

ENPC – BA

**JUSTIFICATION D'ÉLÉMENTS DE DALLES
EN BETON ARME :**

VERIFICATION DES CONTRAINTES A L'ELS

Indice	Date
0	09/05/00
...	...
E	29/03/07
F	05/04/13



setec tpi

42-52 Quai de la Rapée - CS 71230 - 75 583 PARIS CEDEX 12
Tél 01-82-51-66-30 Fax 01-82-51-57-04

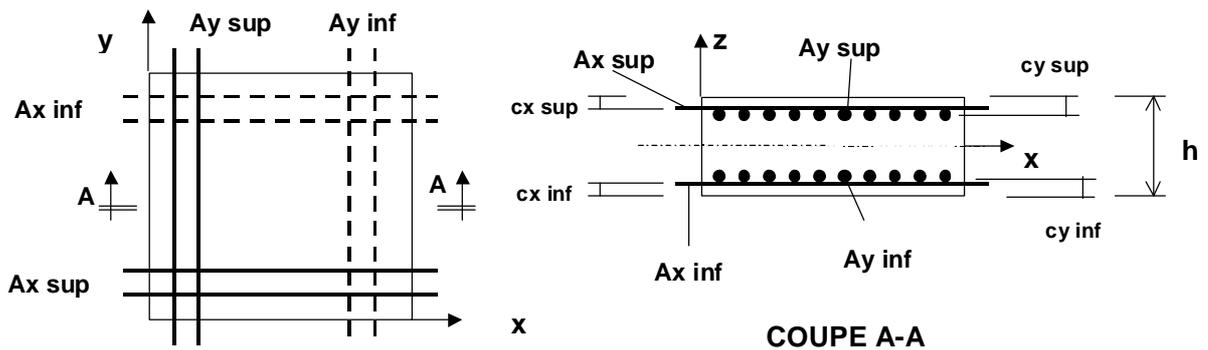
SOMMAIRE

1	DONNEES	3
2	HYPOTHESES DE CALCUL ELS	5
3	CHAMP DE DEFORMATION – PRINCIPE DU CALCUL	7
4	MISE EN EQUATION	8
	4.1 Cas d'une couche de béton comprimé	8
	4.2 Cas d'un acier de direction α_i	12
	4.3 Cas d'une couche de béton fissuré	14
5	RESOLUTION - NOTION DE CALCUL ITERATIF	15
6	STABILISATION DE L'ALGORITHME : INTRODUCTION DE CISAILLEMENT DANS LES BIELLES DE BETON	16
7	EXEMPLES DE CALCULS	20
	7.1 Cisaillement simple	20
	7.2 Torsion simple	22
	7.3 Cas quelconque	24

1 DONNEES

(i) Géométrie

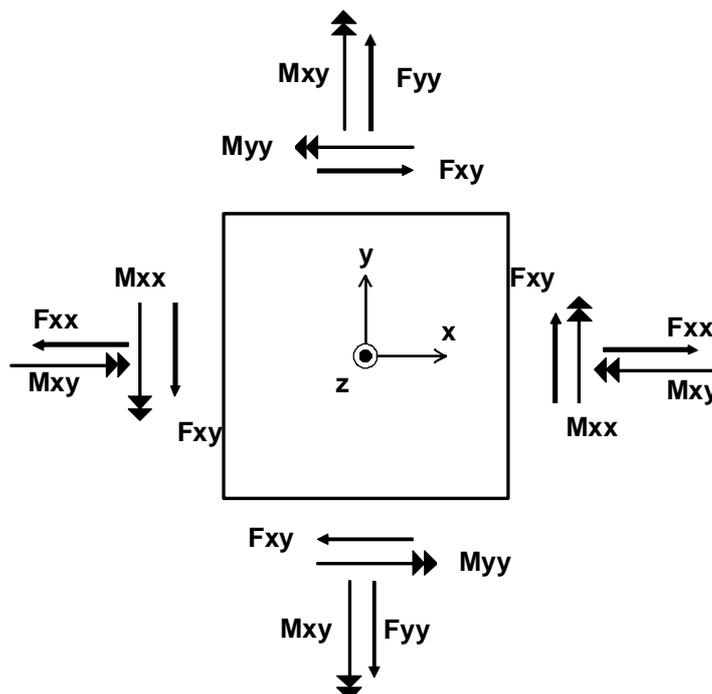
- Plaque d'épaisseur « h »
- On considère le voisinage d'un nœud (élément infiniment petit situé au voisinage du nœud)
- Aciers passifs : 4 nappes, supposées // aux axes locaux de la dalle. Le schéma ci-après définit :
 - les sections $A_{x\ sup}$, $A_{x\ inf}$, $A_{y\ sup}$, $A_{y\ inf}$ (en cm^2/ml)
 - les enrobages (position du CdG par rapport à la face extérieure) : $c_{x\ sup}$, $c_{x\ inf}$, $c_{y\ sup}$, $c_{y\ inf}$



(ii) Efforts appliqués

Le nœud est soumis aux 6 efforts ci-après :

- F_{xx} , F_{yy} et F_{xy} en kN/ml Efforts de membrane
Convention de signes : >0 en traction
- M_{xx} , M_{yy} et M_{xy} en $kN.m/ml$ Moments de flexion et torsion
Convention de signes : $M > 0$ s'il tend la fibre sup ($z > 0$)
 $M_{xy} > 0$ s'il crée un cisaillement $\sigma_{xy} > 0$ en fibre sup



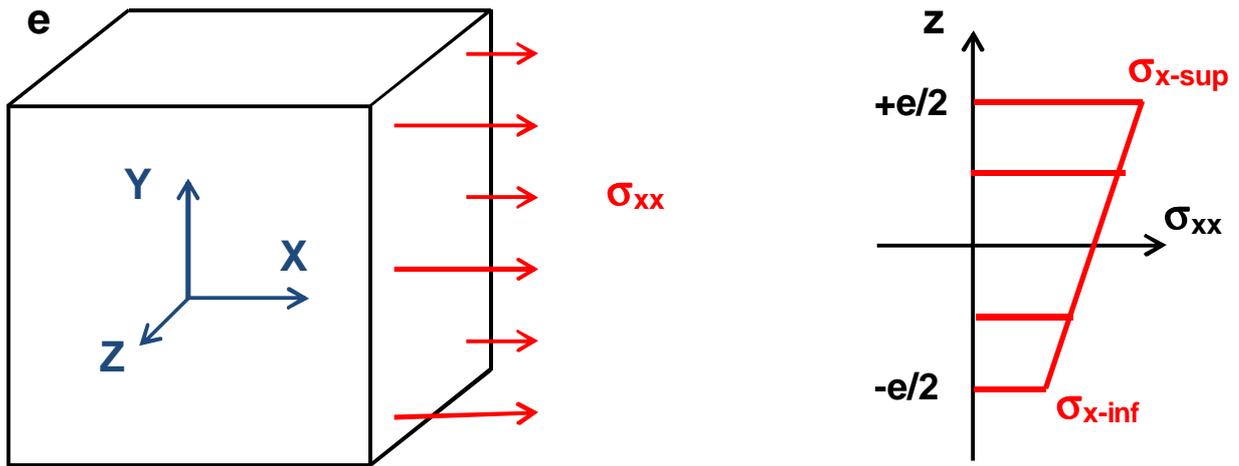
(iii) **Remarque - Récupération des efforts F et M à partir d'un calcul éléments finis**

Certains programmes de calcul aux éléments finis permettent de récupérer directement les efforts de membrane F et les moments M.

Mais certains autres ne donnent accès qu'aux contraintes en face sup et en face inf : contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} sur les 2 faces

Dans ce cas il faudra au préalable calculer les efforts F et M à partir de ces contraintes, sur le principe suivant.

