

# Effets différés

## Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Objectif.....</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2. Généralités .....</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1 Composantes de déformations .....  | 3         |
| 2.2 Ordres de grandeur des déformations .....  | 4         |
| <b>3. Le fluage.....</b>   | <b>5</b>  |
| 3.1 Mécanisme et paramètres influant sur le fluage .....                             | 5         |
| 3.2 Coefficient de fluage.....   | 5         |
| 3.3 Dispositions réglementaires .....  | 6         |
| 3.4 Effet de l'évolution dans le temps du chargement .....                           | 8         |
| 3.5 Effets du fluage sur le comportement structurel .....                            | 9         |
| 3.5.1 Cas d'un poteau en compression centrée .....                                   | 10        |
| 3.5.2 Poutres en flexion simple .....  | 11        |
| <b>4. Le retrait.....</b>  | <b>13</b> |
| 4.1 Mécanisme et paramètres influant sur le retrait .....                            | 13        |
| 4.1.1 Le retrait plastique .....   | 13        |
| 4.1.2 Le retrait endogène .....  | 14        |
| 4.1.3 Le retrait de dessiccation.....  | 15        |
| 4.1.4 Retrait total.....   | 16        |
| 4.2 Effets du retrait sur le comportement structurel.....                            | 16        |
| 4.2.1 Développement de contraintes autoéquilibrées.....                              | 17        |
| 4.2.2 Bridage du retrait par les armatures .....                                     | 17        |
| 4.2.3 Effet du retrait sur la fissuration – cas d'une poutre en flexion.....         | 18        |
| 4.2.4 Effet d'un bridage mécanique sur le retrait .....                              | 21        |
| 4.2.5 Effet du retrait sur la fissuration- cas des éléments bridés à leur base ..... | 23        |
| <b>5. Analyse des sections – sections non fissurées .....</b>                        | <b>24</b> |
| 5.1 Méthode du module effectif .....   | 24        |
| 5.1.1 Principe.....  | 24        |
| 5.1.2 Illustration – chargement constant – section non armée .....                   | 25        |
| 5.1.3 Illustration – chargement constant – section armée .....                       | 26        |
| 5.2 Méthode incrémentale .....   | 29        |
| 5.2.1 Fonction de fluage .....   | 29        |
| 5.2.2 Illustration - chargement incrémental.....                                     | 29        |
| 5.2.3 Illustration : section non armée.....  | 30        |
| 5.2.4 Illustration : section armée sous chargement constant .....                    | 31        |
| 5.2.5 Illustration : chargement en créneaux .....                                    | 34        |
| 5.3 Méthode du coefficient de vieillissement .....                                   | 34        |
| 5.3.1 Principe .....   | 34        |
| 5.3.2 Illustration : Effort axial en créneau sur section en béton non armé.....      | 36        |
| 5.3.3 Illustration : effort axial en créneau sur section en béton armé.....          | 37        |
| 5.3.4 Illustration : flexion composée avec compression .....                         | 39        |
| <b>6. Analyse des sections – sections fissurées.....</b>                             | <b>44</b> |
| 6.1 Généralités.....   | 44        |
| 6.2 Equations constitutives.....   | 45        |
| 6.3 Mises en application .....   | 46        |
| 6.3.1 Application : section armée soumise au seul retrait.....                       | 46        |

---

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 6.3.2     | Application : section armée soumise au retrait, au fluage et à un moment fléchissant...   | 49        |
| <b>7.</b> | <b>Analyse des structures</b> .....   | <b>51</b> |
| 7.1       | Impacts des effets différés sur les structures.....                                       | 51        |
| 7.2       | Effet du retrait sur un portique (section non fissurée).....                              | 51        |
| 7.3       | Effet d'une dénivellation d'appui provoquée par le fluage.....                            | 52        |
| 7.4       | Effet du fluage dans les structures hyperstatiques (sections non fissurées) .....         | 53        |
| 7.5       | Effet du retrait sur une poutre continue sous chargement constant (section fissurée)..... | 55        |
| 7.6       | Influence du fluage sur les efforts internes d'une construction phasée.....               | 57        |
| <b>8.</b> | <b>Références</b> .....   | <b>61</b> |

## 1. OBJECTIF

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les effets sur la structure des caractéristiques évolutives du béton et de ses interactions avec les armatures.

Le comportement évolutif du béton dans le temps est caractérisé par :

- Le retrait,
- Le fluage,
- La relaxation.

Pour rappel, le retrait est le développement graduel des déformations du béton (rétrécissement) en l'absence de chargement. Le fluage est le développement graduel des déformations du béton sous chargement constant. La relaxation est l'évolution de la contrainte sous déformation constante. Dans la pratique, la relaxation est intégrée au phénomène de fluage.

Le retrait et le fluage entraînent un comportement non élastique du béton armé, provoquant la fissuration, la redistribution d'efforts à l'intérieur de la structure, une augmentation de la déformation. Ces phénomènes, bien que souffrant de grandes variabilités, doivent cependant être analysés de près car ils peuvent remettre en cause l'aptitude de la structure à répondre aux exigences de service (la serviceabilité).

Les armatures de précontrainte voient également leurs caractéristiques évoluer dans le temps : c'est la relaxation. Ce phénomène est comparable au fluage.

## 2. GENERALITES

### 2.1 Composantes de déformations

A un instant  $t$ , la déformation axiale d'un tronçon de structure en béton armé, soumis à un chargement mécanique, à des actions thermiques et aux effets différés peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_e(\tau_0) + \varepsilon_{cr}(t, \tau_0) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_D) + \varepsilon_{c,th}$$

$\varepsilon_e(\tau_0)$  est la déformation élastique provoqué par le chargement au temps  $\tau_0$ , caractérisé par la loi de Hooke :  
 $\varepsilon_e(\tau_0) = \sigma(\tau_0)/E(\tau_0)$  ;

$\varepsilon_{cr}(t, \tau_0)$  est la déformation provoquée par le fluage du béton, celui-ci commençant lorsque le béton est soumis au chargement au temps  $\tau_0$  ;

$\varepsilon_{sh}(t, \tau_D)$  est la déformation provoquée par le retrait, celui-ci commençant à la fin de la cure du béton, notée  $\tau_D$ .

La figure suivante illustre l'évolution des déformations dans un élément de béton (non fissuré) en C30/37, d'épaisseur 0,500m, soumis à une cure de 7 jours ( $\tau_D$ ) et chargé au bout de 30 jours ( $\tau_0$ ). Le retrait de dessiccation démarre au bout de 7 jours (le retrait endogène n'est pas considéré ici). A  $t=30$  jours, le raccourcissement du béton est égal à celui du retrait de dessiccation et du raccourcissement instantané provoqué par le chargement. Le fluage se déclenche à partir de la date de chargement et accroît les déformations provoquées par le chargement élastique d'une valeur égale à  $\varphi(t, \tau_D)$ .

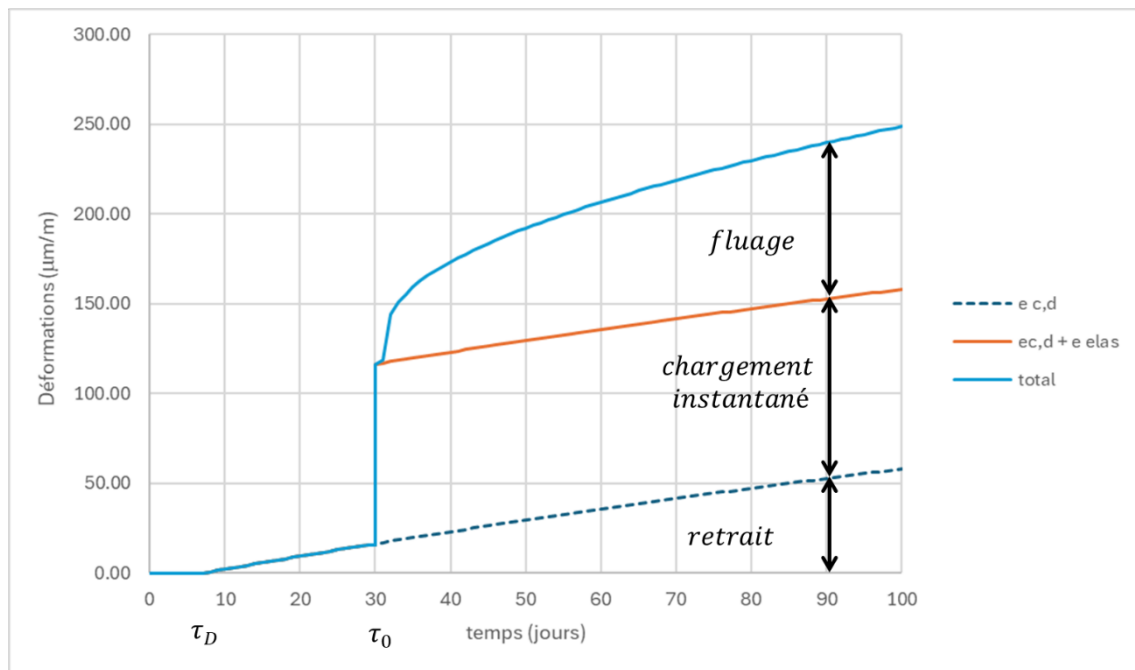


Figure 1 : retrait de dessiccation, chargement et fluage

Remarque : relaxation et fluage – équivalence phénoménologique.

La relaxation et le fluage sont des phénomènes semblables, ce sont simplement les conditions aux limites qui changent. Dans le phénomène du fluage, la pièce mécaniquement chargée est libre de se déformer, dans le phénomène de la relaxation la pièce est bloquée en déplacement à ses extrémités. Considérons par exemple le cas d'une barre soumise à un chargement thermique, comme une élévation de température, assimilable à une compression et qui serait fixée à ses extrémités. Considérons par ailleurs que la pièce ne subit pas de retrait.

Après chargement, les variations de dimensions sont nulles :

$$\Delta \varepsilon_c(t) = \Delta \varepsilon_e(t, \tau_0) + \Delta \varepsilon_{cr}(t) = 0$$

On en déduit que la variation d'allongement, et donc de contrainte vaut :

$$\Delta \varepsilon_e(t, \tau_0) = -\Delta \varepsilon_{cr}(t) \Rightarrow \Delta \sigma_e(t, \tau_0) = -E_c \Delta \varepsilon_{cr}(t)$$

Le fluage au-delà du chargement se traduit par une évolution des contraintes dans la barre, de signe contraire à la contrainte initiale. De fait, la contrainte dans la barre bloquée diminue, ce qui correspond exactement à la définition de la relaxation.

On rencontre ce phénomène dans les fibres comprimées des poutres d'ossatures dont les dimensions ne changent pas : les zones comprimées de béton sous l'effet de la flexion voient la contrainte dans le béton diminuer et la profondeur de l'axe neutre augmenter. Ce phénomène qu'on explique par le fluage du béton qui fait que le rapport  $n = E_s/E_c$  augmente est en fait plutôt à rapprocher du phénomène de relaxation.

## 2.2 Ordres de grandeur des déformations

En service, une pièce correctement dimensionnée ne travaille pas à une contrainte de compression supérieure à  $0,4f_{ck}$ .

La déformation élastique vaut alors, en compression :  $\varepsilon_e = -0,4 \frac{f_{ck}}{E_c} \approx -0,4 \frac{f_{ck}}{1000f_{ck}} \approx -400 \mu\text{m/m}$ .

La déformation due au fluage est de l'ordre de 2 fois la déformation élastique :  $\varepsilon_{cr} \approx -800 \mu\text{m/m}$ .

Enfin, le retrait, selon l'épaisseur de la pièce et les conditions hygrométriques, peuvent très sensiblement varier, mais on peut considérer un retrait médian de l'ordre de  $\varepsilon_{sh} \approx -400 \mu\text{m/m}$ .

Ainsi, le raccourcissement élastique, constaté au début de l'exploitation de la pièce, passe de 400 à 1600  $\mu\text{m/m}$ , il est quadruplé. Les déformations finales peuvent ainsi impacter la serviçabilité des ouvrages et il convient d'être sensible à ces ordres de grandeur.

## 3. LE FLUAGE

### 3.1 Mécanisme et paramètres influant sur le fluage

Le fluage est un phénomène complexe dont les mécanismes ne sont pas encore entièrement établis. Il fait intervenir le squelette du béton, en particulier la pâte de ciment et l'eau.

Le squelette de béton étant un arrangement de granulats, de pâte de ciment hydraté et d'eau, le chargement a pour effet de comprimer le squelette de granulats et l'eau non liée au ciment migre ainsi vers l'extérieur, comme l'eau migre d'une éponge comprimée. La vitesse de migration de l'eau en excès dépend ainsi fortement de l'atmosphère. Si le béton est totalement immergé dans l'eau, l'eau du béton ne migre pas ; en revanche, si la pièce se trouve dans une atmosphère sèche, la migration de l'eau est facilitée.

L'âge du béton au moment du chargement est également un paramètre important : plus le béton est chargé au jeune âge, plus rapide est le fluage.

On peut retenir les choses suivantes :

- 50% du fluage se fait dans les 2-3 premiers mois,
- 90% du fluage se fait 3-4 premières années.
- La déformation de fluage est proportionnelle à la déformation initiale de chargement tant que la contrainte dans la pièce ne dépasse pas  $0,45f_{ck}$  : on parle de fluage linéaire, qui permet alors de définir un coefficient de fluage  $\varphi(t, \tau_0)$  tel que  $\varepsilon_{cr}(t) = \varphi(t, \tau_0)\varepsilon_e(\tau_0)$
- Le fluage diminue lorsque la résistance du béton augmente,
- Le fluage diminue lorsque l'hygrométrie (RH) augmente : cela s'explique par la cinétique de migration de l'eau à travers le squelette qui devient plus lente,
- Le fluage diminue lorsque l'âge du béton à son chargement ( $\tau_0$ ) augmente : ainsi, plus un ouvrage est chargé jeune, plus son fluage sera important,
- Le fluage diminue lorsque l'épaisseur de la pièce augmente : l'eau en excès qui migre vers l'extérieur met plus de temps lorsque l'épaisseur de la pièce augmente.
- Le fluage augmente lorsque la température augmente : on doit en tenir compte particulièrement pour les éléments préfabriqués dans des usines dont la prise est accélérée par étuvage. La température a pour effet de faire « vieillir » plus rapidement le béton (on parle de maturité).

### 3.2 Coefficient de fluage

Par définition :

$$\varphi(t, \tau_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t)}{\varepsilon_e(\tau_0)}$$

Où :

$\varepsilon_e(\tau_0)$  est la déformation élastique provoqué par le chargement au temps  $\tau_l$ , caractérisé par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_e(\tau_0) = \sigma(\tau_0)/E(\tau_0) ;$$

$\varepsilon_{cr}(t, \tau_0)$  est la déformation provoquée par le fluage du béton, celui-ci commençant lorsque le béton est soumis au chargement au temps  $\tau_0$  ;

La déformation totale liée au chargement mécanique vaut donc :

$$\varepsilon_{tot}(t) = \varepsilon_e(\tau_0)(1 + \varphi(t, \tau_0))$$

Ainsi, pour une même contrainte, la déformation initiale est multipliée par le rapport  $(1 + \varphi(t, \tau_0))$ . Cela revient à considérer que le module du béton effectif est réduit du même rapport.

$$\varepsilon_{tot}(t) = \frac{\sigma(\tau_0)}{E_c(\tau_0)}(1 + \varphi(t, \tau_0)) = \frac{\sigma(\tau_0)}{E_{c,eff}}$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(\tau_0)}{1 + \varphi(t, \tau_0)}$$

### 3.3 Dispositions réglementaires

On reprendra ici, sans modification, le texte de l'annexe B de l'EN 1992-1-1 [R1].

#### B.1 Équations de base pour la détermination du coefficient de fluage

(1) Le coefficient de fluage  $\varphi(t, t_0)$  peut être calculé à partir de :

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad \dots \text{(B.1)}$$

où :

$\varphi_0$  est le coefficient de fluage conventionnel et peut être estimé par :

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad \dots \text{(B.2)}$$

$\varphi_{RH}$  est un facteur tenant compte de l'influence de l'humidité relative sur le coefficient de fluage conventionnel :

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{pour } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad \dots \text{(B.3a)}$$

$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot a_1 \right] \cdot a_2 \quad \text{pour } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad \dots \text{(B.3b)}$$

$RH$  est l'humidité relative de l'environnement ambiant en %

$\beta(f_{cm})$  est un facteur tenant compte de l'influence de la résistance du béton sur le coefficient de fluage conventionnel :

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad \dots \text{(B.4)}$$

$f_{cm}$  est la résistance moyenne en compression du béton à 28 jours, en MPa

$\beta(t_0)$  est un facteur tenant compte de l'influence de l'âge du béton au moment du chargement sur le coefficient de fluage conventionnel :

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \quad \dots \text{(B.5)}$$

$h_0$  est le rayon moyen de l'élément, en mm :

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad \dots \text{(B.6)}$$

$A_c$  est l'aire de la section droite

$u$  est le périmètre de l'élément en contact avec l'atmosphère

$\beta_c(t, t_0)$  est un coefficient qui rend compte du développement du fluage avec le temps après chargement, et peut être estimé par l'expression suivante :

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3} \quad \dots \text{(B.7)}$$

$t$  est l'âge du béton à l'instant considéré, en jours

$t_0$  est l'âge du béton au moment du chargement, en jours

$t - t_0$  est la durée non ajustée du chargement, en jours

$\beta_H$  est un coefficient dépendant de l'humidité relative ( $RH$  en %) et du rayon moyen de l'élément ( $h_0$  en mm). Il peut être estimé par :

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 \leq 1 500 \quad \text{pour } f_{cm} \leq 35 \quad \dots \text{ (B.8a)}$$

$$\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{18}] h_0 + 250 a_3 \leq 1 500 a_3 \quad \text{pour } f_{cm} \geq 35 \quad \dots \text{ (B.8b)}$$

$a_{1/2/3}$  sont des coefficients tenant compte de l'influence de la résistance du béton :

$$a_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad a_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad a_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad \dots \text{ (B.8c)}$$

(2) L'influence du type de ciment sur le coefficient de fluage du béton peut être prise en compte en modifiant l'âge du chargement  $t_0$  dans l'Expression (B.5) conformément à l'expression suivante :

$$t_0 = t_{0,T} \cdot \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \quad \dots \text{ (B.9)}$$

où :

$t_{0,T}$  est l'âge du béton au moment du chargement, en jours, corrigé en fonction de la température, conformément à l'Expression (B.10)

$\alpha$  est une puissance qui dépend du type de ciment (voir 3.1.2 (6)) :

= - 1 pour les ciments de la classe S

= 0 pour les ciments de la classe N

= 1 pour les ciments de la classe R

(3) L'influence des températures élevées ou faibles dans l'intervalle de 0 à 80 °C sur la maturité du béton peut être prise en compte en ajustant l'âge du béton conformément à l'expression suivante :

$$t_t = \sum_{i=1}^n e^{-4\,000/[273 + T(\Delta t_i)] - 13,65} \cdot \Delta t_i \quad \dots \text{ (B.10)}$$

où :

$t_T$  est l'âge du béton corrigé en fonction de la température, remplaçant  $t$  dans les expressions correspondantes

$T(\Delta t_i)$  est la température durant la période de temps  $\Delta t_i$ , en °C

$\Delta t_i$  est le nombre de jours où règne la température  $T$ .

Le coefficient de variation moyen des données de fluage prévues ci-dessus et déduites d'une banque de données informatisée de résultats d'essais en laboratoire, est de l'ordre de 20 %.

Il convient d'associer les valeurs de  $\varphi(t, t_0)$  données ci-dessus au module tangent  $E_c$ .

Lorsqu'une évaluation moins précise est jugée satisfaisante, les valeurs données dans la Figure 3.1 du 3.1.4 peuvent être adoptées pour le fluage du béton à 70 ans.

Lorsque la pièce est soumise à une compression constante supérieure à  $0,45 f_{ck}$ , le fluage est non linéaire. Ce phénomène peut se rencontrer dans les poteaux fortement chargés ou certains éléments précontraints. Dans ce cas, le fluage non linéaire est donné par (clause 3.1.4(4) de l'EN 1992-1-1 [R1]) :

$$\varphi_{nl}(\infty, \tau_0) = \varphi(\infty, \tau_0) e^{1,5(k_\sigma - 0,45)}$$

Où :

$k_\sigma = \sigma_c / f_{ck}(\tau_0)$  dans lequel  $\sigma_c$  est la contrainte de compression et  $f_{ck}(\tau_0)$  la résistance caractéristique en compression du béton à la date du chargement.

La figure ci-dessous illustre le calcul du coefficient de fluage sur la base de ces dispositions, en particulier le facteur  $\beta_c(t, \tau_0)$  qui reflète l'évolution dans le temps du coefficient de fluage.

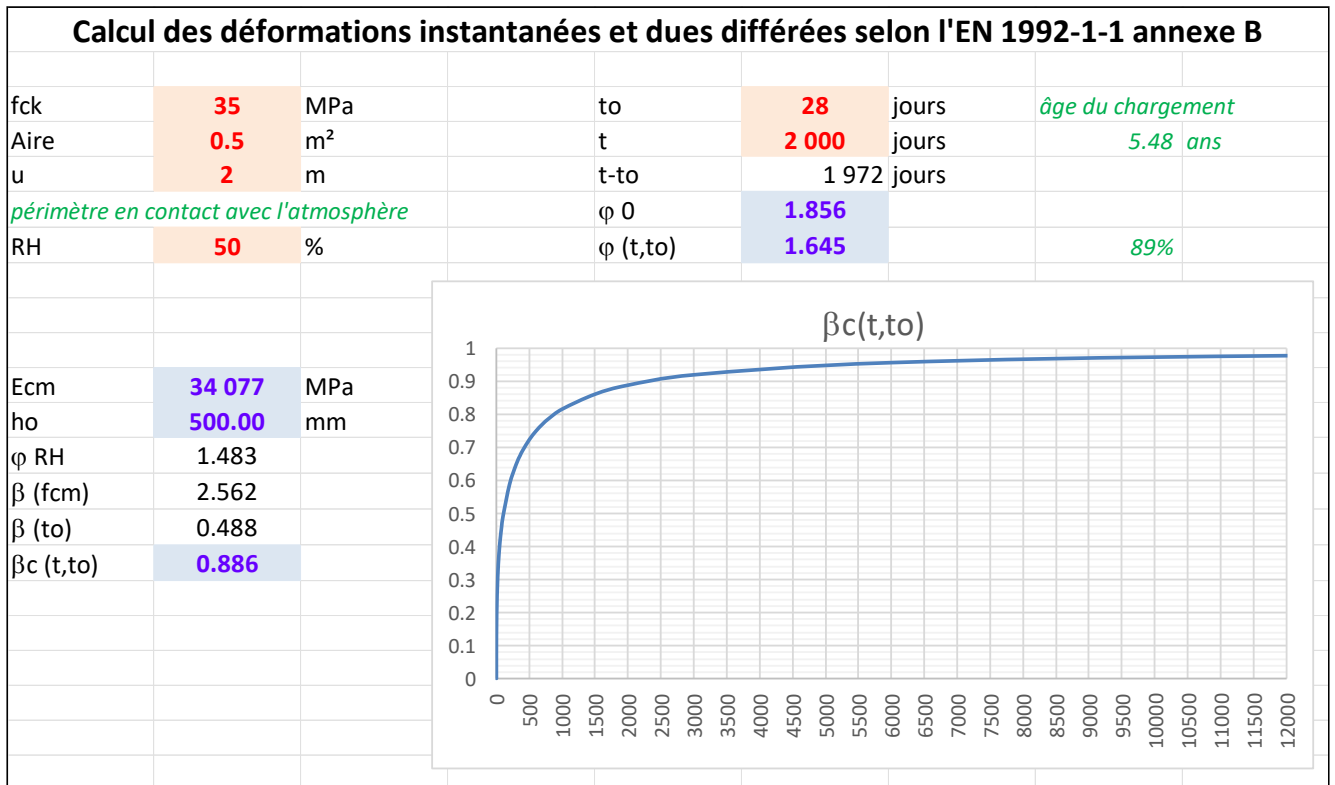


Figure 2 : calcul du coefficient de fluage

### 3.4 Effet de l'évolution dans le temps du chargement

Les structures peuvent être soumises à des chargements variables dans le temps, en particulier pendant les premiers mois ou années de sa construction. On peut citer en particulier :

- Les tours de grande hauteur, dont les porteurs (noyaux, poteaux), sont soumis à des chargements croissant au fur et à mesure de la construction. A la fin de la construction et à la mise en service, on peut par la suite que les chargements très peu variables.
- Les ponts construits par encorbellement : les piles des ponts supportent des chargements croissants liés à l'extension progressive des fléaux (tabliers). Par ailleurs, les voussoirs sur piles sont eux-mêmes soumis à des efforts axiaux qui augmentent lorsque les voussoirs en encorbellement sont réalisés progressivement.

De manière générale, la déformation du béton au temps t est donnée par la relation générale :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_0}{E_c(t_0)} + \varphi(t, t_0) \frac{\sigma_0}{E_c(28)} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{E_c(t_i)} + \frac{\varphi(t, t_i)}{E_c(28)} \right] \Delta\sigma(t_i) \quad (+\varepsilon_{cs}(t, t_s))$$

Le premier terme représente la déformation instantanée due au chargement initial appliqué à la date  $t_0$ . Le second terme représente la déformation de fluage dû à la contrainte initiale. Le troisième représente l'effet des variations de chargements au cours de l'histoire de l'ouvrage, comprenant la partie instantanée et la partie due au fluage. Enfin le dernier terme entre parenthèses représente la déformation liée au retrait (voir infra).

Cette loi est valable tant que l'on considère que le fluage est linéaire, c'est-à-dire que les contraintes cumulées dans les éléments sont modérées (inférieures à  $0.45f_{ck}$ ). Cette loi est reprise dans l'annexe KK de l'EN 1992-2 (ponts) [R2].

Il convient de souligner que cette loi sous-entend que la loi de variation du coefficient de fluage  $\varphi(t, t_i)$  s'applique de manière identique pour des accroissements de chargements que pour des déchargements. Cette hypothèse est reprise également pour dans le futur Eurocode 2 [R3] qui sera applicable à partir de 2027. Dans la réalité, lorsqu'on décharge une structure, la partie du fluage en décompression n'est pas tout à fait identique

à celle qui existerait en compression. La courbe en pointillé de la Figure 3d ci-dessous, montre que la déformation résiduelle après déchargement est plus importante que celle résultant du principe de superposition. Pour plus de détails, voir Ian Gilbert [R4].

