

**Approfondissement
Energétique des bâtiments et confort
Département Génie Civil
Ecole des Ponts ParisTech**

Thermique, 1 Conduction

**Bruno PEUPORTIER
ParisTech**



Thermique, objectifs et définitions

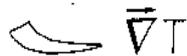
- ▶ **Objectifs : prévoir les échanges de chaleur et les évolutions de température, dans l'espace et dans le temps**
- ▶ **Température : variable d'état, intensive, si $T(S1) = T(S2)$, $T(S1 \cup S2) = T(S1) = T(S2)$, liée à l'agitation des particules, unité : K = température du point triple de l'eau / 273.16**
- ▶ **Chaleur : énergie échangée (J), variable extensive, $Q(S1 \cup S2) = Q(S1) + Q(S2)$**
- ▶ **Flux de chaleur : puissance (W)**



Définitions, suite

- ▶ Densité de flux de chaleur : W/m^2
- ▶ Gradient de température

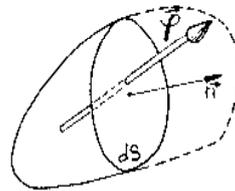
◦ GRADIENT de température [Km^{-1}]



mesure le déséquilibre thermique

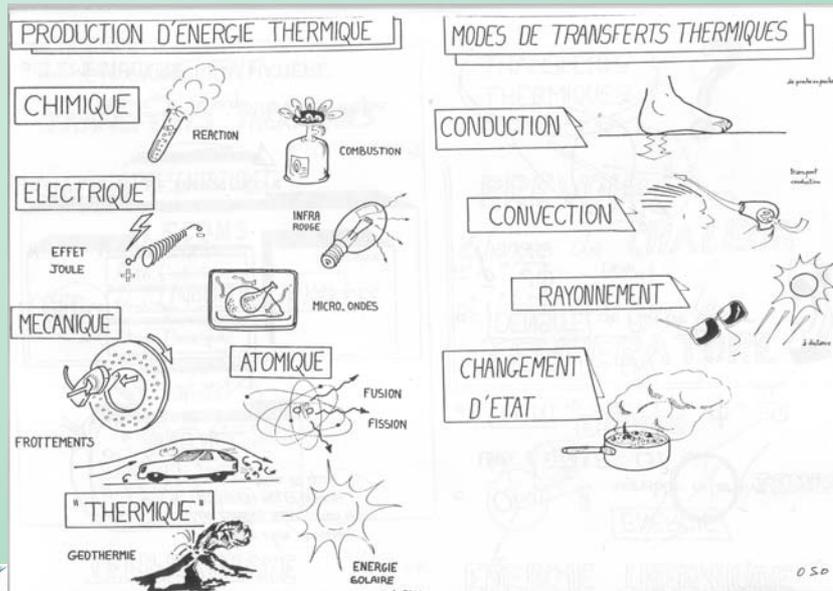
◦ DENSITÉ de Flux de Chaleur

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = \frac{d\phi}{dS} \quad [Wm^{-2}]$$



2

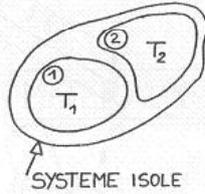
Production et transfert de chaleur



3

Thermique et thermodynamique

CONSEQUENCE DU 2^{ème} PRINCIPE



$T_2 > T_1$
évolution ENTROPIE MAXIMUM
ISOTHERMIE

2^{ème} PRINCIPE $\rightarrow dS = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} > 0$

1^{er} PRINCIPE $\rightarrow dQ_1 = -dQ_2$

$dT_1 (T_2 - T_1) > 0$



4

Conduction

CONDUCTION THERMIQUE

PROPAGATION PAR CHOCS

PORTEURS

- MOLECULES
- ELECTRONS
- MOLECULES IONISEES PLASMA
- PHONONS
- ELECTRONS LIBRES
- PHONONS

CARNOT $\rightarrow \vec{\nabla}T = \vec{0} \Rightarrow \phi = 0$
 $\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} < 0 \Rightarrow \phi > 0$