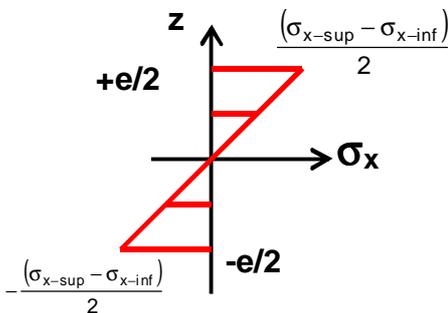
> **Cas des efforts XX**



$$F_{xx} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} \cdot dz = \frac{(\sigma_{x-inf} + \sigma_{x-sup})}{2} \times e$$
$$M_{xx} = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz = \frac{(\sigma_{x-sup} - \sigma_{x-inf})}{2} \times \frac{e^2}{6}$$

Justification concernant le moment

Le moment résulte de la différence de contraintes sur les 2 faces. On se ramène par conséquent au cas suivant.



D'une façon générale, on a :

$$\sigma(z) = \frac{M \cdot z}{I} \quad \text{avec } I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{e^3}{12}$$

$$\text{Donc } \sigma\left(\frac{e}{2}\right) = M \times \frac{6}{e^2}$$

$$\text{D'où } M = \sigma\left(\frac{e}{2}\right) \times \frac{e^2}{6} \quad \text{cqfd}$$

> **Cas des efforts en YY et XY**

Les formules sont analogues à celles données ci-dessus pour la direction XX.

2 HYPOTHESES DE CALCUL ELS

(i) Béton en compression

Comportement supposé élastique linéaire, caractérisé par

- E_b = module d'Young
- ν = coefficient de Poisson

Remarque que l'hypothèse de linéarité n'est pas trop fautive tant que les sollicitations dans le béton restent modérées (ce qui est généralement le cas à l'ELS, puisqu'on limite les contraintes...).

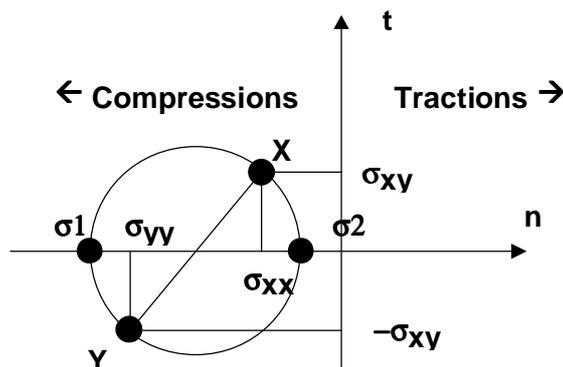
(ii) Béton en traction – Remarque sur les 3 états possibles du béton

Le béton tendu est supposé fissuré => négligé dans la direction où il est tendu.

En fait il existe 3 états possibles pour le béton :

- [1] **Totalement comprimé** (2 contraintes principales négatives) = « état 0 fissures »
=> lois de l'élasticité, en contraintes planes.

Remarque – Théorie du cercle de Mohr :



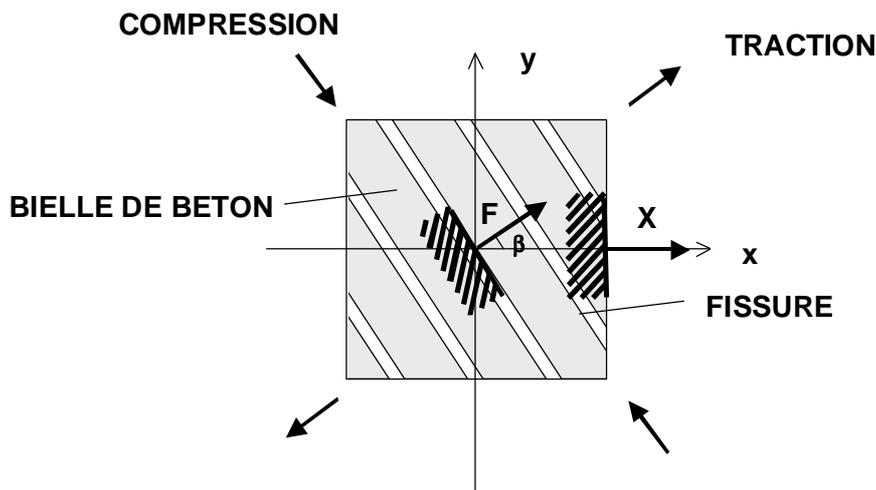
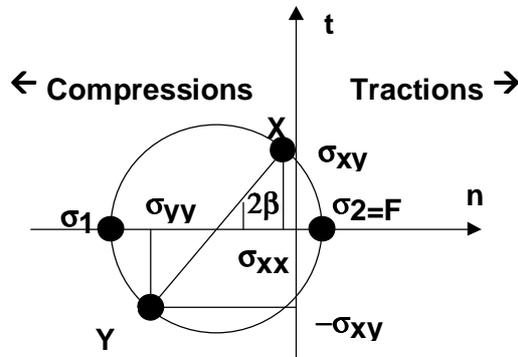
- Centre du cercle
$$n_{\Omega} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

- rayon du cercle
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

- Contraintes principales
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= n_{\Omega} - R \\ \sigma_2 &= n_{\Omega} + R \end{aligned}$$

- [2] **Partiellement comprimé et tendu** (contraintes principales de signe contraire) = « état 1 direction de fissure »
 => il subsiste des bielles de béton comprimé, dont on peut calculer l'angle β par rapport à la direction x.

Propriété du cercle de Mohr : lorsque la facette réelle tourne d'un angle β , le point représentatif de cette facette sur le cercle de Mohr tourne d'un angle -2β



$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2 \cdot \sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot \sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

- [3] **Totalement tendu** = « état 2 directions de fissures »
 => béton négligé

(iii) Aciers passifs

Hypothèse de comportement élastique linéaire : $\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon_a$

avec $\varepsilon_a = \varepsilon_b$
 et $E_a = n_a \cdot E_b$ où n_a est le coefficient d'équivalence acier / béton.

$E_a = 200\,000 \text{ MPa}$
 $E_b = \text{formule réglementaire}$

3 CHAMP DE DEFORMATION – PRINCIPE DU CALCUL

On fait l'hypothèse que le champ de déformation est linéaire en z :

$$\begin{cases} E_b \cdot \varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 \cdot z \\ 2E_b \cdot \varepsilon_{xy} = a_2 + b_2 \cdot z \\ E_b \cdot \varepsilon_{yy} = a_3 + b_3 \cdot z \end{cases}$$

(la constante E_b est introduite pour donner aux constantes une unité de contraintes, et simplifier ultérieurement les équations ; même chose pour le facteur 2).

Noter que ceci est la généralisation du principe adopté pour les poutres, consistant à dire que les sections planes restent planes $\Rightarrow \varepsilon$ est linéaire en z.

Interprétation des 6 constantes introduites

Pour une section symétrique (acier sup et inf identiques), on peut remarquer que :

- un effort F_{xx} crée une compression uniforme $\Rightarrow \varepsilon_{xx}$ constant \Rightarrow terme a_1
- un moment M_{xx} crée une rotation $\Rightarrow \varepsilon_{xx}$ linéaire \Rightarrow terme b_1

Le principe est analogue selon y. De même :

- un effort F_{xy} est un cisaillement créant une distorsion uniforme \Rightarrow terme a_2
- un moment M_{xy} est une torsion créant un cisaillement variant linéairement suivant z \Rightarrow terme b_2

Le principe du calcul est alors le suivant :

- le champ $[\varepsilon]$ est défini par 6 constantes, à déterminer
- il existe des relations entre $[\varepsilon]$ et $[\sigma]$ (élasticité)
- il existe des relations entre $[\sigma]$ et $[F]$ (équations d'équilibre)

Or le chargement $[F]$ est défini par 6 efforts F_{xx} , F_{xy} , F_{yy} , M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} (connu).