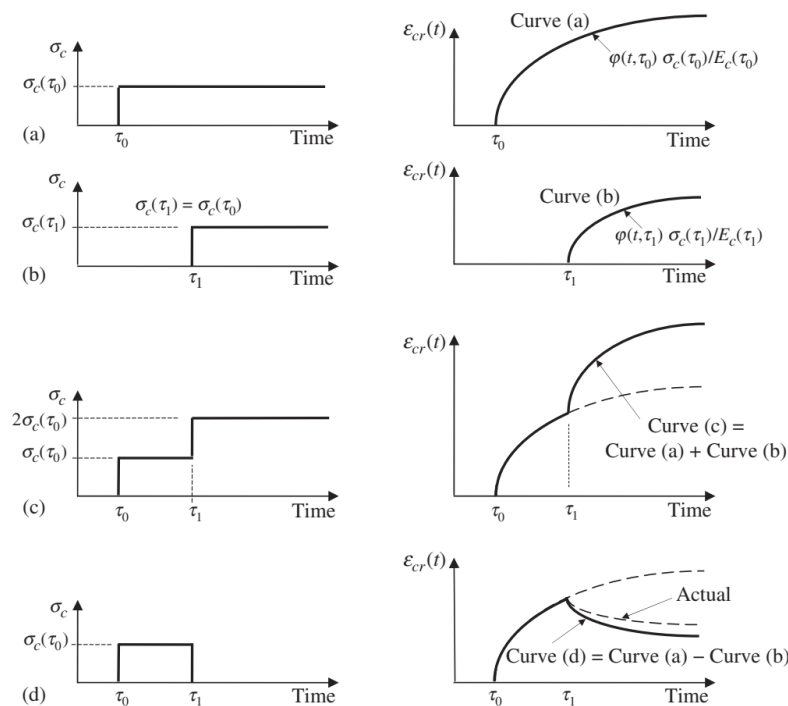


Figure 3 : principe de superposition – chargement et déchargement (tiré de [R4])

Des recherches sont encore en cours sur les phénomènes, mais les phénomènes de décharge des structures sont assez rares pour considérer que la loi de superposition ci-dessus peut s'appliquer.

### 3.5 Effets du fluage sur le comportement structurel

Les effets du fluage sont très variables selon :

- Les liaisons de la structure avec les appuis (structure isostatique ou structure hyperstatique),
- L'uniformité du fluage dans les différentes parties de l'ouvrage,
- L'état de fissuration des sections en béton armé,
- Le taux d'armatures dans les différentes sections de la structure,
- Etc

On peut néanmoins retirer les enseignements suivants :

- Pour les structures isostatiques, à fluage et taux d'armatures homogènes, les efforts dans la structure sont inchangés ; seuls les déplacements (flèches, rotations des sections) sont amplifiés.
- Pour les structures hyperstatiques en béton armé, à fluage et taux d'armatures homogènes, soumises uniquement à des chargements, les conclusions sont les mêmes : les efforts internes sont inchangés, mais les déformations augmentées. Ce principe contredit ce qui est trop souvent abusivement indiqué dans la littérature, les bureaux d'études, les donneurs d'ordre ou bien mêmes dans certains cours ou ouvrages de béton armé. En effet, il est commun de considérer que le fluage dans les structures hyperstatiques permet une redistribution des efforts (typiquement, réduction des moments sur appuis et augmentation des moments en travée). Dans la réalité, cette redistribution des efforts n'est pas due au fluage, mais à une inhomogénéité des inerties fissurées et des taux d'armatures dans les poutres. Le phasage de construction, qui se caractérise par des chargements s'appliquant à des éléments de structure qui ont un âge différent, des conditions aux limites variables, explique également la différence entre les efforts internes issus d'un calcul élastique non phasé et un calcul non linéaire (parce que tenant compte de la fissuration des sections) phasé.

- Dans les structures hyperstatiques en béton précontraint, le fluage se caractérise par une perte de la précontrainte, dans la mesure où la raideur apparente ( $E_{c,eff}$ ) diminue et se traduit par une diminution des réactions hyperstatiques de précontrainte et donc une redistribution des efforts.
- Le fluage modifie la répartition des contraintes dans une section en béton armé, entre le béton et les armatures : du fait de l'assouplissement du béton ( $E_{c,eff}$ ), l'effort de compression (dû à l'effort normal ou à la flexion) se redistribue au profit des armatures : l'effort de compression dans le béton diminue et l'effort dans les armatures augmente.
- Le fluage réduit les contraintes induites par les déformations imposées (ou gênées) par le retrait, la température, ou les tassements d'appuis par exemple.
- Le fluage ne réduit pas les résistances des sections, sauf lorsque la structure est sensible aux effets du second ordre (voir cours spécifique sur les effets de second ordre, où un coefficient de fluage effectif intervient dans la résistance des sections).

En conclusion, la capacité du béton à fluer s'apparente à une ductilité du matériau sous l'effet de chargements quasi-permanents ; cette ductilité (relative par rapport aux armatures) n'est pas sans lien avec le succès de son emploi très largement répandu.

Les paragraphes suivants illustrent sous forme d'exemples les principales caractéristiques induites par le fluage.

### 3.5.1 Cas d'un poteau en compression centrée

Les poteaux des bâtiments de grande hauteur sont soumis à leur base à des contraintes élevées pouvant atteindre environ 40% de la résistance à la compression. Le fluage aboutit à une redistribution importante des contraintes de compression entre le béton et les armatures, pouvant même aboutir à la plastification des armatures.

Soit :

$A_c, A_s$  les sections de béton et d'armatures,

$n = E_s/E_c$  le coefficient d'équivalence

$\varphi$  le coefficient de fluage du béton

L'équilibre de la section et la compatibilité des déformations permettent de déterminer les contraintes à court terme et à long terme dans les matériaux :

$$\sigma_c = \frac{N_{ed}}{A_c} \frac{1}{1 + n\rho}$$

$$\sigma_s = n \sigma_c$$

A court terme,  $n_0 = \frac{E_s}{E_{cm}}$ , à long terme :  $n_\infty = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = (1 + \varphi)n_0$

Ainsi, la contrainte dans les aciers à long terme voit sa valeur multipliée par un facteur égal à  $(1 + \varphi)$  :

$$\sigma_{s,\infty} = (1 + \varphi)\sigma_{s,0}$$

Pour illustrer le phénomène, considérons un poteau de  $1\text{m}^2$  en C40 dont le coefficient de fluage est de 2,5, soumis à un effort de 24 MN à court terme, armé avec  $50\text{cm}^2$  d'armatures : la contrainte à long terme dans les aciers atteint 433 MPa, ce qui est supérieur à la contrainte maximale admissible des armatures à l'ELS (400MPa). Les contraintes dans les aciers ont été multipliées ainsi par un facteur de 3,5.

| CHARGEMENT D'UN POTEAU           |       |                 |        |                   |            |
|----------------------------------|-------|-----------------|--------|-------------------|------------|
| <b>Dimensions du poteau</b>      |       |                 |        |                   |            |
| a                                | 1.00  | m               |        |                   |            |
| b                                | 1.00  | m               | n, to  |                   | 5.68       |
| Ac                               | 1.00  | m <sup>2</sup>  | n, inf |                   | 19.87      |
| <b>Caractéristiques du béton</b> |       |                 |        |                   |            |
|                                  |       |                 | r (%)  |                   | 0.50       |
| fck                              | 40    | MPa             |        |                   |            |
| Ecm                              | 35220 | MPa             |        |                   |            |
| φ 0                              | 2.5   |                 |        |                   |            |
| <b>Armatures</b>                 |       |                 |        |                   |            |
| A                                | 50    | cm <sup>2</sup> |        | contraintes (MPa) |            |
|                                  |       |                 |        | instant.          | long terme |
| Chargement                       |       |                 | Béton  | 23.34             | 21.83      |
| N                                | 24    | MN              | Acier  | 132.52            | 433.88     |

Tableau 1 : compression centrée d'un poteau

A ce niveau de contrainte de compression, les armatures risquent de flamber. Des dispositions sont prises pour éviter le flambement, en prévoyant des armatures transversales suffisamment resserrées : voir §9.5.3 de l'EN 1992-1-1[R1].

### 9.5.3 Armatures transversales

(1) Il convient que le diamètre des armatures transversales (cadres, boucles ou armature en hélice) ne soit pas inférieur à 6 mm ou au quart du diamètre maximal des barres longitudinales, si cette dernière valeur est supérieure. Il convient que le diamètre des fils du treillis soudé utilisé pour les armatures transversales ne soit pas inférieur à 5 mm.

(2) Il convient d'ancrer convenablement les armatures transversales.

(3) Il convient de limiter à  $s_{cl,tmax}$  l'espacement des armatures transversales le long du poteau.

NOTE La valeur de  $s_{cl,tmax}$  à utiliser dans un pays donné peut être fournie par son Annexe Nationale. La valeur recommandée est la plus petite des trois distances suivantes :

- 20 fois le diamètre minimal des barres longitudinales
- la plus petite dimension du poteau
- 400 mm.

(4) Il convient de réduire l'espacement maximal exigé en (3) par un facteur de 0,6 :

- dans toutes les sections situées à une distance au plus égale à la plus grande dimension de la section transversale du poteau au-dessus ou au-dessous d'une poutre ou d'une dalle ;
- dans les zones de recouvrement d'armatures, si le diamètre maximal des barres longitudinales est supérieur à 14 mm. Un minimum de 3 barres transversales régulièrement disposées dans la longueur de recouvrement, est nécessaire.

(5) Lorsque la direction des barres longitudinales change (aux changements de dimensions du poteau par exemple), il convient de calculer l'espacement des armatures transversales en tenant compte des efforts transversaux associés. Ces effets peuvent être ignorés si le changement de direction est inférieur ou égal à 1 pour 12.

(6) Il convient que chaque barre longitudinale ou paquet de barres longitudinales placé dans un angle soit maintenu par des armatures transversales. Il convient, dans une zone comprimée, de ne pas disposer de barre non tenue à plus de 150 mm d'une barre tenue.

Extrait 1 : Dispositions constructives pour les armatures transversales des poteaux

## 3.5.2 Poutres en flexion simple

On considère une section rectangulaire (b,h) comprenant une section d'armatures  $A_s$  dans la zone tendue et soumise à un moment de flexion  $M_{ed}$ , l'effort normal  $N_{ed}$  étant nul. On néglige la résistance du béton tendu et on suppose que le béton tendu ne flue pas.

L'égalité des efforts internes et extérieurs permet de déterminer le champ de contraintes à l'intérieur de la section :

$$N_{ed} = \int_0^x b E_c \varepsilon_c(\xi) d\xi + A_s E_s \varepsilon_s = 0$$

Où :

$x$  est la profondeur de l'axe neutre.

On suppose que la section reste plane après chargement et une adhérence entre les armatures et le béton :

$$\varepsilon_c(y) = Ky = \frac{\sigma_c y}{E_c x} = \varepsilon_s(y)$$

Où  $\sigma_c$  est la contrainte dans le béton en fibre extrême comprimée ( $y = x$  ;  $y = 0$  au niveau de l'AN).

$$N_{ed} = b \frac{\sigma_c}{x} \times \frac{x^2}{2} - A_s E_s \frac{\sigma_c}{E_c} \frac{d-x}{x} = 0$$

Soit :

$$N_{ed} = \frac{\sigma_c}{x} \left[ b \frac{x^2}{2} - n A_s (d-x) \right] = 0$$

$$N_{ed} = \frac{\sigma_c}{x} [m_c + m_s]$$

Où  $m_c, m_s$  sont les moments statiques homogénéisés du béton et des armatures par rapport à l'AN. Cette égalité permet de déterminer la hauteur de béton comprimé. La profondeur de l'AN est donnée par :

$$x = \alpha d \text{ où } \alpha = \rho n \left( \sqrt{1 + \frac{2}{\rho n}} - 1 \right)$$

Avec :  $n = E_s/E_c$  et  $\rho = A_s/bd$ .

En ce qui concerne le moment de flexion :

$$M_{ed} = \int_0^x b E_c \varepsilon_c(\xi) \xi d\xi + A_s E_s \varepsilon_s (x-d)$$

Soit :

$$M_{ed} = \frac{\sigma_c}{x} \left[ b \frac{x^3}{3} + n A_s (d-x)^2 \right] = \frac{\sigma_c}{x} [I_c + I_s] = \frac{\sigma_c}{x} I_{fis}$$

On en déduit :

$$\sigma_c = \frac{M_{ed}}{I_{fis}} x$$

$$\sigma_s = -n \frac{M_{ed}}{I_{fis}} (d-x)$$

La courbure de la section est donnée par :

$$K = \frac{M_{ed}}{E_c I_{fis}}$$

Le fluage a plusieurs conséquences :

- Une augmentation de la profondeur de l'axe neutre  $x$  liée à la réduction des contraintes dans le béton, comme vu précédemment avec le poteau. En effet, pour que le béton assure un effort  $F_c$  permettant d'équilibrer le moment  $M_{ed}$  alors que les contraintes dans le béton diminuent, il est nécessaire de mobiliser une hauteur de béton comprimé plus importante,
- Une augmentation des contraintes dans les armatures : du fait d'une hauteur de béton comprimé plus importante avec le fluage, le bras de levier entre l'effort  $F_c$  dans le béton et l'effort  $F_t$  dans les armatures diminue. Pour reprendre le même moment  $M_{ed}$ , il est alors nécessaire de solliciter de manière plus importante les armatures. Par équilibre de la section, cela signifie également que l'effort  $F_c$  augmente avec le temps.
- Du fait de l'augmentation de la hauteur de béton comprimée, l'inertie fissurée de la section augmente. La perte de rigidité à la flexion  $E_c I_{fis}$  liée à la réduction du module d'Young d'un facteur  $(1 + \varphi)$  est ainsi atténuée par l'augmentation de l'inertie de la section fissurée. Globalement, la perte de la rigidité est de l'ordre de 20 à 30%.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, la hauteur de béton comprimée passe de 25% à 40% de la hauteur de la section, l'inertie se trouve ainsi multipliée par plus de 3. La contrainte dans le béton diminue de 35%, la contrainte dans les armatures augmente de 6%. La rigidité à la flexion diminue de 30%. Cela signifie que la courbure, et donc les déformations, augmentent de 30%.

| Inertie fissurée d'une poutre    |       |                 |                         |           |            |
|----------------------------------|-------|-----------------|-------------------------|-----------|------------|
| <b>Dimensions</b>                |       |                 |                         |           |            |
| b                                | 0.60  | m               |                         |           |            |
| h                                | 1.00  | m               |                         | r (%)     | 0.93       |
| d                                | 0.90  | m               |                         |           |            |
| <b>Caractéristiques du béton</b> |       |                 |                         | Résultats |            |
| fck                              | 40    | MPa             |                         | instant.  | long terme |
| Ecm                              | 35220 | MPa             | n                       | 5.679     | 19.875     |
| $\varphi_0$                      | 2.5   |                 | x(m)                    | 0.248     | 0.405      |
| <b>Armatures</b>                 |       |                 | lfis (m4)               | 0.015     | 0.038      |
| A                                | 50    | cm <sup>2</sup> | $\sigma_c$ (MPa)        | 8.21      | 5.38       |
|                                  |       |                 | $\sigma_s$ (MPa)        | -122.4    | -130.7     |
| Chargement                       |       |                 | EI (MN.m <sup>2</sup> ) | 532.5     | 378.7      |
| Med                              | 0.5   | MN.m            | Rapport                 |           | 71%        |

Tableau 2 : évolution des contraintes et caractéristiques d'une section en flexion

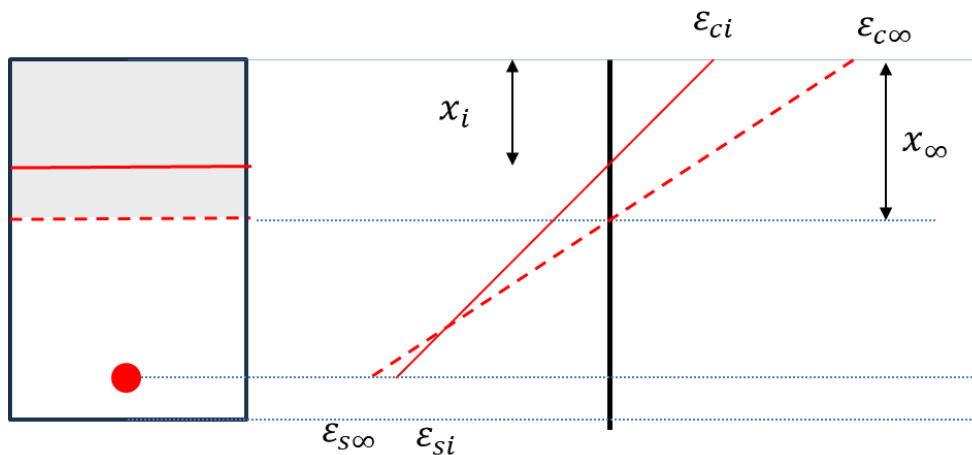


Figure 4 : allure des déformations à court terme et à long terme

## 4. LE RETRAIT

### 4.1 Mécanisme et paramètres influant sur le retrait

Le retrait est la perte de volume avec le temps du béton qui n'est pas soumis à un chargement et qui est libre dans ses déformations. Quatre types de retrait sont à distinguer :

#### 4.1.1 Le retrait plastique

Il se produit alors que le béton n'a pas encore fait intégralement prise (on dit que le béton est dans un état plastique) et que l'adhérence entre le béton et l'armature ne s'est pas encore totalement développée. Ce phénomène se caractérise par une migration trop rapide et une évaporation prématurée de l'eau au niveau de la surface.

Les causes de cette évaporation précoce sont principalement de nature climatique : vent qui sèche la surface, une température élevée, un rayonnement solaire direct, une faible humidité relative, etc. Des facteurs liés à la composition du béton peuvent également favoriser cette évaporation : un rapport E/C faible, un taux de fines important, un faible ressuage (migration de l'eau vers la surface à la fin du bétonnage).

Outre une réduction du volume, ce dessèchement en surface entraîne une dépression capillaire dans les pores, provoquant des tensions superficielles dans le béton. Du fait de son jeune âge, le béton a une résistance à la traction insuffisante pour résister directement ou par adhérence avec les aciers aux tensions ; aussi des fissures se forment, généralement en surface.

Afin de de prévenir ou limiter le retrait plastique, des dispositions constructives doivent être prises : des coffrages non absorbants sont à préférer (peau métallique plutôt que peau en bois) et un arrosage des surfaces en contact avec l'air est à prévoir : on parle de cure du béton, cet arrosage peut s'accompagner de la pose de bâches dans la foulée.

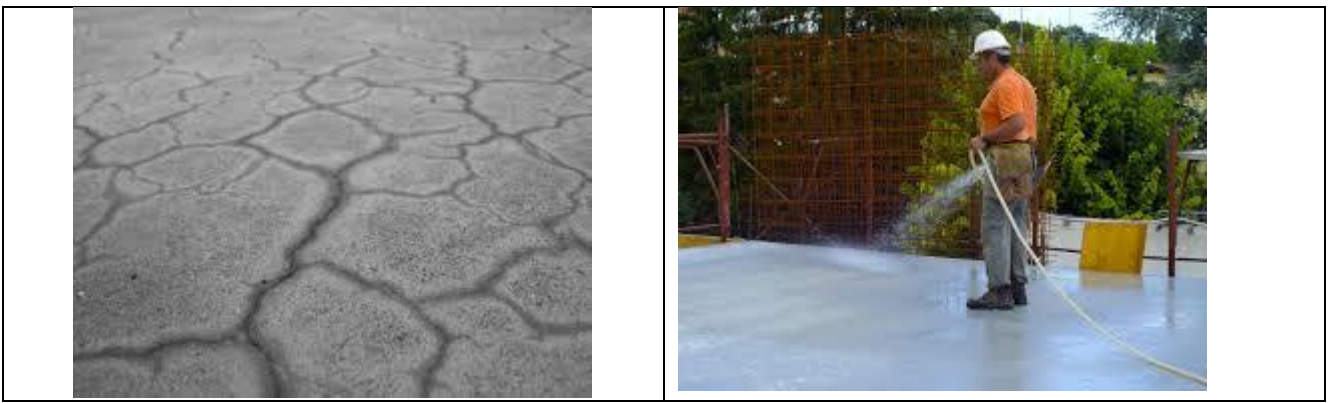


Figure 5 : Faïençage et cure du béton

#### 4.1.2 Le retrait endogène

Le retrait endogène comprend deux termes liés à la réaction chimique que constitue la prise du béton :

- Le retrait chimique correspond à la réduction du volume du béton entraîné par les réactions chimiques nombreuses et complexes qui caractérisent la prise du béton, c'est-à-dire son durcissement. Cette réaction se fait principalement sentir dans les premières semaines après la prise du ciment.
- Par ailleurs, la réaction chimique est exothermique : un béton jeune qui a fait sa prise met plusieurs jours voire plusieurs semaines selon l'épaisseur à retrouver une température proche de celle de la température ambiante. La température du béton peut facilement monter à 50°C voire 60°C au bout de quelques heures à quelques jours. La descente en température se traduit donc par un rétrécissement thermique du béton.

Le retrait endogène est globalement une fonction linéaire de la résistance du béton, son évolution dans le temps est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t)\varepsilon_{ca}(\infty) \quad (1)$$

Où :

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) \times 10^{-6} \quad (2)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - e^{-0.2\sqrt{t}} \quad (3)$$

$t$  étant exprimé en jours.

La figure ci-dessous montre que 90% du retrait endogène s'effectue dans les 4 premiers mois de la vie du béton.

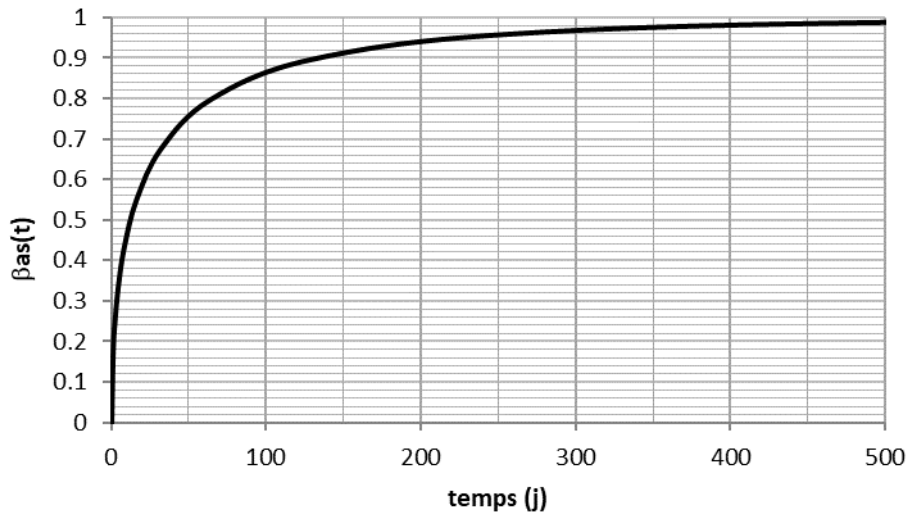


Figure 6: facteur d'évolution du retrait endogène

Le tableau suivant donne l'évolution du retrait endogène en fonction de la classe de résistance. Pour des bétons courants, le retrait endogène est inférieur à  $10^{-4}$ :

| fck (MPa)                                     | 20 | 25   | 30 | 35   | 40 | 50  | 60  | 70  | 80  | 90  |
|---|----|------|----|------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\varepsilon_{ca}$ ( $\mu\text{m}/\text{m}$ ) | 25 | 37.5 | 50 | 62.5 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |

Tableau 3 : retrait endogène en fonction de la classe de résistance

#### 4.1.3 Le retrait de dessiccation

Le retrait de dessiccation a lieu après le durcissement du béton ; il se traduit par la perte d'eau non liée au ciment et qui est en excès par rapport au rapport E/C=0.25 théorique nécessaire pour assurer l'hydratation du ciment. Cette perte de volume commence à la fin de la cure du béton, c'est-à-dire dans les premiers jours après la prise en général.

Dans la mesure où le retrait de dessiccation est le résultat de la mission de l'eau non liée, il est sensible aux mêmes paramètres que le fluage :

- Plus le RH est faible, plus le retrait de dessiccation est important,
- Plus la pièce est épaisse, plus le retrait de dessiccation est lent,

L'évolution du retrait de dessiccation a pour expression :

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0}$$

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{t - t_s + 0.04 \sqrt{h_0^3}} \quad (4)$$

Le coefficient  $k_h$  a pour expression :

|            |     |      |      |            |
|------------|-----|------|------|------------|
| $h_0$ (mm) | 100 | 200  | 300  | $\geq 500$ |
| $k_h$      | 1.0 | 0.85 | 0.75 | 0.70       |

$h_0 = \frac{2A_c}{u}$  est le rayon moyen en mm de la section transversale où  $A_c$  est l'aire de la section transversale et  $u$  le périmètre de la section exposée à la dessiccation ;

$t_s$  est l'âge du béton (en jours) au début du retrait de dessiccation (date de la fin de la cure).

Le retrait de dessiccation de référence  $\varepsilon_{cd,0}$  a pour expression :

$$\varepsilon_{cd,0} = 0.85 \left[ (220 + 110\alpha_{ds1}) e^{-\left(\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)} \right] \beta_{RH} \cdot 10^{-6} \quad (5)$$

$$\beta_{RH} = 1.55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right]$$

Où :

$RH$  est l'humidité relative de l'environnement ambiant en %

$f_{cm0} = 10 \text{ MPa}$

$\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$  sont des coefficients dépendant du type de ciment

|                | Classe S | Classe N | Classe R |
|----------------|----------|----------|----------|
| $\alpha_{ds1}$ | 3        | 4        | 6        |
| $\alpha_{ds2}$ | 0.13     | 0.12     | 0.11     |

Pour des pièces courantes, d'épaisseur moyenne, le retrait est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4}$  à  $4 \cdot 10^{-4}$ .

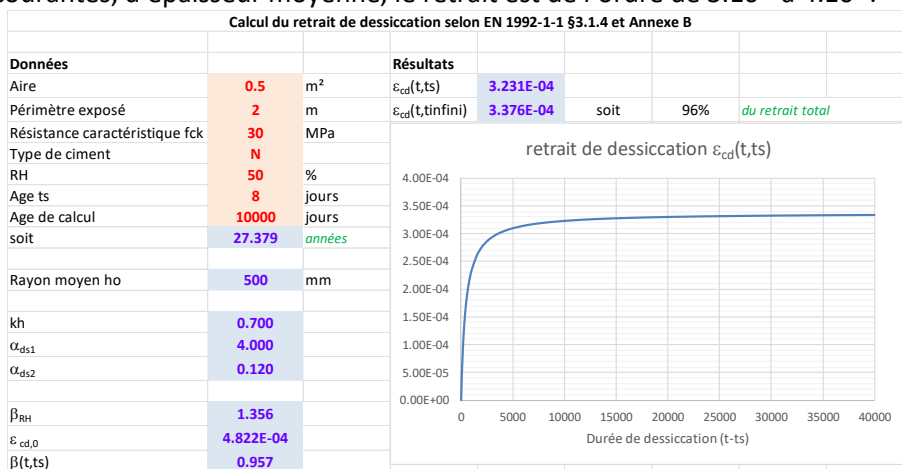


Tableau 4: Retrait de dessiccation selon l'EN 1992-1-1

#### 4.1.4 Retrait total

La figure ci-dessous illustre le retrait total pendant les 3 premiers mois, puis pendant les 30 premières années environ, d'une pièce de béton en C30, d'épaisseur 80cm, avec RH=50% dont la cure dure 8 jours. On y constat bien le fait que le retrait endogène se fait à 90% pendant les trois premiers mois environ.