Loi phénoménologique de la conduction

$\phi = -k \vec{\nabla}T \cdot \vec{n} dS$

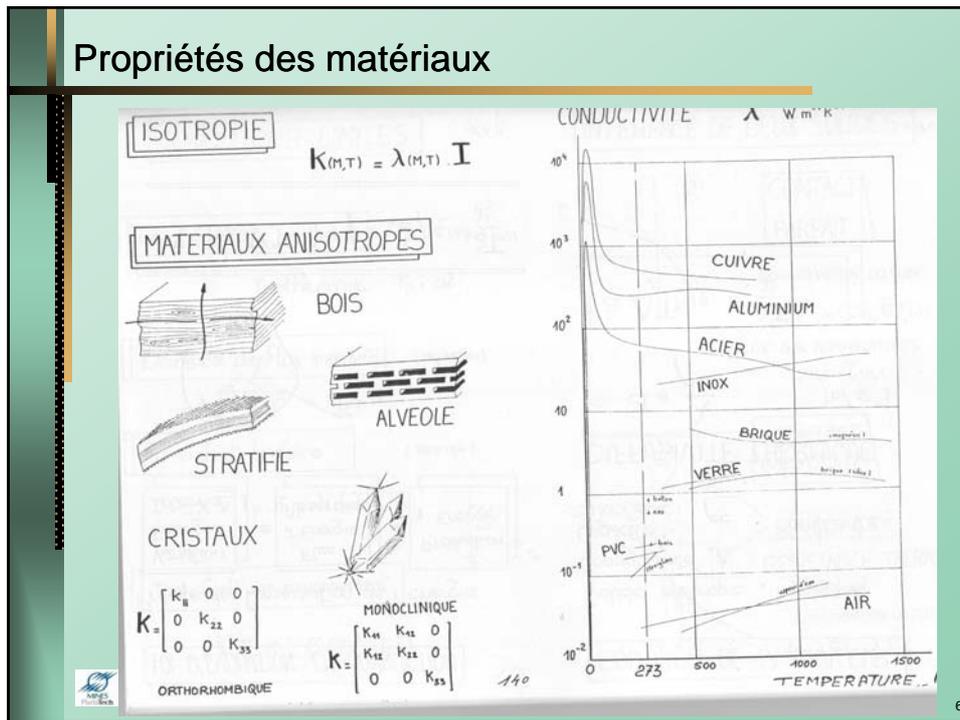
Energie absorbée par le domaine ② venant du domaine ① par conduction à travers la surface dS en une seconde.

CONDUCTIVITE THERMIQUE $\rightarrow K_{(M,T)} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix}$
[W m⁻¹ K⁻¹]

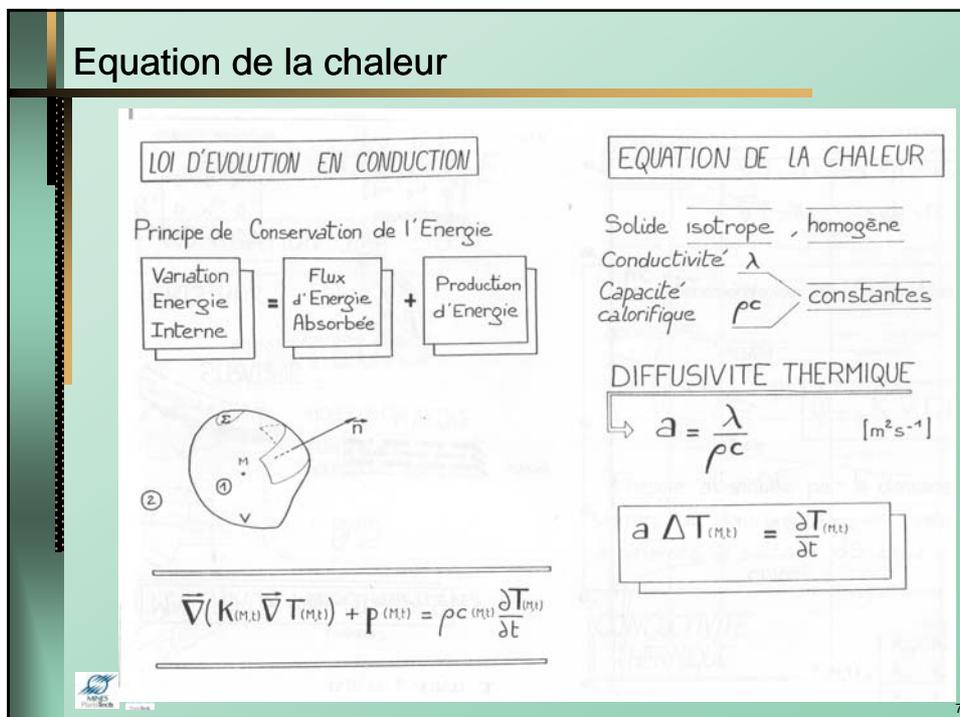


5

Propriétés des matériaux



Equation de la chaleur



Conditions aux limites

CONDITIONS LIMITES

Température imposée $T_p = f(M_p, t)$
(DIRICHLET)
Isothermie $T_p = \text{cst}$

Densité de flux imposée (NEUMANN)
 $-\lambda \vec{\nabla} T_p \cdot \vec{n} = f(M_p, t)$