On dispose donc de 6 équations pour déterminer les 6 constantes inconnues, cqfd.

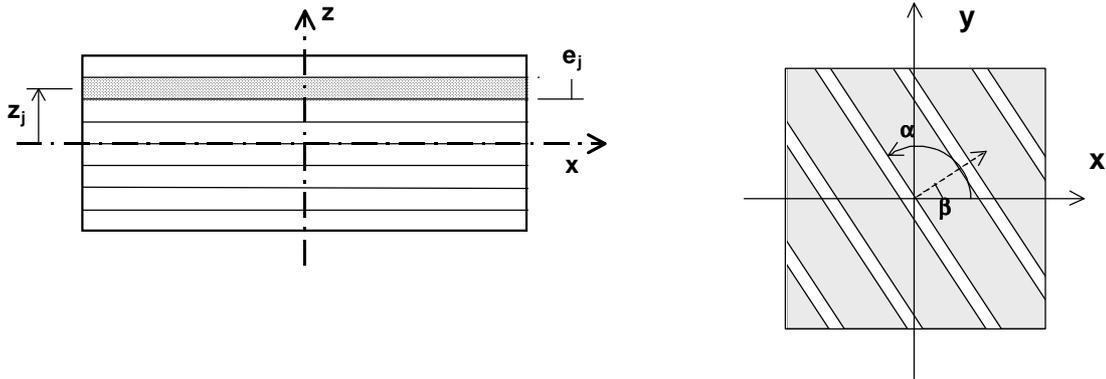
4 MISE EN EQUATION

4.1 Cas d'une couche de béton comprimé

(i) Nécessité de discrétiser la coque en couches dans le sens de l'épaisseur

On ne connaît pas au départ ni la hauteur de béton fissuré, ni l'orientation des fissures (angle $\beta + \pi/2$). Or les déformations et les contraintes sont linéaires en $z \Rightarrow \beta$ dépend de z ...

Pour simplifier le problème, il est nécessaire de discrétiser la coque en couches minces successives ; chaque couche sera supposée être dans un état bien défini (soit non fissuré, soit 1 direction de fissure d'angle donné, etc.) ; le nombre de couches peut être pris par exemple égal à 20.



(ii) Principe général

Il y a lieu de calculer successivement les grandeurs ci-dessous en fonction des 6 inconnues a_i et b_i , $i=1$ à 3 :

$$[\varepsilon] \rightarrow [\sigma] \rightarrow [F]$$

(iii) Calcul de $[\sigma]$

- Hypothèse de contraintes planes : $\sigma_z = 0$

- Ecrivons les lois de l'élasticité :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E_b} \right) \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E_b} \cdot \text{tr}(\sigma) \cdot \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_b} \cdot (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_b} \cdot (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \left(\frac{1+\nu}{E_b} \right) \cdot \sigma_{xy} \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E_b} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{E_b}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_{xy} = \left(\frac{E_b}{1+\nu} \right) \cdot \varepsilon_{xy}$$

Noter que si $\nu=0$, on retrouve $\sigma_{xx} = E_b \cdot \varepsilon_{xx}$, etc.

$$\text{Ceci est de la forme : } \begin{cases} \sigma_{xx} = E_b \cdot (P \cdot \varepsilon_{xx} + Q \cdot \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = E_b \cdot (Q \cdot \varepsilon_{xx} + P \cdot \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = E_b \cdot 2T \cdot \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

$$\text{avec } P = \frac{1}{1-\nu^2} \quad Q = \frac{\nu}{1-\nu^2} = \nu \cdot P \quad \text{et } T = \frac{1}{2 \cdot (1+\nu)}$$

Remplaçons les déformations par leur valeur :

$$\begin{cases} E_b \cdot \varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 \cdot z \\ 2E_b \cdot \varepsilon_{xy} = a_2 + b_2 \cdot z \\ E_b \cdot \varepsilon_{yy} = a_3 + b_3 \cdot z \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \sigma_{xx} = (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot z \\ \sigma_{xy} = T \cdot a_2 + T \cdot b_2 \cdot z \\ \sigma_{yy} = (Q \cdot a_1 + P \cdot a_3) + (Q \cdot b_1 + P \cdot b_3) \cdot z \end{cases}$$

(iv) Calcul de [F] pour la couche de béton non fissuré

On doit maintenant calculer les efforts F_{xx} , F_{xy} , F_{yy} , M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} s'exerçant dans la couche de béton considérée.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \int \sigma_{xx} \cdot dS & M_{xx} &= \int \sigma_{xx} \cdot z \cdot dS \\ F_{yy} &= \int \sigma_{yy} \cdot dS & M_{yy} &= \int \sigma_{yy} \cdot z \cdot dS \\ F_{xy} &= \int \sigma_{xy} \cdot dS & M_{xy} &= \int \sigma_{xy} \cdot z \cdot dS \end{aligned}$$

Appelons z_{ka} et z_{kb} les limites inf et sup de la couche k considérée.

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{xx} \cdot dz = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \{ (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot z \} \cdot dz \\ &= (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) \cdot (z_{kb} - z_{ka}) + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2} \end{aligned}$$

$$F_{xy} = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{xy} \cdot dz = (T \cdot a_2) \cdot (z_{kb} - z_{ka}) + (T \cdot b_2) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2}$$

$$F_{yy} = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{yy} \cdot dz = (Q \cdot a_1 + P \cdot a_3) \cdot (z_{kb} - z_{ka}) + (Q \cdot b_1 + P \cdot b_3) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2}$$

De même :

$$M_{xx} = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \left\{ (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) \cdot z + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot z^2 \right\} \cdot dz$$

$$= (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2} + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot \frac{(z_{kb}^3 - z_{ka}^3)}{3}$$

$$M_{xy} = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{xy} \cdot z \cdot dz = (T \cdot a_2) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2} + (T \cdot b_2) \cdot \frac{(z_{kb}^3 - z_{ka}^3)}{3}$$

$$M_{yy} = \int_{z_{ka}}^{z_{kb}} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz = (Q \cdot a_1 + P \cdot a_3) \cdot \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2} + (Q \cdot b_1 + P \cdot b_3) \cdot \frac{(z_{kb}^3 - z_{ka}^3)}{3}$$

On pose

$$\begin{cases} S_k = z_{kb} - z_{ka} & \text{Section de la couche} \\ M_k = \frac{(z_{kb}^2 - z_{ka}^2)}{2} & \text{Moment statique de la couche} \\ I_k = \frac{(z_{kb}^3 - z_{ka}^3)}{3} & \text{Inertie de la couche} \end{cases}$$

Alors on peut écrire de façon plus simple :

$$\begin{cases} F_{xx} = (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) \cdot S_k + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot M_k \\ F_{xy} = (T \cdot a_2) \cdot S_k + (T \cdot b_2) \cdot M_k \\ F_{yy} = (Q \cdot a_1 + P \cdot a_3) \cdot S_k + (Q \cdot b_1 + P \cdot b_3) \cdot M_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{xx} = (P \cdot a_1 + Q \cdot a_3) \cdot M_k + (P \cdot b_1 + Q \cdot b_3) \cdot I_k \\ M_{xy} = (T \cdot a_2) \cdot M_k + (T \cdot b_2) \cdot I_k \\ M_{yy} = (Q \cdot a_1 + P \cdot a_3) \cdot M_k + (Q \cdot b_1 + P \cdot b_3) \cdot I_k \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_{xy} \\ F_{yy} \\ M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} P \cdot S_k & 0 & Q \cdot S_k & P \cdot M_k & 0 & Q \cdot M_k \\ 0 & T \cdot S_k & 0 & 0 & T \cdot M_k & 0 \\ Q \cdot S_k & 0 & P \cdot S_k & Q \cdot M_k & 0 & P \cdot M_k \\ P \cdot M_k & 0 & Q \cdot M_k & P \cdot I_k & 0 & Q \cdot I_k \\ 0 & T \cdot M_k & 0 & 0 & T \cdot I_k & 0 \\ Q \cdot M_k & 0 & P \cdot M_k & Q \cdot I_k & 0 & P \cdot I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(v) Interprétation - Matrice de rigidité