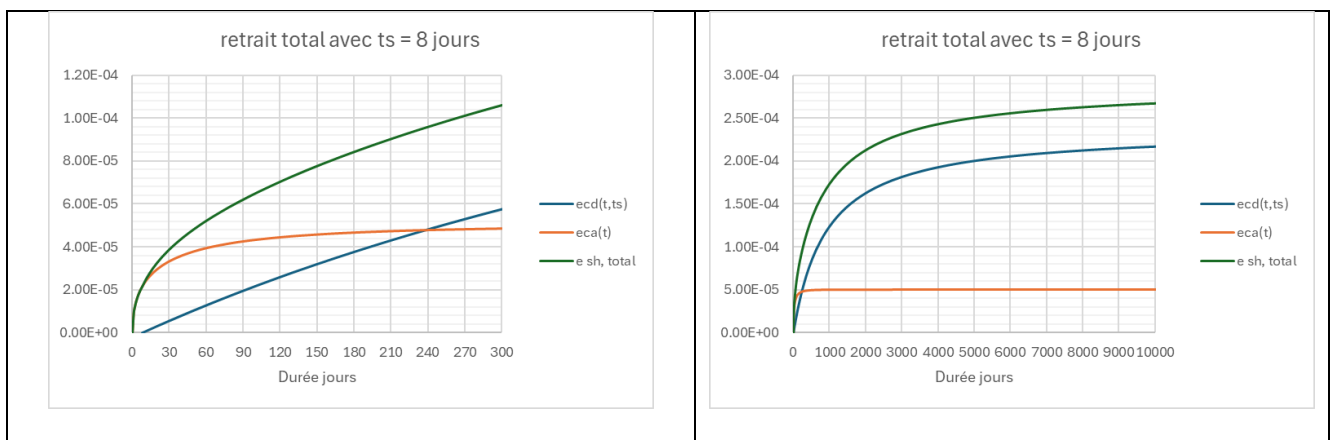


Tableau 5 : composantes de retrait

## 4.2 Effets du retrait sur le comportement structurel

### 4.2.1 Développement de contraintes autoéquilibrées

Les fibres d'une section situées à proximité des parements subissent un retrait de dessiccation plus important que la zone centrale. Leur raccourcissement est donc empêché par le cœur de la section : de ce fait, les fibres extrêmes sont soumises à de la traction. Inversement, la zone centrale est comprimée par les fibres extrêmes. Les contraintes qui se développent dans la section dues au bridage du retrait forment donc un système autoéquilibré :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{sh}(y) + \varepsilon_e(y) = \varepsilon_{sh,moy} \Rightarrow \varepsilon_e(y) = \varepsilon_{sh,moy} - \varepsilon_{sh}(y) = -\Delta\varepsilon_{sh}(y)$$

$$\int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_c dS = E_c \int_{-0,5h}^{0,5h} \varepsilon_e(y) dS = -E_c \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta\varepsilon_{sh}(y) dS = 0$$

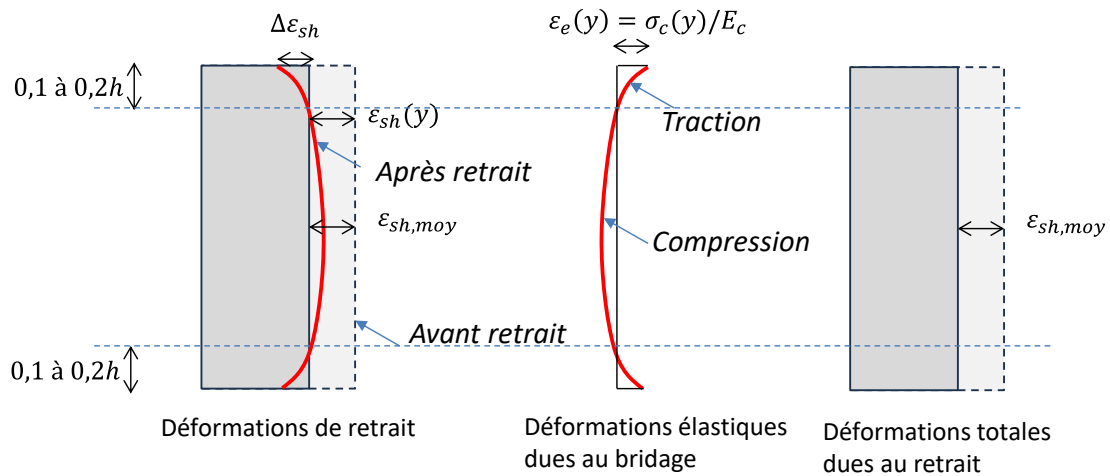


Figure 7 : contraintes dues au retrait gêné

La hauteur de la zone tendue représente 20 à 40% de la hauteur totale de la section. L'EN 1992-1-1 estime cette zone tendue à 35% de la hauteur de la section (§7.3.2(2)), pour une hauteur de poutre supérieures à 800mm.

### 4.2.2 Bridage du retrait par les armatures

Considérons une pièce de béton de section  $A_c$  symétrique, libre de se déformer à ses extrémités et symétriquement armée par des armatures de section  $A_s$ . Le béton subit un retrait  $\varepsilon_{sh}$  tandis que les armatures n'en subissent pas. Les armatures brident donc le retrait du béton : celui-ci entre donc en traction et les armatures en compression. On suppose également une adhérence parfaite entre le béton et les armatures :  $\varepsilon_c = \varepsilon_s$  et que la section n'est pas fissurée.

La déformation du béton est la somme du retrait et de la déformation élastique due à la contrainte de traction :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_e(t) = \varepsilon_s(t)$$

Les efforts de compression dans les armatures et le béton forment un système autoéquilibré :

$$N_c + N_s = 0$$

Où :  $N_c = A_c E_c \varepsilon_e$  et  $N_s = A_s E_s \varepsilon_s$

On en déduit :

$$\varepsilon_s(t) = -\frac{A_c E_c(t)}{A_s E_s} \varepsilon_e(t) = -\frac{1}{\rho n} \varepsilon_e(t)$$

La relation de compatibilité des déformations amène :

$$\varepsilon_{sh}(t) = \varepsilon_s(t) - \varepsilon_e(t) = -\varepsilon_e(t) \left(1 + \frac{1}{\rho n}\right) = -\frac{1 + \rho n}{\rho n} \varepsilon_e(t)$$

Soit :

$$\varepsilon_e = -\frac{\rho n}{1 + \rho n} \varepsilon_{sh} \Rightarrow \sigma_c(t) = -\frac{\rho n}{1 + \rho n} E_c(t) \varepsilon_{sh}(t)$$

$$\varepsilon_s = -\frac{1}{\rho n} \varepsilon_e = \frac{1}{1 + \rho n} \varepsilon_{sh} \Rightarrow \sigma_s(t) = \frac{1}{1 + \rho n} E_s \varepsilon_{sh}(t)$$

Le raccourcissement final du tirant vaut :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_e(t) = \varepsilon_s(t) = \frac{1}{1 + \rho n} \varepsilon_{sh}(t)$$

Les contraintes dans le béton et les armatures se développent au fur et à mesure que le retrait du béton augmente. Elles dépendent également du module du béton qui augmente progressivement jusqu'à  $E_{cm}$  dans les 28 premiers jours. Le phénomène du fluage (ou plus exactement de la relaxation) du béton n'est pas intégré ici, il le sera plus tard (voir infra). Il se caractérise par une réduction des contraintes dans le béton et les armatures. A ce stade, un calcul avec des modules de béton  $E_{cm}$  d'une part et  $E_{c,ef} = E_{cm}/1 + \varphi$  d'autre part est effectué. L'état réel des contraintes sera encadré par les deux valeurs.

Dans l'exemple traité ci-dessous, les contraintes dans les aciers et le béton diffèrent de 10% selon le module considéré, ce qui reste relativement faible compte tenu de incertitudes sur la valeur réelle du retrait du béton.

| Effet du bridage du retrait par les armatures |           |                 |                      |               |                  |
|---|-----------|-----------------|----------------------|---------------|------------------|
| Données                                       |           |                 | Résultats            |               |                  |
| Béton   |           |                 | $E_{cm} =$           | 32837         | MPa              |
| fck   | 30        | MPa             | $r =$                | 0.010         |                  |
| $A_c =$                                       | 1.00      | m <sup>2</sup>  |                      |               |                  |
| $u =$ (périm.)                                | 4.00      | m               |                      | avec $E_{cm}$ | avec $E_{c,eff}$ |
| $\varepsilon_{sh}$                            | -5.00E-04 |                 | $n$                  | 6.09          | 18.27            |
| $\varphi$ (fluage)                            | 2.00      |                 | $E_c$ (MPa)          | 32837         | 10946            |
|   |           |                 | $\sigma_c$ (MPa)     | 0.94          | 0.85             |
| <b>Section acier</b>                          |           |                 | $\sigma_s$ (MPa)     | -94.26        | -84.55           |
| As  | 100       | cm <sup>2</sup> | $\varepsilon_{c,ef}$ | -4.71E-04     | -4.23E-04        |

La figure ci-dessous illustre l'évolution des contraintes dans le béton et les armatures en fonction du temps.

Figure 8 : évolution des contraintes dans le béton et les armatures dues au bridage du retrait par les armatures

Il apparaît ainsi que même un élément de béton armé libre d'effectuer son retrait est soumis à de la traction du fait de la présence d'armatures. Ces contraintes de traction sont de l'ordre du MPa pour un ratio de 1% et un retrait de  $5 \times 10^{-4}$ . Enfin, le raccourcissement final de l'élément est réduit de l'ordre de 10% pour un ratio de 1%.

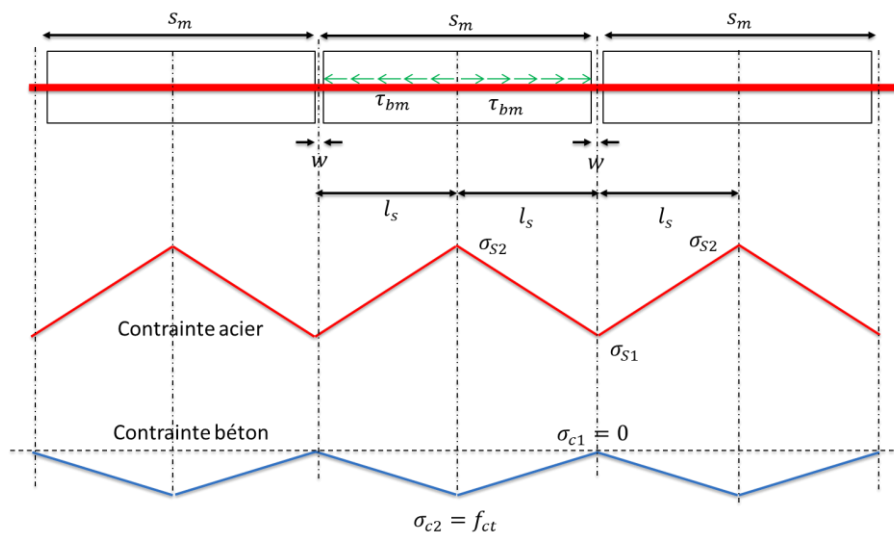
Dans un élément qui n'est pas symétriquement armé, comme une poutre ferrillée uniquement en face inférieure par exemple, le bridage du retrait n'est pas uniforme : cela se traduit par une courbure de la poutre provoquée à la traction excentrée que subit la section de béton.

#### 4.2.3 Effet du retrait sur la fissuration – cas d'une poutre en flexion

Le calcul des ouvertures de fissures a été abordé dans le cadre du cours BAP1. Il est repris ici et complété pour analyser l'effet du retrait sur la fissuration du béton armé et comprendre l'esprit de l'EN 1992-1-1 :2023 [R4] qui sera applicable en 2027.

Dans une poutre fléchie, le moment de flexion  $M_{ed}$  est équilibré par un bloc de béton comprimé et un effort de traction dans les armatures. Dans les zones où le moment est supérieur au moment de fissuration  $M_{fis}$ , un réseau de fissures apparaît, appelées fissures primaires. Dans cette zone, la fissuration est dite stabilisée dans la mesure où toute augmentation du moment se traduit par une augmentation des ouvertures de fissures. À l'inverse, dans la zone où  $M_{ed} < M_{fis}$ , une augmentation du moment se traduira par l'apparition de nouvelles fissures si on augmente le moment.

On se place dans une zone de fissuration stabilisée et l'on examine l'effet du retrait sur la fissuration. D'après le modèle utilisé par l'Eurocode, une section  $A_{ct}$  de béton tendu est associée à la section d'armature tendue  $A_s$ , l'ensemble pouvant être vu comme un tirant. L'armature tendue transmet une partie de l'effort de traction à la zone de béton par phénomène d'adhérence. On note  $\tau_{bm}$  la contrainte d'adhérence moyenne qui se développe le long de l'interface entre l'armature et le béton.



L'effort de traction dans l'armature, au niveau de la fissure vaut :

$$T_1 = A_s \sigma_{s1}$$

Où  $\sigma_{s1}$  est la contrainte dans l'acier calculée à l'ELS en négligeant la résistance du béton tendue. A une distance  $z$  de la fissure, l'effort de traction dans l'armature vaut :

$$T(z) = T_1 - \pi \phi \tau_{bm} z$$

Où  $\phi$  est le diamètre de l'armature.

La contrainte dans l'armature vaut donc :

$$\sigma_s(z) = \frac{T(z)}{A_s} = \sigma_{s1} - \frac{4\tau_{bm}}{\phi} z$$

L'effort de traction transmis au béton vaut :

$$\Delta T(z) = T_1 - T(z) = \pi \phi \tau_{bm} z$$

La contrainte dans le béton vaut alors :

$$\sigma_c(z) = \frac{\Delta T(z)}{A_c} = \frac{\pi \phi \tau_{bm}}{A_c} z$$

Si l'on note  $\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{\pi \phi^2}{4A_c}$ , la contrainte dans le béton peut s'exprimer sous la forme :

$$\sigma_c(z) = \frac{\Delta T(z)}{A_c} = \frac{4\rho \tau_{bm}}{\phi} z$$

L'élongation de l'armature entre deux fissures espacées de  $s_m$  a pour expression :

$$\Delta l_s = 2 \int_0^{s_m/2} \varepsilon_s dz = 2 \frac{\sigma_{s1}}{E_s} \left( \frac{s_m}{2} \right) - \frac{4\tau_{bm}}{E_s \phi} \left( \frac{s_m}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_{s1}}{E_s} s_m - \frac{\tau_{bm}}{E_s \phi} s_m^2 = \frac{1}{E_s} \left( \sigma_{s1} - \frac{\tau_{bm}}{E_s \phi} s_m \right) s_m$$

L'élongation du tirant béton entre deux fissures a pour expression :

$$\Delta l_c = 2 \int_0^{s_m/2} \varepsilon_c dz = \frac{\rho \tau_{bm}}{E_c \phi} s_m^2$$

L'ouverture de fissure vaut donc :

$$w = \Delta l_s - \Delta l_c = s_m \left( \frac{\sigma_{s1}}{E_s} - \frac{\tau_{bm}}{E_s \phi} s_m - \frac{\rho \tau_{bm}}{E_c \phi} s_m \right) = \frac{s_m}{E_s} \left( \sigma_{s1} - \tau_{bm} \frac{s_m}{\phi} (1 + \rho n) \right)$$

On peut être l'ouverture de fissure sous la forme :

$$w = s_m (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

Où

$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{s1}}{E_s} - \frac{\tau_{bm}}{E_s \phi} s_m$  est l'allongement moyen de l'armature et

$\varepsilon_{cm} = \frac{\rho \tau_{bm}}{E_c \phi} s_m$  est l'allongement moyen du tirant en béton.

La distance maximale entre deux fissures consécutives est telle qu'à la distance  $l_s$  de la fissure, notée distance de diffusion, la contrainte dans le béton vaut  $f_{ct}$  :

$$f_{ct} = \frac{4 \rho \tau_{bm}}{\phi} l_s$$

Si à la distance  $l_s$  de la fissure, la contrainte dans le béton dépasse  $f_{ct}$ , alors une nouvelle fissure apparaît. Dans la réalité, la distance moyenne entre deux fissures est comprise entre  $l_s$  et  $2l_s$ .

Si on introduit cette notation, la quantité  $\frac{\tau_{bm}}{\phi} s_m$  peut être remplacée par  $\frac{1}{2} \frac{f_{ct}}{\rho}$  dans l'expression de l'ouverture de fissure et il vient alors :

$$w = \frac{s_m}{E_s} \left( \sigma_{s1} - \frac{1}{2} \frac{f_{ct}}{\rho} (1 + \rho n) \right)$$

On retrouve ainsi l'esprit de la notation de l'EN 1992-1-1 où le coefficient 0.5 est remplacé par un facteur  $k_t$  qui varie entre 0,4 et 0,6 selon la durée du chargement et le caractère stabilisé ou non de la fissuration.

#### Etudions maintenant l'effet du retrait.

Considérons un élément du tirant de béton compris entre deux fissures, de longueur  $s_{m1}$ .

L'ouverture de fissure due aux actions mécaniques vaut :

$$w_1 = \Delta l_s - \Delta l_c = \frac{s_{m1}}{E_s} \left( \sigma_{s1} - \tau_{bm} \frac{s_m}{\phi} (1 + \rho n) \right)$$

Le tirant est de plus soumis à un retrait gêné qui le mettra automatiquement en traction (voir § précédent). Si l'on fait l'hypothèse qu'à une distance  $l_s$  d'une fissure la contrainte dans le béton vaut  $f_{ct}$ , une nouvelle fissure se produira inmanquablement dans cette zone centrale. La distance entre fissure est alors diminuée d'un facteur 2, ce qui réduit l'ouverture de fissure initiale  $w_1$ .

L'ouverture de fissure tenant compte du retrait vaut alors :

$$w_2 = s_{m2} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{sh})$$

Où  $\varepsilon_{sh}$  est le retrait du béton (en valeur algébrique, donc négative), en tenant compte du bridage par l'armature, il vaut (cf § précédent) :

$$\varepsilon_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh,free}}{1 + \rho n}$$

Il vient alors :

$$w_2 = \frac{s_{m2}}{E_s} \left( \sigma_{s1} - \tau_{bm} \frac{s_{m2}}{\phi} (1 + \rho n) - \frac{\varepsilon_{sh,free}}{1 + \rho n} \right)$$

Plaçons dans le cas où l'ouverture de fissure, pour une même contrainte mécanique, est maximale. Cela se produit lorsque la distance entre fissure est maximale soit pour  $s_{m1} = 2l_s$ . Dans ce cas, à une distance  $l_s$  de la

fissure, la contrainte dans le béton vaut  $f_{ct}$ . Le retrait fait apparaître une fissure dans cette zone ; il en résulte une nouvelle distance entre fissure  $s_{m2} = l_s$ .

Comparons  $w_2$  à  $w_1$  :

$$w_1 - w_2 = l_s(\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sh})$$

En général, l'ordre de grandeur de l'allongement de l'acier vaut  $10^{-3}$  (contrainte de 200 MPa à l'ELS), l'allongement moyen du tirant est négligeable (de l'ordre de  $0,5 \times 10^{-4}$ ). Le retrait peut varier de 2 à  $6 \times 10^{-4}$ . Cette quantité est donc globalement positive et le retrait, qui entraîne l'apparition de nouvelles fissures (ouvertures secondaires, non déclenchées par des actions mécaniques), n'a pas d'effet défavorable dans les zones où la fissuration est stabilisée.

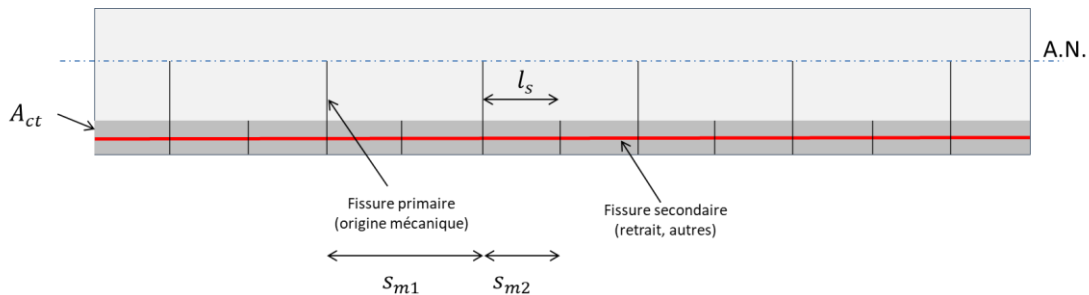


Figure 9 : réseau de fissures primaires et secondaire

Cela explique pourquoi, lorsqu'on se situe dans des zones de fissuration stabilisée, il n'est pas nécessaire de prendre en compte explicitement l'effet du retrait. Cependant, comme on pourrait se retrouver dans des situations où la contrainte de l'acier est relativement faible (cas d'un moment à peine supérieur au moment de fissuration) et que l'on peut avoir des retraits importants, une sorte de garde-fou est prévu dans l'EN 1992-1-1 par l'imposition d'une valeur minimale du terme  $\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{cm} > 0.6\varepsilon_{s1}$  dans le calcul de  $w_1$ . La version 2023 de l'EN 1992-1-1 explicite ce point en distinguant bien les éléments pour lesquels il est possible de négliger les effets du retrait de ceux pour lesquels la prise en compte s'avère nécessaire (cf § suivant).

#### 4.2.4 Effet d'un bridage mécanique sur le retrait

Considérons un élément de béton armé de section  $A_c$  et de longueur  $L$ . L'élément effectue son retrait, de valeur  $\varepsilon_{sh}$ . On suppose ici que l'élément ne fissure pas. Son retrait est bridé à son extrémité par un ressort de raideur  $K$ .

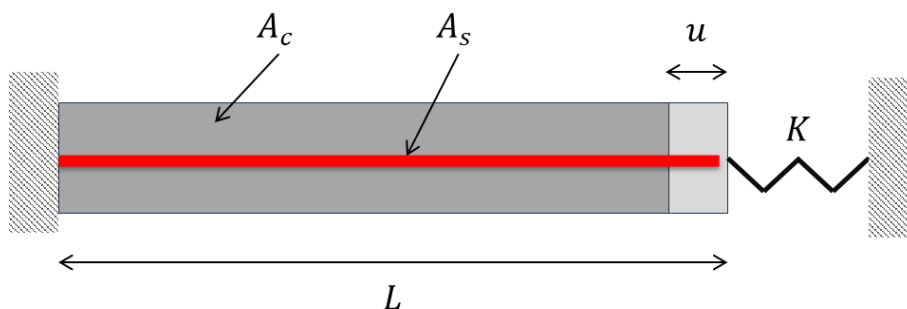


Figure 10 : élément de béton bridé aux extrémités

Dans un premier temps, on ne tient pas compte de l'armature. La déformation du béton est donnée par :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \varepsilon_{sh} + \frac{\sigma_c}{E_c}$$

Le raccourcissement de l'élément vaut :

$$\int_0^L \varepsilon_c dx = -u = -\frac{T}{K}$$

Où  $T$  est la tension du ressort. L'équilibre de l'élément impose que :

$$T = A_c \sigma_c$$

Il vient alors :

$$\varepsilon_{sh} + \frac{\sigma_c}{E_c} = -\frac{A_c \sigma_c}{KL} \Rightarrow \sigma_c = -\frac{E_c \varepsilon_{sh}}{1 + \frac{A_c E_c}{KL}}$$

La déformation du tirant vaut alors :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \varepsilon_{sh} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{A_c E_c}{KL}} \right) = (1 - K_a) \varepsilon_{sh} = R_{ax} \varepsilon_{sh}$$

Que l'on peut écrire également :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \varepsilon_{sh} \left( \frac{1}{1 + \frac{A_c E_c}{KL}} \right) = R_{ax} \varepsilon_{sh}$$

Le coefficient  $K_a$  est appelé coefficient de bridage et  $R_{ax}$  est appelé facteur de bridage selon l'EN 192-1-1 :2023 [R3]. Naturellement,  $R_{ax} = 1 - K_a$ .

Si la section de béton est armée par une section  $A_s$ , l'équilibre s'écrit alors :

$$T = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s$$

Compte tenu de la compatibilité des déformations :

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \Rightarrow T = A_c \sigma_c (1 + \rho n)$$

Dans le calcul final de la déformation du béton, il suffit de remplacer la section brute de béton  $A_c$  par la section homogénéisée  $A_c(1 + \rho n)$  et :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{A_c(1 + \rho n)E_c}{KL}} \right) \varepsilon_{sh} = \left( \frac{1}{1 + \frac{A_c(1 + \rho n)E_c}{KL}} \right) \varepsilon_{sh} = \varepsilon_s$$

Pour estimer l'effet du bridage d'extrémité sur les déformations d'une dalle reposant sur deux voiles, considérons une dalle de longueur  $L$ , deux voiles de hauteur  $h=0,5L$ , de même module et de même épaisseur  $e$ .

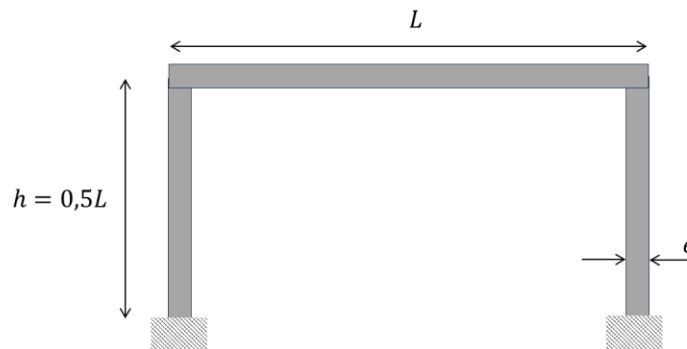


Figure 11 : dalle bridée aux extrémités par des voiles

La raideur des voiles vaut :

$$K_w = 2 \times \frac{3E_c I}{h^3} = 6EI/h^3$$

La raideur linéique de la dalle vaut :

$$K_{sl} = \frac{A_c E_c (1 + \rho n)}{L} \approx \frac{A_c E_c}{L}$$

La déformation de la dalle et des armatures vaut :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \left( \frac{1}{1 + \frac{K_w}{K_{sl}}} \right) \varepsilon_{sh} = \frac{K_{sl}}{K_{sl} + K_w} \varepsilon_{sh}$$

Or

$$\frac{K_w}{K_{sl}} = \frac{1 \cdot e^3 / 2h^3}{1 \cdot e / L} = \left( \frac{2e}{L} \right)^2$$

En général, les dalles sont minces par rapport à leur portée, de sorte de  $\frac{K_w}{K_{sl}} \ll 1$ . Ainsi,

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \left( \frac{1}{1 + \frac{K_w}{K_{sl}}} \right) \varepsilon_{sh} \approx \varepsilon_{sh}$$

On en déduit que le raccourcissement mécanique  $\varepsilon_e$  et donc la contrainte mécanique dans le béton  $\sigma_c$  sont faibles, de sorte que l'effet du bridage des voiles aux extrémités des voiles peut être négligé. Cela explique pourquoi l'EN 1992-1-1 :2023 considère que les pour les éléments bridés à leurs extrémités, les effets du retrait ne sont pas pris en compte.