Transfert linéaire (NEWTON)
 $-\lambda \vec{\nabla} T_p \cdot \vec{n} = h(T_p - T_o)$

Transfert par rayonnement
 $-\lambda \vec{\nabla} T_p \cdot \vec{n} = F_{rr}(T_p^4 - T_p'^4)$

INTERFACE DE DEUX SOLIDES

CONTACT PARFAIT

CONSERVATION DU FLUX
 $\lambda_1 \vec{\nabla} T_1(M_i) = \lambda_2 \vec{\nabla} T_2(M_i)$

EGALITE DES TEMPERATURES
 $T_1(M_i) = T_2(M_i)$

CONTACT IMPARFAIT

$R\phi = \Delta T$
RESISTANCE THERMIQUE de contact

CONSERVATION DU FLUX
 $\phi = \lambda_1 \vec{\nabla} T_1 = \lambda_2 \vec{\nabla} T_2$

Régime permanent, exemple du mur plan

REGIME PERMANENT

$\phi = \phi_1 = \phi_2$

RESISTANCE THERMIQUE $R = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

MUR PLAN

$T = c^{te}$

$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$
 $T(0) = T_{P1}$
 $T(\ell) = T_{P2}$

Solution $T(x) = T_{P1} + \frac{T_{P2} - T_{P1}}{\ell} x$

$\vec{\varphi} = \lambda \frac{T_{P1} - T_{P2}}{\ell} \vec{x}$

Resistance thermique $R = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{\Delta T}{\vec{\varphi} S}$

$R = \frac{\ell}{\lambda S}$

Mur composite

MUR COMPOSITE

$$\frac{\phi}{h_1 S} = T_1 - \theta_0$$

$$\frac{\phi l_1}{\lambda_1 S} = \theta_0 - \theta_1$$

$$\frac{\phi l_2}{\lambda_2 S} = \theta_1 - \theta_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\phi}{h_2 S} = \theta_n - T_2$$

$$R = \frac{1}{h_1 S} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 S}$$

$$\phi \cdot R = T_1 - T_2$$

Analogie

AILETTES

Régime permanent

λ 'GRAND' $\rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} \sim 0$
 $e, \ell \ll L$

Schématisation

BILAN $\phi_x + \phi_{x+dx} + \phi_p = 0 \quad \geq 30$

10

Efficacité d'une ailette (exemple : balcon)

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x + \lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + h \cdot P dx \cdot (T_0 - T(x)) = 0$$

Soit : $\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} - h \cdot P \cdot [T(x) - T_0] = 0$ P : périmètre de la section

On pose $\alpha^2 = hP/\lambda S$

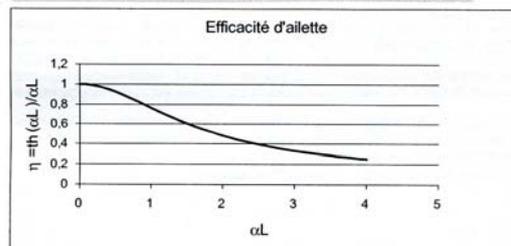
$$\frac{T(x) - T_0}{T_0 - T_e} = \frac{\text{ch}(\alpha(L-x))}{\text{ch}(\alpha L)}$$

L : longueur de l'aillette

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \sqrt{\lambda h P S} \cdot (T_0 - T_e) \text{th}(\alpha L)$$

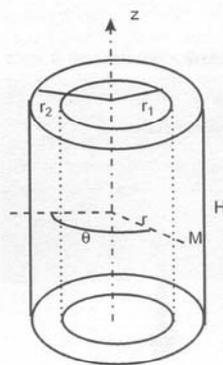
$$\Phi_{\text{idéal}} = h P L \cdot (T_0 - T_e)$$

L'efficacité d'une ailette cylindrique s'exprime donc par : $\eta = \frac{\text{th}(\alpha L)}{\alpha L}$