On constate que cette matrice est symétrique. Il s'agit d'une matrice de rigidité élémentaire $[R]_k$, permettant de calculer les efforts s'exerçant dans une couche $[F]_k$ en fonction de nos 6 inconnues $[D]$ caractérisant la déformation :

$$[F]_k = [R]_k \cdot [D]$$

En sommant sur toutes les composants du système (= couches de béton + aciers), on pourra écrire que la somme des efforts équilibrés par ces composants est égale aux efforts extérieurs appliqués à la coque :

$$\sum_k [F]_k = \sum_k ([R]_k \cdot [D]) = [F]_{ext}$$

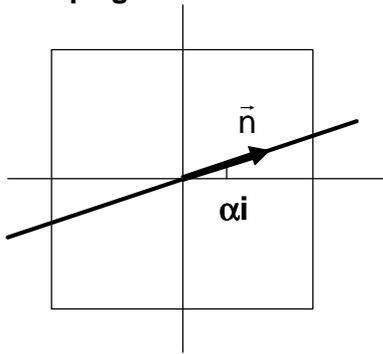
$$\Rightarrow \left(\sum_k [R]_k \right) \cdot [D] = [F]_{ext}$$

$$\Rightarrow [R]_{total} \cdot [D] = [F]_{ext} \quad \text{avec} \quad [R]_{total} = \sum_k [R]_k$$

La matrice de rigidité globale de la coque s'obtiendra par sommation (on dit aussi « assemblage ») des matrices de rigidité élémentaires.

4.2 Cas d'un acier de direction α_i

(i) Principe général



$$\vec{n} \begin{cases} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{cases}$$

On pose $C = \cos \alpha_i$
 $S = \sin \alpha_i$

La nappe d'acier est supposée se trouver à la cote z_a

Il y a lieu de calculer successivement les grandeurs ci-dessous en fonction des 6 inconnues a_i et b_i , $i=1$ à 3 :

$$[\varepsilon]_{x,y} \rightarrow [\varepsilon]_{\text{acier}} \rightarrow [\sigma]_{\text{acier}} \rightarrow [\sigma]_{x,y} \rightarrow [F]$$

(ii) Calcul de $[\varepsilon]_{\text{acier}}$

On désigne sous ce terme le tenseur des déformations, exprimé dans le repère de l'acier = repère tourné d'un angle α_i par rapport au repère général (O, x, y) .

$$[\varepsilon]_a = t[P] \cdot [\varepsilon] \cdot [P]$$

$$\text{où } [P] \text{ est la matrice de passage : } [P] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$$

$$[\varepsilon]_a = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \text{ de la forme } \begin{pmatrix} \varepsilon_a & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

(Seul le 1^{er} terme ε_a nous intéresse).

$$[\varepsilon]_a = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \cdot \varepsilon_{xx} + S \cdot \varepsilon_{xy} & -S \cdot \varepsilon_{xx} + C \cdot \varepsilon_{xy} \\ C \cdot \varepsilon_{xy} + S \cdot \varepsilon_{yy} & -S \cdot \varepsilon_{xy} + C \cdot \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_a = C^2 \cdot \varepsilon_{xx} + 2 \cdot CS \cdot \varepsilon_{xy} + S^2 \cdot \varepsilon_{yy}$$

(iii) Calcul de $[\sigma]_{\text{acier}}$

On considère que l'acier exerce un unique effort axial : $\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon_a = n \cdot E_b \cdot \varepsilon_a$

$$\Rightarrow \sigma_a = n \cdot E_b \cdot (C^2 \cdot \varepsilon_{xx} + 2 \cdot CS \cdot \varepsilon_{xy} + S^2 \cdot \varepsilon_{yy})$$

On remplace ε_{xx} , ε_{xy} et ε_{yy} par leur valeur, d'où :

$$\sigma_a = n \cdot [(C^2 \cdot a_1 + CS \cdot a_2 + S^2 \cdot a_3) + (C^2 \cdot b_1 + CS \cdot b_2 + S^2 \cdot b_3) \cdot z_a]$$

Sous forme matricielle, on a :

$$[\sigma]_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Calcul de $[\sigma]_{x,y}$

On revient maintenant dans le repère général (O, x, y) , ce qui revient à effectuer une rotation d'angle $-\alpha_i$:

$$[\sigma]_{(x,y)} = t[P] \cdot [\sigma]_a \cdot [P] \quad \text{avec} \quad [P] = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_a \cdot C & 0 \\ \sigma_a \cdot S & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_a \cdot C^2 & \sigma_a \cdot CS \\ \sigma_a \cdot CS & \sigma_a \cdot S^2 \end{pmatrix}$$

ce qui est la matrice cherchée, de la forme : $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$

Remplaçons σ_a par sa valeur ; on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = n_a \cdot \{ (C^4 \cdot a_1 + C^3 S \cdot a_2 + C^2 S^2 \cdot a_3) + (C^4 \cdot b_1 + C^3 S \cdot b_2 + C^2 S^2 \cdot b_3) \cdot z \} \\ \sigma_{xy} = n_a \cdot \{ (C^3 S \cdot a_1 + C^2 S^2 \cdot a_2 + CS^3 \cdot a_3) + (C^3 S \cdot b_1 + C^2 S^2 \cdot b_2 + CS^3 \cdot b_3) \cdot z \} \\ \sigma_{yy} = n_a \cdot \{ (C^2 S^2 \cdot a_1 + CS^3 \cdot a_2 + S^4 \cdot a_3) + (C^2 S^2 \cdot b_1 + CS^3 \cdot b_2 + S^4 \cdot b_3) \cdot z \} \end{cases}$$

Remarque – cas particulier d'aciers parallèles aux axes

Pour un acier de direction x, on a $C = \cos \alpha_i = 1$ et $S = \sin \alpha_i = 0$; donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = n_a \cdot (a_1 + b_1 \cdot z) \\ \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = 0 \end{cases}$$

Pour un acier de direction y, on a $C = \cos \alpha_i = 0$ et $S = \sin \alpha_i = 1$; donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = n_a \cdot (a_3 + b_3 \cdot z) \end{cases}$$

(iv) Calcul de [F]

L'effort dans l'acier vaut : $F_{ai} = A_i \cdot \sigma_{ai}$

Pour obtenir les forces F_{xx} , F_{xy} et F_{yy} , il suffit donc de multiplier les contraintes correspondantes par A_i .

Pour obtenir les moments M_{xx} , M_{xy} et M_{yy} , il suffit de multiplier les expressions de F_{xx} , F_{xy} et F_{yy} par z_i où z_i est la position de l'acier par rapport à la mi-épaisseur de dalle.