#### 4.2.5 Effet du retrait sur la fissuration- cas des éléments bridés à leur base

Considérons maintenant un voile en béton armé, coulé sur un radier coulé dans un premier temps. La raideur linéique du radier est notée  $K_r$  et la raideur linéique du voile  $K_w$ . En reprenant le même raisonnement que dans le § précédent, le raccourcissement du voile, bridé par le radier, vaut alors :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon_{sh} + \varepsilon_e = \left( \frac{1}{1 + \frac{K_r}{K_w}} \right) \varepsilon_{sh}$$

Avec :

$$K_w = E_c A_w \text{ et } K_r = E_c A_r$$

Cette fois-ci, les raideurs en jeu peuvent être du même ordre de grandeur si les aires des éléments sont proches. A défaut de calcul précis par les élément finis qui permettent d'évaluer finement le bridage, l'EN 1992-1-1 :2023

considère que  $R_{ax} = \frac{1}{1 + \frac{K_r}{K_w}} \approx 0,5$ .

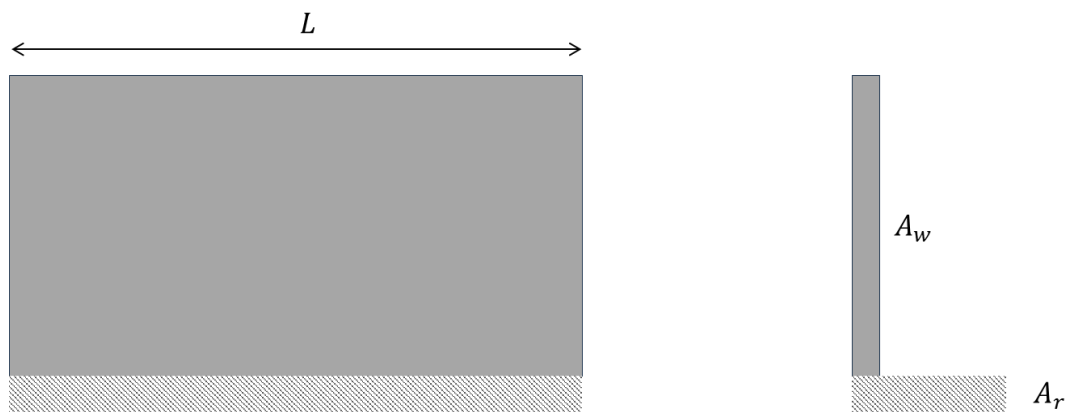


Figure 12 : voile bridé à sa base – béton non fissuré

Estimons maintenant l'effet du retrait sur la fissuration du béton. Jusqu'ici, nous avons considéré que le béton n'était pas fissuré.

Le raccourcissement moyen de l'armature reste inchangé et vaut le raccourcissement moyen du voile :

$$\varepsilon_{sm} = R_{ax} \varepsilon_{sh}$$

Si la contrainte dans l'acier au droit d'une fissure vaut  $\sigma_{s1}$  (non déterminable directement ici dans le cadre d'une analyse élastique), elle suit les mêmes évolutions qu'exprimées au §4.2.3. Il en est de même pour la contrainte

dans le béton : au droit d'une fissure, elle est nulle, tandis qu'à une distance  $l_s$  de la fissure, elle vaut  $f_{ct}$ . Aussi, le raccourcissement moyen du béton vaut :

$$\varepsilon_{cm} = 0.5 \frac{f_{ct}}{E_c}$$

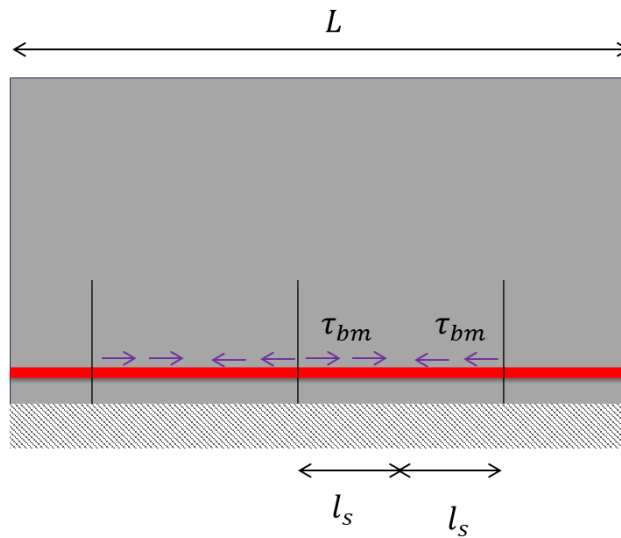


Figure 13 : voile bridé à la base – béton fissuré

Comme vu plus haut, l'EN 1992-1-1 :2023 précise la valeur du raccourcissement moyen avec le facteur  $k_t$  qui prend en compte le type de durée de chargement et le caractère ou non stabilisé de la fissuration :

$$\varepsilon_{cm} = k_t \frac{f_{ct}}{E_c}$$

Finalement :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = R_{ax} \varepsilon_{sh,free} - k_t \frac{f_{ct}}{E_c}$$

L'ouverture de fissure vaut alors :

$$w = 2l_s(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

## 5. ANALYSE DES SECTIONS – SECTIONS NON FISSUREES

Les paragraphes précédents nous ont permis de comprendre les effets du retrait et du fluage sur le comportement des structures. Dans les deux paragraphes qui suivent, il est proposé une analyse globalement permettant de prendre en compte ensemble l'effet du retrait, du fluage et du chargement variable dans le temps. Nous étudierons d'abord le cas des sections non fissurées (par exemple sections précontraintes, chargement de compression, etc). Dans le paragraphe suivant, nous étudierons les sections fissurées (flexion, incidence du phasage de construction).

Plusieurs analyses sont possibles pour traiter ces problèmes :

- La méthode du module effectif,
- La méthode pas à pas,
- La méthode du facteur de vieillissement.

### 5.1 Méthode du module effectif

#### 5.1.1 Principe

C'est la méthode la plus souvent employée et reprise dans les codes de conception parce que simple d'utilisation.

De manière générale, la déformation du béton, soumis au retrait, au fluage et à un chargement mécanique  $\sigma_c(t)$  variable dans le temps peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_c(t) = \int_{\tau_0}^t [d\varepsilon_e(\tau) + \varphi(t, \tau)d\varepsilon_e(\tau)] + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \right] d\tau + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E_c(\tau)} = d\varepsilon_e(\tau)$  représente la variation de déformation causée par le chargement mécanique à l'instant  $\tau$

$\varphi(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E_c(\tau)} = \varphi(t, \tau)d\varepsilon_e(\tau)$  représente le fluage du béton entre les instants  $t$  et  $\tau$  causé par le chargement mécanique

$\varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$  représente le retrait.

Dans la méthode du module effectif, on ne considère que la valeur du chargement au temps  $t$ , soit  $\sigma(t)$ , le module d'Young à la date du premier chargement  $\tau_0$  et le coefficient de fluage entre  $\tau_0$  et  $t$  :

$$\varepsilon_c(t) \approx \frac{1 + \varphi(t, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \sigma_c(t) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Cette simplification ignore le vieillissement du béton entre l'instant du premier chargement  $\tau_0$  et l'instant  $\tau$  parce que :

- Il considère que le module est constant, égal à  $E(\tau_0)$ . Ce module augmente dans le temps et la valeur est plafonnée à  $E_{cm} = E_c(28)$ . Si  $\tau_0 > 28$  jours, cela n'a pas de conséquence.
- Il néglige l'histoire du chargement entre les instants  $\tau_0$  et  $t$  dans le calcul du coefficient de fluage et considère une valeur unique  $\varphi(t, \tau_0)$ . Si le chargement est monotone et croissant, cela revient à majorer la déformation de fluage. Inversement, si le chargement est monotone et décroissant, cela revient à minorer la déformation de fluage. Si le chargement est variable mais revient à 0 au temps  $t$ , la déformation mécanique et de fluage revient à 0 ; or on sait que cela n'est pas vrai, une pièce déchargée qui a flué ne retrouve pas sa déformation avant chargement.

Ainsi l'équation présentée ici n'est rigoureusement valable que si le chargement mécanique est constant.

Malgré ces limitations, cette méthode reste très largement employée dans les calculs car elle est facile à utiliser.

### 5.1.2 Illustration – chargement constant – section non armée

On considère un poteau en C30 de section  $1 \times 1 \text{ m}^2$ , non armé, et chargé à une charge de 10 MN à l'âge  $\tau_0 = 14$  jours. On suppose RH=50% et que la cure dure 8 jours.

Les courbes de retrait et de fluage sont illustrées ci-dessous de 0 à 10 000 jours :

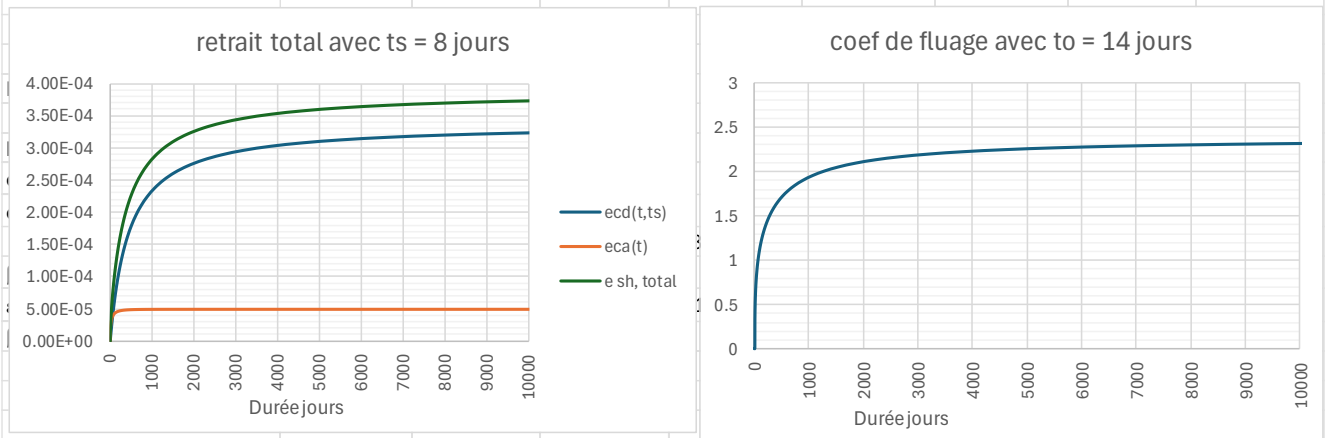
- Le retrait au temps infini vaut  $3,376 \times 10^{-4}$ .
- Quand on charge le poteau à 14 jours, le coefficient de fluage au temps infini vaut :  $\varphi_0 = 2,381$ .

La contrainte dans le béton est constante et vaut :

$$\sigma_c = 10 \text{ MPa}$$

La figure suivante illustre l'évolution des déformations en fonction du temps.

| Calcul du retrait et du fluage de dessiccation selon EN 1992-1-1 §3.1.4 et Annexe B |        |                |                               |           |      |     |                  |
|---|--------|----------------|-------------------------------|-----------|------|-----|------------------|
| <b>Données</b>  |        |                | <b>Résultats</b>              |           |      |     |                  |
| Aire  | 1      | m <sup>2</sup> | <b>&gt; effet du retrait</b>  |           |      |     |                  |
| Périmètre exposé  | 4      | m              | $\varepsilon_{cd}(t,ts)$      | 3.231E-04 | soit | 96% | du retrait total |
| Résistance caractéristique fck  | 30     | MPa            | $\varepsilon_{cd}(t,tinfini)$ | 3.376E-04 |      |     |                  |
| Type de ciment  | N      |                | $\varepsilon_{ca}(t)$         | 5.000E-05 |      |     |                  |
| RH  | 50     | %              | <b>&gt; effet du fluage</b>   |           |      |     |                  |
| Age de chargement to  | 14     | jours          | $\beta(t,to)$                 | 0.972     |      |     |                  |
| Age fin de cure ts  | 8      | jours          | $\beta(to)$                   | 0.557     |      |     |                  |
| Age de calcul   | 10000  | jours          | $\beta(fcm)$                  | 2.725     |      |     |                  |
| soit  | 27.379 | années         | $\beta RH$                    | 1.569     |      |     |                  |
|   |        |                | $\varphi_0$                   | 2.381     |      |     |                  |
| <b>Résultats</b>  |        |                | $\varphi(t,\tau_0)$           | 2.315     | soit | 97% | du fluage total  |
| Ecm   | 32837  | MPa            |                               |           |      |     |                  |
| Ecm(to)   | 31832  | MPa            |                               |           |      |     |                  |


 Figure 14 : retrait et fluage de la section 1m<sup>2</sup> de béton C10

Les déformations du béton sont données, selon la méthode du module effectif par :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1 + \varphi(t, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \sigma_c(t) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{c,eff}(t, \tau_0)} + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Au bout de 10 000 jours,

$$\varphi(t, \tau_0) = 2,315 ; \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = 3,23 \times 10^{-4}$$

Soit :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{10}{31832/(1 + 2,315)} + 3,23 \times 10^{-4} = 1,364 \times 10^{-3}$$

Décomposée en :

$$\varepsilon_e(\tau_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(\tau_0)} = 3,141 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{cr}(t, \tau_0) = \varphi(t, \tau_0) \varepsilon_c(\tau_0) = 7,272 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = 3,231 \times 10^{-4}$$

### 5.1.3 Illustration – chargement constant – section armée

On reprend le même exemple, mais on considère un ratio d'armature de 2%. Les autres données sont inchangées.

Les déformations du béton sont données, selon la méthode du module effectif par :

$$\varepsilon_c(t) \approx \frac{1 + \varphi(t, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \sigma_c(t) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{c,eff}(t, \tau_0)} + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Pour simplifier, les indices de temps sont ôtés dans les équations suivantes, ils seront réintroduits à la fin des résultats. Du fait de l'adhérence acier-béton, il vient :

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_{c,eff}} + \varepsilon_{sh} = \varepsilon_s$$

L'équilibre implique que :

$$A_c \sigma_c + A_s \sigma_s = P$$

Or d'après la compatibilité des déformations :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = n \sigma_c + E_s \varepsilon_{sh}$$

L'équilibre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} A_c \sigma_c + A_s (n \sigma_c + E_s \varepsilon_{sh}) &= P \\ A_c \sigma_c (1 + n \rho) &= P - A_s E_s \varepsilon_{sh} \end{aligned}$$

La contrainte dans le béton vaut alors :

$$\sigma_c = \frac{P}{(1 + n \rho) A_c} - \frac{\rho}{(1 + n \rho)} E_s \varepsilon_{sh} = \frac{P}{(1 + n \rho) A_c} - \frac{\rho n}{(1 + n \rho)} E_{c,eff} \varepsilon_{sh}$$

Il apparaît que dans le temps, la contrainte dans le béton diminue, sous l'effet de deux phénomènes :

- Le fluage qui se traduit par une augmentation du coefficient d'équivalence  $n$ ,
- Le retrait bridé par les armatures

La contrainte dans les armatures se déduit de l'équation d'équilibre :

$$A_s \sigma_s = P - A_c \sigma_c = P - \frac{P}{(1 + n \rho)} + \frac{\rho A_c}{(1 + n \rho)} E_s \varepsilon_{sh} = \frac{n \rho}{(1 + n \rho)} P + \frac{A_s}{(1 + n \rho)} E_s \varepsilon_{sh}$$

Soit :

$$\sigma_s = \frac{n}{(1 + n \rho)} \frac{P}{A_c} + \frac{1}{(1 + n \rho)} E_s \varepsilon_{sh}$$

L'expression montre bien que la contrainte dans l'acier augmente avec le temps sous l'effet du fluage et du retrait du béton, que les armatures brident.

Le retrait et le fluage agissent ainsi comme un chargement variable dans la section en béton armé.

On en déduit la déformation du béton :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{c,eff}(t)} + \varepsilon_{sh}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t, \tau_0)} + \varepsilon_{cr}(t, \tau_0) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_D) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t, \tau_0)} (1 + \varphi(t, \tau_0)) + \varepsilon_{cr}(t, \tau_0)$$

Connaissant le coefficient de fluage, il est alors possible de déterminer la part de raccourcissement instantané et la part de fluage.

Ainsi, au temps  $\tau_0$  :

$$E_c(\tau_0) = 31\,832 \text{ MPa}; n = E_s/E_c = 6.283; \varepsilon_{sh}(\tau_0) = 3.081 \times 10^{-5}; \varphi(\tau_0; \tau_0) = 0; 1 + \rho n = 1.126$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_c(\tau_0) &= \frac{10}{1.126 \times 1} - \frac{0.02}{1.126} \times 2 \times 3.081 = 8.88 - 0.11 = 8.77 \text{ MPa} \\ \sigma_s &= \frac{6.283 \times 10}{1.126 \times 1} + \frac{1}{1.126} \times 2 \times 3.081 = 55.82 + 5.47 = 61.29 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Force reprise par le béton :  $F_c = A_c \times \sigma_c = 8,77 \text{ MN}$

Force reprise par les armatures :  $F_s = A_s \times \sigma_s = 0.02 \times 61.29 = 1,23 \text{ MN} : \text{OK}$

Déformations du béton :

$$\varepsilon_e(\tau_0) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_c(\tau_0)} = \frac{8.77}{31832} = 2.756 \times 10^{-4}; \varepsilon_c(\tau_0) = 0; \varepsilon_{sh}(\tau_0) = 3.081 \times 10^{-5}; \varepsilon_c(\tau_0) = 3.065 \times 10^{-4}$$

Déformation de l'acier :

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{61.29}{200000} = 3.065 \times 10^{-4} : \text{OK} !$$

Au temps  $\tau = 10\ 000$  jours :

$\varphi(t; \tau_0) = 2.315$  ;  $E_{c,eff}(t, \tau_0) = 9603\ MPa$  ;  $n = E_s/E_c = 20.827$  ;  $\varepsilon_{sh}(t, \tau_0) = 3.749 \times 10^{-4}$  ;  $1 + \rho n = 1.417$

Il vient :

$$\sigma_c(\tau_0) = \frac{10}{1.417 \times 1} - \frac{0.02}{1.417} \times 2 \times 37.49 = 7.057 - 1.058 = 6.00\ MPa$$

$$\sigma_s = \frac{20.827 \times 10}{1.417 \times 1} + \frac{1}{1.417} \times 2 \times 37.49 = 146.979 + 52.915 = 199.96\ MPa$$

Force reprise par le béton :  $F_c = A_c \times \sigma_c = 6.00\ MN$

Force reprise par les armatures :  $F_s = A_s \times \sigma_s = 0.02 \times 200 = 4.00\ MN$  : OK

Déformations du béton :

$$\varepsilon_e(\tau_0) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_c(t, \tau_0)} = \frac{6.00}{31832} = 1.885 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_e(t, \tau_0) = 2.315 \times 1.885 \times 10^{-4} = 4.364 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{sh}(t, \tau_0) = 3.749 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c(\tau_0) = 9.998 \times 10^{-4}$$

Déformation de l'acier :

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{199.96}{200000} = 9.998 \times 10^{-4} : \text{OK !}$$

Les images ci-dessous illustrent l'évolution des contraintes dans le béton et les armatures, ainsi que la répartition de l'effort entre le béton et les armatures. L'effort repris par le béton diminue avec le temps : à la date  $t=14$  jours, date du chargement, le béton reprend 88% de l'effort ; au bout de 10 000 jours, l'effort repris par le béton ne représente plus que 60%.

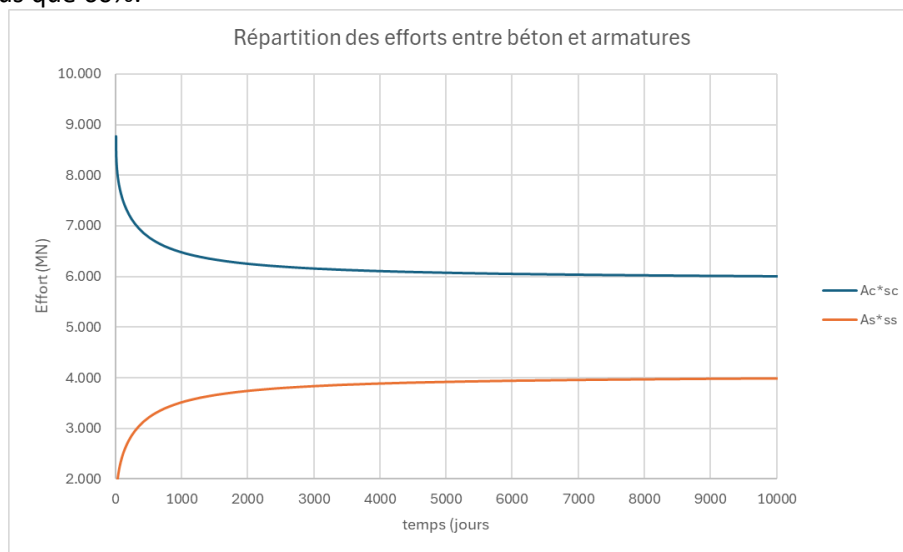


Figure 15 : répartition des efforts entre béton et aciers

Cela explique l'augmentation des contraintes dans les aciers : elle passe de 61 MPa à 200 MPa !

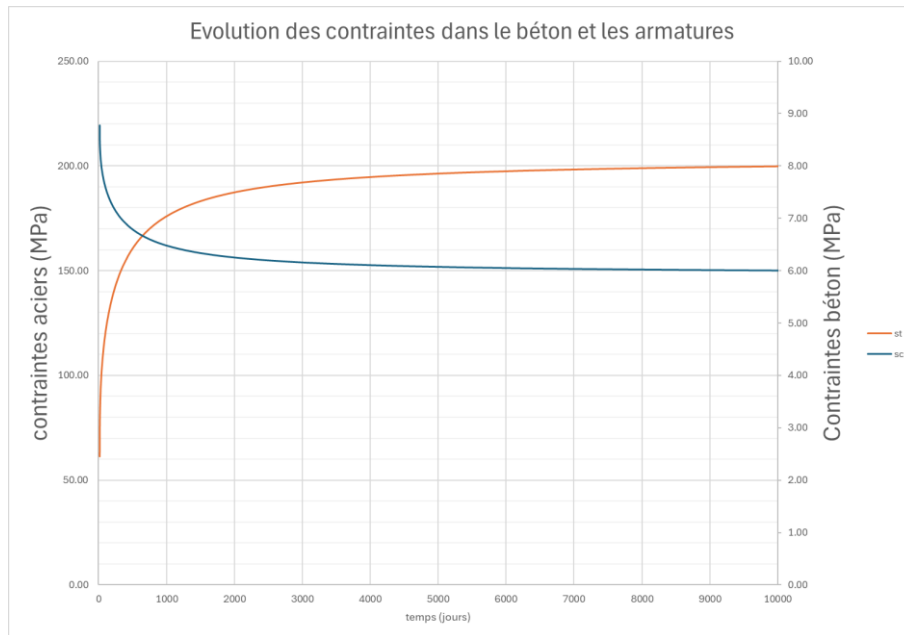


Figure 16: évolution des contraintes dans le béton et les armatures

## 5.2 Méthode incrémentale

### 5.2.1 Fonction de fluage

Comme vu précédemment, la déformation du béton, soumis au retrait, au fluage et à un chargement mécanique  $\sigma_c(t)$  variable dans le temps peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_c(t) = \int_{\tau_0}^t [d\varepsilon_e(\tau) + \varphi(t, \tau)d\varepsilon_e(\tau)] + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \right] d\tau + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

On note :

$$J(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)}$$

Cette fonction est notée fonction de fluage.

Ainsi, la déformation peut s'exprimer de manière très générale :

$$\varepsilon_c(t) = \int_{\tau_0}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Lorsque le chargement est variable par créneaux  $d\sigma_c(\tau)$  (typiquement, le noyau d'une tour dont le chargement progresse du poids d'un étage toutes les semaines, l'expression devient :

$$\varepsilon_c(t) = \int_{\tau_0}^t J(t, \tau) d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

### 5.2.2 Illustration - chargement incrémental

On considère un élément soumis à une contrainte  $\Delta\sigma_{c1}$  à l'instant  $\tau_1$  et à un incrément complémentaire  $\Delta\sigma_{c2}$  à l'instant  $\tau_2$ . La figure suivante illustre l'historique de chargement ainsi que le fluage provoqué par chacun des chargements :

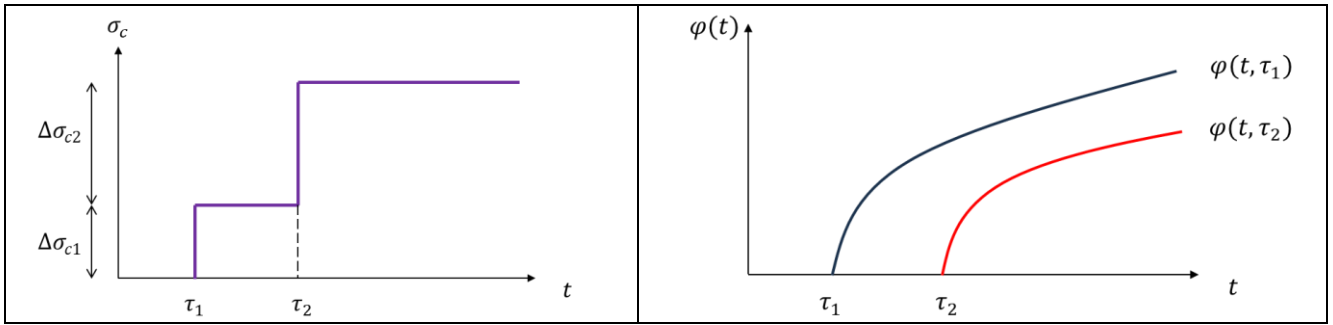


Figure 17 : chargement et fonctions de fluage.