11

Couronne cylindrique



$$\Phi = 2\pi H \cdot (-\lambda \frac{dT}{dr}) = \text{cste}$$

donc

$$r \cdot \frac{dT}{dr} = \text{cste}$$

L'intégration est immédiate et donne, en désignant par T_{P1} et T_{P2} les températures des deux faces :

$$T = \frac{T_{P1} - T_{P2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r) + \frac{T_{P1} \ln(r_2) - T_{P2} \ln(r_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Résistance thermique d'une couronne cylindrique¹⁷

$$\Phi = 2\pi H \lambda \frac{T_{P1} - T_{P2}}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad \text{soit } R^m = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi H \lambda}$$



12

Exercice

- ▶ Isolation autour d'un tuyau de 2 mm de diamètre intérieur et de 0.5 mm d'épaisseur
- ▶ Conductivité de l'isolant : 0.04 W/m/K
- ▶ Conductivité du tuyau : 50 W/m/K
- ▶ Échanges superficiels, côté eau : $h = 200 \text{ W/m}^2/\text{K}$, côté air : $h' = 10 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ Calculer la résistance totale (sur une hauteur d'un m) pour différentes valeurs de l'épaisseur d'isolant (0 à 15 mm)



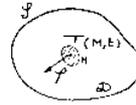
13

Conduction en régime variable

CONDUCTION en REGIME VARIABLE

Champ de température $T(M,t)$

ESPACE TEMPS



Equation d'EVOLUTION

$$\lambda \Delta T + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \forall M \in \Omega$$

Conditions aux LIMITES

$$-\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} + hT = F(M,t) \quad \forall M \in \Gamma$$

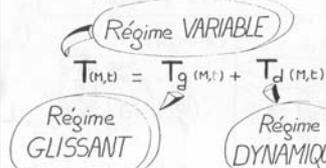
Condition INITIALE

$$T(M,0) = G(M)$$



Méthodes de résolution

SEPARATION DES REGIMES D'EVOLUTIONS



(I) $\lambda \Delta T_g + p = 0$
 (II) $-\lambda \vec{\nabla} T_g \cdot \vec{n} + hT_g = F(M,t)$
 (III) $T_g(M,0) = 0$

problème
 « Stationnaire »
 NON HOMOGENE

(IV) $\lambda \Delta T_d - \rho c \frac{\partial T_d}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T_g}{\partial t}$
 (V) $-\lambda \vec{\nabla} T_d \cdot \vec{n} + hT_d = 0$
 (VI) $T_d(M,0) = G(M)$

problème
 Dynamique
 HOMOGENE

METHODES DE RESOLUTIONS

ANALYTIQUES

- Séparation des variables
- Transformation intégrale
- Fonctions de Green
- Transformation Laplace
- Fourier

NUMERIQUES

- Discretisation spatiale
 - différences Finies
 - éléments Finis
 - Volumes Finis

- Discretisation temporelle

- runge kutta
- schémas à pas unique
- schémas à pas multiples
- prédicteur-correcteur



Massif semi-infini

MASSIF SEMI INFINI

CONDITIONS AUX LIMITES

- $x=0$: Température imposée T_p
- $x=\infty$: Flux nul

CONDITION INITIALE

- $t=0$: Température uniforme T_0

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Evolution

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_p - T_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\theta^2} d\theta$

$\frac{\partial \operatorname{erf}}{\partial u} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$

"PROPAGATION" DE LA PERTURBATION

Seuil de détectabilité **1%**

Début $\frac{T(x,t) - T_0}{T_p - T_0} = 0.01 \Rightarrow x_d = 3.64\sqrt{at}$

Fin $\frac{T(x,t) - T_0}{T_p - T_0} = 0.99 \Rightarrow x_f = 0.018\sqrt{at}$

	Profondeur (m)	Début	Fin
Cuivre	0.01	0.07 s	52 mn
	0.1	7 s	87 h
	1	12 mn	1 an
Pierre	0.01	11 s	127 h
	0.1	18 mn	531 j
	1	30 h	145 ans

Sollicitation périodique

MASSIF SEMI-INFINI EN REGIME PERIODIQUE

Réponse impulsionnelle

Convolution

$$T(x,t) - T_0 = A e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$

at $x=0$: $T = T_0 + A \cos \omega t$

at $x=0$: $T(x,0) = T_0$

TRANSITOIRE ETABLI

Régime Etabli

$$T(x,t) - T_0 = A \rho \cos(\omega t - \varphi)$$

RAPPORT D'AMPLITUDE

DEPHASAGE

profondeur de pénétration $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$