On obtient les expressions suivantes :

$$\begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_{xy} \\ F_{yy} \\ M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{pmatrix}_{A_i} = n_a \cdot A_i \cdot \begin{pmatrix} C^4 & C^3 S & C^2 S^2 & C^4 z_i & C^3 S z_i & C^2 S^2 z_i \\ C^3 S & C^2 S^2 & CS^3 & C^3 S z_i & C^2 S^2 z_i & CS^3 z_i \\ C^2 S^2 & CS^3 & S^4 & C^2 S^2 z_i & CS^3 z_i & S^4 z_i \\ C^4 z_i & C^3 S z_i & C^2 S^2 z_i & C^4 z_i^2 & C^3 S z_i^2 & C^2 S^2 z_i^2 \\ C^3 S z_i & C^2 S^2 z_i & CS^3 z_i & C^3 S z_i^2 & C^2 S^2 z_i^2 & CS^3 z_i^2 \\ C^2 S^2 z_i & CS^3 z_i & S^4 z_i & C^2 S^2 z_i^2 & CS^3 z_i^2 & S^4 z_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

avec $C = \cos \alpha_i$
 $S = \sin \alpha_i$

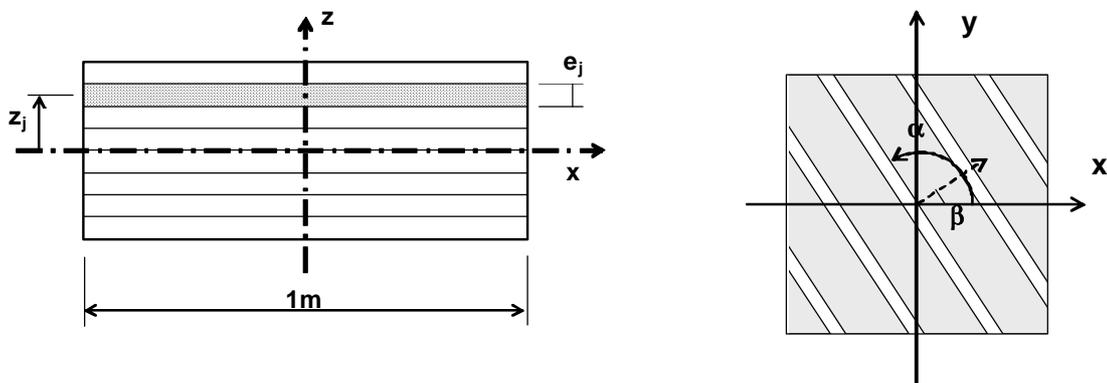
Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = n_a \cdot A_i \cdot C^4 \\ f_2 = n_a \cdot A_i \cdot C^3 S \\ f_3 = n_a \cdot A_i \cdot C^2 S^2 \\ f_4 = n_a \cdot A_i \cdot C S^3 \\ f_5 = n_a \cdot A_i \cdot S^4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} g_k = f_k \times z_i \\ (k = 1 \text{ à } 5) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} h_k = f_k \times z_i^2 \\ (k = 1 \text{ à } 5) \end{array} \right.$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité élémentaire correspondant à 1 acier :

$$[R_{\text{acier}}] = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & g_1 & g_2 & g_3 \\ f_2 & f_3 & f_4 & g_2 & g_3 & g_4 \\ f_3 & f_4 & f_5 & g_3 & g_4 & g_5 \\ g_1 & g_2 & g_3 & h_1 & h_2 & h_3 \\ g_2 & g_3 & g_4 & h_2 & h_3 & h_4 \\ g_3 & g_4 & g_5 & h_3 & h_4 & h_5 \end{pmatrix}$$

4.3 Cas d'une couche de béton fissuré



Le comportement d'une couche de béton fissuré est assimilé à celui d'un acier fictif :

- de même section équivalente : $(n_a \cdot A_i)$ remplacé par e_j dans les équations ci-avant
- de direction parallèle à celle des fissures : $\alpha_{\text{bielle}} = \beta + \frac{\pi}{2}$ où β est l'angle de la normale à la facette fissurée
- de position z_j (position du centre de la couche)

5 RESOLUTION - NOTION DE CALCUL ITERATIF

Il ne reste plus qu'à assembler (c'est-à-dire additionner) les matrices de rigidité élémentaires, pour obtenir la matrice de rigidité d'ensemble du système. C'est une matrice $[R]$ (6x6) telle que :

$$\begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_{xy} \\ F_{yy} \\ M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{pmatrix} = [R] \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad [F] = [R] \cdot [D]$$

ce qui permet par inversion de calculer : $[D] = [R]^{-1} \cdot [F]$ où $[D]$ correspond aux constantes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

$[R]$ est la somme des matrices de rigidité :

- des couches de béton sain
- des couches de béton en état « 1 direction de fissure »
- des aciers

Le calcul sera itératif, de façon à converger vers l'état de fissuration réel de la plaque.

- Lors du 1^{er} calcul, on suppose que toutes les couches de béton sont non fissurées ; on calcule les 6 constantes, ce qui permet de calculer les contraintes béton dans chaque couche, donc de vérifier leur état (0, 1 ou 2 fissures ; calcul de l'angle des fissures). Les formules permettant de calculer les contraintes en fonction des 6 constantes $[D]$ ont été établies précédemment.
- au 2^{ème} calcul, on construit une nouvelle matrice de rigidité en tenant compte de la fissuration des couches de l'état précédent ; nouveau calcul => nouvelles contraintes => nouvelle fissuration
- etc., jusqu'à converger vers un état stable (= aucune modification de l'état des couches entre 2 calculs successifs, ni de la direction des fissures).

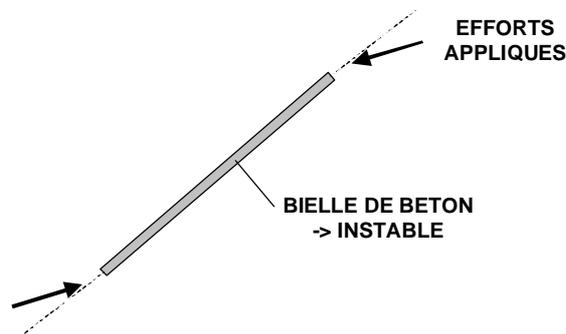
En effet, on propose de recalculer à chaque itération la direction des fissures, de façon à ce que la solution finale corresponde à des fissures parallèles aux directions principales (une autre possibilité consisterait à ne pas mettre à jour l'angle des fissures => le résultat final dépendrait du caractère itératif du calcul, ce qui est moins satisfaisant).

6 STABILISATION DE L'ALGORITHME : INTRODUCTION DE CISAILLEMENT DANS LES BIELLES DE BETON

(i) Constat d'instabilité

Il se trouve qu'avec la matrice précédemment construite, l'algorithme est peu stable : le terme b_2 (partie linéaire en z de ε_{xy}) devient important, ce qui crée des déformations ε_{xy} importantes, et donc une rotation instable des bielles de béton...

Il ne s'agit pas d'un simple problème numérique lié à notre algorithme de résolution, mais bel et bien d'une conséquence du fait que le béton fissuré a été modélisé au moyen de bielles comprimées, par nature instables dès que les efforts exercés ne sont plus strictement parallèles aux bielles de béton.



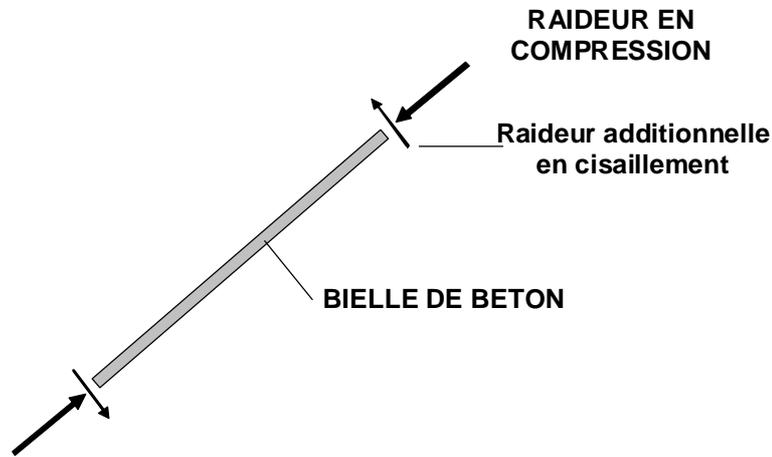
Voyons de façon plus détaillée comment tout ceci se produit.

