagrangien.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \sum_{e \in E} w(e)x_e + \sum_{v \in V \setminus S} \sum_{e \in \delta(v)} \lambda_{v,e}(x_{v_0v} + x_e - 1).$$

Le problème de l'arbre de Steiner consiste à trouver  $\min_{\mathbf{x}} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ . On peut minorer cette quantité par  $\max \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$ , avec  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ , ie :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) &:= \\ \min & \quad \sum_{e \in E} w(e)x_e + \sum_{v \in V \setminus S} \sum_{e \in \delta_G(v)} \lambda_{v,e}(x_{v_0v} + x_e - 1) \\ \text{s.c.} & \quad x_e \text{ est le vecteur indicateur d'un arbre couvrant } G_0 \end{aligned}$$

qui peut se réécrire...

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}) := - \sum_{v \in V \setminus S} \sum_{e \in \delta(v)} \lambda_{v,e} + \text{poids minimal d'un arbre couvrant } G_0$$

où l'arbre couvrant  $G_0$  est calculé avec les poids  $w'_{uv} := w_{uv} + \lambda_{u,uv}\mathbf{1}(u \notin S) + \lambda_{v,uv}\mathbf{1}(v \notin S)$  si  $uv \in E$  et  $w'_{v_0v} := \sum_{e \in \delta(v)} \lambda_{v,e}$ .

$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$  se calcule donc aisément par l'algorithme de Kruskal, ainsi que ses sur-gradients. On sait donc maximiser  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda})$ , et on peut calculer de bonnes bornes inférieures.

Pour le branchement, c'est simple : les solutions réalisables associées à un nœud de l'arbre de branch-and-bound correspond à l'ensemble des arbres avec un sous-ensemble d'arêtes imposé. Il est en effet facile de voir que trouver l'arbre couvrant de poids minimum avec des arêtes imposées se fait encore avec l'algorithme de Kruskal. La situation est ici plus simple que dans le cas du voyageur de commerce où pour conserver la borne du 1-arbre en fixant des arêtes et en interdisant d'autres il faut modifier la fonction de coût.

**12.3.6. Recherche locale.** — Classiquement, les algorithmes de recherche locale pour le problème du Steiner tree s'appuient sur la remarque suivante : Une fois fixés les sommets  $V' \subseteq V$  de l'arbre de Steiner (on a bien sûr  $T \subseteq V'$ ), les arêtes s'obtiennent par un simple calcul d'arbre couvrant de poids minimum.

Le voisinage se construit sur les parties  $V'$  de  $V$  : on dit que  $V'$  est *voisin* de  $V''$  si l'on est dans une des ces situations

1.  $V'' := V' \setminus \{v'\}$  pour un  $v' \in V'$ , (*drop*)
2.  $V'' := V' \cup \{v''\}$  pour un  $v'' \in V \setminus V'$  (*add*) ou
3.  $V'' := V' \setminus \{v'\} \cup \{v''\}$  (*swap*).

## 12.4. Quelques remarques pour finir

Reprenons le problème des villages du début, mais maintenant autorisons-nous des embranchements. On veut donc convevoir le réseau routier de distance totale minimale tel que tous les villages soient reliés.

Ici, contrairement à la situation du début, la liste des tronçons possibles est potentiellement infinie, l'input est alors plutôt les coordonnées des  $n$  villages. Ce genre de problème justifie la formalisation du problème suivant.

### Problème de l'arbre de Steiner euclidien

**Donnée** :  $t$  points de coordonnées  $(x_1, y_1), \dots, (x_t, y_t)$ .

**Tâche** : Trouver l'arbre de plus petite longueur reliant tous les points.

Sans surprise, on a

**Théorème 12.4.1.** — *Le problème de l'arbre de Steiner euclidien est NP-difficile.*



FIGURE 4. A gauche, l'input d'un problème de Steiner euclidien, à droite l'output.

Remarquons que l'arbre de Steiner de plus petite longueur est le réseau de plus petite longueur reliant tous les points, l'existence d'un cycle conduisant toujours à une solution sous-optimale. Pour une illustration d'un tel réseau, voir Figure 4.

Les heuristiques de résolutions, les algorithmes, etc. s'appuient sur la propriété suivante. On appelle *point de Steiner* une extrémité de segment qui ne soit pas un des points de l'input.

**Proposition 12.4.2.** — *Les points de Steiner sont toujours de degré 3 (au sens du nombre d'arêtes). De plus, on ne peut avoir deux segments se rencontrant en un angle de strictement moins de  $120^\circ$ .*

Cette proposition se démontre en résolvant le problème de l'arbre de Steiner euclidien dans le cas où il n'y a que trois points. Ce problème avait été résolu en son temps par Fermat.

Si ces trois points forment un triangle  $ABC$  dont les angles font tous moins de  $120^\circ$ , il faut ajouter un point  $P$  dans le triangle, appelé *point de Fermat*, tel que les angles  $\widehat{APB}$ ,  $\widehat{BPC}$  et  $\widehat{CPA}$  fassent tous trois  $120^\circ$ . La preuve de ce fait est un exercice classique de géométrie plane et passe par les rotations d'angles  $120^\circ$  en les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Si l'un des angles du triangle fait plus de  $120^\circ$ , disons  $\widehat{ABC}$ , alors le réseau optimal est formé des deux segments  $[A, B]$  et  $[B, C]$ .

Tout comme le problème de l'arbre de Steiner sur un graphe, le problème de l'arbre de Steiner euclidien est très étudié. On connaît des branch-and-bound efficaces et de bonnes heuristiques et métaheuristiques du style recherche locale.

Un autre problème très étudié – avec des résultats semblables – est le problème de l'arbre de Steiner « Manhattan », en ne s'autorisant que les segments horizontaux et verticaux. Une application réside par exemple dans la conception des circuits intégrés.

## 12.5. Exercices

**12.5.1. Un réseau d'eau.** — Un ensemble de pavillons doit être relié par un réseau de canalisation d'eau au moindre coût à un château d'eau. Voir Figure 5. Sur la figure, les liaisons possibles sont indiquées par la présence d'un lien entre deux pavillons. Le coût d'ouverture d'une liaison est indiqué à proximité de ce lien.

Mettez en évidence un réseau de moindre coût sur la figure, indiquez son coût et justifiez l'optimalité de la solution que vous proposez.

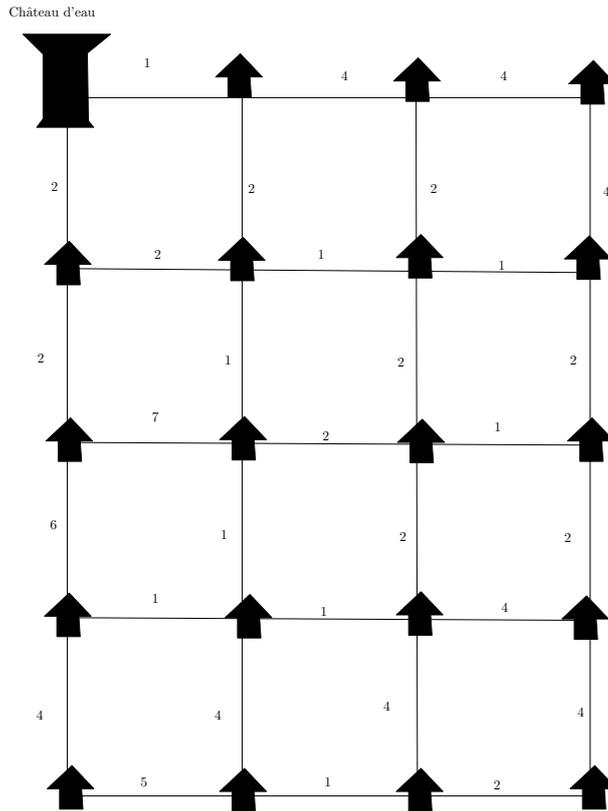


FIGURE 5

**12.5.2. Plus grand poids le plus petit possible.** — Considérons un graphe  $G = (V, E)$  muni de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On cherche l'arbre couvrant dont le poids maximal d'une arête est le plus petit possible. Comment peut-on le trouver ?

**12.5.3. Produit des poids.** — Considérons un graphe  $G = (V, E)$  muni de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  strictement positifs. Peut-on trouver en temps polynomial l'arbre couvrant dont le produit des poids est minimal ?

**12.5.4. Graphe partiel connexe couvrant.** — Considérons un graphe  $G = (V, E)$  muni de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Peut-on trouver en temps polynomial le graphe partiel connexe couvrant de poids minimal ?

Rappelons qu'un *graphe partiel*  $H$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est tel que  $H = (V', F)$  avec  $V' \subseteq V$  et  $F \subseteq E$ . Si  $V' = V$ , on dit qu'il *couvre*  $G$ .

**12.5.5. Transmission optimale de message, d'après Ahuja, Alimanti et Orlin [1].** — Un service d'espionnage a  $n$  agents dans un pays ennemi. Chaque agent connaît certains des autres agents et peut organiser une rencontre avec toute personne qu'il connaît. Pour toute rencontre entre l'agent  $i$  et l'agent  $j$ , la probabilité que le message tombe entre des mains hostiles est de  $p_{ij}$ . Comment transmettre le message à tous les agents en minimisant la probabilité d'interception ?

**12.5.6. Matroïdes (pour les élèves ayant un goût pour les maths).** — Soit  $E$  un ensemble fini et soit  $\mathcal{I}$  une collection de parties de  $E$ . Si  $\mathcal{I}$  satisfait

(i) si  $I \in \mathcal{I}$  et  $J \subseteq I$ , alors  $J \in \mathcal{I}$ .

(ii) si  $I, J \in \mathcal{I}$  et  $|I| < |J|$ , alors  $I \cup \{z\} \in \mathcal{I}$  pour un certain  $z \in J \setminus I$ .

alors  $(E, \mathcal{I})$  est appelé un *matroïde*.

1. Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe. Montrer que  $(E, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des forêts de  $G$  est un matroïde.
2. Soit  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$  l'union de  $k$  ensemble disjoints, et soient  $u_1, u_2, \dots, u_k$  des entiers positifs. Montrer que  $(E, \mathcal{I})$  où  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des parties  $I$  de  $E$  telles que  $I \cap E_i \leq u_i$  est un matroïde (appelé *matroïde de partition*).
3. Soit  $M$  une matrice réelle. Soit  $E$  l'ensemble des colonnes de  $M$  et soit  $\mathcal{I}$  les sous-ensembles de colonnes indépendantes (pour l'algèbre linéaire). Montrer que  $(E, \mathcal{I})$  est un matroïde (appelé *matroïde matriciel*).
4. Soit  $(E, \mathcal{I})$  un matroïde. Supposons donnée une fonction de poids  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que trouver l'indépendant de poids maximum peut se faire par l'algorithme glouton.

**12.5.7. Design de réseau - un seul bien.** — Supposons que l'on souhaite calibrer un réseau de transport de façon à pouvoir assurer des livraisons depuis des sources jusqu'à des destinations. Pour chaque tronçon direct  $(u, v)$ , on connaît le coût  $c(u, v)$  d'établissement d'une liaison de capacité unitaire. Comment construire le réseau dont l'établissement soit de coût minimum ? On suppose que l'on connaît pour les sources, l'offre et pour les destinations, la demande. Modéliser ce problème comme un problème de flot.

**12.5.8. Design de réseau - plusieurs biens.** — On dispose d'un réseau orienté  $D = (V, A)$ . Ce réseau a des sources  $s_1, \dots, s_k$  et des destinations  $t_1, \dots, t_k$ . Le bien  $i$  circule de la source  $s_i$  à la destination  $t_i$ . Ce bien est modélisé par un flot  $x^i : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

On doit sélectionner maintenant un sous-ensemble  $A'$  de  $A$  tel que chaque bien puisse circuler de sa source à sa destination.

Le coût de sélection de l'arc  $a$  se note  $f_a$  et le coût d'utilisation de l'arc  $a$  pour une unité de bien  $i$  se note  $c_a^i$ . On veut trouver  $A'$  tel que le coût total (sélection des arcs et transport du flot) soit le plus petit possible.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers, en les variables  $x_a^i$ , pour  $a \in A$  et  $i = 1, \dots, k$ , et  $y_a$ , pour  $a \in A$ , où  $y_a$  code la sélection de l'arc  $A$  dans la conception du réseau.

2. Proposer une relaxation lagrangienne qui permette de calculer de bonnes bornes inférieures.

**12.5.9. Un problème de réseau avec une contrainte de degré.** — On se donne un ensemble  $T$  de terminaux à alimenter en électricité et une centrale  $p$ , d'où peuvent partir au plus  $s$  câbles. On veut créer un réseau connectant l'ensemble des terminaux à la centrale. Une connexion consiste soit à relier deux terminaux entre eux, soit à connecter un terminal à la centrale. Comme la centrale a au plus  $s$  câbles la quittant, on peut avoir au plus  $s$  connexions directes à la centrale. Chaque connexion a un coût strictement positif. On cherche le réseau de plus petit coût.

On modélise ce problème par un graphe complet  $K = (V, E)$ , avec  $V = T \cup \{p\}$ . On a donc un vecteur de coût  $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^*)^E$ . Comme les coûts sont strictement positifs, on cherche donc un arbre couvrant de  $K$ , de plus petit coût, et dont le degré en  $p$  n'excède pas  $s$ .

Pour un ensemble  $B \subseteq E$ , on dit qu'un vecteur  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^E$  est le *vecteur indicateur* de  $B$  si

$$x_e = 1 \Leftrightarrow e \in B.$$

Notons  $X$  l'ensemble  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^E$  des vecteurs indicateurs d'arbres couvrants de  $K$ . On cherche donc à résoudre le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.c.} & \sum_{e \in \delta(p)} x_e \leq s \quad (\text{i}) \\ & \mathbf{x} \in X \quad (\text{ii}) \end{array}$$

La méthode que l'on va suivre consiste à utiliser la relaxation lagrangienne. Ici, non seulement elle permettra d'obtenir des bornes inférieures, mais elle permettra également de trouver l'optimum.

1. Ecrire le lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$  de ce problème quand on procède à la relaxation lagrangienne de la contrainte (i), avec  $\lambda$  la variable duale associée à cette contrainte.

On définit  $\mathcal{G}(\lambda) = \min_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ . Calculer  $\mathcal{G}(\lambda)$  revient à résoudre un problème de minimisation. On note  $\mathbf{x}^\lambda$  la solution dans  $X$  correspondante.

2. A  $\lambda$  fixé, peut-on calculer en temps polynomial la valeur de  $\mathcal{G}(\lambda)$ ? Avec quel algorithme?

3. Montrer que si  $\mathbf{x}^0$  est le vecteur indicateur d'un arbre couvrant  $K$  dont le degré en  $p$  est au plus  $s$ , alors  $\mathcal{G}(0) \geq \mathcal{G}(\lambda)$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . Que peut-on par ailleurs dire de cet arbre couvrant par rapport à notre problème de départ? Justifier.

Supposons maintenant que  $\mathbf{x}^0$  est le vecteur indicateur d'un arbre couvrant  $K$  dont le degré en  $p$  est strictement plus grand que  $s$ .

4. On veut trouver  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\mathcal{G}(\lambda)$  soit maximal. Expliquer pourquoi on peut se limiter aux valeurs de  $\lambda$  de la forme  $\lambda = c_e - c_f$  avec  $e \notin \delta(p)$  et  $f \in \delta(p)$ . Evaluer une borne supérieure  $N$  sur le nombre de telles valeurs et en conclure que maximiser  $\mathcal{G}$  se fait en temps polynomial.

On ordonne ces valeurs de  $\lambda$  de façon à avoir une séquence  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ . Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\mathbf{x}^{\lambda_i}$  est un arbre couvrant dont le degré en  $p$  est inférieur ou égal à  $s$ .

5. Montrer que  $\lambda_i$  est la valeur de  $\lambda$  en laquelle  $\mathcal{G}$  est maximal.

6. Montrer que quitte à changer un peu la solution  $\mathbf{x}^{\lambda_i}$  on peut obtenir un arbre couvrant de degré  $s$  en  $p$  de vecteur indicateur  $\mathbf{x}^*$  tel que

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^{\lambda_i}, \lambda_i) = \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda_i).$$

7. En déduire que  $\mathcal{G}(\lambda_i) = \sum_{e \in E} c_e x_e^*$  et que  $\mathbf{x}^*$  est la solution à notre problème de départ. On est donc dans une situation où la borne fournie par la relaxation lagrangienne coïncide avec l'optimum.

## CHAPITRE 13

### OUVERTURE

En conclusion, signalons les outils de la recherche opérationnelle ainsi que des domaines à la frontière que nous avons simplement évoqués, par manque de temps et de place, mais qui sont extrêmement importants.

Ces outils sont les **méthodes de décomposition**, les **méthodes de coupes**, l'**optimisation convexe** et la **simulation**.

Ces domaines sont les **statistiques**, les **files d'attente** et la **théorie des jeux**.

#### 13.1. Quelques outils absents de ce livre

**13.1.1. Les méthodes de décomposition.** — Souvent associé au nom de Bender qui initia ces techniques, les méthodes de décomposition traitent des cas où le nombre de variables est très grand, voire exponentiel en la taille du problème. Très schématiquement, dans le cas où le problème se formule sous la forme d'un programme linéaire ( $P$ ), ces méthodes procèdent de la façon suivante (on parle alors de *génération de colonnes* – le mot « colonne » étant alors synonyme de « variable » comme dans l'algorithme du simplexe) :

1. ne travailler que sur une partie des variables, on appelle ce problème ( $P'$ ) ;
2. résoudre le dual ( $D'$ ) de ce problème réduit ; de deux choses l'une
  - soit la solution de ce dual satisfait toutes les contraintes du dual ( $D$ ) de ( $P$ ) auquel cas, la solution primale optimale de ( $P'$ ) est également solution optimale de ( $P$ ), et l'algorithme est fini,
  - soit la solution de ce dual ne satisfait pas toutes les contraintes de ( $D$ ). On sélectionne alors une des contraintes violées (par exemple, la plus violée, ce qui nécessite souvent un autre problème d'optimisation), on ajoute la variable correspondante à ( $P'$ ) ce qui donne naissance à un nouveau programme réduit. On retourne en 1.

**13.1.2. Les méthodes de coupes.** — Les méthodes de coupes sont utilisées pour la programmation linéaire en nombres entiers. On peut écrire le problème de la programmation linéaire en nombres entiers sous la forme  $\min(\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^n)$ , où  $P$  est un polyèdre.

Les méthodes de coupes consistent à ajouter des contraintes linéaires qui sont vérifiées par tous les points entiers de  $P$ , mais pas par tous les points de  $P$ . Comme on cherche une solution entière, on ne se prive pas de solution, et la relaxation continue est meilleure. Il existe des techniques de génération automatique de contraintes linéaires (coupes de Dantzig, Gomory, Chvátal,...), on peut aussi trouver de telles coupes par des méthodes *ad hoc*, adaptées au problème particulier auquel on s'intéresse. On a vu deux exemples dans les exercices du Chapitre 8.

**13.1.3. Optimisation convexe.** — La généralisation immédiate de la programmation linéaire est la programmation convexe, dont les contraintes et l'objectif sont convexes. Dans le domaine du transport de gaz ou dans les réseaux télécom par exemple, on rencontre souvent des problèmes du type : on se donne un graphe orienté, avec des contraintes de capacité, et des coûts  $c_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexes, pour tout  $a \in A$ , et on demande de trouver le flot de coût minimum. On dispose de nombreux algorithmes efficaces (et très souvent polynomiaux) pour résoudre ces problèmes.