Pour  $t > \tau_2$ , la déformation de l'élément a pour expression :

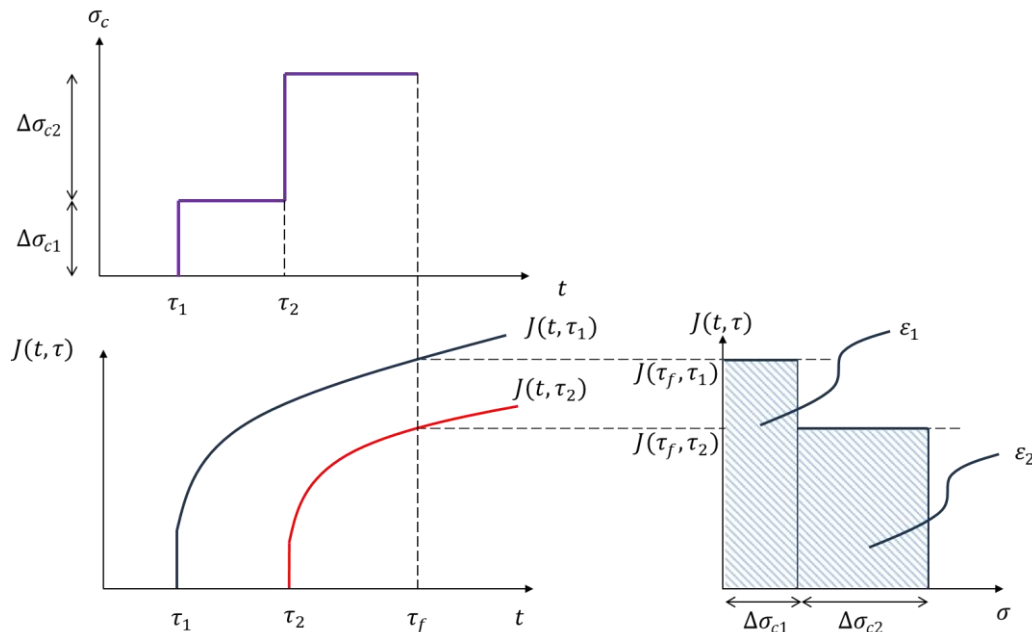
$$\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_{c1}}{E_c(\tau_1)}(1 + \varphi(t, \tau_1)) + \frac{\Delta\sigma_{c2}}{E_c(\tau_2)}(1 + \varphi(t, \tau_2)) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Soit :

$$\varepsilon_c(t) = \sum J(t, \tau_i) \Delta\sigma_c(\tau_i) + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$

Il est commode de représenter les quantités dans un repère  $(\sigma, J)$  : ainsi, au bout d'un temps final  $\tau_f$ , le raccourcissement élastique et de fluage représentent alors l'aire de la section située entre la courbe  $J(\sigma)$  et les axes  $(\sigma, J)$  :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{sh}(t, \tau_d)$$


 Figure 18 : interprétation géométrique de la déformation dans le plan  $(\sigma, J)$ 

### 5.2.3 Illustration : section non armée

On reprend l'exemple du § 5.1.2 , on considère un chargement  $P_1 = 10 \text{ MN}$  à  $t=14$  jours puis un incrément  $\Delta P_2 = 10 \text{ MN}$  à  $t = 28$  jours.

A  $\tau_1 = 14$  jours :

$$E_c(\tau_1) = 31\,832 \text{ MPa} ; \Delta\sigma_1 = 10 \text{ MPa} ; \varepsilon_e(\tau_1) = \frac{\Delta\sigma_{c1}}{E_c(\tau_1)} = 3.141 \times 10^{-4} ; \varepsilon_{sh}(\tau_1) = 3.081 \times 10^{-5}$$

A  $\tau_2 = 28$  jours :

$$E_c(28) = 32\,837 \text{ MPa} ; \Delta\sigma_2 = 10 \text{ MPa} ; \varepsilon_{sh}(\tau_2) = 4.710 \times 10^{-5}$$

$$\text{Fluage du chargement 1 entre } \tau_1 \text{ et } \tau_2 : \varphi(\tau_2, \tau_1) = 0.661 ; J(\tau_2, \tau_1) = \frac{1+\varphi(\tau_2, \tau_1)}{E_c(\tau_1)} = \frac{1.661}{31832} = 5.218 \times 10^{-5} ;$$

$$J(\tau_2, \tau_2) = \frac{1}{E_c(28)} = 3.045 \times 10^{-5}$$

Déformation du béton à 28 jours :

$$\varepsilon_c(28) = J(\tau_2, \tau_1) \Delta\sigma_1 + J(\tau_2, \tau_2) \Delta\sigma_2 + \varepsilon_{sh}(\tau_2) = (5.218 + 3.045 + 0.471) \times 10^{-4} = 8.734 \times 10^{-4}$$

A  $t = 10\,000$  jours :

$$E_c(\tau_1) = 31\,832 \text{ MPa} ; E_c(\tau_2) = 32\,837 \text{ MPa} ; \quad \varepsilon_{sh}(t) = 3.749 \times 10^{-4} ; \quad \varphi(t, \tau_1) = 2.315 ; \varphi(t, \tau_2) = 2.030 ;$$

$$J(t, \tau_1) = \frac{1+\varphi(t, \tau_1)}{E_c(\tau_1)} = \frac{3.315}{31832} = 1.041 \times 10^{-4} ; J(t, \tau_2) = \frac{1+\varphi(t, \tau_2)}{E_c(28)} = \frac{3.030}{32837} = 9.227 \times 10^{-5}$$

Il vient :

$$\varepsilon_c(10000) = J(t, \tau_1) \Delta\sigma_1 + J(t, \tau_2) \Delta\sigma_2 + \varepsilon_{sh}(t) = (10.414 + 9.237 + 3.749) \times 10^{-4} = 23.39 \times 10^{-4}$$

La déformation se décompose en :

- Déformation élastique mécanique :  $\varepsilon_e = \frac{\Delta\sigma_1}{E_c(\tau_1)} + \frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_2)} = \frac{10}{31832} + \frac{10}{32837} = 6.187 \times 10^{-4}$
- Déformation de fluage :  $\varepsilon_{cr} = \frac{\Delta\sigma_1}{E_c(\tau_1)} \varphi(t, \tau_1) + \frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_2)} \varphi(t, \tau_2) = 13.454 \times 10^{-4}$
- Déformation de retrait :  $\varepsilon_{sh}(t) = 3.749 \times 10^{-4}$
- Déformation totale :  $\varepsilon_c = 23.39 \times 10^{-4}$  : OK !

#### 5.2.4 Illustration : section armée sous chargement constant

On considère le même exemple que précédemment (cf 5.1.3) : la présence d'armatures bridant le fluage et le retrait induisent une variation de la contrainte dans le béton : cette évolution de la contrainte est évaluée par la méthode incrémentale.

Au temps  $\tau_0$ , le chargement  $P$  est appliqué. L'équilibre donne :

$$A_c \sigma_{c0} + A_s \sigma_{s0} = P$$

La déformation du béton vaut :

$$\varepsilon_c(\tau_0) = \varepsilon_e(\tau_0) + \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d) = \frac{\sigma_{c0}}{E_c(\tau_0)} + \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d)$$

La compatibilité des déformations implique :

$$\varepsilon_s(\tau_0) = \frac{\sigma_{s0}}{E_s} = \varepsilon_c(\tau_0) \Rightarrow \sigma_{s0} = E_s \left( \frac{\sigma_{c0}}{E_c(\tau_0)} + \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d) \right) = n(\tau_0) \sigma_{c0} + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d)$$

On en déduit en substituant la contrainte de l'acier dans l'équation d'équilibre :

$$A_c \sigma_{c0} (1 + \rho n(\tau_0)) = P - A_s E_s \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d)$$

Soit :

$$\sigma_{c0} = \frac{P - A_s E_s \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d)}{A_c (1 + \rho n(\tau_0))}$$

$$\sigma_{s0} = n(\tau_0) \sigma_{c0} + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_0, \tau_d)$$

On se place maintenant au temps  $\tau_1 = \tau_0 + \Delta t$ . Entre ces deux instants, le chargement n'a pas changé. En revanche, le béton flue et l'acier ne flue pas, ce qui entraîne une redistribution de l'effort entre le béton et l'acier (le béton s'assouplit). On note  $\Delta\sigma_{c1}$  la variation de la contrainte béton liée au fluage entre les temps  $\tau_0$  et  $\tau_1$ . Comme indiqué dans la Figure 18, la déformation du béton est la somme des contraintes des produits  $J \times \sigma$  à laquelle, on ajoute le retrait, ce qui peut s'écrire :

$$\varepsilon_c(\tau_1) - \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d) = \frac{1 + \varphi(\tau_1, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \sigma_{c0} + \frac{1 + \varphi(\tau_1, \tau_0)}{E_c(\tau_1)} \Delta\sigma_{c1} = J(\tau_1, \tau_0) \sigma_{c0} + J(\tau_1, \tau_1) \Delta\sigma_{c1}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(\tau_1) = \frac{\sigma_{s1}}{E_s} = \varepsilon_c(\tau_1) &\Rightarrow \sigma_{s1} = E_s (J(\tau_1, \tau_0) \sigma_{c0} + J(\tau_1, \tau_0) \Delta\sigma_{c1} + \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d)) \\ &= n(\tau_1, \tau_1) (\sigma_{c0} + \Delta\sigma_{c1}) + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d) \end{aligned}$$

L'équilibre de la section donne :

$$A_c (\sigma_{c0} + \Delta\sigma_{c1}) + A_s \sigma_{s1} = P$$

Soit :

$$A_c (\sigma_{c0} + \Delta\sigma_{c1}) + A_s (n(\tau_1, \tau_0) (\sigma_{c0} + \Delta\sigma_{c1}) + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d)) = P$$

On en déduit :

$$\Delta\sigma_{c1} A_c (1 + \rho n(\tau_1, \tau_0)) = P - A_c \sigma_{c0} (1 + \rho n(\tau_1, \tau_0)) - A_s E_s \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d)$$

Soit :

$$\Delta\sigma_{c1} = \frac{1}{1 + \rho n(\tau_1, \tau_1)} \left[ \frac{P}{A_c} - \sigma_{c0} - \rho n(\tau_1, \tau_0) \sigma_{c0} - \rho E_s \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d) \right]$$

D'où, au bout du temps 1 :

$$\sigma_{c1} = \sigma_{c0} + \Delta\sigma_{c1}$$

On déduit également :

$$\sigma_{s1} = \frac{1}{A_s} (P - A_c \sigma_{c1}) = n(\tau_1, \tau_0) \sigma_{c1} + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_1, \tau_d)$$

On se situe maintenant au temps  $\tau_i$

Suivant le même raisonnement, que précédemment, la déformation du béton est égale à la somme des contributions de la déformation due au chargement initial et des variations de contraintes entre les différents instants considérés :

$$\varepsilon_c(\tau_i) - \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d) = \frac{1 + \varphi(\tau_i, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} \sigma_{c0} + \sum_{j=1}^i \frac{1 + \varphi(\tau_i, \tau_j)}{E_c(\tau_j)} \Delta\sigma_{cj} = J(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} + \sum_{j=1}^i J(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{cj}$$

La compatibilité des déformations donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(\tau_i) = \frac{\sigma_{si}}{E_s} = \varepsilon_c(\tau_i) &\Rightarrow \sigma_{si} = E_s \left( J(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} + \sum_{j=1}^i J(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{cj} + \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d) \right) \\ &= n(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} + \sum_{j=1}^i n(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{cj} + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d) \end{aligned}$$

Où :

$$n(\tau_i, \tau_0) = \frac{1 + \varphi(\tau_i, \tau_0)}{E_c(\tau_0)} E_s ; n(\tau_i, \tau_j) = \frac{1 + \varphi(\tau_i, \tau_j)}{E_c(\tau_j)} E_s$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$A_c (\sigma_{ci-1} + \Delta\sigma_{ci}) + A_s \sigma_{si} = P$$

Où

$\sigma_{ci-1}$  est la contrainte béton à l'instant  $\tau_{i-1}$  déterminée par récurrence,  
 $\Delta\sigma_{ci}$  est la variation de contrainte béton entre les instants  $\tau_{i-1}$  et  $\tau_i$

On en déduit alors :

$$A_c(\sigma_{ci-1} + \Delta\sigma_{ci}) + A_s n(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} + A_s \sum_{j=1}^i n(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{ci} + E_s \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d) = P$$

On isole la variation  $\Delta\sigma_{ci}$  et on divise par  $A_c$

$$\Delta\sigma_{ci}(1 + \rho n_i) = \frac{P}{A_c} - \sigma_{ci-1} - \rho n(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} - \sum_{j=1}^{i-1} \rho n(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{ci} - \rho E_s \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d)$$

$$\text{où } n_i = n(\tau_i, \tau_i) = \frac{1 + \varphi(\tau_i, \tau_i)}{E_c(\tau_j)} E_s = \frac{E_s}{E_c(\tau_i)}$$

Soit :

$$\Delta\sigma_{ci} = \frac{1}{1 + \rho n_i} \left[ \frac{P}{A_c} - \sigma_{ci-1} - \rho n(\tau_i, \tau_0) \sigma_{c0} - \sum_{j=1}^{i-1} \rho n(\tau_i, \tau_j) \Delta\sigma_{ci} - \rho E_s \varepsilon_{sh}(\tau_i, \tau_d) \right]$$

Reprenons l'exemple de chargement précédent et calcul les évolutions des contraintes dans le béton et les armatures en fonction du temps. L'intervalle de temps entre  $\tau_f = 10\,000$  jours et  $\tau_0 = 14$  jours est discrétisé en  $n$  intervalles, les instants suivant une progression géométrique. On considère  $(\tau_1 - \tau_0) = (\tau_f - \tau_0)/1000 = 24$  jours puis  $(\tau_i - \tau_0) = (\tau_{i-1} - \tau_0)^a$ . Le coefficient  $a$  est donné par  $a = \frac{1}{n-1} \ln(\tau_n - \tau_0) / \ln(\tau_1 - \tau_0)$ . On considère ici  $n = 7$  et on établit le tableau des coefficients de fluage et coefficients d'équivalence.

| étape                        | 0          | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6          |
|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| ti (jours)                   | 14.0       | 24.0       | 35.5       | 113.9      | 477.7      | 2165.9     | 10000.0    |
| ti - t0 (jours)              | 0.00       | 9.99       | 21.53      | 99.93      | 463.73     | 2151.92    | 9986.00    |
| $\varphi(t_i, t_0)$          | 0          | 0.60       | 0.75       | 1.163      | 1.691      | 2.126      | 2.315      |
| $\varphi(t_i, t_1)$          |            | 0          | 0.56       | 1.02       | 1.52       | 1.919      | 2.09       |
| $\varphi(t_i, t_2)$          |            |            | 0          | 0.912      | 1.403      | 1.78       | 1.94       |
| $\varphi(t_i, t_3)$          |            |            |            | 0          | 1.076      | 1.418      | 1.551      |
| $\varphi(t_i, t_4)$          |            |            |            |            | 0          | 1.053      | 1.174      |
| $\varphi(t_i, t_5)$          |            |            |            |            |            | 0          | 0.869      |
| $\varepsilon_{sh}(t_i, t_d)$ | -3.081E-05 | -4.289E-05 | -5.437E-05 | -1.087E-04 | -2.223E-04 | -3.296E-04 | -3.831E-04 |
| $E_c(t_i)$ (MPa)             | 31 832     | 32 640     | 32 837     | 32 837     | 32 837     | 32 837     | 32 837     |
| $n(t_i, t_0)$                | 6.28       | 9.79       | 10.66      | 13.17      | 16.39      | 19.04      | 20.19      |
| $n(t_i, t_1)$                |            | 6.13       | 9.52       | 12.30      | 15.35      | 17.78      | 18.82      |
| $n(t_i, t_2)$                |            |            | 6.09       | 11.65      | 14.64      | 16.93      | 17.91      |
| $n(t_i, t_3)$                |            |            |            | 6.09       | 12.64      | 14.73      | 15.54      |
| $n(t_i, t_4)$                |            |            |            |            | 6.09       | 12.50      | 13.24      |
| $n(t_i, t_5)$                |            |            |            |            |            | 6.09       | 11.38      |
| $n(t_i, t_6)$                |            |            |            |            |            |            | 6.09       |

Tableau 6 : coefficients de fluage et d'équivalence

On obtient alors l'évolution des contraintes à chaque étape :

|                      | Etape 0       | Etape 1       | Etape 2       | Etape 3        | Etape 4        | Etape 5        | Etape 6        |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| t                    | 14            | 24            | 36            | 114            | 478            | 2166           | 10000          |
| r                    | 0.02          | 0.02          | 0.02          | 0.02           | 0.02           | 0.02           | 0.02           |
| n(ti)                | 6.28          | 6.13          | 6.09          | 6.09           | 6.09           | 6.09           | 6.09           |
| P / Ac (MPa)         | -10.00        | -10.00        | -10.00        | -10.00         | -10.00         | -10.00         | -10.00         |
| 1+r*n(ti)            | 1.13          | 1.12          | 1.12          | 1.12           | 1.12           | 1.12           | 1.12           |
| $\Delta\sigma$ (MPa) |               | 0.59          | 0.14          | 0.54           | 0.80           | 0.65           | 0.28           |
| $\sigma_c$ (MPa)     | <b>-8.77</b>  | <b>-8.18</b>  | <b>-8.04</b>  | <b>-7.50</b>   | <b>-6.69</b>   | <b>-6.04</b>   | <b>-5.76</b>   |
| $\sigma_t$ (MPa)     | <b>-61.29</b> | <b>-90.87</b> | <b>-97.91</b> | <b>-125.11</b> | <b>-165.35</b> | <b>-198.02</b> | <b>-211.89</b> |

Tableau 7 : évolution des contraintes avec la méthode incrémentale

Les résultats finaux sont à comparer avec les contraintes obtenues avec le module effectif :

$$\sigma_{c,eff} = -6.00 \text{ MPa}; \sigma_{s,eff} = -200 \text{ MPa}$$

On notera que l'amélioration apportée par cette méthode est relativement faible, pour un coût de calcul assez lourd. La méthode incrémentale n'a d'intérêt que si la structure connaît des évolutions significatives de contraintes, en particulier dues au chargement.

### 5.2.5 Illustration : chargement en créneaux

Reprenons la section précédente avec le chargement suivant :

- A t=14 jours :  $P = 10$  MN
- A t = 24 jours :  $P = 20$  MN, soit un doublement du chargement.

La méthode incrémentale donne de suite les évolutions des contraintes dans les matériaux, les coefficients d'équivalence étant inchangés. Seul change, dans l'équation d'équilibre de la section, le chargement extérieur. Les évolutions sont données ci-dessous :

|                         | Etape 0       | Etape 1        | Etape 2        | Etape 3        | Etape 4        | Etape 5        | Etape 6        |
|-------------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| t                       | 14            | 24             | 36             | 114            | 478            | 2166           | 10000          |
| P (MN)                  | -10           | -20            | -20            | -20            | -20            | -20            | -20            |
| r                       | 0.02          | 0.02           | 0.02           | 0.02           | 0.02           | 0.02           | 0.02           |
| n(ti)                   | 6.28          | 6.13           | 6.09           | 6.09           | 6.09           | 6.09           | 6.09           |
| P / Ac (MPa)            | -10.00        | -20.00         | -20.00         | -20.00         | -20.00         | -20.00         | -20.00         |
| 1+r*n(ti)               | 1.13          | 1.12           | 1.12           | 1.12           | 1.12           | 1.12           | 1.12           |
| $\Delta \sigma_c$ (MPa) |               | -8.32          | 0.68           | 0.93           | 1.21           | 0.96           | 0.39           |
| $\sigma_c$ (MPa)        | <b>-8.77</b>  | <b>-17.09</b>  | <b>-16.41</b>  | <b>-15.48</b>  | <b>-14.26</b>  | <b>-13.31</b>  | <b>-12.91</b>  |
| $\sigma_t$ (MPa)        | <b>-61.29</b> | <b>-145.45</b> | <b>-179.43</b> | <b>-226.07</b> | <b>-286.79</b> | <b>-334.59</b> | <b>-354.28</b> |

Tableau 8 : évolution des contraintes avec la méthode incrémentale – chargement en créneau

Si l'on applique la méthode du module effectif en retenant le coefficient de fluage à 14 jours, date du premier chargement, les résultats s'obtiennent de l'exemple précédent en multipliant par deux les contraintes, soit :

$$\sigma_{c,eff} = -11,9 \text{ MPa}; \sigma_{s,eff} = -404 \text{ MPa}$$

Il apparaît ici que la méthode incrémentale est plus précise : si l'écart sur les contraintes béton est modéré, il est en revanche beaucoup plus prononcé en ce qui concerne les armatures. La méthode du module effectif, en majorant le fluage global appliqué, surévalue la contrainte dans les aciers.

## 5.3 Méthode du coefficient de vieillissement

### 5.3.1 Principe

La méthode incrémentale a un caractère très général et peut s'adapter à tout type de chargement et prendre en compte le transfert des contraintes lié au fluage et retrait bridés par les armatures. Comme l'a montré l'exemple traité ci-dessus, cette méthode demande néanmoins des ressources de calculs importantes qui ne peuvent s'envisager qu'avec des moyens électroniques.

La méthode du coefficient de vieillissement vise à s'affranchir de l'historique précis du chargement de l'élément en ne considérant que les états initial ( $\tau_0$ ) et l'état final ( $t$ ) en modulant le coefficient de fluage  $\varphi(t, \tau_0)$  par un facteur de vieillissement  $\chi(t, t_0)$  qui vise à refléter le même état final de déformation. Pour illustrer la méthode, on considère un élément soumis à deux historiques de chargements :

- Un chargement constant  $P(t, \tau_0) = P(\tau_0) = P_0$  appliqué à l'instant  $\tau_0$
- Un chargement variable  $P(t, \tau_0) = f(t, \tau_0)$  telle que  $f(t < \tau_0) = 0$  et  $f(t) = 1$

L'évolution des contraintes mécaniques (élastiques) est illustrée ci-dessous. La déformation élastique est amplifiée par le fluage. Dans le cas d'un chargement constant, le coefficient de fluage au bout du temps  $t$  vaut  $\varphi(t, t_0)$  et la déformation due au fluage vaut  $\varphi(t, \tau_0) \sigma_{c0} / E_c(\tau_0)$ . Dans le cas du chargement progressif, la déformation de fluage est forcément inférieure puisque le chargement croît progressivement. La déformation de fluage est illustrée ci-dessous :

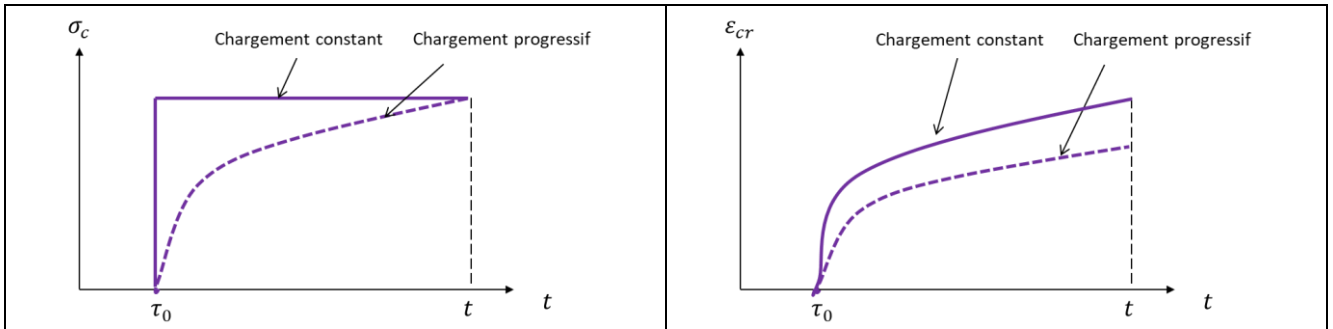


Figure 19 : chargements constant et progressif et déformations de fluage associées

Les déformations de fluage peuvent être déterminées de manière rigoureuse avec la méthode incrémentale.

La déformation de fluage du chargement progressif peut être déduite de celle due au chargement constant en y appliquant un coefficient d'abattement appelé coefficient de vieillissement :

$$\varepsilon_{cr}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(\tau_0)} \chi(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)$$

Cette équation revient également à dire que la déformation produite par les variations de contrainte avec le temps dans le béton peut être considérée comme celle qui serait obtenue du fait d'une augmentation de la contrainte appliquée et maintenant constante à un âge intermédiaire :

$$\int_{\tau=\tau_0}^t (1 + \varphi(t, \tau)) d\sigma(\tau) = (1 + \chi(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)) \Delta\sigma_{\tau_0 \rightarrow t}$$

Il devient alors possible de s'affranchir d'une analyse incrémentale en appliquant la méthode du module effectif où l'intégralité du chargement est appliqué à la date  $\tau_0$  et en y appliquant le coefficient de vieillissement. La déformation du béton à l'instant  $t$  s'écrit alors :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(\tau_0)} (1 + \chi(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)) + \varepsilon_{sh}(t)$$

Selon l'historique de chargement, le coefficient de vieillissement varie en général entre 0,4 (chargements très progressifs, voire tardifs) et 1 (majeure partie du chargement appliquée au jeune âge). Pour les cas courants, l'EN 1992-2-2 annexe KK permet de considérer  $\chi = 0,8$  pour  $t = \infty$ .

Lorsqu'à l'instant  $\tau_0$ , un chargement  $\sigma_c(\tau_0)$  est appliqué, puis que le chargement évolue de  $\Delta\sigma_c(t)$  entre  $\tau_0$  et  $t$ , la déformation totale à l'instant  $t$  vaut :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_c(\tau_0)} (1 + \varphi(t, \tau_0)) + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(\tau_0)} (1 + \chi(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)) + \varepsilon_{sh}(t)$$

On peut alors définir un module effectif adapté pour l'incrément de charge :

$$E_{c,a} = \frac{E_c(\tau_0)}{1 + \chi(t, \tau_0) \varphi(t, \tau_0)}$$

Ainsi, la déformation peut s'écrire :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,eff}} + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_{c,a}} + \varepsilon_{sh}(t)$$

Cette écriture permet d'exprimer l'incrément de chargement en fonction du chargement initial et de la déformation finale :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,eff}} + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_{c,a}} + \varepsilon_{sh}(t) = \varepsilon_{0,eff} + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_{c,a}} + \varepsilon_{0,eff}$$

Où

$$\varepsilon_{0,eff} = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,eff}}$$

Soit :

$$\Delta\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{0,eff} - \varepsilon_{0,eff})$$

Inversement, il est possible d'exprimer la contrainte finale en fonction de la contrainte initiale, de la déformation finale et du coefficient de vieillissement :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,eff}} + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(\tau_0)}{E_{c,a}} + \varepsilon_{sh}(t)$$

Soit :

$$\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \sigma_c(\tau_0) \left( \frac{E_{c,a}}{E_{c,eff}} - 1 \right)$$

Soit :

$$\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \sigma_c(\tau_0) \left( \frac{\varphi(t, \tau_0) \cdot (1 - \chi(t, \tau_0))}{1 + \chi(t, \tau_0) \cdot \varphi(t, \tau_0)} \right)$$

Rem : en considérant  $\chi(t, \tau_0) = 0,8$ , il vient :

$$\frac{E_{c,a}}{E_{c,eff}} = \frac{1 + \varphi(t, \tau_0)}{1 + 0,8\varphi(t, \tau_0)}$$

$$\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \sigma_c(\tau_0) \left( \frac{0,2\varphi(t, \tau_0)}{1 + 0,8\varphi(t, \tau_0)} \right) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda(t, \tau_0)\sigma_c(\tau_0)$$

La notion de coefficient de vieillissement a été conçue par Frost puis fortement développée par Bazant [R6],[R7],[R8]. Les études de Bazant ont été intégrés dans les codes de conception comme l'Eurocode 2.