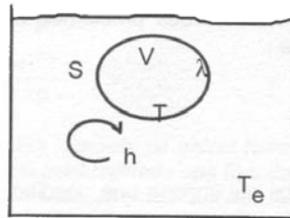
$\rho = e^{-x/\delta}$

$x = \delta$	$\rho = 0.368$
$x = 2\delta$	$\rho = 0.135$
$x = 4\delta$	$\rho = 0.018$

NYQUIST

Milieu à température uniforme

morceau de métal initialement à température T_0



$$\rho c V \frac{dT}{dt} = h S \cdot (T_e - T)$$

En posant : $\theta = T - T_e$ et $\theta_0 = T_0 - T_e$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left[-\frac{hS}{\rho c V} \cdot t\right]$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp[-t/\tau]$$

constante de temps $\tau = \rho c V / h S$

Grandeur électrique	Grandeur thermique
résistance [Ω] Capacité [F]	résistance superficielle $1/hS$ [K/W] capacité thermique $\rho c V$ [J/K]



18

Déperditions thermiques d'un bâtiment

- ▶ Conduction, convection, rayonnement, échanges d'air
- ▶ Murs, sol, toit
- ▶ Ouvertures
- ▶ Ponts thermiques
- ▶ Ventilation et infiltrations d'air
- ▶ Fonction de la température intérieure (régulation, zonage) et du climat (latitude, altitude)



19

Conductivité des matériaux

- ▶ Polystyrène > bois
 $\lambda = 0.04 \text{ W/m/K}$ $\lambda = 0.15 \text{ W/m/K}$
 $e = 4 \text{ cm}$ $e = ?$
- R (1 m²) = ? > verre
 $\lambda = 1 \text{ W/m/K}$, $e = ?$
- ▶ Béton > acier
 $\lambda = 1,7 \text{ W/m/K}$ $\lambda = 50 \text{ W/m/K}$, $e = ?$
 $e = ?$



20

Résistances en série

- ▶ Si plusieurs couches de matériaux
 - ▶ Chaque couche i (1 m²) a une résistance R_i
 - ▶ Résistances superficielles R_{int} et R_{ext}
 - ▶ Résistance totale R (1 m²) = $R_{int} + \sum R_i + R_{ext}$
 - ▶ Coefficient de déperdition thermique :
 $U = 1 / R$ en $\text{W/m}^2/\text{K}$
- Surface A
- déperditions = $U \cdot A \cdot (T_{int} - T_{ext})$, en W



21

Couches d'air

- ▶ Espace d'air entre 2 matériaux
- ▶ Résistance selon l'épaisseur de la lame d'air

R = 0.11	0.13	0.14	0.15	0.16	m ² .K / W
<hr/>					
0.7	0.9	1.1	1.3	épaisseur (cm)	

- ▶ Matériaux non homogènes, R globale, par exemple :
brique de 5 cm , R = 0.11 m².K/W
brique alvéolaire de 37.5 cm (« monomur »), R = 2.2 m².K/W
parpaing de 20 cm, R = 0.2 m².K/W



22

Murs, sol et toitures

- ▶ Murs U_p A_p $U_p \cdot A_p$
- ▶ Sol U_s A_s $U_s \cdot A_s$
- ▶ Toit U_t A_t $U_t \cdot A_t$
- ▶ TOTAL $\Sigma (U \cdot A)$
- ▶ Déperditions thermiques par transmission :
 $H_T = \Sigma (U \cdot A) \cdot (T_{int} - T_{ext})$ + fenêtres, portes et ponts thermiques