Il faut aussi signaler le cas particulier de la **programmation semi-définie positive**, résolue en temps polynomial par les points intérieurs. Elle concerne le cas où les vecteurs des problèmes de programmation linéaires, tant ceux qui définissent l'objectif ou les contraintes que les variables, sont remplacés par des *matrices semi-définie positive*, i.e. des matrices symétriques réelles dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

La programmation semi-définie positive ne modélise pas aussi naturellement que la programmation linéaire des problèmes réels, mais apparaît souvent comme relaxation efficace de certains problèmes combinatoires, en particulier lorsque le critère comporte des termes quadratiques.

**13.1.4. Simulation.** — Simuler c'est reproduire à volonté un phénomène *original* à l'aide d'un *modèle* qui en abstrait les éléments essentiels, dans le but de tirer des conclusions sur ce phénomène.

L'intérêt est évident quand

- le phénomène original est difficile à reproduire à volonté (conditions particulières difficiles à remplir, coût, durée, etc.)
- la modélisation sous forme problème ne se résout pas facilement (par exemple, les problèmes biniveaux compliqués ; ou en physique : équations Navier-Stokes)

On distingue les simulations à *temps continu* et ceux à *événements discrets*.

La simulation peut être utile par exemple pour dimensionner une flotte de véhicule de transport à la demande, compte tenu de la fonction d'utilité des agents, de la congestion, etc. ; pour proposer un nouveau système logistique, avec des tarifications variables ; pour étudier une chaîne d'approvisionnement complexe ; etc.

La simulation est souvent couplée avec des techniques plus classiques de recherche opérationnelle, comme on le devine aisément à la lecture des exemples ci-dessus.

## 13.2. Trois domaines à la frontière de la recherche opérationnelle

**13.2.1. Statistiques.** — Les statistiques, que l'on peut définir comme la science de la représentation simplifiée des grands ensembles de données, interviennent en amont de la partie **Donnée** d'un Problème : les données ne sont pas toujours faciles à obtenir, ou peuvent être entachées d'erreurs.

**13.2.2. Files d'attente.** — C'est un outil de modélisation (puissant) des systèmes logistiques et de communication. Il y a des *clients*, qui cherchent à accéder à des *ressources* limitées, afin d'obtenir un *service*. Ces demandes concurrentes engendrent des délais et donc des files d'attente de clients.

Les mesures de performance sont en général : **nombre moyen de clients en attente** et **temps moyen d'attente**.

Le modèle le plus simple est donnée Figure 1.

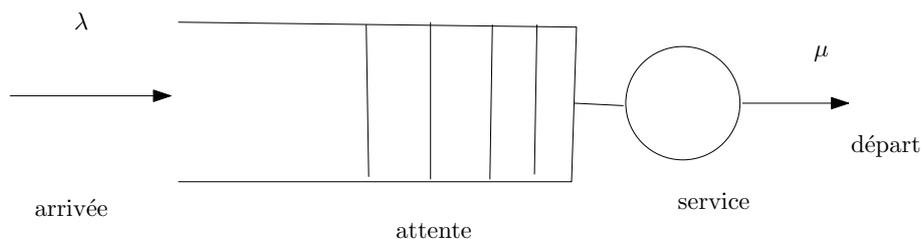


FIGURE 1. Une file d'attente simple.

Les taux d'arrivée et de service,  $\lambda$  et  $\mu$  sont donnés. Si le processus d'arrivée est poissonien et si la durée de service suit une loi exponentielle, le nombre de personnes dans la file est une chaîne de Markov en temps continu. Notons que pour avoir un régime stationnaire, il faut que  $\lambda/\mu < 1$ . En toute généralité, il n'y a pas de raison que la file d'attente puisse être modélisée par une chaîne de Markov, et leur étude peut devenir extrêmement difficile.

Les applications sont nombreuses : dimensionnement des caisses de supermarché, des services hospitaliers, des standard téléphoniques, serveurs informatiques, etc.

**13.2.3. Théorie des jeux.** — La théorie des jeux est née en même temps que la recherche opérationnelle, pendant la seconde guerre mondiale.

Dans ce cours, nous avons vu la théorie des jeux deux fois : dans le Chapitre 4, la dualité forte nous a permis de démontrer le théorème de von Neumann (Théorème 4.5.1 ; dans le Chapitre 6, nous avons vu les mariages stables (théorème de Gale-Shapley), qui appartiennent au champ des jeux coopératifs où l'on s'intéresse à la stabilité des coalitions.

Il y a parfois des interactions fortes entre la théorie des jeux et le recherche opérationnelle :

1. lorsque la fonction objectif ne veut pas optimiser mais « partager équitablement » : les problèmes académiques sont par exemple les mariages stables, *cake cutting*, *necklace splitting*. Dans ces deux derniers problèmes, on veut partager un objet (un gâteau ou un collier) et l'on veut que toutes les personnes perçoivent le partage comme juste dans un certain sens, même si elles n'ont pas la même fonction d'évaluation.
2. lorsque la fonction objectif contient un terme qui résulte d'un terme « réponse » économique. Par exemple, lorsqu'on veut concevoir un réseau routier, on est obligé de se demander par où va s'écouler le flot des usagers. Mais le flot est le résultat de ce que chaque personne décide de faire, d'un processus d'optimisation locale. Il faut donc évaluer et comparer les équilibres de Nash selon les choix qui sont faits. On parle alors de *problème biniveau*.

Dans ce second cas, il faut souligner que les choses sont difficiles, et peu intuitives comme en témoigne le célèbre paradoxe de Braess.

Considérons les réseaux de la Figure 2. Un flot de valeur 1 veut aller de  $s$  à  $t$ . Chaque élément infinitésimal du flot – un usager – choisit le chemin le moins coûteux. On obtient un équilibre de Nash. Dans le réseau de gauche, cet équilibre de Nash est formé d'un flot de valeur 1/2 empruntant la route supérieure, et d'un flot de valeur 1/2 empruntant la route inférieure. L'ajout d'une autoroute au milieu détériore tout : on peut vérifier qu'à l'équilibre de Nash la totalité de flot unitaire suit la route  $s, v, w, t$ . On vérifie que le coût s'est détérioré pour chaque usager.

Enfin, on peut mettre également à l'intersection de la recherche opérationnelle et de la théorie des jeux, la problématique de *yield management*, utilisé dans les transports et l'hôtellerie, et des

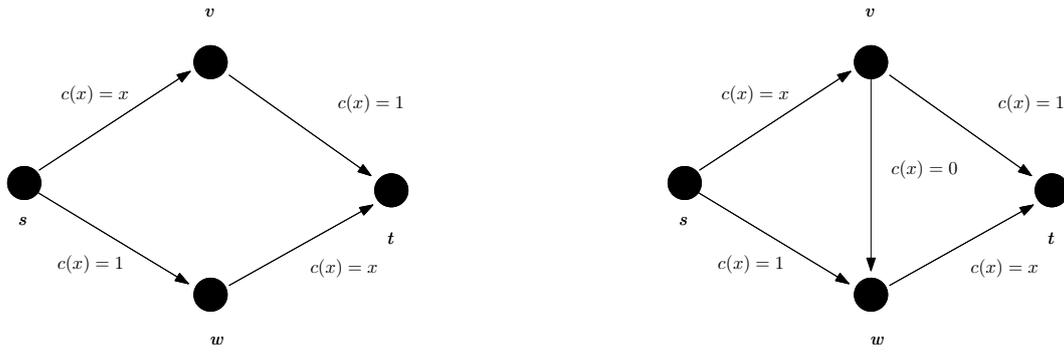


FIGURE 2. Un réseau simple où apparaît le paradoxe de Braess

*enchères*. La question traitée par le yield management concerne la trajectoire suivie par le tarif d'une prestation en fonction de la date où elle est achetée : on peut maximiser le bénéfice en suivant une trajectoire tenant compte des différentes fonctions d'utilité des clients potentiels. Dans les problèmes d'enchères, utilisées en particulier par les prestataires logistiques, on se demande quelles règles mettre en place pour maximiser le prix auquel est vendue *in fine* la prestation.

## ELÉMENTS DE CORRECTION

**Exercice 2.6.5.** — Considérons le graphe  $G = (V, E)$  dont les sommets  $V$  sont les formations, et dans lequel une arête relie deux formations s'il existe un employé devant suivre ces deux formations. Enfin, les couleurs sont les jours. Il est clair que tout planning compatible avec les contraintes de la DRH induit une coloration propre du graphe, et dont le nombre de couleurs est le nombre de jours de la session. Réciproquement, toute coloration induit un planning compatible avec les contraintes de la DRH, avec un nombre de jours égal au nombre de couleurs.

**Exercice 3.4.5.** — Ce problème se résout par la programmation dynamique. Les états sont les âges possibles de la machine en début d'année. Les périodes sont les années. On s'intéresse aux quantités

$\pi(t, k)$  = profit maximal possible en terminant la  $t$ ème année en possédant une machine d'âge  $k$ .

On souhaite trouver  $\max_{k \in \{1,2,3\}} (\pi(5, k) + p_k)$ .

$\pi(t, k)$  satisfait les relations suivantes :

$$\pi(1, k) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } k \in \{2, 3\} \\ b_0 - c_0 & \text{pour } k = 0. \end{cases}$$

$$\pi(t + 1, k + 1) = \pi(t, k) + b_k - c_k \quad \text{si } k \in \{1, 2\}$$

$$\pi(t + 1, 1) = \max_{k \in \{1,2,3\}} (\pi(t, k) + p_{k-1} - 100000 + b_0 - c_0) \quad \text{si } t \in \{1, 2, 3, 4\}$$

On peut alors remplir le tableau des valeurs de  $\pi$

$t$	1	2	3	4	5
$k$					
1	70000	90000	110000	90000	150000
2	0	116000	136000	156000	136000
3	0	0	124000	144000	164000

Le profit maximal de l'entreprise est donc  $\max(150000 + 50000, 136000 + 24000, 164000 + 10000) = 200000$ . Une stratégie optimale consiste à garder la machine deux ans, puis la vendre et en racheter une nouvelle, encore une fois pour deux ans.