### 5.3.2 Illustration : Effort axial en créneau sur section en béton non armé

On reprend l'exemple du §5.2.3 : chargement de 10 MN à 14 jours puis 10 MN supplémentaires à 28 jours. L'objectif est de déterminer le coefficient de vieillissement.

A t = 10 000 jours :

$$E_c(\tau_1) = 31\,832 \text{ MPa}; E_c(\tau_2) = 32\,837 \text{ MPa}; \quad \varepsilon_{sh}(t) = 3,749 \times 10^{-4}; \quad \varphi(t, \tau_1) = 2,315; \varphi(t, \tau_2) = 2,030;$$

$$J(t, \tau_1) = \frac{1 + \varphi(t, \tau_1)}{E_c(\tau_1)} = \frac{3,315}{31\,832} = 1,041 \times 10^{-4}; J(t, \tau_2) = \frac{1 + \varphi(t, \tau_2)}{E_c(\tau_2)} = \frac{3,030}{32\,837} = 9,227 \times 10^{-5}.$$

La déformation à 10 000 jours vaut :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_1}{E_c(\tau_0)}(1 + \varphi(t, \tau_1)) + \frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_1)}(1 + \varphi(t, \tau_2)) + \varepsilon_{sh}(t)$$

En utilisant la notion de coefficient de vieillissement, on peut écrire :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_1}{E_c(\tau_1)}(1 + \varphi(t, \tau_1)) + \frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_1)}(1 + \chi(t, \tau_1)\varphi(t, \tau_1)) + \varepsilon_{sh}(t)$$

La soustraction des deux équations donne :

$$\frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_1)}(1 + \chi(t, \tau_1)\varphi(t, \tau_1)) = \frac{\Delta\sigma_2}{E_c(\tau_2)}(1 + \varphi(t, \tau_2))$$

Soit :

$$\chi(t, \tau_1) = \frac{\frac{E_c(\tau_1)}{E_c(\tau_2)}(1 + \varphi(t, \tau_2)) - 1}{\varphi(t, \tau_1)} = \frac{k(1 + \varphi(t, \tau_2)) - 1}{\varphi(t, \tau_1)}$$

Où  $k = E_c(\tau_1)/E_c(\tau_2)$

L'application donne :

$$\chi(t, \tau_0) = \frac{\frac{31\,832}{32\,837}(1 + 2,030) - 1}{2,315} = 0,837$$

On retrouve les ordres de grandeurs indiqués par l'EN 1992-2.

Remarque : si le premier chargement se produit après 28 jours,  $k = 1$  et

$$\chi(t, \tau_1) = \frac{\varphi(t, \tau_2)}{\varphi(t, \tau_1)}$$

### 5.3.3 Illustration : effort axial en créneau sur section en béton armé

Reprenons l'exemple du §5.2.5 avec un chargement de 10 MN à 14 jours puis 10 MN à 28 jours.

Selon la méthode du module effectif,

$$\sigma_{c,eff} = \frac{P}{(1+n\rho)A_c} - \frac{\rho}{(1+n\rho)} E_s \varepsilon_{sh}$$

Si l'on ne tient pas compte du retrait, la contrainte dans le béton selon la méthode du module effectif vaut  $\sigma_{c,eff} = -13,98$  MPa et  $\sigma_{c,incr} = -14,28$  MPa suivant la méthode incrémentale. Il est alors possible de définir un coefficient d'équivalence effectif permettant de retrouver la contrainte de la méthode incrémentale et qui tient donc compte du vieillissement du béton au cours du chargement variable. Pour caler  $\sigma_{c,eff} = \sigma_{c,incr} = -14,28$  MPa, il faut fixer  $n_{aging} = 20,03$ . Cela permet de définir un module de béton équivalent :  $E_{c,ag} = 9986$  MPa soit un coefficient de fluage :  $\varphi_{ad} = \phi\varphi(t, t_0) = 2,19$ . Comme  $\varphi(t, t_0) = 2,315$ , on déduit alors  $\phi = 0,95$ . Ce coefficient de minoration, qui tient compte du mûrissement du béton est appelé facteur de mûrissement (« aging factor ») ; c'est un moyen commode de conserver la méthode du module effectif en s'abstenant des calculs fastidieux de la méthode incrémentale. Pour des chargements qui évoluent de manière progressive, comme la construction d'une tour, ce coefficient de mûrissement est pris égal à 0,80.

Le tableau ci-dessous illustre le chargement progressif d'un poteau à raison de 2 MN tous les 14 jours pendant 114 jours. La contrainte dans le béton au bout de 10 000 jours vaut 10,87 MPa, avec prise en compte du retrait :

|                         | Etape 0       | Etape 1       | Etape 2       | Etape 3        | Etape 4        | Etape 5        | Etape 6        |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| t                       | 14            | 24            | 36            | 114            | 478            | 2166           | 10000          |
| P (MN)                  | -2.00         | -3.43         | -5.08         | -16.28         | -16.28         | -16.28         | -16.28         |
| r                       | 0.02          | 0.02          | 0.02          | 0.02           | 0.02           | 0.02           | 0.02           |
| n(ti)                   | 6.28          | 6.13          | 6.09          | 6.09           | 6.09           | 6.09           | 6.09           |
| P / Ac (MPa)            | -2.00         | -3.43         | -5.08         | -16.28         | -16.28         | -16.28         | -16.28         |
| 1+r*n(ti)               | 1.13          | 1.12          | 1.12          | 1.12           | 1.12           | 1.12           | 1.12           |
| $\Delta \sigma_c$ (MPa) |               | -1.12         | -1.34         | -9.53          | 1.75           | 0.72           | 0.32           |
| $\sigma_c$ (MPa)        | <b>-1.67</b>  | <b>-2.79</b>  | <b>-4.13</b>  | <b>-13.65</b>  | <b>-11.91</b>  | <b>-11.19</b>  | <b>-10.87</b>  |
| $\sigma_t$ (MPa)        | <b>-16.64</b> | <b>-31.79</b> | <b>-47.48</b> | <b>-131.12</b> | <b>-218.41</b> | <b>-254.36</b> | <b>-270.15</b> |

Tableau 9 : évolution des contraintes – chargement incrémental

Si l'on veut utiliser la méthode du module effectif, il convient caler le coefficient d'équivalence à la valeur :

$$\sigma_{c,eff} = \frac{P}{(1+n\rho)A_c} - \frac{\rho}{(1+n\rho)} E_s \varepsilon_{sh} = -10.87 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$n_{aging} = \frac{E_s}{E_{c,adj}} = 17,82$$

Aboutissant alors à un module d'Young ajusté :

$$E_{c,adj} = \frac{E_s}{n_{aging}} = \frac{E_{c0}}{1 + \phi\varphi(t, t_0)} = 11\,226 \text{ MPa}$$

On en déduit alors  $\phi\varphi(t, t_0) = 1,84$ , soit  $\phi = 0,79$ .

Ainsi, au travers de cet exemple, on voit que le coefficient de mûrissement est de l'ordre de 0,9 lorsque le chargement variable se fait principalement au jeune âge et de l'ordre de 0,8 lorsqu'il s'étale sur une période plus longue (ici près de 4 mois). Cela justifie l'approche réglementaire d'un facteur  $\phi = 0,8$  pour  $t = \infty$  à défaut d'un calcul par la méthode incrémentale.

| Comparaison avec la méthode du module effectif |            |                |
|--|------------|----------------|
| P  | -16.28     | MN             |
| $E_{c,o}$                                      | 31832      | MPa            |
| $\varphi(t, \tau_0)$                           | 2.315      |                |
| $\varepsilon_{sh}$                             | -3.831E-04 |                |
| $A_c$  | 1.00       | m <sup>2</sup> |
| $\rho$   | 0.02       |                |
| n aging  | 17.82      |                |
| $1 + n\rho$                                    | 1.356      |                |
| $\sigma_c, \text{eff}$                         | -10.87     | MPa            |
| $E_c, \text{eff, ajusté}$                      | 11 226     | MPa            |
| $\varphi \text{ adj}$                          | 1.84       |                |
| $\Phi$   | 0.79       |                |

Tableau 10 : calcul du facteur de mûrissement pour la méthode du module effectif ajusté

Si l'on applique la méthode du coefficient de vieillissement, sans passer par les résultats de la méthode incrémentale et en considérant  $\chi = 0,8$ , d'après l'approche 2 :

$$\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \sigma_c(\tau_0) \left( \frac{0,2\varphi(t, \tau_0)}{1 + 0,8\varphi(t, \tau_0)} \right) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda\sigma_c(\tau_0)$$

La contrainte acier vaut :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s(t) = E_s \varepsilon_c(t)$$

L'équilibre de la section donne :

$$A_s \sigma_s(t) + A_c \sigma_c(t) = P$$

Soit :

$$P = A_s E_s \varepsilon_c(t) + A_c [E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda\sigma_c(\tau_0)]$$

$$P = E_{c,a} A_c \left[ (1 + \rho n_a) \varepsilon_c(t) - \frac{\lambda\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,a}} - \varepsilon_{sh}(t) \right]$$

Où

$$n_a = E_s / E_{c,a}$$

On en déduit :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_s(t) = \frac{1}{1 + \rho n_a} \left[ \frac{P}{E_{c,a} A_c} + \frac{\lambda\sigma_c(\tau_0)}{E_{c,a}} + \varepsilon_{sh}(t) \right]$$

Ainsi, la contrainte au bout du temps t vaut :

$$\sigma_c(t) = E_{c,a}(\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda\sigma_c(\tau_0) = \frac{1}{1 + \rho n_a} \left[ \frac{P}{A_c} - \lambda\rho n_a \sigma_c(\tau_0) - \rho E_s \varepsilon_{sh}(t) \right]$$

Connaissant ainsi  $\sigma_c(\tau_0)$ , le coefficient de fluage, et le facteur de vieillissement, on peut alors déterminer directement la contrainte au temps t=10 000 jours, sans passer par la méthode incrémentale.

A t = 14 jours : on applique 2 MN.  $E_c(14) = 31\,832 \text{ MPa}$  ;  $\varepsilon_{sh}(14) = 3.081 \times 10^{-5}$  ;  $n_{14} = \frac{E_s}{E_c} = 6.28$ .

La contrainte initiale dans le béton vaut :

$$\sigma_c(\tau_0) = \frac{1}{1 + \rho n_{14}} \left[ \frac{P}{A_c} - \rho E_s \varepsilon_{sh}(14) \right] = \frac{1}{1.126} \left[ \frac{2}{1} - 0.02 \times 2 \times 3.081 \right] = 1.667 \text{ MPa}$$

Le chargement augmente jusque 16.28 MN à 114 jours, par incrément de 2 MN tous les 14 jours. On calcule la contrainte dans le béton au bout de 10 000 jours.

$$\varphi(t, \tau_0) = 2,315 ; \chi = 0.8 ; E_{c,a} = \frac{E_c(14)}{1 + 0.8 \times 2.315} = 11162 \text{ MPa} ; \lambda = \frac{0,2\varphi(t, \tau_0)}{1 + 0,8\varphi(t, \tau_0)} = 0.162 ; n_a = \frac{E_s}{E_{c,a}} = 17.918 ;$$

$$\varepsilon_{sh}(t) = 3.831 \times 10^{-4}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sigma_c(t) &= \frac{1}{1 + \rho n_a} \left[ \frac{P}{A_c} - \lambda \rho n_a \sigma_c(\tau_0) - \rho E_s \varepsilon_{sh}(t) \right] \\ &= \frac{1}{1.358} \left[ \frac{16.28}{1} - 0.162 \times 0.02 \times 17.918 \times 1.667 - 0.02 \times 2 \times 38.31 \right] \\ &= \frac{1}{1.358} [16.28 - 0.097 - 1.532] = 10.78 \text{ MPa}\end{aligned}$$

La contrainte de 10.78 MPa est à comparer à la contrainte de 10.87 MPa obtenue avec la méthode incrémentale : la différence est inférieure à 1%. On voit ici l'intérêt de la méthode du coefficient de vieillissement qui aboutit directement à un résultat fiable sans calcul incrémental.

### 5.3.4 Illustration : flexion composée avec compression

On considère une section soumise au temps  $\tau_0$  à un effort normal  $N_e$  et à un moment de flexion  $M_e$ . La section est supposée entièrement comprimée. Une section d'armature  $A_s$  à l'ordonnée  $y_s$  est mise en œuvre. Le raisonnement qui suit pour une armature isolée se généralise sans difficultés à plusieurs armatures.

D'après l'hypothèse de Navier Bernoulli, les sections planes restent planes. Les déformations ont donc pour expression :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_G + \kappa y$$

Où

$\varepsilon_G$  est la déformation au niveau du centre de gravité et

$\kappa$  est la courbure de la section.

Rem : on se met dans le contexte des conventions de l'élasticité où la loi de Hooke s'écrit  $\sigma = E\varepsilon$ . Cela suppose que  $N > 0$  correspond à de la traction et  $M > 0$  correspond à la traction en fibre supérieure, qui correspondent à la convention opposée à la convention GC. Il faudra simplement être conscient des efforts en jeu dans les applications numériques. Sous l'effet d'un effort de traction, l'allongement est uniforme et positif, sous l'effet d'un moment positif, l'allongement est positif en fibre supérieure et négatif en fibre inférieure. On pourra éventuellement choisir d'autres conventions in fine pour se ramener par exemple à la convention GC.

#### Analyse de la section au temps $\tau_0$ :

On suppose qu'à cet instant, il n'y a pas de retrait et pas de fluage. On mettra à la fin des résultats des indices 0 aux raideurs des éléments et déformations car elles dépendent du module du béton au moment  $\tau_0$ .

Les efforts intérieurs développés par la section sont :

- Pour le béton :

$$N_{c,0} = \int_A \sigma_c dA = \int_A E_c (\varepsilon_G + \kappa y) dA = E_c A_c \varepsilon_G + E_c m_c \kappa = R_{A,c} \varepsilon_G + R_{B,c} \kappa$$

Où  $R_{A,c}$  et  $R_{B,c}$  sont les rigidités axiales et de moment statique du béton.

- Pour l'armature :

$$N_{s,0} = \int_A \sigma_s dA = \int_A E_s (\varepsilon_G + \kappa y_s) dA = E_s A_s \varepsilon_G + E_s m_s \kappa = R_{A,s} \varepsilon_G + R_{B,s} \kappa$$

L'effort développé par les matériaux est identique à l'effort extérieur :

$$N_e = N_{c,0} + N_{s,0} = R_A \varepsilon_G + R_B \kappa$$

De même, on exprime les moments développés par les matériaux béton et acier :

$$M_{c,0} = - \int_A \sigma_c y dA = \int_A E_c (\varepsilon_G y + \kappa y^2) dA = E_c m_c \varepsilon_G + E_c I_c \kappa = R_{B,c} \varepsilon_G + R_{I,c} \kappa$$

$$M_{s,0} = \int_A \sigma_s y_s dA = E_s A_s y_s \varepsilon_G + E_s y_s^2 \kappa = R_{B,s} \varepsilon_G + R_{I,s} \kappa$$

Rem : du

Le moment développé par les matériaux est identique à l'effort extérieur :

$$M_e = M_{c,0} + M_{s,0} = R_B \varepsilon_G + R_I \kappa$$

Les inconnues de déformations sont données par la résolution du système :

$$\begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

On peut en déduire par inversion du système les paramètres de déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{G,0} \\ \kappa_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{A,0} & R_{B,0} \\ R_{B,0} & R_{I,0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_{A,0} R_{I,0} - R_{B,0}^2} \begin{bmatrix} R_{I,0} & -R_{B,0} \\ -R_{B,0} & R_{A,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix}$$

Il est alors possible de déterminer les contraintes dans les matériaux :

$$\sigma_{c,0}(y) = E_{c,0} (\varepsilon_{G,0} + \kappa_0 y)$$

$$\sigma_s = E_s (\varepsilon_{G,0} + \kappa_0 y_s)$$

Analyse au temps t :

Au temps t, on intègre le fluage et le retrait du béton. Comme vu précédemment, le fluage et le retrait ont pour effet de provoquer une variation des contraintes dans le béton et les armatures.

On exprime la contrainte dans le béton au temps t en fonction de la contrainte au temps  $\tau_0$  et des effets différés, selon la méthode du coefficient de vieillissement ; comme vu plus haut :

$$\sigma_c(t) = E_{c,a} (\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda \sigma_c(\tau_0) = \frac{1}{1 + \rho n_a} \left[ \frac{P}{A_c} - \lambda \rho n_a \sigma_c(\tau_0) - \rho E_s \varepsilon_{sh}(t) \right]$$

Où :

$$\lambda = \left( \frac{(1-\chi)\varphi(t,\tau_0)}{1+\chi\varphi(t,\tau_0)} \right)$$

$$n_a = \frac{E_s}{E_{c,a}}$$

$$E_{c,a} = \frac{E_c(\tau_0)}{1+\chi(t,\tau_0)\varphi(t,\tau_0)}$$

On établit les efforts développés dans les matériaux, de la même manière que précédemment :

$$N_c = \int_A \sigma_c dA = \int_A (E_{c,a} [(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) - \lambda \sigma_c(\tau_0)]) dA = E_{c,a} A_c \varepsilon_G + E_{c,a} m_c \kappa - A_c E_{c,a} \varepsilon_{sh} - \lambda N_{c,0}$$

$$N_s = \int_A \sigma_s dA = E_s A_s \varepsilon_G + E_s m_s \kappa = R_{A,s} \varepsilon_G + R_{B,s} \kappa$$

$$\text{Où } N_{c,0} = \int_A \sigma_c(\tau_0) dA = A_c E_{c,0} \varepsilon_{G,0}$$

Les efforts équilibrés par les matériaux sont égaux à l'effort normal :

$$N_e = N_c + N_s \Rightarrow N_e + A_c E_{c,a} \varepsilon_{sh} + \lambda N_{c,0} = R_A \varepsilon_G + R_B \kappa$$

De même pour les moments :

$$M_c = \int_A \sigma_c y dA = \int_A [E_{c,a}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) - \lambda \sigma_c(\tau_0)] y dA = E_{c,a} m_c \varepsilon_G + E_{c,a} I_c \kappa - E_{c,a} m_c \varepsilon_{sh} - \lambda M_{c,0}$$

$$M_s = \int_A \sigma_s y_s dA = E_s A_s y_s \varepsilon_G + E_s A_s y_s^2 \kappa = R_{B,s} \varepsilon_G + R_{I,s} \kappa$$

Le moment développé par les matériaux vaut donc :

$$M_{int} = (E_{c,a} m_c + E_s m_s) \varepsilon_G + (E_{c,a} I_c + E_s I_s) \kappa - E_{c,a} m_c \varepsilon_{sh} - \lambda M_{c,0}$$

Ils sont égaux au moment extérieur :

$$M_e = M_{int} \Rightarrow M_e + E_{c,a} m_c \varepsilon_{sh} + \lambda M_{c,0} = R_B \varepsilon_G + R_I \kappa$$

Si l'on note :

$$\begin{aligned} N_{e,eff} &= N_e + E_{c,a} A_c \varepsilon_{sh} + \lambda N_{c,0} \\ M_{e,eff} &= M_e + E_{c,a} m_c \varepsilon_{sh} + \lambda M_{c,0} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

On obtient un système tout à fait similaire à celui développé pour l'instant  $\tau_0$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{G,t} \\ \kappa_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{A,t} & R_{B,t} \\ R_{B,t} & R_{I,t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_{A,t} R_{I,t} - R_{B,t}^2} \begin{bmatrix} R_{I,t} & -R_{B,t} \\ -R_{B,t} & R_{A,t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix}$$

Il est alors possible de déterminer les contraintes dans les matériaux :

$$\begin{aligned} \sigma_{c,t}(y) &= E_{c,a} (\varepsilon_{G,t} + \kappa_t y - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda \sigma_c(\tau_0) \\ \sigma_s &= E_s (\varepsilon_{G,t} + \kappa_t y_s) \end{aligned}$$

### Illustration

On considère une section en C30/35 avec  $E_c(\tau_0) = 30\,000 \text{ MPa}$  ; de largeur  $b=1,0\text{m}$  et de hauteur  $h=1\text{m}$ , armée à 1%, avec  $d_s = 0,9\text{m}$ .

Au temps  $\tau_0$ , les sollicitations sont  $N_e = -10\text{MN}$  et  $M_e = -0.4 \text{ MN.m}$  (effort de compression, associé à un moment comprimant les fibres supérieures, ce qui donnerait classiquement, en convention GC,  $N>0$  et  $M>0$ ).

Au temps  $t=10\,000$  jours, on considère :  $E_{cm} = 35\,000 \text{ MPa}$  ;  $\varphi(t, \tau_0) = 2$  ;  $\chi = 0,8$  ;  $\varepsilon_{sh}(t, \tau_d) = -3 \times 10^{-4}$ .

Calcul des déformations et contraintes au temps  $\tau_0$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{G,0} \\ \kappa_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{A,0} & R_{B,0} \\ R_{B,0} & R_{I,0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_{A,0} R_{I,0} - R_{B,0}^2} \begin{bmatrix} R_{I,0} & -R_{B,0} \\ -R_{B,0} & R_{A,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix}$$

$$R_{A,0} = E_{c0} A_c + E_s A_s = E_{c0} (1 + \rho n_0) = 19\,200 \text{ MN}$$

$$R_{B,0} = E_{c,0} m_c + E_s m_s = 0 - 480 = -480 \text{ MN.m}$$

$$R_{I,0} = E_{c,0} I_c + E_s I_s = 1750 + 192 = 1\,692 \text{ MN.m}^2$$

On en déduit :

$$\varepsilon_{g,0} = -5.305 \times 10^{-4} ; \kappa_0 = -3.869 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Les contraintes béton en fibres extrêmes :

$$\sigma_{cs} = -21.72 \text{ MPa} ; \sigma_{ci} = -10.11 \text{ MPa (compression)}$$

Contrainte dans l'armature :

$$\sigma_s = -75.15 \text{ MPa (compression)}$$

Efforts repris au temps  $\tau_0$  par les matériaux :

- Béton :  $N_{c,0} = \int \sigma_c dS = -9,549 \text{ MN}$  ;  $M_{c,0} = \frac{(\sigma_{cs} - \sigma_{ci})bh^2}{12} = -0.580 \text{ MN.m}$
- Armatures :  $N_{s,0} = A_s \sigma_s = -0.451 \text{ MN}$  ;  $M_{s,0} = A_s \sigma_s y_s = 0.180 \text{ MN.m}$

On retrouve bien :

$$\begin{aligned} N_e &= N_{c,0} + N_{s,0} = -10 \text{ MN} \\ M_e &= M_{c,0} + M_{s,0} = -0.40 \text{ MN.m} \end{aligned}$$

Calcul des déformations et contraintes au temps t :

$$\lambda = \left( \frac{(1-\chi)\varphi(t,\tau_0)}{1+\chi\varphi(t,\tau_0)} \right) = 0.154 ; E_{c,a} = \frac{E_c(\tau_0)}{1+\chi(t,\tau_0)\varphi(t,\tau_0)} = 11\,538 \text{ MPa} ; n_a = \frac{E_s}{E_{c,a}} = 17.33$$

$$\begin{aligned} R_A &= E_{ca}A_c + E_sA_s = E_{ca}(1 + \rho n_a) = 8123 \text{ MN} \\ R_B &= E_{ca}m_c + E_s m_s = 0 - 480 = -480 \text{ MN.m} \\ R_I &= E_{ca}I_c + E_s I_s = 577 + 192 = 769 \text{ MN.m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{e,eff} &= N_e + E_{c,a}A_c \varepsilon_{sh} + \lambda N_{c,0} = -10 - 2.077 + 0.154 \times (-9.549) = -13,546 \text{ MN} \\ M_{e,eff} &= M_e + E_{c,a}m_c \varepsilon_{sh} + \lambda M_{c,0} = -0.4 + 0 + 0.154 \times (-0.580) = -0.489 \text{ MN.m} \end{aligned}$$

L'inversion du système :

$$\begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

Donne :

$$\varepsilon_{g,t} = -17,71 \times 10^{-4} ; \kappa_0 = -17,42 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

On constate ainsi que le raccourcissement au niveau du cdg a été multiplié par 3.34 et la courbure multipliée par 4.5.