- à une étape « n » donnée, la direction des fissures est prise égale à celle du repère principal \Rightarrow dans le repère de la bielle, on devrait avoir $\varepsilon'_{xy} = 0$ et $\sigma'_{xy} = 0$, par définition d'un repère principal.
- mais les itérations correspondent à une évolution du nombre de couches fissurées, ou de la direction des fissures. Donc supposons qu'au début du calcul « n », la couche « j » était saine, et que le calcul en cours montre qu'elle fissure. La direction de la fissure a donc été calculée sur la base d'une hypothèse « couche j non fissurée ».
- à l'étape « $n+1$ », la couche j est supposée fissurée \Rightarrow les efforts se distribuent légèrement différemment, le repère principal se modifie légèrement... et la bielle n'est plus exactement parallèle au repère principal. Il apparaît une distorsion ε'_{xy} dans le repère de la bielle, et il faut équilibrer des efforts qui ne sont plus colinéaires à la bielle.
- Si le béton était « sain », cet équilibre serait obtenu au moyen d'une contrainte σ'_{xy} . Or la bielle ne peut reprendre que des compressions \Rightarrow ce cisaillement ne peut se développer, et le déséquilibre entre direction de la fissure et direction principale des efforts va se reporter sur les couches de béton sain, s'il en reste... d'où l'instabilité.



(ii) Idée de cisaillement stabilisateur

Un cisaillement σ'_{xy} (dans le repère de la bielle) permettrait de stabiliser les bielles de béton. On fait donc l'hypothèse qu'il se développe un cisaillement de la forme : $\sigma'_{xy} = k \cdot E_b \cdot \varepsilon'_{xy}$ où k est un coefficient à choisir. Ce cisaillement peut également s'interpréter comme un cisaillement entre bielles de béton.



Noter que lorsqu'on aura convergé vers la solution du problème, les bielles seront parallèles au repère principal (puisque l'angle des bielles sera stabilisé, pris égal à chaque itération à la direction principale). Donc $\varepsilon'_{xy}=0 \Rightarrow \sigma'_{xy}=0$. Le cisaillement stabilisateur n'aura plus aucun effet.

Il s'agit donc d'un cisaillement « temporaire », n'intervenant qu'en phase d'itération, et n'ayant aucune influence sur le résultat obtenu. Il est loisible d'adopter une valeur quelconque pour $k \Rightarrow$ on adopte $k=1$.

(iii) Mise en équation

On doit établir la relation entre les efforts équilibrés par ce cisaillement additionnel (F_{xx} , F_{xy} , F_{yy} + moments) et la déformation $[\varepsilon]$:

$$[\varepsilon] \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon'_{xy} \quad \leftrightarrow \quad \sigma'_{xy} \quad \leftrightarrow \quad [\sigma] \quad \leftrightarrow \quad [F \text{ et } M]$$

dans le repère (x,y)
dans le repère de la bielle
dans le repère (x,y)

> Calcul de ε'_{xy}

On applique les formules de changement de base correspondant à une rotation θ , où θ est l'angle de la bielle :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

$$[\varepsilon'] = t[P] \cdot [\varepsilon] \cdot [P] \quad \text{avec} \quad [P] = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C = \cos \theta \\ S = \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon'] &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \cdot C + \varepsilon_{xy} \cdot S & -\varepsilon_{xx} \cdot S + \varepsilon_{xy} \cdot C \\ \varepsilon_{xy} \cdot C + \varepsilon_{yy} \cdot S & -\varepsilon_{xy} \cdot S + \varepsilon_{yy} \cdot C \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Le terme ε'_{xy} (hors diagonale) vaut :

$$\varepsilon'_{xy} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \cdot CS + \varepsilon_{xy} \cdot (C^2 - S^2)$$

> **Calcul de σ'_{xy}**

$$\sigma'_{xy} = E_b \cdot \varepsilon'_{xy} = E_b \cdot (-CS \cdot \varepsilon_{xx} + (C^2 - S^2) \cdot \varepsilon_{xy} + CS \cdot \varepsilon_{yy})$$

Sous forme matricielle, ce cisaillement additionnel peut s'écrire :

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

> **Calcul de $[\sigma]_{x,y}$**

On effectue cette fois une rotation $-\theta$, pour revenir dans le repère (x,y).

$$[\sigma] = t[P] \cdot [\sigma'] \cdot [P] \quad \text{avec } [P] = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\sigma] &= \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xy} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \\
 &= \sigma'_{xy} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -S & C \\ C & S \end{pmatrix} \\
 &= \sigma'_{xy} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot CS & C^2 - S^2 \\ C^2 - S^2 & 2 \cdot CS \end{pmatrix} \quad \text{de la forme } \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En remplaçant σ'_{xy} par sa valeur, on obtient :

$$\text{d'où } \begin{cases} \sigma_{xx} = 2 \cdot E_b \cdot \{ \varepsilon_{xx} \cdot C^2 S^2 - \varepsilon_{xy} \cdot (C^3 S - CS^3) - \varepsilon_{yy} \cdot C^2 S^2 \} \\ \sigma_{xy} = E_b \cdot \{ -\varepsilon_{xx} \cdot (C^3 S - CS^3) + \varepsilon_{xy} \cdot (C^2 - S^2)^2 + \varepsilon_{yy} \cdot (C^3 S - CS^3) \} \\ \sigma_{yy} = -\sigma_{xx} \end{cases}$$

> **Calcul de [F]**

Les forces correspondent à l'intégrale des contraintes, supposées ici constantes sur l'épaisseur de la couche (épaisseur e_i , position z_i) donc :

$$\begin{cases} F_{xx} = e_i \cdot \sigma_{xx} \\ F_{xy} = e_i \cdot \sigma_{xy} \\ F_{yy} = e_i \cdot \sigma_{yy} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{xx} = e_i \cdot z_i \cdot \sigma_{xx} \\ M_{xy} = e_i \cdot z_i \cdot \sigma_{xy} \\ M_{yy} = e_i \cdot z_i \cdot \sigma_{yy} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer les déformations par leur valeur :

$$\begin{cases} E_b \cdot \varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 \cdot z_i \\ 2E_b \cdot \varepsilon_{xy} = a_2 + b_2 \cdot z_i \\ E_b \cdot \varepsilon_{yy} = a_3 + b_3 \cdot z_i \end{cases}$$

d'où la matrice de rigidité élémentaire [Re] telle que

$$\begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_{xy} \\ F_{yy} \\ M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{pmatrix} = [Re] \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture, on adopte les notations suivantes :

$$\begin{cases} f_1 = e_i \cdot C^4 \\ f_2 = e_i \cdot C^3 S \\ f_3 = e_i \cdot C^2 S^2 \\ f_4 = e_i \cdot C S^3 \\ f_5 = e_i \cdot S^4 \end{cases} \quad \begin{cases} g_k = f_k \times z_i \\ (k = 1 \text{ à } 5) \end{cases} \quad \begin{cases} h_k = f_k \times z_i^2 \\ (k = 1 \text{ à } 5) \end{cases}$$

Alors on a :

$$[R_\tau] = \begin{pmatrix} 2f_3 & -(f_2 - f_4) & -2f_3 & 2g_3 & -(g_2 - g_4) & -2g_3 \\ -(f_2 - f_4) & (f_1/2 - f_3 + f_5/2) & f_2 - f_4 & -(g_2 - g_4) & (g_1/2 - g_3 + g_5/2) & g_2 - g_4 \\ -2f_3 & f_2 - f_4 & 2f_3 & -2g_3 & g_2 - g_4 & 2g_3 \\ 2g_3 & -(g_2 - g_4) & -2g_3 & 2h_3 & -(h_2 - h_4) & -2h_3 \\ -(g_2 - g_4) & (g_1/2 - g_3 + g_5/2) & g_2 - g_4 & -(h_2 - h_4) & (h_1/2 - h_3 + h_5/2) & h_2 - h_4 \\ -2g_3 & g_2 - g_4 & 2g_3 & -2h_3 & h_2 - h_4 & 2h_3 \end{pmatrix}$$

Il y aura lieu d'ajouter cette matrice de rigidité élémentaire pour chaque couche de béton en état « 1 fissure », lors de l'assemblage de la matrice de rigidité globale du système.