**Exercice 3.4.10.** —

1. On peut passer de n'importe quel point à n'importe quel autre point. On peut vérifier exhaustivement que l'on peut atteindre n'importe quel tronçon depuis le point supérieur gauche. On peut de plus imposer l'orientation du wagonnet : on peut partir du point supérieur gauche vers la droite, et suivre un parcours fermé qui ramène la wagonnet au même point avec l'orientation

opposée ; quitte à ajouter ce parcours fermé au début du trajet, on peut donc fixer l'orientation en fin de trajet.

2. Soient  $s$  et  $t$  les deux points particuliers. On peut arbitrairement dire que les sommets associés aux tronçons sont les milieux physiques des tronçons. On les relie conformément à l'énoncé. On relie  $s$  et  $t$  aux plus proches milieux de tronçons, et éventuellement entre eux s'ils ne sont séparés par aucun milieu de tronçon. On obtient donc le graphe dont la construction est précisée dans l'énoncé, avec en plus deux sommets particuliers  $s$  et  $t$ . Les coûts sur chaque arête sont les distances correspondantes dans le réseau. On peut appliquer l'algorithme de Dijkstra pour calculer la chaîne de plus petit coût dans ce graphe, qui correspond au trajet le plus court dans le réseau.

3. On reprend le graphe de la question précédente, on le duplique. Chaque sommet possède donc deux copies : l'une correspondant à une orientation du wagonnet et l'autre à l'autre orientation. On efface maintenant toutes les arêtes et on en construit des nouvelles : deux sommets sont reliés entre eux s'ils étaient auparavant reliés entre eux et si de plus le trajet qui passe de l'un des sommets à l'autre est compatible avec les orientations qu'ils représentent. Si on veut aller de  $s$  à  $t$  avec des orientations fixées, on peut donc le faire en calculant une chaîne de plus petit coût dans ce graphe, encore avec l'algorithme de Dijkstra.

**Exercice 3.4.11.** —

1. On considère le graphe orienté  $D$  dont l'ensemble des sommets  $V$  est la collection d'intervalles  $\mathcal{C}$  (on identifie alors  $V$  et  $\mathcal{C}$ ) et dans lequel on a un arc  $(I, J)$  si l'extrémité supérieure de  $I$  est strictement inférieure à l'extrémité inférieure de  $J$ . C'est un graphe acircuitique, et les sommets des chemins élémentaires sont précisément les sous-ensembles d'intervalles deux à deux disjoints. En mettant comme poids sur tout arc  $(I, J)$  la quantité  $w(I)$ , et en ajoutant un dernier sommet  $X$  et tous les arcs  $(I, X)$  avec  $I \in \mathcal{C}$  que l'on pondère avec  $w(I)$ , chercher le sous-ensemble d'intervalles de  $\mathcal{C}$  deux à deux disjoints de poids maximal revient à chercher le plus long chemin de  $D$  pour la pondération  $w$ , ce qui se fait par un algorithme de programmation dynamique (le graphe étant acircuitique). Pour se ramener totalement au cas du cours, on peut également ajouter un sommet  $Y$  et tous les arcs  $(Y, I)$  avec  $I \in \mathcal{C}$  que l'on pondère avec 0, et chercher le chemin de  $Y$  à  $X$  de plus grand poids.

2. Une demande de location se modélise par un intervalle de la droite réelle dont les extrémités sont les début et fin de la location, pondéré par la gain qui serait obtenue en satisfaisant cette demande. Maximiser le gain revient alors à chercher le sous-ensemble d'intervalles disjoints (les locations ne pouvant se recouvrir) de plus grand poids.

**Exercice 5.3.12.** —

1. Considérons le graphe  $D = (V, A)$  dont les sommets sont les blocs et pour lequel on a un arc  $(u, v)$  si  $v \in Y_u$ . Une solution du cas statique est un fermé de ce graphe et réciproquement tout fermé du graphe est une solution du cas statique.

2. Si on met  $u_a := +\infty$  pour tout  $a \in A$ , on a la propriété recherchée. En effet, soit  $X \subseteq V$  tel que  $\delta_D^+(X \cup \{s\})$  soit une  $s$ - $t$  coupe de  $\tilde{D}$  de capacité minimale. Aucune arête de  $A$  ne peut être dans cette coupe, sinon sa capacité serait  $= +\infty$ . Donc, si  $u \in X$ , tout successeur de  $u$  est encore dans  $X$ . Ce qui est précisément la définition de "fermé".

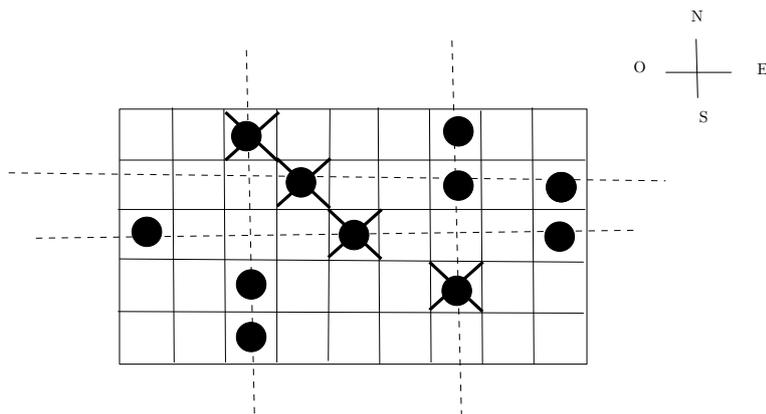


FIGURE 3. Une solution optimale et une preuve d'optimalité.

3. On note  $\bar{X} := V \setminus X$ . Comme  $X$  est fermé, les seuls arcs qui vont jouer un rôle dans la coupe sont les arcs de la forme  $(s, v)$  avec  $v \in \bar{X}$  et ceux de la forme  $(v, t)$  avec  $v \in X$ . On a donc

$$\sum_{a \in \delta_D^+(X \cup \{s\})} u_a = \sum_{v \in \bar{X} \cap V^+} c_v - \sum_{v \in X \cap V^-} c_v = \sum_{v \in V^+} c_v - \sum_{v \in X} c_v.$$

4. Posons  $C := \sum_{v \in V^+} c_v$ .

Soit  $X$  un fermé de  $D$  de valeur maximale  $\eta$ . D'après ce qui a été montré ci-dessus, on a alors une  $s$ - $t$  coupe de  $\tilde{D}$  de capacité  $C - \eta$ .

Réciproquement, prenons une  $s$ - $t$  coupe de  $\tilde{D}$  de capacité minimale  $\kappa$ . D'après ce qui a été montré, l'ensemble  $X$  induit sur  $D$  est alors fermé et de valeur  $C - \kappa$ .

On a donc :  $C - \kappa = \eta$ , et chercher une coupe minimale sur  $\tilde{D}$  est équivalent à chercher un fermé maximum sur  $D$ . Comme chercher une coupe minimale se fait en temps polynomial, on sait résoudre le problème de manière efficace.

**Exercice 6.6.3.** — Dans le cas de la Figure, ce maximum est 4. Pour prouver son optimalité, il suffit de trouver 4 lignes ou colonnes qui contiennent tous les points. Notons  $\nu$  la cardinalité maximale d'une famille  $P$  de points tels que deux points quelconques de  $P$  ne soient jamais dans la même ligne ou colonne, et notons  $\tau$  la cardinalité minimale d'une famille  $R$  de lignes ou colonnes contenant tous les points. On a forcément  $\nu \leq \tau$  puisque chaque élément de  $R$  contient au plus un élément de  $P$ .

Ces ensembles  $P$  et  $R$  de cardinalité 4 sont indiqués sur la Figure 3.

Le cas général est polynomial. En effet, ce problème se modélise sous la forme d'un graphe biparti de la façon suivante :

les sommets sont les lignes d'une part et les colonnes d'autre part, une arête relie la ligne  $l$  et la colonne  $c$  s'il y a un point noir à leur intersection. Un ensemble de points tels que deux points quelconques de l'ensemble soient toujours sur des lignes et des colonnes distinctes correspond à un couplage dans ce graphe. On recherche donc un couplage de cardinalité maximale dans ce graphe biparti, ce qui peut se faire en  $O(\sqrt{nm})$  où  $n$  est le nombre de sommets (ici le demi-périmètre du rectangle), et  $m$  le nombre d'arêtes (ici le nombre de points noirs).

**Exercice 7.4.2.** —

*Gestion dynamique de stock, cas à 1 seul bien.* —

1. Par définition du processus : ce qui reste dans le stock sur la période  $t$ , c'est ce qui était déjà dans le stock à la période  $t - 1$ , plus ce qui a été produit, moins ce qui est parti à cause de la demande.

2. Aux contraintes décrivant la dynamique du stock, il faut ajouter les contraintes de capacité  $x_t \leq P_t$  et les contraintes de positivité. La fonction objectif est simplement le coût total  $\sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^{T-1} s_t y_t$ . On s'arrête à  $T - 1$  pour le stock car comme on souhaite minimiser et que les coût de stockage sont positifs, on aura toujours  $y_T = 0$ .

Le programme linéaire s'écrit donc

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^{T-1} s_t y_t \\ \text{s.c.} & x_t - y_t + y_{t-1} = d_t \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t \leq P_t \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \\ & y_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T - 1. \end{array}$$

3. Le coût minimal est 37. Le vecteur de production est  $\mathbf{x} = (8, 1, 3, 1)$  ou  $\mathbf{x} = (9, 0, 4, 0)$ , ou n'importe quelle combinaison convexe des deux.

4. En dehors du puits et des sources proposées par l'énoncé, il n'y a pas d'autres sommets. Il y a deux types d'arcs :

- les arcs  $(v, w_t)$ , avec une capacité supérieure =  $P_t$ , une capacité inférieure = 0 et un coût =  $p_t$  et
- les arcs  $(w_{t-1}, w_t)$  avec une supérieure =  $+\infty$ , une capacité inférieure = 0 et un coût =  $s_{t-1}$ .