La contrainte dans les fibres supérieure et inférieure est :

$$\begin{aligned} \sigma_{cs} &= E_{c,a}(\varepsilon_c(0.5h) - \varepsilon_{sh}) - \lambda \sigma_{cs,0} = 1,1538 \times (-17,71 - 0.5 \times 17,42 + 3) + 0,154 \times 21,72 = -23.67 \text{ MPa.} \\ \sigma_{ci} &= E_{c,a}(\varepsilon_c(-0.5h) - \varepsilon_{sh}) - \lambda \sigma_{ci,0} = 1,1538 \times (-17,71 + 0.5 \times 17,42 + 3) + 0,154 \times 10,11 = -5.36 \text{ MPa.} \\ \sigma_s &= E_s(\varepsilon_s(y_s)) = 20 \times (-17,71 + 0.4 \times 17,42) = -214.78 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Efforts repris au temps  $t$  par les matériaux :

- Béton :  $N_{c,t} = \int \sigma_c dS = -8.711 \text{ MN}$  ;  $M_{c,t} = \frac{(\sigma_{cs} - \sigma_{ci})bh^2}{12} = -0.915 \text{ MN.m}$
- Armatures :  $N_{s,t} = A_s \sigma_s = -1.289 \text{ MN}$  ;  $M_{s,t} = A_s \sigma_s y_s = 0.515 \text{ MN.m}$

On retrouve bien :

$$\begin{aligned} N_e &= N_{c,t} + N_{s,t} = -10 \text{ MN} \\ M_e &= M_{c,t} + M_{s,t} = -0.40 \text{ MN.m} \end{aligned}$$

Les évolutions des déformations et des contraintes sont illustrées ci-dessous :

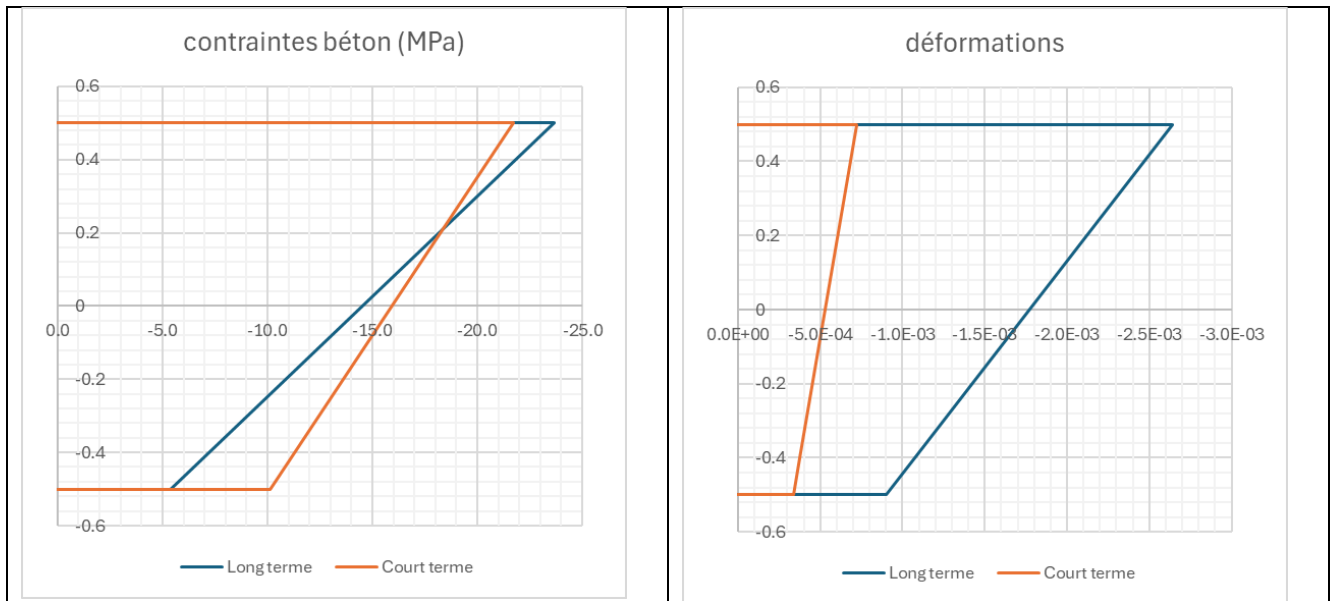


Figure 20 : évolution des contraintes et déformations – flexion composée sans traction avec armatures

On peut faire les commentaires suivants :

- Sous l'effet du fluage et du retrait, la résultante de l'effort normal repris par le béton diminue : passage de 95% de l'effort normal au temps  $\tau_0$  à 87% au temps  $t$  ;
- En revanche, du fait de la courbure plus importante liée au fluage (perte de raideur) et du retrait, bridés tous les deux par l'armature en partie basse, les contraintes aux fibres extrêmes sont exacerbées : la contrainte augmente en fibre supérieure de 2 MPa et diminue de 5 MPa en fibre inférieure.
- La contrainte dans l'armature est multipliée par un facteur 2,33.

Influence de la présence de l'armature sur le comportement de la section :

On reprend l'exemple précédent avec le béton seul, sans armatures. L'évolution des contraintes et déformations est illustrée ci-dessous :

- On y vérifie bien que l'évolution des contraintes dans le béton est inchangée, puisque seul le béton reprend les efforts extérieurs.
- Les déformations du béton sont en revanche amplifiées du fait du fluage et du retrait.

Cet exemple montre bien en quoi les armatures, qui ne sont pas soumises au retrait et au fluage, influent sur la répartition des contraintes dans le béton et les déformations.

| Section comprimée - Fleion composée - Méthode du coefficient de vieillissement |           |                         |                             |            |                         |                        |                 |     |
|--|-----------|-------------------------|-----------------------------|------------|-------------------------|------------------------|-----------------|-----|
| Données  |           | Résultats à court terme |                             |            | Résultats à terme terme |                        |                 |     |
| <b>-&gt; béton</b>   |           |                         |                             |            |                         |                        |                 |     |
| b  | 0.600     | m                       |                             |            | Ec,a                    | 11 538                 | MPa             |     |
| h  | 1.000     | m                       |                             |            | $\lambda$               | 0.154                  |                 |     |
| Ac   | 0.600     | m <sup>2</sup>          | n                           | 6.67       | na                      | 17.33                  |                 |     |
| Ec(to)   | 30 000    | MPa                     | $\varepsilon_{g,0}$         | -5.556E-04 | $\varepsilon_{g,t}$     | -1.967E-03             |                 |     |
| Ec(t)  | 35 000    | MPa                     | $\kappa_0$                  | -2.667E-04 | $\kappa t$              | -8.000E-04             | m <sup>-1</sup> |     |
| $\varphi(t,t_0)$   | 2.000     |                         | contrainte béton (conv. GC) |            |                         |                        |                 |     |
| $\chi$   | 0.800     |                         | $\sigma_c, \text{sup}$      | -20.67     | MPa                     | $\sigma_c, \text{sup}$ | -20.67          | MPa |
| $\varepsilon_{sh}(t,td)$   | -3.00E-04 |                         | $\sigma_c, \text{inf}$      | -12.67     | MPa                     | $\sigma_c, \text{inf}$ | -12.67          | MPa |
| <b>-&gt; Armatures</b>   |           |                         |                             |            |                         |                        |                 |     |
| As   | 0.000     | m <sup>2</sup>          | $\sigma_s$                  | -89.78     | MPa                     | $\sigma_s$             | -329.33         | MPa |
| ys   | -0.400    | m                       | contrainte armatures        |            |                         |                        |                 |     |
| Es   | 200 000   | MPa                     | Nc                          | -10.00     | MN                      | Nc                     | -10.00          | MN  |
| <b>-&gt; Efforts extérieurs</b>  |           |                         |                             |            |                         |                        |                 |     |
| Ne   | -10.000   | MN                      | Ns                          | 0.00       | MN                      | Ns                     | 0.00            | MN  |
| Me   | -0.400    | MN.m                    | Total                       | -10.00     | MN                      | Total                  | -10.00          | MN  |

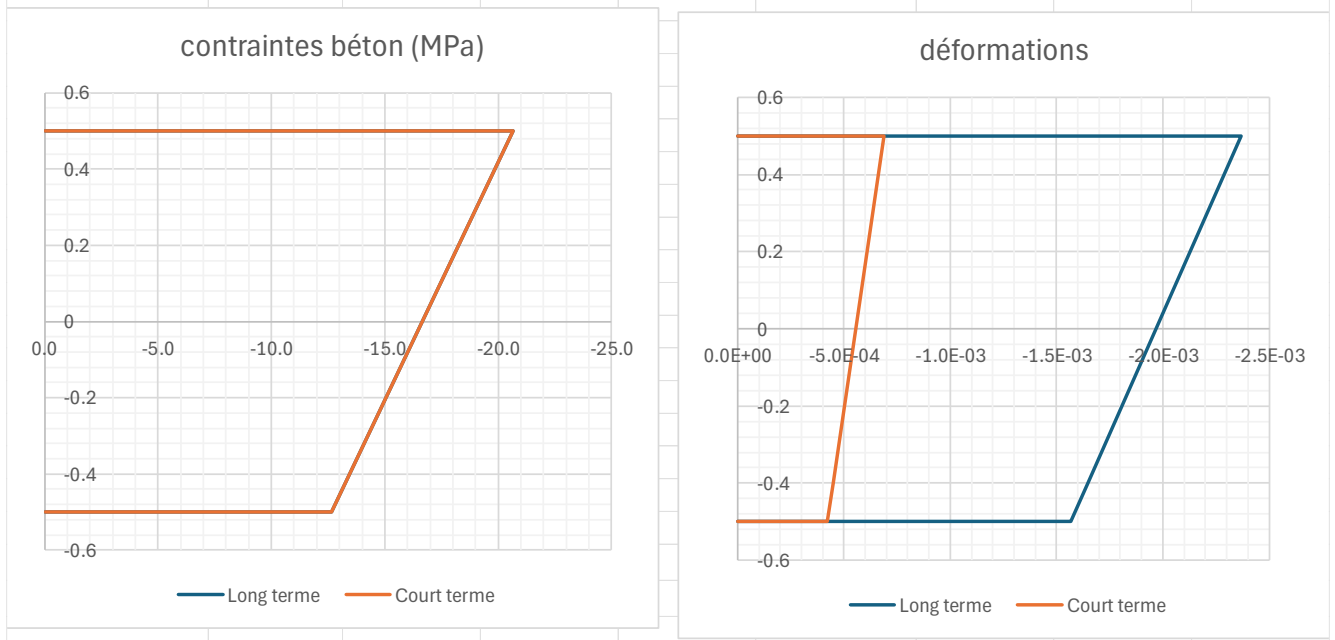


Figure 21 : évolution des contraintes et déformations – flexion composée sans traction sans armatures

## 6. ANALYSE DES SECTIONS – SECTIONS FISSURÉES

### 6.1 Généralités

De manière générale, la fissuration du béton aura pour effet d'assouplir les structures, entraînant une augmentation des flèches.

Au niveau de la section, la fissuration a également pour effet de modifier la position de l'axe neutre : dans une section rectangulaire, elle se situe à mi-hauteur. Dans une section armée dans sa partie inférieure, elle se situe au-dessus du centre de gravité.

Le retrait et le fluage ont également pour effet de modifier la position de l'axe neutre de la section fissurée, comme montré, pour le cas du fluage, au § 3.5.2.

Il est important de distinguer le domaine d'influence du retrait et du fluage :

- Le retrait affecte toute la section, même la zone tendue. Cela se justifie par le fait que le béton a une résistance à la traction, et qu'un tirant en béton non armé, bloqué à ses extrémités, ne fissure que lorsque le retrait est supérieur à  $f_{ct}/E_c$ , de l'ordre  $10^{-4}$ . Par ailleurs, dans le cas du béton armé, le béton qui fait son retrait est adhérent aux armatures, il conserve par là une capacité à réduire son volume en entraînant les armatures en compression.
- En revanche, le fluage n'intéresse que la partie du béton qui reste comprimé : la zone tendue n'est soumise à aucune contrainte et ne subit donc pas le phénomène de fluage.

## 6.2 Equations constitutives

On garde l'hypothèse que les sections planes restent planes. En conséquence, la déformation des fibres béton et aciers suit la loi :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_G + \kappa y$$

La déformation des fibres de béton a pour composantes :

$$\varepsilon_c(y) = \varepsilon_e(y) + \varepsilon_{cr}(y) + \varepsilon_{sh} = (1 + \varphi)\varepsilon_e(y) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_c(y)}{E_{c,eff}} + \varepsilon_{sh}$$

La contrainte dans le béton a pour expression :

$$\sigma_c(y) = E_{c,eff}(\varepsilon_c(y) - \varepsilon_{sh}) = E_{c,eff}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh})$$

La contrainte dans les aciers a pour expression :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = E_s(\varepsilon_G + \kappa y_s)$$

Si on soumet la section à des efforts extérieurs  $N_e$ ;  $M_e$ , ils sont équilibrés par le développement des contraintes dans le béton et les armatures. Les efforts internes ont pour expressions :

$$N_i = \int_{A_c} \sigma_c dA + \sum \sigma_s A_s = \int_{A_c} E_{c,eff}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) dA + \sum A_{si} E_s (\varepsilon_G + \kappa y_{si})$$

Où  $A_c$  est l'aire de béton comprimé.

Soit :

$$N_i + E_{c,eff} A_c \varepsilon_{sh} = (E_{c,eff} A_c + A_s E_s) \varepsilon_G + (E_{c,eff} m_c + A_s E_s m_s) \kappa$$

Où

$m_c, m_s$  sont les moments statiques de l'aire de béton comprimé et des armatures par rapport au cdg de la section.

On peut noter, comme précédemment :

$$N_i + N_{sh} = R_A \varepsilon_G + R_B \kappa$$

Avec  $N_{sh} = E_{c,eff} A_c \varepsilon_{sh}$

De même, le moment intérieur équilibré par les contraintes des matériaux vaut :

$$M_i = \int_{A_c} \sigma_c y dA + \sum \sigma_s y_{si} A_{si} = \int_{A_c} E_{c,eff}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) y dA + \sum A_{si} E_s (\varepsilon_G + \kappa y_{si}) y_{si}$$

Soit :

$$M_i + E_{c,eff} m_c \varepsilon_{sh} = (E_{c,eff} m_c + A_s E_s m_s) \varepsilon_G + (E_{c,eff} I_c + E_s I_s) \kappa$$

Où  $I_c$  et  $I_s$  sont les inerties de l'aire du béton comprimé et des armatures par rapport au cdg de la section.

On peut noter, comme précédemment :

$$M_i + M_{sh} = R_B \varepsilon_G + R_I \kappa$$

Avec  $M_{sh} = E_{c,eff} m_c \varepsilon_{sh}$

Sachant que  $N_i = N_e$  et  $M_i = M_e$ , le système s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_e + N_{sh} \\ M_e + M_{sh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

Ce système d'équation permet d'en déduire les paramètres de déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_e + N_{sh} \\ M_e + M_{sh} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_A R_I - R_B^2} \begin{bmatrix} R_I & -R_B \\ -R_B & R_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_e + N_{sh} \\ M_e + M_{sh} \end{Bmatrix}$$

Puis les contraintes dans les matériaux.

$$\begin{aligned} \sigma_c(y) &= E_{c,eff}(\varepsilon_c(y) - \varepsilon_{sh}) = E_{c,eff}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) \\ \sigma_s &= E_s \varepsilon_s = E_s(\varepsilon_G + \kappa y_s) \end{aligned}$$

Les déformations  $\varepsilon_G$ ;  $\kappa$  obtenues par ce système d'équations supposent cependant que l'on connaisse la position de l'axe neutre ( $y_n$ ) ou la profondeur de l'axe neutre ( $x$ ). Une troisième équation est ici mobilisable : au niveau de l'axe neutre, la contrainte est nulle :

$$\sigma(y_n) = 0 \Rightarrow \varepsilon_G + \kappa y_n - \varepsilon_{sh} = 0$$

On a donc trois paramètres pour trois équations, il est donc possible de déterminer le champ de contrainte et de déformations dans la section.

Comme on peut le constater, les équations établies ont un caractère tout à fait général, elles reposent sur l'hypothèse de Navier et le comportement élastique des matériaux. Seules les quantités  $A_c, m_c, I_c$  donc les raideurs peuvent varier selon le caractère fissuré ou non de la section.

### 6.3 Mises en application

#### 6.3.1 Application : section armée soumise au seul retrait

On considère une section 60cm x 100cm ht armée à 1% d'armatures à l'ordonnée  $y_s = -0.40m$ . La section est soumise au retrait de  $\varepsilon_{sh} = -3 \times 10^{-4}$ . Le module du béton vaut 30 000 MPa.

Calcul en section non fissurée :

$$\begin{aligned} R_A &= A_c E_c + A_s E_s = 18000 + 1200 = 19200 \text{ MN} \\ R_B &= m_c E_c + m_s E_s = 0 - 480 = -480 \text{ MN.m} \\ R_I &= I_c E_c + I_s E_s = 1500 + 192 = 1690 \text{ MN.m}^2 \\ N_{sh} &= -5.40 \text{ MN} \\ M_{sh} &= 0 \end{aligned}$$

L'inversion du système donne :

$$\varepsilon_G = -2.833 \times 10^{-4} ; \kappa = -8.036 \times 10^{-5} m^{-1}$$

On en déduit les contraintes béton en fibres extrêmes et les contraintes dans l'armature :

$$\begin{aligned} \sigma_{cs} &= E_c(\varepsilon_G + \kappa(0.5h) - \varepsilon_{sh}) = -0,70 \text{ MPa (compression)} \\ \sigma_{ci} &= E_c(\varepsilon_G - \kappa(0.5h) - \varepsilon_{sh}) = 1,71 \text{ MPa (traction)} \\ \sigma_s &= E_s(\varepsilon_G + \kappa y_s) = -50,22 \text{ MPa (compression)} \end{aligned}$$

Résultante des efforts axiaux dans le béton et l'armature :

$$N_c = 0.30 \text{ MN} ; N_s = -0.30 \text{ MN}$$

Moments internes dans les matériaux :

$$M_{ci} = -0.121 \text{ MN.m} ; M_{si} = +0.121 \text{ MN.m}$$

Les efforts dans la section forment un système autoéquilibré : traction dans le béton, compression dans l'armature, la somme des efforts internes étant nulle. L'évolution des contraintes et déformations est illustrée ci-dessous :

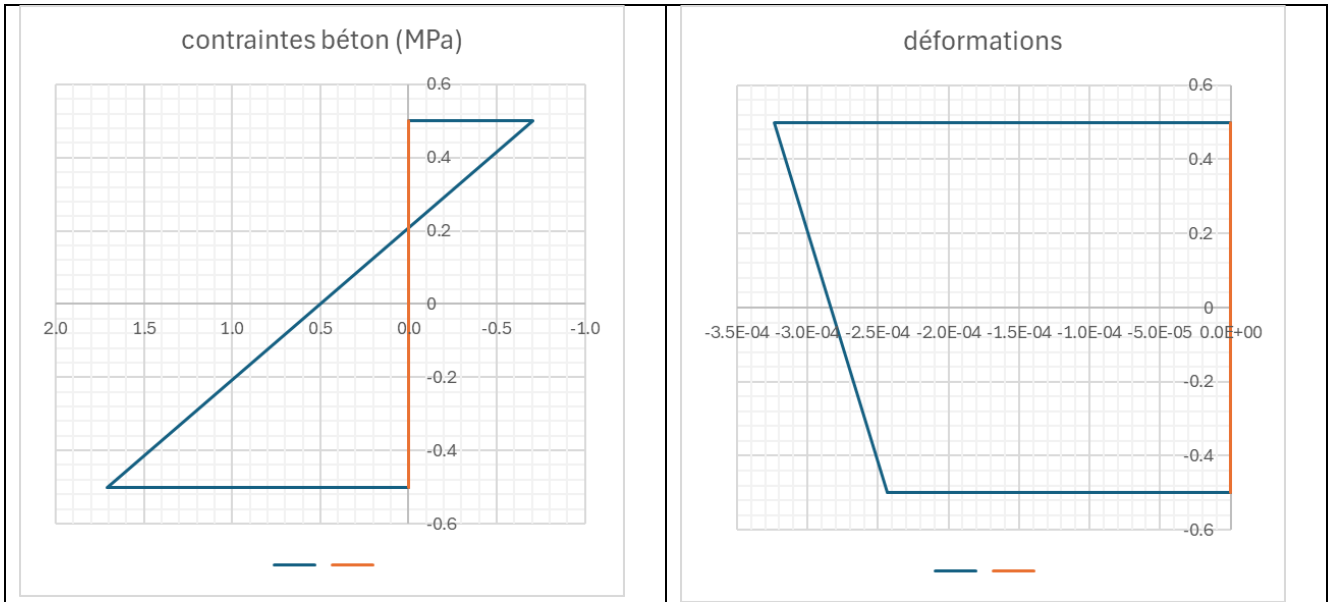


Figure 22 : contraintes et déformation de la section armée sous retrait seule – section non fissurée

### Calcul en section fissurée :

Les inconnues du problème sont :

- La profondeur de l'axe neutre  $x$ ,
- La déformée au niveau du centre de gravité  $\varepsilon_G$
- La courbure de la section  $\kappa$

On note  $y_n$  l'ordonnée de l'axe neutre, par rapport au centre de gravité.

On dispose de 3 équations :

$$\begin{aligned} N_e &= N_i = 0 \\ M_e &= N_i = 0 \\ \sigma(y_n) &= 0 \end{aligned}$$

La déformation du béton est donnée par :

$$\varepsilon_c(y) = \varepsilon_e(y) + \varepsilon_{cr}(y) + \varepsilon_{sh} = (1 + \varphi)\varepsilon_e(y) + \varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_c(y)}{E_{c,eff}} + \varepsilon_{sh} = \varepsilon_G + \kappa y$$

Soit :

$$\sigma_c(y) = E_{c,eff}(\varepsilon_c(y) - \varepsilon_{sh}) = E_{c,eff}(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh})$$

Au niveau de l'axe neutre, la contrainte est nulle, ce qui donne une relation entre  $y_n$ ,  $\varepsilon_G$  et  $\kappa$  :

$$\sigma(y_n) = 0 \Rightarrow \varepsilon_G + \kappa y_n - \varepsilon_{sh} = 0$$

Exprimons l'équilibre axial de la section :

$$N_{ci} = \int_{y_n}^v b \sigma_c(y) dy = b E_c (\varepsilon_G - \varepsilon_{sh})(v - y_n) + \frac{b E_c \kappa}{2} [v^2 - y_n^2]$$

Or, d'après la nullité de la contrainte au niveau de l'axe neutre :

$$\varepsilon_G - \varepsilon_{sh} = -\kappa y_n$$

Il vient alors :

$$N_{ci} = b E_c \kappa (y_n^2 - v y_n) + \frac{b E_c \kappa}{2} [v^2 - y_n^2] = \frac{b E_c \kappa}{2} (v^2 - 2v y_n + y_n^2) = \frac{b E_c \kappa}{2} (v - y_n)^2 = \frac{b E_c \kappa}{2} x^2$$

De même, pour l'armature :

$$N_{si} = E_s A_s (\varepsilon_G + \kappa y_s) = E_s A_s \varepsilon_s$$

Où l'on peut exprimer la courbure en fonction de la déformation de l'armature et sa distance à l'AN :

$$\kappa = -\frac{\varepsilon_s}{d - x}$$

Où  $d$  est la hauteur utile de l'armature. Ainsi :

$$N_{si} = -E_s A_s (d - x) \kappa$$

La somme des efforts axiaux dans les matériaux vaut donc :

$$N_i = N_{ci} + N_{si} = \frac{b E_c \kappa}{2} x^2 - E_s A_s (d - x) \kappa = 0$$

La profondeur de l'axe neutre est donnée par l'équation :

$$\frac{b x^2}{2} - n A_s (d - x) = 0$$

On retrouve l'équation canonique qui permet de déterminer la position de l'AN à savoir la nullité du moment statique. Le retrait ne modifie pas la position de l'AN.

La résolution de l'équation du second degré, ou l'estimation par un algorithme de calcul, donne :

$$x = 0,287m, \text{ soit } y_n = 0,214m$$

Calcul en section fissurée :

$$A_c = 0.172m^2; m_c = \frac{b}{2}(v^2 - y_n^2) = 0.0613m^3; I_c = \frac{b}{3}(v^3 - y_n^3) = 0.0230m^4$$

$$R_A = A_c E_c + A_s E_s = 5150 + 1200 = 6350 \text{ MN}$$

$$R_B = m_c E_c + m_s E_s = 1838 - 480 = 1358 \text{ MN.m}$$

$$R_I = I_c E_c + I_s E_s = 691 + 192 = 883 \text{ MN.m}^2$$

$$N_{sh} = -1.545 \text{ MN}$$

$$M_{sh} = -0.551 \text{ MN.m}$$

L'inversion du système permet de déterminer les déformations :

$$\begin{Bmatrix} N_{sh} \\ M_{sh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_G = -1.636 \times 10^{-4} \\ \kappa = -3.728 \times 10^{-4} m^{-1} \end{Bmatrix}$$

La contrainte en fibre supérieure vaut :

$$\sigma_{cs} = E_c (\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) = -1.50 \text{ MPa (compression)}$$

La contrainte dans l'armature vaut :

$$\sigma_s = E_s (\varepsilon_G + \kappa y_s) = -2.88 \text{ MPa (compression)}$$

Les contraintes et déformations sont illustrées ci-dessous :

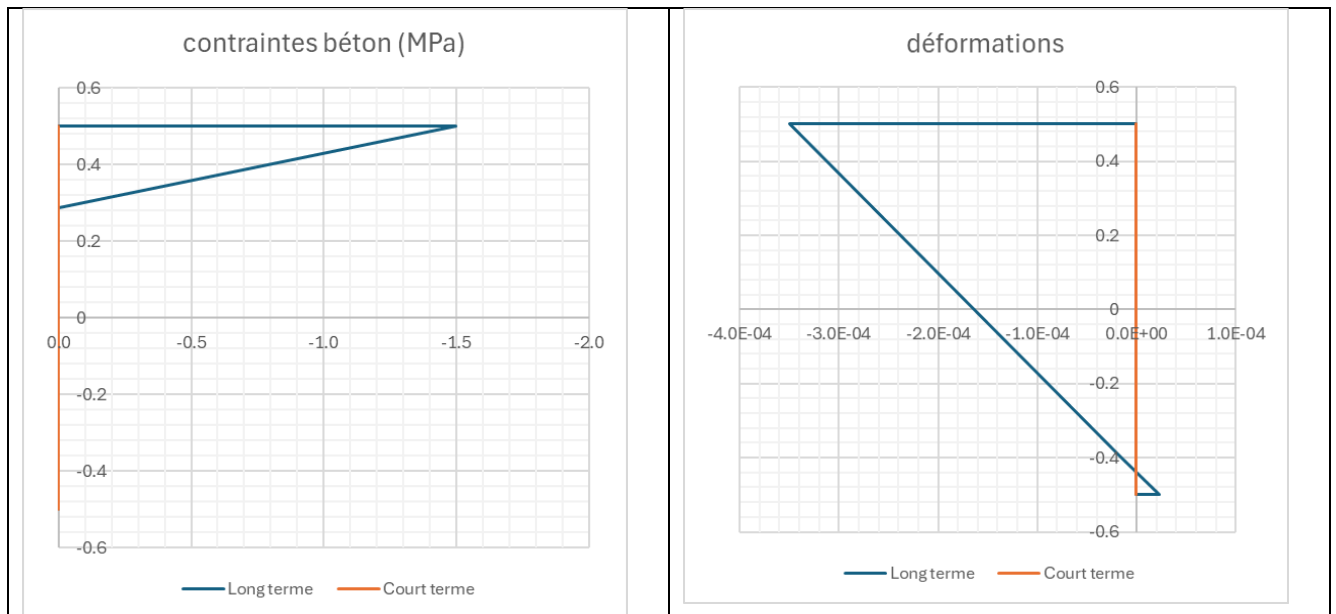


Figure 23 : contraintes et déformation de la section armée sous retrait seule – section fissurée

Résultante des efforts axiaux dans le béton et l'armature :

$$N_c = 0.17 \text{ MN}; N_s = -0.17 \text{ MN}$$

Moments internes dans les matériaux :

$$M_{ci} = -0.007 \text{ MN.m}; M_{si} = +0.007 \text{ MN.m}$$

En comparant les résultats avec la section non fissurée, on pourra noter que :

- La déformation moyenne est moins importante,
- La courbure est nettement plus importante, cela est dû par l'inertie fissurée de la section, qui est bien plus faible ( $RI = 883 \text{ MN.m}^2$  en section fissurée vs  $RI = 1692 \text{ MN.m}^2$  en section non fissurée).