7 EXEMPLES DE CALCULS

7.1 Cisaillement simple

> Feuille excel

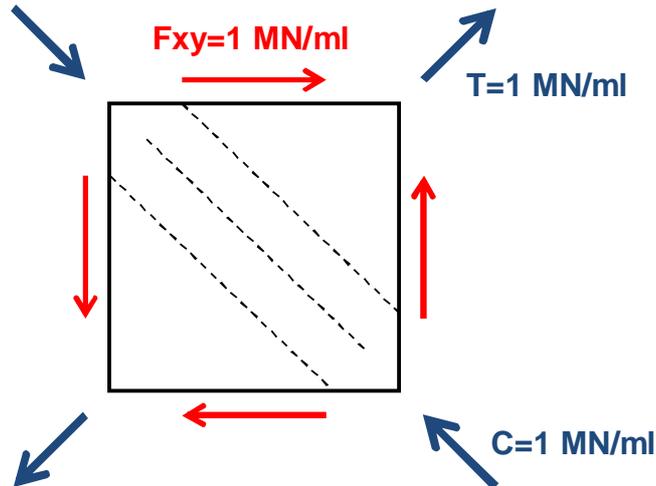
On considère une coque de 0.80m d'épaisseur, ferrillée avec des armatures HA 20 e=20cm sur les 2 faces et dans les 2 sens.

Elle est soumise à un effort de cisaillement : $F_{xy}=1000$ kN/ml

Nous obtenons les résultats suivants.

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME											
Titre :		ENPC Cisaillement simple									
DONNEES					RESULTATS						
Béton	Epaisseur =	0.80	m	Modification d'état = 0							
	fck =	30.0	MPa	(0 => Ok; 1 => itération nécessaire)							
	Ecm =	32 837	MPa	Variation maxi d'angle de fissure = 0.00 degrés							
	v =	0.00									
Aciers passifs introduits sous la forme : n barres phi .../m											
n°	Section			position		N°	z moyen (m)	Etat	σ_1	σ_2	Angle fiss ou σ_1 (degrés)
	nombre/ml	phi (mm)	cm2/ml	% face ext	% axe	Face sup	0.400	1	2.50	-	
1 = Ax sup	5	20	15.7	0.052	0.348	Couche 1	0.380	1	2.50	-	135.0
2 = Ay sup	5	20	15.7	0.077	0.323	2	0.340	1	2.50	-	135.0
3 = Ax inf	5	20	15.7	0.052	-0.348	3	0.300	1	2.50	-	135.0
4 = Ay inf	5	20	15.7	0.077	-0.323	4	0.260	1	2.50	-	135.0
	Ea =	200 000	MPa								
	na =	6.09									
Efforts appliqués (>0 en traction)											
	Fxx =	0.0	kN/ml								
	Fyy =	0.0	kN/ml								
	Fxy =	1000.0	kN/ml								
	Mxx =	0.0	kN.m/ml								
	Myy =	0.0	kN.m/ml								
	Mxy =	0.0	kN.m/ml								
Convention de signes pour l'affichage des contraintes											
- béton : $\sigma > 0$ en compression			σ_1 = compression maxi								
			σ_2 = compression mini								
- acier : $\sigma > 0$ en traction											
						19	-0.340	1	2.50	-	135.0
						20	-0.380	1	2.50	-	135.0
						Face inf	-0.400	1	2.50	-	
						1 = Xsup	0.348	1	318.31	-	0.0
						2 = Ysup	0.323	1	318.31	-	90.0
						3 = Xinf	-0.348	1	318.31	-	0.0
						4 = Yinf	-0.323	1	318.31	-	90.0
SETEC TPI	CI-Plaq.xls	05/04/13					PLAQ-ELS				v.3

> **Interprétation**



* **Traction dans les armatures**

La contrainte dans les armatures est de 318.31 MPa.
 Dans la direction X, on a 15.7 cm² sur chaque face soit 2x15.7 = 31.4 cm².
 Ceci correspond à un effort de 31.4 cm² x 318.31 MPa = **1.0 MN**

Explication

En se plaçant dans un repère tourné de 45°, le cisaillement F_{xy} devient :
 - un effort de traction **T=1 MN/ml**
 - un effort de compression **C=1 MN/ml**

$$\text{En effet : } [F(45^\circ)] = {}^t(P) \cdot (F) \cdot (P) = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & F_{xy} \\ F_{xy} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = F_{xy} \cdot \begin{pmatrix} 2CS & C^2 - S^2 \\ -S^2 + C^2 & -2CS \end{pmatrix}$$

$$\text{avec ici } C = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } S = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } [F(45^\circ)] = \begin{pmatrix} F_{xy} & 0 \\ 0 & -F_{xy} \end{pmatrix}$$

Pour reprendre l'effort de traction T, il faut prévoir des armatures A_x et A_y équilibrant toutes les deux 1 MN/ml. En effet si on désigne par R_x et R_y l'effort repris par les armatures (R_x=R_y=R par symétrie du cas de charge), alors l'effort résistant dans une direction à 45° se calcule par :

$$[R(45^\circ)] = {}^t(P) \cdot (R) \cdot (P) = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \text{ (ce résultat ne dépend pas de } \theta \text{)}$$

On veut résister à l'effort T=1M/ml => il faut R=1 MN/ml.

* **Compression du béton**

La compression dans les bielles de béton est de 2.5 MPa
 Donc l'effort de compression est de 2.5 MPa x 0.80m = **2 MN**

Explication

Les bielles doivent résister à l'effort de compression C = 1 MN/ml

Mais elles doivent aussi résister à l'effort de traction T=1 MN/ml, repris par les armatures X et Y, qui à leur tour viennent comprimer les bielles de béton, d'où cet effort final de 2 MN.

7.2 Torsion simple

> Feuille excel

On applique cette fois un moment $M_{xy} = 250 \text{ kN.m/ml}$

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME											
Titre :		ENPC Torsion simple									
DONNEES					RESULTATS						
Béton	Epaisseur =	0.80	m	Modification d'état = 0							
	f _{ck} =	30.0	MPa	(0 => Ok; 1 => itération nécessaire)							
	E _{cm} =	32 837	MPa	Variation maxi d'angle de fissure = 0.00 degrés							
	v =	0.00									
Aciers passifs		introduits sous la forme : n barres phi .../m									
n°	Section			position		N°	z moyen (m)	Etat	σ ₁	α ₂	Angle fiss ou σ ₁ (degrés)
	nombre/ml	phi (mm)	cm ² /ml	% face ext	% axe	Face sup	0.400	1	13.11	-	
1 = Ax sup	5	20	15.7	0.052	0.348	Couche 1	0.380	1	10.65	-	135.0
2 = Ay sup	5	20	15.7	0.077	0.323	2	0.340	1	5.74	-	135.0
3 = Ax inf	5	20	15.7	0.052	-0.348	4	0.260	2	-	-	-
4 = Ay inf	5	20	15.7	0.077	-0.323	5	0.220	2	-	-	-
						6	0.180	2	-	-	-
						7	0.140	2	-	-	-
	E _a =	200 000	MPa			8	0.100	2	-	-	-
	n _a =	6.09				9	0.060	2	-	-	-
Efforts appliqués (>0 en traction)											
	F _{xx} =	0.0	kN/ml			10	0.020	2	-	-	-
	F _{yy} =	0.0	kN/ml			11	-0.020	2	-	-	-
	F _{xy} =	0.0	kN/ml			12	-0.060	2	-	-	-
	M _{xx} =	0.0	kN.m/ml			13	-0.100	2	-	-	-
	M _{yy} =	0.0	kN.m/ml			14	-0.140	2	-	-	-
	M _{xy} =	250.0	kN.m/ml			15	-0.180	2	-	-	-
						16	-0.220	2	-	-	-
						17	-0.260	2	-	-	-
Convention de signes pour l'affichage des contraintes											
- béton : σ > 0 en compression		σ ₁ = compression maxi									
		σ ₂ = compression mini									
- acier : σ > 0 en traction											
						18	-0.300	1	0.83	-	45.0
						19	-0.340	1	5.74	-	45.0
						20	-0.380	1	10.65	-	45.0
						Face inf	-0.400	1	13.11	-	
						1 = X sup	0.348	1	219.34	-	0.0
						2 = Y sup	0.323	1	219.34	-	90.0
						3 = X inf	-0.348	1	219.34	-	0.0
						4 = Y inf	-0.323	1	219.34	-	90.0
SETEC TPI	CI-Plaq.xls	05/04/13				PLAQ-ELS					v.3