Le problème du  $b$ -flot de coût minimum est exactement le problème linéaire de la question 2. En particulier, la dynamique correspond à la loi de Kirchoff.

5. Les problèmes de flot de coût min sont des cas particuliers de la programmation linéaire. Ils possèdent des algorithmes dédiés qui peuvent être plus rapides que les solveurs généraux de programme linéaire (méthode des cycles de coût moyen minimum, vu en cours par exemple).

*Gestion dynamique de stock, cas à plusieurs biens.* — 6. On a  $y_{kt} = y_{k(t-1)} + x_{kt} - d_{kt}$  pour tout  $k, t$ .

7. C'est  $\sum_{k=1}^K z_{kt} \leq 1$  pour tout  $t$ .

8. C'est  $x_{kt} \leq P_{kt} z_{kt}$  pour tout  $k, t$ .

9. En reprenant les contraintes déjà identifiées en première partie, et cette nouvelle contrainte, le problème que l'on cherche à résoudre s'écrit

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T p_{kt} x_{kt} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T-1} s_{kt} y_{kt} \\ \text{s.c.} & x_{kt} - y_{kt} + y_{k(t-1)} = d_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & x_{kt} \leq P_{kt} z_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & \sum_{k=1}^K z_{kt} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T \\ & z_{kt} \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T, \text{ pour } k = 1, \dots, K \\ & x_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & y_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T - 1; k = 1, \dots, K. \end{array}$$

10. Relâchons les contraintes  $\sum_{k=1}^K z_{kt} \leq 1$  et  $x_{kt} \leq P_{kt} z_{kt}$ . On pose  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^T$  le multiplicateur de Lagrange associé aux premières contraintes et  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{TK}$  celui associé aux secondes contraintes.

Avec les notations usuelles on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = & -\sum_{t=1}^T \lambda_t + \min \left( \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T p_{kt} x_{kt} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T-1} s_{kt} y_{kt} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (\lambda_t - \mu_{kt} P_{kt}) z_{kt} \right) \\ \text{s.c. } & x_{kt} - y_{kt} + y_{k(t-1)} = d_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & z_{kt} \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & x_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & y_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1; k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

qui peut se réécrire, puisque les biens ne sont plus couplés

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = & -\sum_{t=1}^T \lambda_t + \sum_{k=1}^K \min \left( \sum_{t=1}^T p_{kt} x_{kt} + \sum_{t=1}^{T-1} s_{kt} y_{kt} + \sum_{t=1}^T (\lambda_t - \mu_{kt} P_{kt}) z_{kt} \right) \\ \text{s.c. } & x_{kt} - y_{kt} + y_{k(t-1)} = d_{kt} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & z_{kt} \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & x_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \\ & y_{kt} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1; k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

On veut donc résoudre, en oubliant l'indice  $k$ ,

$$\begin{aligned} \min & \left( \sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^{T-1} s_t y_t + \sum_{t=1}^T (\lambda_t - \mu_t P_t) z_t \right) \\ \text{s.c. } & x_t - y_t + y_{t-1} = d_t \quad \text{pour } t = 1, \dots, T \\ & z_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \\ & y_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

On remarque qu'à l'optimum on peut choisir  $z_t = 0$  si  $\lambda_t - \mu_t P_t \geq 0$  et  $z_t = 1$  si  $\lambda_t - \mu_t P_t < 0$ .

On veut résoudre finalement, puisque la valeur de  $z_t$  peut être fixée indépendamment de  $\boldsymbol{x}$  et

$\boldsymbol{y}$  :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \left( \sum_{t=1}^T p_t x_t + \sum_{t=1}^{T-1} s_t y_t \right) \\ \text{s.c. } & x_t - y_t + y_{t-1} = d_t \quad t = 1, \dots, T \\ & x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \\ & y_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

qui est précisément le problème de la première partie, sans les capacités de production. C'est bien un problème de  $b$ -flot.

On sait donc facilement trouver les solutions optimales  $\boldsymbol{x}^*$ ,  $\boldsymbol{y}^*$  et  $\boldsymbol{z}^*$  qui résolvent  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ . On sait calculer les sur-gradients de  $\mathcal{G}$  (d'après le cours). On sait donc maximiser  $\mathcal{G}$  et donc trouver de bonnes bornes inférieures à notre problème de départ. Tout est en place pour un branch-and-bound.

### Exercice 7.4.3. —

1.

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^T c_{i,\tau} (x_{i,\tau} - x_{i,\tau-1}) \\ \text{s.c. } & x_{i,\tau-1} \leq x_{i,\tau} \quad i \in \{1, \dots, n\}; \tau \in \{1, \dots, T\} \quad \text{(i)} \\ & x_{i,\tau} \leq x_{j,\tau} \quad i \in \{1, \dots, n\}; j \in Y_i; \tau \in \{1, \dots, T\} \quad \text{(ii)} \\ & \sum_{i=1}^n m_i (x_{i,\tau} - x_{i,\tau-1}) \leq M_\tau \quad \tau \in \{1, \dots, T\} \quad \text{(iii)} \\ & x_{i,\tau} \in \{0, 1\} \quad i \in \{1, \dots, n\}; \tau \in \{0, 1, \dots, T\} \quad \text{(iv)} \\ & x_{i,0} = 0 \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{(v)} \end{aligned}$$

$x_{i,\tau} - x_{i,\tau-1}$  vaut 1 si le bloc  $i$  est extrait au cours de l'année  $\tau$  et 0 sinon. La fonction objectif est donc bien celle attendue. Les contraintes (i) imposent que pour  $i$  fixé, la séquence des  $x_{i,\tau}$  est de la forme  $0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1$ , comme attendu. Les contraintes (ii) imposent que si un bloc  $i$

est extrait au cours de l'année  $\tau$  ou avant, alors tout bloc de  $Y_i$  est extrait au cours de l'année  $\tau$  ou avant, conformément à la définition de  $Y_i$ . Les contraintes (iii) imposent que la masse totale extraite au cours de l'année  $\tau$  soit inférieure à  $M_\tau$ , comme attendu.

2.  $\sum_{\tau'=1}^{\tau^*} M_{\tau'}$  est la masse maximale qui a pu être extraite sur les années de 1 à  $\tau^*$ . Si la masse de  $Y_{i^*}$  et du bloc  $i^*$  est strictement supérieure, forcément le bloc  $i^*$  ne peut être extrait au cours de l'année  $\tau^*$  ou avant.

3.  $\sum_{\tau'=1}^{\tau^*} M_{\tau'}$  est la masse maximale qui a pu être extraite au cours des années de 1 à  $\tau^*$ . Si la masse de  $Y_{i^*} \cup Y_{j^*}$  et des blocs  $i^*$  et  $j^*$  est strictement supérieure, forcément les blocs  $i^*$  et  $j^*$  ne peuvent être extraits tous deux au cours de l'année  $\tau^*$  ou avant.

4. La suppression des variables indicées par des bonnes paires réduit le nombre de variables du programme linéaire. Cela réduit forcément sa complexité. L'ajout des contraintes induites par des bons triplets ne changent pas les solutions entières du programme linéaire, mais diminue la valeur de la relaxation continue, ce qui améliore la qualité de la borne utilisée dans le branch-and-bound – on est dans un problème de maximisation – et donc réduit potentiellement le nombre de branchements.

**Exercice 8.3.3.** — Question 2. Supposons que l'on ait une solution optimale  $S$  et notons  $p$  et  $g$  respectivement le plus petit et le plus gros objets qui soient placés. S'ils ne sont pas mis ensemble dans un conteneur, notons  $p'$  celui qui est avec  $g$  et  $g'$  celui qui est avec  $p$ . On a  $a_p \leq a_{p'}$  et  $a_{g'} \leq a_g$ . Comme  $a_{p'} + a_g \leq 1$ , on a  $a_{p'} + a_{g'} \leq 1$  et  $a_p + a_g \leq 1$ . Il existe donc toujours une solution optimale dans laquelle le plus petit et le plus gros objets placés sont ensemble dans un conteneur. Par induction, on peut montrer qu'en triant les  $a_i$  et en cherchant à mettre le plus petit objet courant avec le plus grand possible, on obtient une solution optimale en  $O(n \log(n))$ .

**Exercice 9.4.3.** — Nous proposons dans la suite une modélisation, toute en sachant que plusieurs autres sont possibles.

1. Notons  $x_{ij}$  (resp.  $y_{ij}$ ) la part de la demande du client  $j$  desservie par l'entrepôt forward (resp. reverse)  $i$ . Notons  $u_i$  (resp.  $v_i$ ) la variable binaire codant l'ouverture d'un entrepôt forward (resp. reverse)  $i$ .

Un programme linéaire possible est alors

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i \in I} (f_i u_i + r_i v_i + \sum_{j \in J} c_{ij} h_j (x_{ij} + \alpha_j y_{ij})) \\ \text{s.c.} & \sum_{i \in I} x_{ij} = h_j \quad j \in J \\ & \sum_{i \in I} y_{ij} = \alpha_j h_j \quad j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq b_i u_i \quad i \in I \\ & \sum_{j \in J} y_{ij} \leq e_i v_i \quad i \in I \\ & u_i, v_i \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \\ & x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad i \in I, j \in J. \end{array}$$

Ce programme linéaire est décomposable en deux sous-problèmes indépendants : l'un avec les  $x_{ij}$  et  $u_i$  et l'autre avec les  $y_{ij}$  et  $v_i$ .

2. En ajoutant la variable  $z_i$  qui indique la possibilité de fusionner les deux entrepôts lorsqu'il sont tous deux ouverts en  $i$ , on peut modéliser un gain à la mutualisation de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & \sum_{i \in I} (f_i u_i + r_i v_i - s_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} h_j (x_{ij} + \alpha_j y_{ij})) \\
\text{s.c.} & \sum_{i \in I} x_{ij} = h_j \quad j \in J \\
& \sum_{i \in I} y_{ij} = \alpha_j h_j \quad j \in J \\
& z_i \leq u_i \quad i \in I \\
& z_i \leq v_i \quad i \in I \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \leq b_i u_i \quad i \in I \\
& \sum_{j \in J} y_{ij} \leq e_i v_i \quad i \in I \\
& u_i, v_i \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \\
& x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad i \in I, j \in J.
\end{array}$$

En effet, si  $u_i$  et  $v_i$  sont tous deux égaux à 1, puisqu'on cherche à minimiser la fonction objectif,  $z_i$  sera automatiquement mis à 1. Sinon,  $z_i$  vaut 0, comme souhaité.