23

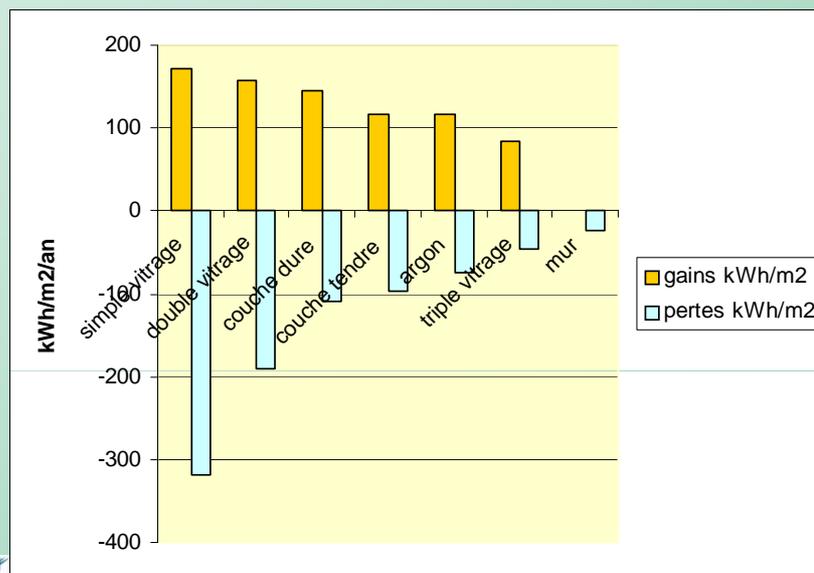
Portes et fenêtres

- ▶ Simple vitrage : $U_v = 5.5 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ Double vitrage : $U_v = 3.3 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ + couche à basse émissivité :
 $U_v = 1.8 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ + lame d'argon : $U_v = 1.1 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ Cadre en bois : $U = 2.4 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ Cadre en PVC : $U = 1.7 \text{ W/m}^2/\text{K}$
- ▶ Baie avec par exemple 75% vitrage et 25% cadre
- ▶ Porte : selon l'épaisseur et les matériaux (R)



24

Evolution des vitrages



25

Ponts thermiques

$\psi = 0.05$

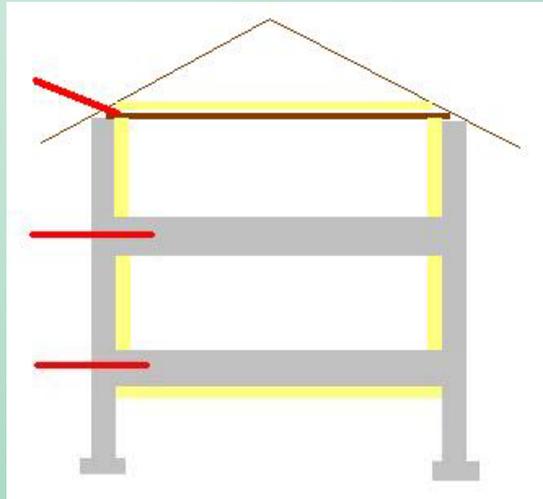
$\Psi = 0.5$

-> 1

$\Psi = 0.5$

-> 1

W/m/K



$$\Phi = \psi \cdot L \cdot (T_{int} - T_{ext})$$

ψ en W/m/K

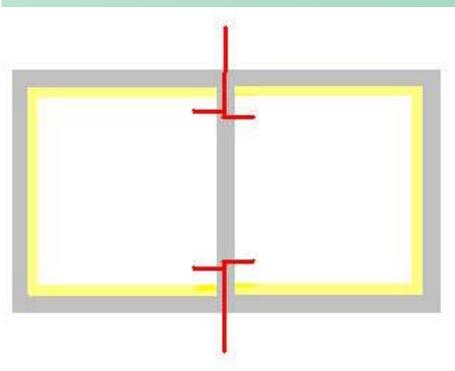
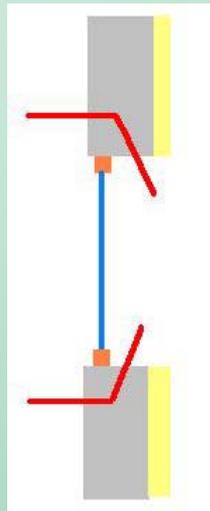


26

Ponts thermiques, suite

$\psi = 0.4$
W/m/K

$\psi = 0.5$ -> 1 W/m/K



27

Illustration : isolation par l'extérieur

Réhabilitation d'immeuble
HLM à Montreuil
10 cm laine de verre



28

Déperditions sur une période

- ▶ Déperditions Q_L (sans la ventilation) = $\{ \Sigma (U \cdot A) + \Sigma (\psi \cdot L) \} \cdot (T_{int} - T_{ext})$
(murs, toit, sol, fenêtres et portes)
- ▶ T_{int} = par exemple 20°C
- ▶ T_{ext} variable
- ▶ Déperditions sur l'année = Σ déperditions horaires
- ▶ $\Sigma H (20 - T_{ext}) = H \cdot \Sigma (20 - T_{ext})$, $H = H_T + H_V$
- ▶ $\Sigma (20 - T_{ext})$: degrés heures à base 20



29

Degrés heures

- ▶ Simplification du modèle climatique
- ▶ $\Sigma (18 - \text{Text}) = \text{degrés heures à base 18}$
- ▶ Chauffage inutile si $\text{Text} \geq 18^\circ\text{C}$ (apports internes)
- ▶ Paris : 58 000 degrés heures
- ▶ Nice : 32 000 degrés heures