> Interprétation

* Armatures

Toutes les armatures subissent une contrainte de traction identique de 219.34 MPa (ce qui est logique, vu la symétrie du problème)

* Béton

Direction des fissures

Le moment de torsion génère :

- un cisaillement positif en face sup (analogue au F_{xy} de l'exemple précédent)
- un cisaillement négatif en face inf

Il est donc logique de retrouver un angle de fissure de 135° en face sup, et de 45° en face inf.

Etat « 2 directions de fissures » en partie centrale

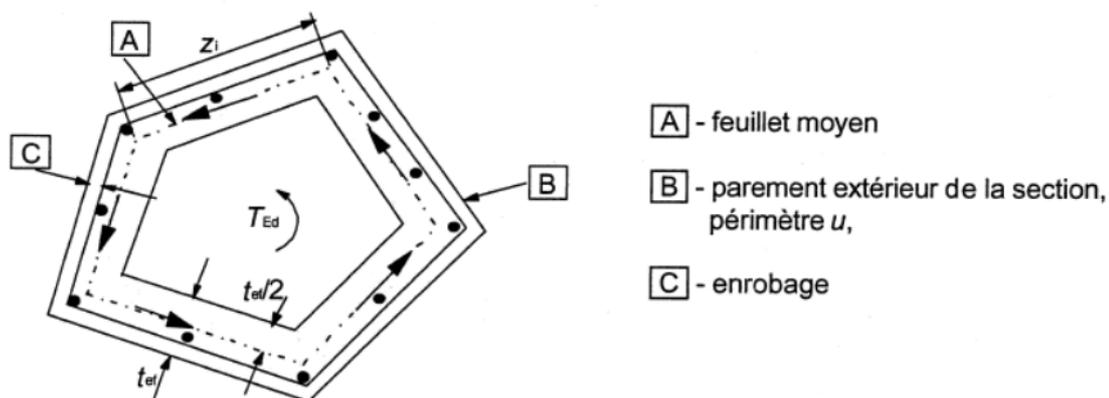
On constate qu'une partie importante de l'épaisseur de dalle est en état « 2 directions de fissures ». Ceci provient du phénomène suivant : sur la face sup, on a vu que le cisaillement génère un effort de compression C et un effort de traction T dans des directions à 45°.

- l'effort de traction T est repris par un allongement des armatures, dans les 2 directions X et Y (d'où la contrainte de traction de 219 MPa)

- l'effort de compression C est repris par une compression des bielles de béton. Mais ces bielles sont nettement plus rigides que les armatures => le raccourcissement des bielles est globalement plus faible que l'allongement des armatures. Le béton subit donc en définitive un allongement global, d'où la fissuration complète en partie centrale.

C'est ce type de phénomène qui explique que lorsqu'on vérifie une section quelconque à la torsion, il y a lieu de considérer une section creuse fictive : en effet le centre de la section est soumis à une traction => il est fissuré, et ne participe pas à la reprise de la torsion.

Extrait du § 6.3.2 de l'EC2 :



7.3 Cas quelconque

> Feuille excel

On considère le cas suivant :

- compression de 800 kN/ml et flexion 400 kN.m/ml dans la direction X
- traction 200 kN/ml et flexion 200 kN.m/ml dans la direction Y
- un cisaillement et un moment de torsion sont également appliqués

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME										
Titre :		ENPC								
		Cas quelconque : compression + forte flexion en X ; traction + faible flexion en Y								
DONNEES					RESULTATS					
Béton	Epaisseur =	0.80	m		Modification d'état =	0				
	fck =	30.0	MPa		(0 => Ok ; 1 => itération nécessaire)					
	E _{cm} =	32 837	MPa		Variation maxi d'angle de fissure =	0.02	degrés			
	v =	0.00								
Aciers passifs introduits sous la forme : n barres phi .../m					N°	z moyen (m)	Etat	σ1	σ2	Angle fiss ou σ1 (degrés)
n°	Section			position		Face sup	0.400	0	8.60	4.77
	nombre/ml	phi (mm)	cm2/ml	% face ext	% axe	Couche 1	0.380	0	7.84	3.44
1 = Ax sup	5	20	15.7	0.052	0.348	2	0.340	0	6.32	0.79
2 = Ay sup	5	20	15.7	0.077	0.323	3	0.300	1	4.81	-
3 = Ax inf	5	20	15.7	0.052	-0.348	4	0.260	1	3.29	-
4 = Ay inf	5	20	15.7	0.077	-0.323	5	0.220	1	1.78	-
	Ea =	200 000	MPa			6	0.180	1	0.27	-
	na =	6.09				7	0.140	2	-	-
Efforts appliqués (>0 en traction)						8	0.100	2	-	-
	F _{xx} =	-800.0	kN/ml			9	0.060	2	-	-
	F _{yy} =	200.0	kN/ml			10	0.020	2	-	-
	F _{xy} =	150.0	kN/ml			11	-0.020	2	-	-
	M _{xx} =	-400.0	kN.m/ml			12	-0.060	2	-	-
	M _{yy} =	-200.0	kN.m/ml			13	-0.100	2	-	-
	M _{xy} =	50.0	kN.m/ml			14	-0.140	2	-	-
Convention de signes pour l'affichage des contraintes						15	-0.180	2	-	-
	- béton : σ > 0 en compression					16	-0.220	2	-	-
						17	-0.260	2	-	-
	- acier : σ > 0 en traction					18	-0.300	2	-	-
						19	-0.340	2	-	-
						20	-0.380	2	-	-
						Face inf	-0.400	2	-	-
						1 = X sup	0.348	1	-38.45	-
						2 = Y sup	0.323	1	-0.25	-
						3 = X inf	-0.348	1	133.62	-
						4 = Y inf	-0.323	1	250.12	-
SETEC TPI	CI-Plaqa.xls	05/04/13				PLAQ-ELS				v.3

> Interprétation

On constate qu'il existe successivement des couches de béton :

- non fissuré en partie sup (« 0 fissures »)
- puis « 1 direction de fissure »
- puis « 2 directions de fissures »

* Discussion concernant l'angle des fissures

En partie sup, on voit que les fissures ont un angle de l'ordre de 165° (proche de 180°), correspondant par conséquent à l'effet des efforts selon Y.

Ceci s'explique de la façon suivante :

- dans le sens X, on applique une forte compression + flexion => l'axe neutre est assez bas dans la section
- dans le sens Y, on applique en revanche une traction => l'axe neutre se trouve plus haut, et c'est lui qu'on voit apparaître entre les couches 2 et 3 (transition entre « tout comprimé » et « une direction de fissure »)

Puis on rencontre l'axe neutre correspondant aux efforts appliqués selon X, entre couches 6 et 7, correspondant à la transition entre « 1 direction de fissure » et « tout fissuré ».