3. Même remarque que dans le cours : une fois les  $u_i$  et  $v_i$  fixés, toutes les autres variables ( $z_i, x_{ij}, y_{ij}$ ) sont automatiquement fixées, puisqu'on cherche à minimiser la fonction objectif. Les  $x_{ij}$  et  $y_{ij}$  sont alors le résultat d'un problème de transport sur le graphe biparti complet avec  $I$  et  $J$  les deux classes de couleur.

Par conséquent, une façon compacte de coder les solutions consistent à ne considérer que les couples  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \{0, 1\}^{2|I|}$ . La valeur d'une solution  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  s'obtient en mettant  $z_i = 1$  dès que  $u_i = v_i = 1$  et à résoudre le problème de transport.

On dit que deux solutions  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$  sont voisines si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{u}' \\ \text{on passe de } \mathbf{v} \text{ à } \mathbf{v}' \text{ par une opération } \textit{drop}, \textit{add} \text{ ou } \textit{swap} - \text{définies en cours,} \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{on passe de } \mathbf{u} \text{ à } \mathbf{u}' \text{ par une opération } \textit{drop}, \textit{add} \text{ ou } \textit{swap} - \text{définies en cours,} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}' \end{array} \right.$$

Avec une telle définition de voisinage, l'espace des solutions est clairement connexe, ce qui assure qu'une recherche locale potentiellement pourra atteindre la meilleure solution.

Remarque : on peut également faire les opérations simultanément sur  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , mais alors il faut démontrer, ce qui n'est pas immédiat, que l'espace des solutions est bien connexe...

4. Cela ne change rien, car les  $h_j, \alpha_j h_j, b_i, e_i$  étant entier, le problème de transport a forcément une solution entière.

#### Exercice 9.4.4. —

1. On introduit la variable  $x_i$  qui vaut 1 si l'entrepôt  $i$  est fermé et 0 sinon. On introduit également la variable  $y_{ij}$  qui est la quantité transférée de l'entrepôt  $i$  à l'entrepôt  $j$ . Le problème se modélise donc de la manière suivante

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \\
\text{s.t.} & q_j + \sum_{i=1}^n y_{ij} \leq 1 \quad j \in \{1, \dots, n\} \\
& \sum_{j=1}^n y_{ij} = q_i x_i \quad i \in \{1, \dots, n\} \\
& y_{ij} \leq 1 - x_j \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \\
& \sum_{i=1}^n x_i = k \\
& x_i \in \{0, 1\} \quad i \in \{1, \dots, n\} \\
& y_{ij} \geq 0 \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.
\end{array}$$

2. Le problème a une solution réalisable si et seulement si  $\sum_{i=1}^n q_i \leq n - k$  : il faut simplement que la capacité totale lorsque les  $k$  entrepôts sont fermés soit suffisante pour tout accueillir.

3. Ce type de problème se résout à l'optimum avec un *branch-and-bound*. Le principe est de procéder implicitement à l'énumération exhaustive de toutes les solutions. Une borne inférieure, calculée ici par relaxation linéaire, permet d'éviter de calculer la valeur exacte d'un grand nombre de solutions. Puisque le problème est **NP**-difficile, on ne peut avoir la garantie d'avoir la solution en quelques minutes dans tous les cas.

4. Oui, le plus célèbre des logiciels libres étant GLPK (ou GUSEK).

5. Une recherche locale permet d'avoir des solutions raisonnables en un temps d'exécution court. Cela peut permettre à des décideurs de pouvoir obtenir rapidement des solutions optimisées.

6. Si on note  $O$  les entrepôts ouverts et  $F$  les entrepôts fermés, le problème à résoudre s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in F} \sum_{j \in O} c_{ij} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in F} y_{ij} \leq 1 - q_j \quad j \in O \\ & \sum_{j \in O} y_{ij} = q_i \quad i \in F \\ & y_{ij} \geq 0 \quad i \in F, j \in O \end{aligned}$$

On reconnaît un problème du type *problème de transport de Monge*. Il se résout par la programmation linéaire. Mieux encore, il peut se résoudre par un algorithme de flot de coût minimum. Une fois fixés les  $k$  entrepôts fermés, le calcul du meilleur transfert est donc très rapide.

7. L'espace des solutions est donc l'ensemble des  $F \subseteq \{1, \dots, n\}$  avec  $|F| = k$ . On définit  $F$  et  $F'$  comme étant voisins si  $|F \setminus F'| = |F' \setminus F| = 1$ . Une telle opération s'appelle *opération de pivot*, et rappelle le pivot de l'algorithme du simplexe.

#### Exercice 9.4.5. —

1. Prenons un graphe  $G = (V, E)$  et construisons l'instance suivante du problème des ambulances :  $S = C = V$ ,  $K$  ambulances, et  $t_{u,v}$  = nombre minimum d'arêtes de  $u$  à  $v$ . Il y a un dominant à  $\leq K$  sommets dans  $G$  si et seulement si le temps maximum pour le problème des ambulances associé est  $= 1$ . Si le problème des ambulances admettait un algorithme polynomial, on pourrait alors s'en servir pour tester l'existence en temps polynomial de dominant de taille  $\leq K$  dans le graphe. Ce qui est impossible, ce dernier problème étant **NP**-complet.

2. Considérons une solution optimale au problème des ambulances. On construit alors de la manière suivante une solution au programme linéaire :  $y_s = 1$  s'il y a au moins une ambulance située en  $s$  et  $y_s = 0$  sinon ;  $x_{s,c} = 1$  si l'ambulance la plus proche de  $c$  est située en  $s$ , et  $x_{s,c} = 0$  sinon. Si plusieurs sites sont les plus proches, on en choisit arbitrairement un. Enfin, on pose  $h$  = temps maximum pour qu'une commune soit atteinte par une ambulance. Cette solution est une solution réalisable du programme linéaire, et de même valeur du critère à optimiser.

Réciproquement, soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, h$  une solution optimale du programme linéaire. On positionne une (ou plusieurs) ambulance en  $s$  si  $y_s = 1$ . Comme on cherche à minimiser  $h$ ,  $h$  est forcément égal à  $\max_{c \in C} \min_{s \in S: x_{s,c}=1} t_{s,c}$  d'après l'inégalité (iv). Combiné avec (ii), cela indique que toute les communes peuvent être ralliées en un temps maximum  $h$ .

Le problème et le programme linéaire ont donc même valeur optimale et on peut passer directement d'une solution du problème à une solution du programme linéaire et vice-versa.

3. En notant  $\lambda_s$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (ii), on obtient

$$\text{Min } h + \sum_{s \in S} (-\lambda_s) |C| y_s + \sum_{s \in S} \sum_{c \in C} \lambda_s x_{s,c}$$

$$\text{s.c. } \sum_{s \in S} y_s \leq K \quad (\text{i})$$

$$\sum_{s \in S} x_{s,c} = 1 \quad c \in C \quad (\text{iii})$$

$$t_{s,c} x_{s,c} \leq h \quad s \in S; c \in C \quad (\text{iv})$$

$$x_{s,c} \in \{0, 1\} \quad s \in S; c \in C \quad (\text{v})$$

$$y_s \in \{0, 1\} \quad s \in S \quad (\text{vi})$$

$$h \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{vii})$$

4. Les variables  $\mathbf{y}$  d'une part, et les variables  $\mathbf{x}$  et  $h$  d'autre part sont indépendantes dans les contraintes du programme linéaire de la question précédente. Quelque soit le choix de  $\mathbf{y}$ , on peut fixer  $\mathbf{x}$  et  $h$  indépendamment. On optimise donc les deux programmes

$$\min h + \sum_{s \in S} \sum_{c \in C} \lambda_s x_{s,c}$$

$$\text{s.c. } \sum_{s \in S} x_{s,c} = 1 \quad c \in C \quad (\text{iii})$$

$$t_{s,c} x_{s,c} \leq h \quad s \in S; c \in C \quad (\text{iv})$$

$$x_{s,c} \in \{0, 1\} \quad s \in S; c \in C \quad (\text{v})$$

$$h \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{vii})$$

et

$$\min \sum_{s \in S} (-\lambda_s) y_s$$

$$\text{s.c. } \sum_{s \in S} y_s \leq K \quad (\text{i})$$

$$y_s \in \{0, 1\} \quad s \in S \quad (\text{vi})$$

indépendamment.

5. Optimiser le deuxième programme est simple : il suffit de trier les  $s$  par valeurs de  $\lambda_s$  décroissantes ; ensuite on met  $y_s = 1$  pour les  $K$  premiers  $s$ , et  $y_s = 0$  pour les suivants. Complexité  $O(S \log S)$ .

Optimiser le premier programme est presque aussi simple. Noter que les  $\lambda_s$  sont positifs. A l'optimum, (iv) est une égalité. On essaie successivement dans  $h$  toutes les valeurs de  $t_{s,c}$ , et pour chacune de ces valeurs, on fait la chose suivante : pour chaque  $c$ , on cherche parmi les  $t_{s,c} \leq h$

celui tel que  $\lambda_s$  est le plus petit, et c'est ce couple  $(s, c)$  pour lequel  $x_{s,c} = 1$ . Pour chacune des  $SC$  valeurs de  $h$  essayées, on obtient une valeur de la fonction objectif; on garde alors la plus petite. Complexité  $O(S^2C^2)$ .

6. Avec les notations de cours, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^S$ , on sait calculer  $\mathcal{G}(\lambda)$  et ses surgradients en  $O(S^2C^2)$  (donc rapidement), et donc optimiser par un algorithme de surgradient  $\mathcal{G}(\lambda)$ , fournissant ainsi des bornes au programme linéaire en nombres entiers.

**Exercice 10.4.3.** — Les deux premières questions sont triviales. Pour la dernière, notons  $p_j$  la durée de la tâche  $j$ . Sans perte de généralité, supposons que les tâches sont ordonnées de manière à ce que

$$\frac{w_1}{p_1} \geq \frac{w_2}{p_2} \geq \dots \geq \frac{w_n}{p_n}.$$

Prenons maintenant un ordonnancement quelconque et supposons qu'il y ait une tâche  $j$  et suivie d'une tâche  $j'$  telles que  $\frac{w_j}{p_j} \leq \frac{w_{j'}}{p_{j'}}$ . En inversant l'ordre de ces deux tâches, on ajoute à la fonction objectif la quantité  $w_j p_{j'} - w_{j'} p_j$  qui est négative ou nulle. Un ordonnancement optimal est donc obtenu en ordonnant les tâches dans l'ordre de leur indexation.

**Exercice 10.4.8.** — Si on voit les entrepôts  $D$  et  $C$  comme des machines, les camions comme des tâches, et le déchargement et le chargement comme des opérations, on est exactement dans le cas d'un problème de flow-shop à 2 machines, 15 tâches et minimisation du makespan, ce qui se résout en temps polynomial (et même à la main) par l'algorithme de Johnson. Les durées des opérations sont données par le temps qu'il faut pour décharger ou charger les boîtes.

Ici la solution est de 91 minutes. On terminera donc au plus tôt à 7h31.

**Exercice 11.3.7.** — Conformément à ce qui a été ajouté à l'oral, on suppose les coûts positifs.

1. Pour  $(X, v)$  tels que  $v \in X \subseteq V \setminus \{s\}$ , on note  $\pi(X, v)$  le coût minimum d'une chaîne élémentaire dont les sommets sont  $\{s\} \cup X$  et dont les extrémités sont  $s$  et  $v$ . On a alors

$$\pi(X, v) = \begin{cases} c(sv) & \text{si } |X| = 1 \\ \min_{u \in X \setminus \{v\}} (\pi(X \setminus \{v\}, u) + c(uv)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour trouver la meilleure chaîne hamiltonienne d'extrémité  $s$ , il suffit alors de comparer les valeurs de  $\pi(V, v)$  pour tout  $v \in V$  (les coûts étant positifs, on n'a pas intérêt à revenir en  $s$ ).

2. C'est le nombre de couples  $(X, v)$  comme dans l'énoncé. Il y en a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k = (n-1)2^{n-2}.$$

3. Pour chaque état  $(X, v)$ , le nombre d'additions est  $|X| - 1$  (nombre de  $u$  possibles dans l'équation de programmation dynamique). D'où un nombre d'opérations

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k(k-1) = (n-1)(n-2)2^{n-3}.$$

Enumérer toutes les solutions donne un nombre d'additions  $(n-1)!(n-1) \sim n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , ce qui est incomparablement plus grand.

4. Pour  $n = 15$ , on compte 745'472 opérations, ce qui se fait en moins d'une seconde.

Pour  $n = 30$ , on compte  $1.09 \times 10^{11}$  opérations, ce qui se fait en  $1.09 \times 10^5$  secondes, soit environ 30 heures. On ne peut résoudre cette instance en 1 jour, mais en une semaine oui.

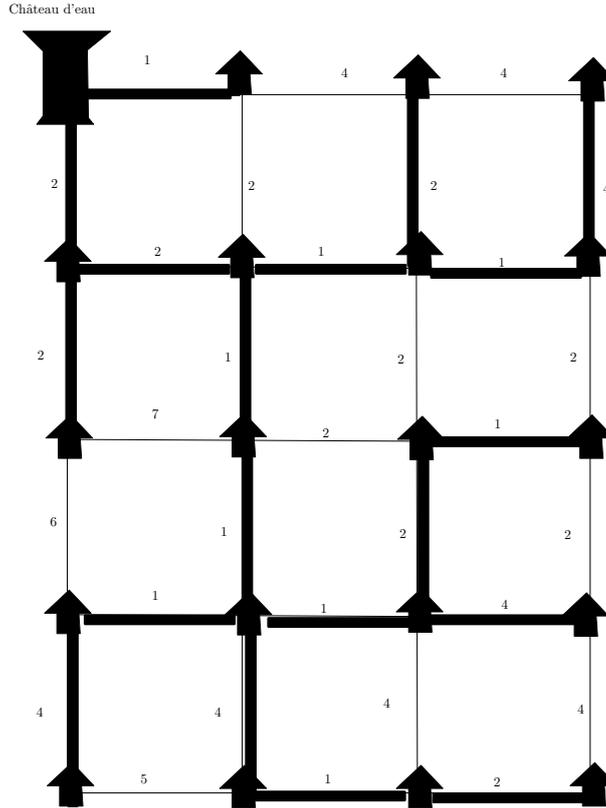


FIGURE 4

Pour  $n = 45$ , on compte  $8.32 \times 10^{15}$  opérations, ce qui fait  $8.32 \times 10^9$  secondes, soit environ 263 années. Même en un siècle on ne parvient à résoudre cette instance.

5. On sait calculer la plus courte chaîne hamiltonienne de  $s$  à  $v$ , pour tout  $v \notin V$ . Il suffit alors de comparer les valeurs de  $\pi(V, v) + c(vs)$  pour tout  $v$ .

**Exercice 12.5.1.** — C'est une application directe de l'algorithme de Kruskal, qui détermine l'arbre couvrant de plus petit poids. Il y a plusieurs arbres possibles. L'un est donné Figure 4. Le coût optimal est 35.

**Exercice 12.5.9.** —

1.  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{e \in E} c_e x_e + \lambda \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e - s \right)$ .

2. A  $\lambda$  fixé, on cherche à trouver l'arbre couvrant du graphe  $K$  de plus petit coût avec comme coût  $c_e$  sur l'arête  $e$  si  $e \notin \delta(p)$  et  $c_e + \lambda$  si  $e \in \delta(p)$ . L'algorithme de Kruskal résout cela en temps polynomial.

3. On a alors  $\sum_{e \in \delta(p)} x_e^0 - s \leq 0$ . Donc

$$\mathcal{G}(0) = \sum_{e \in E} c_e x_e^0 \geq \sum_{e \in E} c_e x_e^0 + \lambda \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e^0 - s \right) \geq \min_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{G}(\lambda).$$

Par ailleurs,  $\mathbf{x}^0$  est un arbre couvrant, satisfaisant les contraintes de l'énoncé et dont le coût est égal à  $\mathcal{G}(0)$  borne inférieure du problème. C'est donc une solution optimale pour notre problème.

4. Quand  $\lambda$  varie,  $\mathbf{x}^\lambda$  ne change que lorsque l'ordre obtenu en classant les arêtes par coûts croissants change (algorithme de Kruskal). Cet ordre ne peut changer que lorsque une arête  $f \in \delta(p)$  voit son coût coïncider avec celui d'une arête  $e \notin \delta(p)$ , ce qui ne peut arriver que si  $\lambda$  est de la forme donnée dans l'énoncé. On a alors  $N \leq \frac{1}{2}|T|^2(|T| - 1)$  (en comptant le nombre de tels couples d'arêtes  $(e, f)$ ). On peut maximiser  $\mathcal{G}(\lambda)$  en appliquant au plus  $N$  fois l'algorithme de Kruskal.

5. Si  $\lambda < \lambda_i$ , on a  $\sum_{e \in \delta(p)} x_e^\lambda > s$ . Donc, pour tout  $\mu < \lambda$ , on a

$$\mathcal{G}(\lambda) = \sum_{e \in E} c_e x_e^\lambda + \lambda \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e^\lambda - s \right) \geq \sum_{e \in E} c_e x_e^\mu + \mu \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e^\mu - s \right) \geq \min_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu) = \mathcal{G}(\mu).$$

Avec ce raisonnement, on montre que  $\mathcal{G}(\lambda)$  est croissant jusqu'à  $\lambda_i$ . Comme  $\mathcal{G}(\lambda)$  est continue (ou concave – cela suffit en fait), on peut conclure que  $\mathcal{G}(\lambda) \leq \mathcal{G}(\lambda_i)$ .

Par ailleurs,  $\sum_{e \in \delta(p)} x_e^{\lambda_i} - s \leq 0$  et donc on a pour tout  $\lambda \geq \lambda_i$

$$\mathcal{G}(\lambda_i) = \sum_{e \in E} c_e x_e^{\lambda_i} + \lambda_i \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e^{\lambda_i} - s \right) \geq \sum_{e \in E} c_e x_e^\lambda + \lambda \left( \sum_{e \in \delta(p)} x_e^\lambda - s \right) \geq \min_{\mathbf{x} \in X} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{G}(\lambda).$$

Avec ce raisonnement, on montre que  $\mathcal{G}(\lambda) \leq \mathcal{G}(\lambda_i)$ .

6. Si  $\mathbf{x}^{\lambda_i}$  est de degré  $s$  en  $p$ , il n'y a rien à montrer. Supposons donc que ce ne soit pas le cas. Pour  $\lambda$  légèrement inférieur à  $\lambda_i$ , le degré de  $\mathbf{x}^\lambda$  en  $p$  est  $> s$ . Notons que  $\mathbf{x}^\lambda$  et  $\mathbf{x}^{\lambda_i}$  sont tous deux solutions du problème de minimisation de  $\mathcal{G}(\lambda_i)$ . Ensuite, il faut remarquer que si on a deux arbres couvrant optimaux d'un graphe pondéré, on peut progressivement substituer les arêtes de l'un par les arêtes de l'autre, tout en maintenant le caractère optimal. En procédant à une telle transformation de  $\mathbf{x}^\lambda$  à  $\mathbf{x}^{\lambda_i}$ , l'un des arbres intermédiaires constitue une solution à la question.

7. Comme  $\mathcal{G}(\lambda_i) = \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda_i)$  et que le degré de  $\mathbf{x}^*$  en  $p$  est égal à  $s$ , on a  $\mathcal{G}(\lambda_i) = \sum_{e \in E} c_e x_e^*$ . Par ailleurs la solution  $\mathbf{x}^*$  est une solution réalisable à notre problème, et dont le coût coïncide avec celui d'une borne inférieure (en l'occurrence  $\mathcal{G}(\lambda_i)$ ). C'est donc une solution optimale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.K. Ahuja, T.I. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice Hall, 1993.
- [2] V. Arya, N. Garg, R. Khandekar, A. Meyerson, K. Mungala, and V. Pandit, *Local search heuristics for  $k$ -median and facility location problems*, SIAM Journal on Computing **33** (2004), 544–562.
- [3] P. Brucker, *An efficient algorithm for the job-shop problem with two jobs*, Computing **40** (1988), 353–359.
- [4] V. Chvátal, *Linear programming*, W. H. Freeman, New York, 1983.
- [5] R. Correa and C. Lemarechal, *Convergence of some algorithms for convex minimization*, Mathematical Programming **62** (1993), 261–275.
- [6] D. de Werra, T. M. Liebling, and Hêche J.-F., *Recherche opérationnelle pour ingénieurs*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.
- [7] S.E. Dreyfus and R.A. Wagner, *The Steiner problem in graphs*, Networks (1972), 195–207.
- [8] J. Edmonds and R.M. Karp, *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, Journal of the ACM **19** (1972), 248–264.
- [9] D. Gale and L.S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly (1962), 9–15.
- [10] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and intractability : A guide to the theory of **np**-completeness*.
- [11] N. Garg and J. Könemann, *Faster and simpler algorithms for multicommodity flow and other fractional packing problems*, Proceedings of the 39th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 1998, pp. 300–309.
- [12] A. V. Goldberg, *Scaling algorithms for the shortest paths problem*, SIAM Journal on Computing **24** (1995), 222–231.
- [13] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan, *Finding minimum-cost circulations by cancelling negative cycles*, Journal of the ACM **36** (1985), 873–886.

- [14] M. Grötschel, L. Lovász, and L. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, 2nd edition, Springer, Heidelberg, 1994.
- [15] B. Hajek, *Cooling schedules for optimal annealing*, Mathematics of Operations Research **13** (1991), 311–329.
- [16] A. Hertz and D. De Werra, *Using tabu search techniques for graph coloring*, Computing **39** (1987), 345–351.
- [17] J.R. Jackson, *Scheduling a production line to minimize maximum tardiness*, Tech. report, University of California, Los Angeles, 1955.
- [18] S.M. Jonson, *Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included*, Naval Res. Log. Quart **1** (1954), 61–68.
- [19] R.M. Karp, *A characterization of the minimum cycle mean in a digraph*, Discrete Mathematics **23** (1978), 309–311.
- [20] Kuhn, (1955).
- [21] S. Lin and B.W. Kernighan, *An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem*, Operations Research **21** (1973), 498–516.
- [22] J. Matousek and B. Gärtner, *Understanding and using linear programming*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [23] E. Tardos, *A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs*, Operations Research **34** (1986), 250–256.
- [24] T. Terlaky, *An easy way to teach interior-point methods*, European Journal of Operational Research **130** (2001), 1–19.

# ANNEXE



## QUELQUES OUTILS DE R.O.

### Quelques sociétés

Roadef ([www.roadef.org](http://www.roadef.org)) : société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision.  
Euro ([www.euro-online.org](http://www.euro-online.org)) : associations européennes des sociétés de recherche opérationnelle.  
Informs ([www.informs.org](http://www.informs.org)) : Institute for Operations Research and the Management Sciences.  
C'est la plus grande société professionnelle dans le domaine de la recherche opérationnelle.

### Ressources en ligne

- 24h Operations research.
- Une liste d'outils open-source logiciels pour la Recherche Opérationnelle : NEOS : Server for optimisation (<http://www-neos.mcs.anl.gov>) Propose des serveurs de logiciel R.O utilisables en ligne via des formats de modélisation standard (AMPL, ...)
- Outils par ordre alphabétique COIN-OR (<http://www.coin-or.org/>) COmputational IN-frastructure for Operations Research Projet Open source, ambitieux, d'origine IBM (C++).
- COMET (<http://www.cs.brown.edu/people/pvh/comet/comet.html>) COMET est une plateforme associant la recherche local et la programmation par contrainte. COMET s'appuie sur un langage objet et peut être étendu (création de contraintes...) en C++.
- GLPK (<http://www.gnu.org/software/glpk/>) : La bibliothèque Glpk est livrée avec un solveur autonome (glpsol), capable de traiter des problèmes linéaires (continus ou en nombre entier) par des méthodes de simplexe ou de Points Intérieur. Ces problèmes peuvent être modélisés dans différents langages, dont l'excellent GMPL (clone de AMPL).
- Page RO de Google (<http://code.google.com/p/or-tools/>) : Google a développé pour ses besoins propres un certain nombre d'outils de recherche opérationnelle. Sur ce site, ils sont proposés en open-source.
- GUSEK (<http://gusek.sourceforge.net/gusek.html>) : le solveur GLPK avec une interface ; pour Windows.
- Graphviz (<http://www.graphviz.org/>) : Logiciel permettant d'afficher automatiquement un graphe à partir de formats de description textuels simples.
- LP\_Solve ([http://groups.yahoo.com/group/lp\\_solve/](http://groups.yahoo.com/group/lp_solve/)) : autre solveur de programmation linéaire.
- LocalSolver (<http://www.localsolver.com/>) : solveur permettant de modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation discrète par recherche locale ; développé par l'e-lab de Bouygues.
- Operations Research - Java object (<http://OpsResearch.com/OR-Objects>) Librairie JAVA pour (petits) problèmes de R.O. Utilisation gratuite, mais sources non accessibles. Ne semble plus maintenue, mais reste intéressante pour les API.
- QSOpt-Exact Home Page (<http://www.dii.uchile.cl/daespino/>) Solveur linéaire avec calculs exacts (car rationnels), basé sur la librairie GMP (Gnu Multi Precision)

- TSP (<http://www.tsp.gatech.edu/index.html>) : le site de référence sur le TSP. De la documentation, des solveurs, interfaces, jeux, etc.
- SCILAB(<http://www.scilab.org/>) : L’environnement de calcul scientifique open-source de référence.
- SCIP (<http://scip.zib.de/doc/html/index.html>) : Peut-être un des meilleurs logiciels libres actuels. Il possède de plus une librairie permettant une implémentation simple des branch-and-cuts.

### Quelques SSII spécialisées dans la RO

- Artelys (<http://www.artelys.com/>) Société spécialisée en optimisation - formation. Par ailleurs, Artelys propose désormais Artelys Kalis un environnement (librairie C++ ou java) de Programmation par Contraintes exploitable avec le langage de modélisation Xpress-Mosel.
- Eurodécision (<http://www.eurodecision.com>) réalise des applications d’aide à la décision par intégration de technologies d’optimisation et de simulation. Les principaux domaines d’application sont : la logistique, les ressources humaines, la production, le transport, les achats, les télécommunications.
- FuturMaster (<http://www.FuturMaster.com>) FuturMaster accompagne ses clients dans leur démarche d’amélioration de leurs performances logistiques en leur offrant des solutions logicielles pertinentes, évolutives et réactives, pour suivre les changements internes et externes de l’entreprise.
- Rostudel (<http://www.rostudel.com/>) C’est une toute jeune entreprise (fondée par un ancien élève de l’école des ponts) qui propose des prestations de conseil en recherche opérationnelle.

### Quelques sociétés éditrices de logiciels de RO

- Amadeus (<http://www.amadeus.com>) : propose des solutions d’optimisation dans l’industrie du voyage et du tourisme.
- Dash optimization (<http://www.dash.co.uk/>) : propose l’outil Xpress-MP.
- Equitime (<http://www.equitime.fr/>) : propose des logiciels d’optimisation d’emplois du temps.
- Gower Optimal Algorithms Ltd (<http://www.packyourcontainer.com/index.htm>) : optimisation de la logistique.
- ILOG (<http://www.ilog.fr/products/optimization>) Propose des outils de référence dans le domaine de l’optimisation comme ILOG/Cplex pour la programmation linéaire et quadratique et ILOG/CP pour la Programmation par contraintes.
- INRO (<http://www.inro.ca/fr/produits/>) : L’INRO est spécialisée dans les logiciels de planification des transports : EMME/2 et Dynameq.
- KLS Optim (<http://www.klsoptim.com/>) : spécialisée dans l’optimisation des plans de chargement (packing).
- Koalog (<http://www.koalog.com/php/jcs.php>) : Cette société française propose entre autre un Solveur par contraintes écrit 100% en java, avec formation... Une application permettant le choix d’une configuration d’options d’automobile .
- LoadPlanner (<http://www.loadplanner.com/>) : spécialisée dans l’optimisation des plans de chargement (packing).
- Opti-time (<http://www.opti-time.com>) : spécialisée dans l’optimisation de tournées. Logiciel phare TourSolver.
- Ortec (<http://fr.ortec.com/solutions/lb.aspx>) : spécialisée dans l’optimisation des plans de chargement (packing) et des tournées.

- Routing International (<http://www.routing-international.com/index.html>) : spécialisée dans l'optimisation de tournées. Logiciel phare : WinRoute.

### **Entreprises françaises ayant des départements avec compétences en RO**

EDF, SNCF, Bouygues, Renault, GDF-Suez, Saint-Gobain, Air Liquide, France Telecom, Air France, Véolia, la Poste, l'Armée de Terre, la Marine, ...

### **Quelques solveurs de programmation linéaire**

Payants : CPLEX, XPRESS, MINOS

Libres : GLPK, LPSOLVE, CLP, SCIP, SOPLEX

En général, ces solveurs peuvent résoudre bien d'autres types de programmes mathématiques.

### **Quelques langages de modélisation**

AMPL, APL, OPL, TOMLAB, ...