### 6.3.2 Application : section armée soumise au retrait, au fluage et à un moment fléchissant

On reprend l'exemple précédent. Au temps  $\tau_0$ , la section est soumise à un moment  $M = -0.4 \text{ MN.m}$  (compression de la fibre supérieure ici) avec un module  $E_c = 30\,000 \text{ MPa}$  et sans prise en compte de retrait ni de fluage. Au temps  $t$ , la section aura subi un retrait de  $\varepsilon_{sh} = -3 \times 10^{-4}$  et un fluage  $\varphi = 2$  et un coefficient de vieillissement  $\chi = 0,8$ . L'objectif est de calculer l'évolution des contraintes et déformations dans la section au temps  $\tau_0$  et au temps  $t$ .

Calcul au temps  $\tau_0$  :

La position de l'AN est donnée par l'équation :

$$\frac{bx^2}{2} - nA_s(d - x) = 0 \Rightarrow x = 0,286m$$

(même calcul que précédemment).

Les paramètres de raideurs  $R_A, R_B, R_I$  calculé au § précédent sont inchangés.

L'inversion du système donne

$$\begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_G = 1.443 \times 10^{-4} \\ \kappa = -6.748 \times 10^{-4} m^{-1} \end{cases}$$

La contrainte en fibre supérieure vaut :

$$\sigma_{cs} = E_c(\varepsilon_G + \kappa y - \varepsilon_{sh}) = -5,79 \text{ MPa (compression)}$$

La contrainte dans l'armature vaut :

$$\sigma_s = E_s(\varepsilon_G + \kappa y_s) = -82,85 \text{ MPa (compression)}$$

Calcul au temps  $t$  :

On applique le même principe que pour les sections non fissurées : voir §5.3.4.

Hypothèse : on fait l'hypothèse que la position de l'AN est inchangée. Cela est en toute rigueur faux, mais comme évoqué par Gilbert et al. [R4] ou Ghali et al. [R5], l'erreur est faible et de faible importance pratique.

$$E_{c,a} = \frac{E_{c0}}{1+\chi\varphi} = 11\,538 ; n_a = 17,33 ; \lambda = \left( \frac{(1-\chi)\varphi(t,\tau_0)}{1+\chi\varphi(t,\tau_0)} \right) = 0,154$$

Rappel :

On note

$$\begin{aligned} N_{e,eff} &= N_e + E_{c,a}A_c\varepsilon_{sh} + \lambda N_{c,0} \\ M_{e,eff} &= M_e + E_{c,a}m_c\varepsilon_{sh} + \lambda M_{c,0} \end{aligned}$$

$$E_{c,a}A_c\varepsilon_{sh} = 11\,538 \times 0,172 \times - \times 10^{-4} = -0,594 \text{ MN}$$

$$N_{c,0} = -0,497 \text{ MN}$$

$$N_{eff} = E_{c,a}A_c\varepsilon_{sh} + \lambda N_{c,0} = -0,671 \text{ MN}$$

$$E_{c,a}m_c\varepsilon_{sh} = 11\,538 \times 0,0613 \times (-3 \times 10^{-4}) = -0,212 \text{ MN.m}$$

$$M_{c,0} = -0,201 \text{ MN.m}$$

$$M_{eff} = M_e + E_{c,a}m_c\varepsilon_{sh} + \lambda M_{c,0} = -0,4 - 0,212 + 0,154 \times (-0,201) = -0,643 \text{ MN.m}$$

Il vient :

$$\begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & R_B \\ R_B & R_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

Avec :

$R_A = 6350 \text{ MN} ; R_b = 1358 \text{ MN.m} ; R_I = 883 \text{ MN.m}^2$  (voir § précédent).

On obtient un système tout à fait similaire à celui développé pour l'instant  $\tau_0$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{G,t} \\ \kappa_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{A,t} & R_{B,t} \\ R_{B,t} & R_{I,t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{e,eff} \\ M_{e,eff} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_G = 1.147 \times 10^{-4} \\ \kappa = -1.348 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \end{cases}$$

Il est alors possible de déterminer les contraintes dans les matériaux :

$$\begin{aligned} \sigma_{c,t}(y) &= E_{c,a} (\varepsilon_{G,t} + \kappa_t y - \varepsilon_{sh}(t)) - \lambda \sigma_c(\tau_0) = -6.53 \text{ MPa (compression)} \\ \sigma_s &= E_s (\varepsilon_{G,t} + \kappa_t y_s) = 84,87 \text{ MPa (traction)} \end{aligned}$$

On pourra noter qu'au niveau de l'AN fixé pour sans prise en compte du fluage et du retrait, la contrainte dans le béton vaut :  $\sigma_c(y_n) = -1,19 \text{ MPa (compression)}$ . On voit ainsi que l'axe neutre est en réalité plus bas.

Les contraintes et déformations sont illustrées ci-dessous :

| Fleion composée - Méthode du coefficient de vieillissement - section fissurée |           |                |                             |                            |                         |                            |     |
|---|-----------|----------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|-----|
| Données   |           |                |                             | Résultats à court terme    | Résultats à terme terme |                            |     |
| <b>-&gt; béton</b>  |           |                |                             |                            |                         |                            |     |
| b   | 0.600     | m              | x                           | 0.286 m                    | $E_{c,a}$               | 11 538                     | MPa |
| h   | 1.000     | m              | y                           | 0.214 m                    | $\lambda$               | 0.154                      |     |
| Ac  | 0.600     | m <sup>2</sup> | n                           | 6.67                       | na                      | 17.33                      |     |
| $E_c(\tau_0)$   | 30 000    | MPa            | $\varepsilon_{g,0}$         | 1.443E-04                  | $\varepsilon_{g,t}$     | -1.147E-04                 |     |
| $E_c(t)$  | 35 000    | MPa            | $\kappa_0$                  | -6.748E-04 m <sup>-1</sup> | $\kappa t$              | -1.348E-03 m <sup>-1</sup> |     |
| $\varphi(t,\tau_0)$   | 2.000     |                | contrainte béton (conv. GC) |                            |                         |                            |     |
| $\chi$  | 0.800     |                | $\sigma_c, \text{sup}$      | -5.79 MPa                  | $\sigma_c, \text{sup}$  | -6.53 MPa                  |     |
| $\varepsilon_{sh}(t,\tau_0)$  | -3.00E-04 |                | $\sigma_c(y_n)$             | 0.000 MPa                  | $\sigma_c(y_n)$         | -1.188 MPa                 |     |
| <b>-&gt; Armatures</b>  |           |                |                             |                            |                         |                            |     |
| As  | 0.006     | m <sup>2</sup> | $\sigma_s$                  | 82.85 MPa                  | $\sigma_s$              | 84.87 MPa                  |     |
| ys  | -0.400    | m              | contrainte armatures        |                            |                         |                            |     |
| Es  | 200 000   | MPa            | Nc                          | -0.497 MN                  | Nc                      | -0.509 MN                  |     |
| <b>-&gt; Efforts extérieurs</b>   |           |                |                             |                            |                         |                            |     |
| Ne  | 0.000     | MN             | Ns                          | 0.497 MN                   | Ns                      | 0.509 MN                   |     |
| Me  | -0.400    | MN.m           | Total                       | 0.000 MN                   | Total                   | 0.000 MN                   |     |

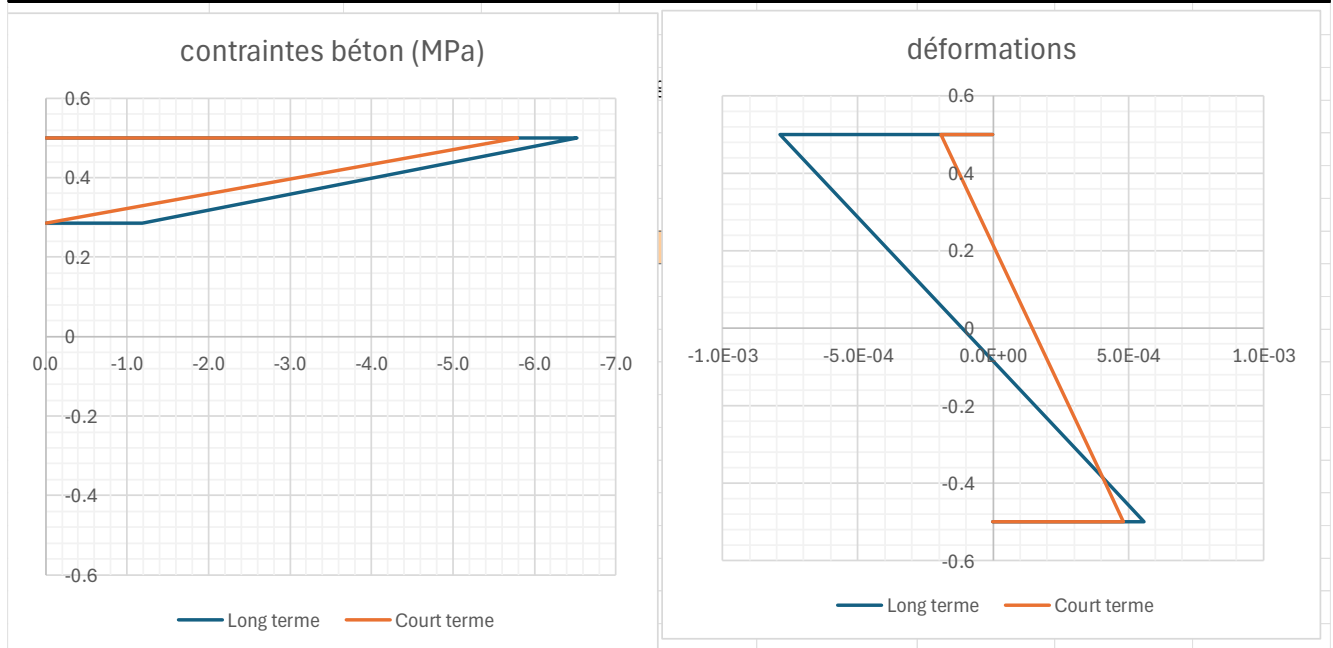


Figure 24 : contraintes et déformations – flexion simple avec retrait et fluage

Remarque : si on fait un calcul sans prise en compte du retrait, mais uniquement avec le fluage, la contrainte dans l'acier passe de 82.85 MPa à court terme ( $x=0.214m$ ) à 87,4 MPa ( $x=0.412m$ ). En gardant la position de l'AN inchangée entre  $t_0$  et  $t$ , la contrainte dans les armatures passe de 82,85 MPa à 86,01 MPa. On voit que si l'erreur est significative sur la profondeur de l'AN, elle a cependant peu d'effet sur la contrainte dans l'armature (erreur de 1 à 2%) : c'est ce qui justifie que l'on garde la position de l'axe neutre inchangée entre  $t_0$  et  $t$ .

## 7. ANALYSE DES STRUCTURES

### 7.1 Impacts des effets différés sur les structures

Le retrait et le fluage ont un impact sur l'évolution des contraintes au sein d'une même section. Les exemples précédents ont montré plus particulièrement l'importance de la présence du ferrailage sur le comportement des sections : une section non ferrillée ou symétriquement ferrillée n'engendre ainsi pas de courbure ; à l'inverse une section ferrillée par un seul acier placée en dehors de la fibre moyenne subit une courbure induite par le retrait gêné par l'armature.

A l'échelle d'une structure, l'hétérogénéité du ferrailage dans les poteaux et poutres entraînent des disparités des raideurs axiales et d'inerties fissurées. Le comportement en termes de déflexion et d'efforts internes (N,T,M) en est ainsi affecté et les résultats peuvent s'écarter de manière notable des résultats donnés par l'élasticité linéaire. De même que les armatures empêchent la libre déformation des sections, des liaisons redondantes empêchent la libre déformation des éléments. Ces liaisons redondantes (structures hyperstatiques) évoluent dans le temps du fait de l'évolution des raideurs des éléments ( $E_{c0}I_{c0} \Rightarrow E_{c,eff}I_{c,eff}$ ) y compris sous l'effet d'un chargement constant. L'évolution des caractéristiques des matériaux a donc une influence sur l'évolution des efforts internes, au contraire d'une structure isostatique qui voit ses déformations augmenter du fait de l'assouplissement de la structure, à chargement constant, et ne voit pas ses efforts internes évoluer.

Un autre facteur a également une importance notable sur l'évolution des efforts internes dans une structure : il s'agit de l'histoire de la construction (phasage) : au cours de sa construction, un ouvrage voit ses raideurs évoluer progressivement vers les raideurs finales de l'ouvrage. L'âge des différents composants a une influence sur la raideur (le module d'Young augmente avec l'âge, le fluage modifie la position de l'axe neutre des sections, les liaisons entre éléments de structure empêchent progressivement le retrait des éléments précédemment coulés, etc. Tous ces aspects montrent que le phasage de construction peut entraîner une répartition des efforts internes qui s'éloigne également de manière significative de celles résultant d'un calcul linéaire non phasé.

Ces deux aspects sont traités par la suite au travers de quelques exemples.

### 7.2 Effet du retrait sur un portique (section non fissurée)

On considère un portique en béton armé, dont les montants et la traverse ont même section et inertie :  $b = 0,6m$  ;  $h = 1m$  ,  $\varphi = 2$  ;  $\chi = 0,8$ ,  $E_{c,0} = 30\,000\,MPa$  ;  $E_{ca} = 11\,538\,MPa$  .  $L = h = 5m$

Le béton est soumis à un retrait uniforme égale à  $\varepsilon_{sh} = -3 \times 10^{-4}$ . Cette déformation imposée est modélisée sous forme de variation de température :  $\alpha\Delta T = \varepsilon$ , où  $\alpha = 10^{-5}\,K^{-1}$ . Le retrait correspond ainsi ici à une chute de température de 30°C sur l'ensemble du portique.

La déformée est illustrée ci-dessous :

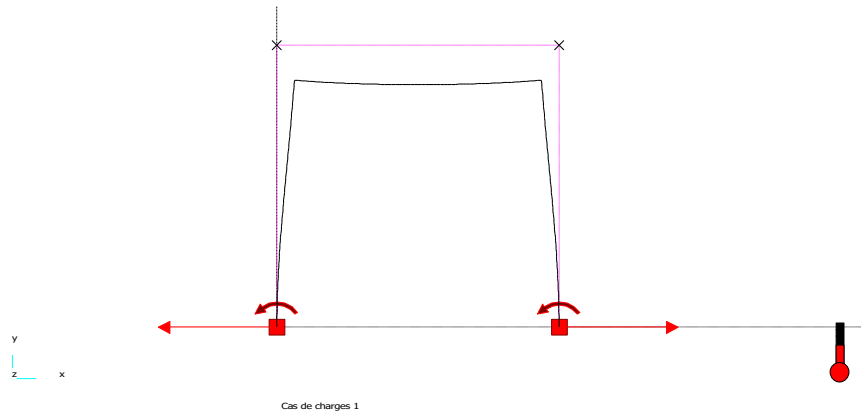


Figure 25 : déformée sous chargement thermique

Dans la mesure où le retrait s'effectue progressivement dans le temps, les effets du fluage sont également intégrés par l'intermédiaire du module d'Young  $E_{ca} = E_{c0}/1 + \chi\phi$ .

Le rétrécissement de la traverse se traduit par une flexion dans les voiles et de la traction dans la traverse, les efforts M et N sont illustrés ci-dessous :

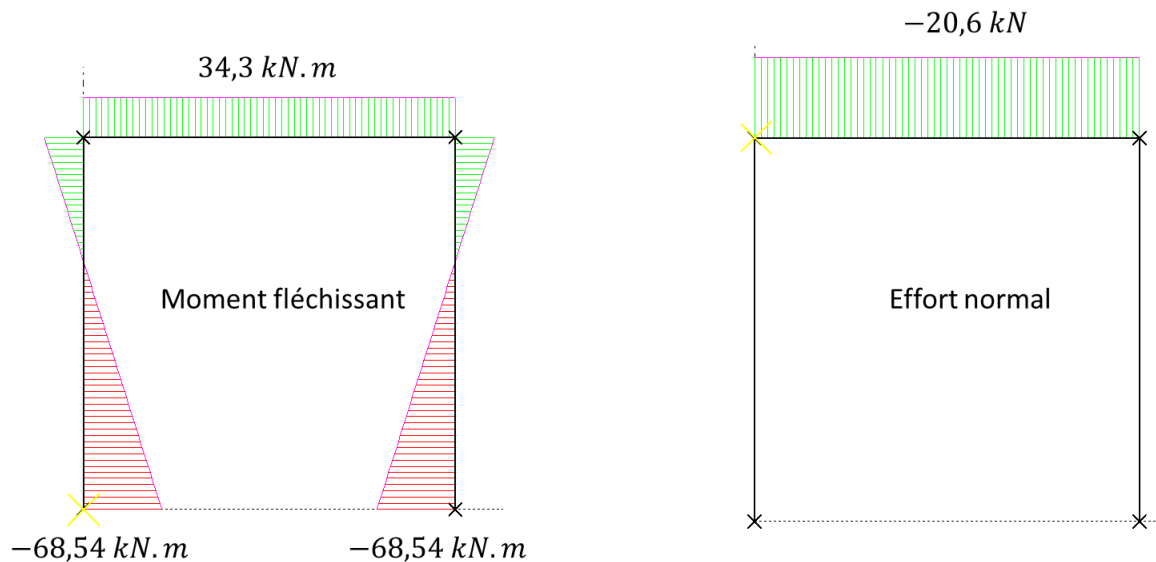


Figure 26 : moment fléchissant et effort normal dans le portique

Remarque : la résolution du système se fait par la méthode matricielle du type

$$\{F\} = [K]\{d\} + \{F^{th}\}$$

Où  $\{F^{th}\}$  est le vecteur des forces nodales équivalent aux effets thermiques. Lorsqu'une poutre est soumise à une variation uniforme de température  $\Delta T_m$  et à un gradient de température  $\Delta T$ , le vecteur des forces nodales aux extrémités d'un élément de poutre e a pour expression :

$$\{F^{th}\}_e = \{-N_{th}; 0; -M_{th}; N_{th}; 0; M_{th}\}^T$$

Avec :

$$N_{th} = EA\alpha\Delta T_m; M_{th} = EI\alpha\frac{EI\alpha\Delta T}{h}$$

Où  $A, I, h$  sont respectivement l'aire, l'inertie et la hauteur de la section transversale.

Les efforts thermiques sont donc proportionnels au module du matériau.

### 7.3 Effet d'une dénivellation d'appui provoquée par le fluage

On considère une poutre sur 3 appuis, la poutre pouvant représenter un plancher continu et les appuis des poteaux d'un immeuble de grande hauteur. On suppose que les poteaux ont une section de  $1\text{m}^2$ , de module 20

000 MPa et une hauteur d'étage de 5m. On suppose que le poteau central supporte une charge de 20MN et les poteaux de rive une charge de 10 MN.

La raideur axiale des poteaux a pour valeur  $K = \frac{EA}{h}$ .

La poutre a même module, de section rectangulaire  $b = 0,6m$  ;  $h = 1m$ , les travées on une longueur  $L = 8m/$

A court terme, on considère  $E_c = 30000 MPa$ , soit  $K = 6000 MN/m$ . Le moment maximal provoqué dans le plancher par le raccourcissement plus important du poteau central 116 kN.m, il est positif.

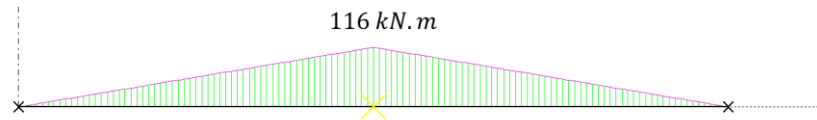


Figure 27 : moment provoqué par une dénivellation d'appui

Ce moment positif peut ainsi soulager le moment négatif sur appui provoqué par le chargement de la poutre.

Remarque : on peut déterminer le moment provoqué par la dénivellation  $\delta$  de l'appui central suivant la méthode des 3 moments par exemple. La rotation à l'extrémité de la travée 1 rendue isostatique vaut  $\omega_1'' = -\delta/L$ . La rotation au même nœud provoquée par le moment hyperstatique vaut  $\Omega_1'' = ML/3EI$ . On déduit par principe de superposition :  $\theta = 0 = \omega_1 + \Omega_1 \Rightarrow M = 3EI\delta/L^2$  avec  $\delta = \delta_1 - \delta_2$  où  $\delta_1$  est le raccourcissement du poteau central :  $\delta_1 = V_1 h/EA$  avec  $V_1 = 20MN$  et  $\delta_2 = V_2 h/EA$  avec  $V_2 = 10MN$ .

#### 7.4 Effet du fluage dans les structures hyperstatiques (sections non fissurées)

Pour illustrer le problème, considérons une poutre AB, de longueur L, d'inertie brute I et de module  $E_c$ . La poutre est simplement appuyée en A et élastiquement encastrée en B par un ressort spiral de raideur K :  $M_B = -K\theta_B$ . La poutre est soumise à un couple C au point A.

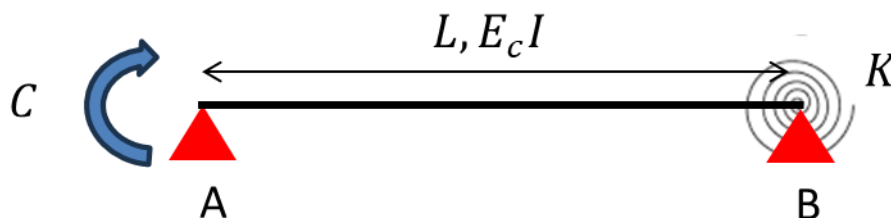


Figure 28 : poutre encastrée élastiquement à une extrémité

La poutre est hyperstatique d'ordre 1. Déterminons les réactions d'appuis en prenant comme inconnue hyperstatique la réaction verticale  $V_A$ .

La translation verticale provoquée par le couple dans la poutre rendue iso vaut :

$$v_{A,iso} = \frac{CL^2}{2EI} + \frac{CL}{K}$$

La translation verticale provoquée par la réaction  $V_A$  vaut :

$$v'_A = \frac{V_A L^3}{3E_c I} + \frac{CL}{K}$$

La nullité de la translation en A permet de déterminer la réaction d'appui :

$$V_A = -\frac{C}{L} \frac{6 + 3\beta}{6 + 2\beta}$$

Où  $\beta = KL/EI$

Le moment en B vaut :

$$M_B = C + V_A L = -C \frac{\beta}{6 + 2\beta}$$

Lorsque  $K \rightarrow \infty$ ,  $M_B \rightarrow -C/2$ , résultat cohérent avec la RDM.

Etudions maintenant l'effet du fluage sur la réaction en B. Lorsque le béton flue, le module  $E_c$  diminue d'un facteur  $1 + \varphi$ , donc le rapport  $\beta$  augmente d'un facteur  $1 + \varphi$ . Le moment à l'encastrement augmente également en valeur absolue et se rapproche de la valeur limite  $-C/2$ . L'assouplissement du béton se traduit ainsi par une augmentation de son degré d'encastrement.

La figure ci-dessous illustre l'évolution du rapport  $|M_B/C|$  en fonction du temps et pour différentes valeurs de  $\beta$  :

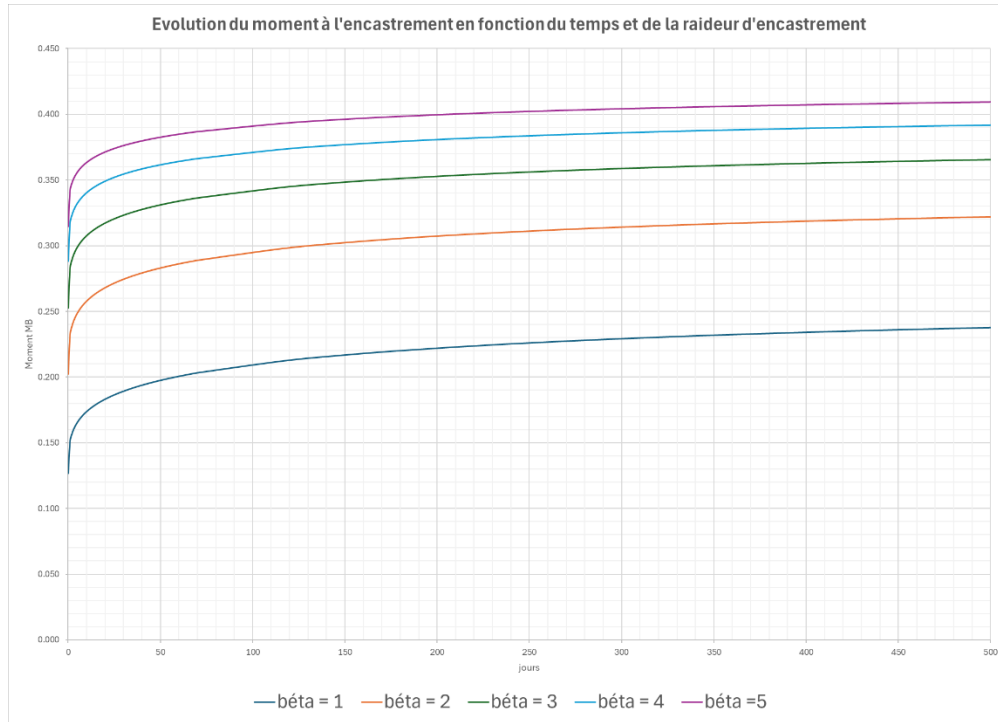


Figure 29 : évolution de l'encastrement pour différentes raideurs relatives et en fonction du temps

Typiquement, une valeur  $\beta = 3$  correspond à la raideur en rotation d'une poutre qui serait placée dans la continuité de B, de même longueur  $L$ , module  $E$  fixe et appuyée à son autre extrémité. Lorsqu'il n'y a pas de fluage,  $M_B = -0.25C$ , et lorsque la poutre AB effectue tout sont fluage, par exemple égal à 2, le moment  $M_B$  tend vers  $-C \times \frac{9}{6+18} = -0.375C$ , soit une augmentation du moment à l'encastrement égale à 50%.

Considérons maintenant un phasage de construction : la poutre est soumise au couple au temps  $t_0$ . Au temps  $t_1 > t_0$  la rotation est bloquée par l'encastrement parfait (raideur  $K = \infty$ ). L'objectif est de déterminer l'évolution du moment en fonction du temps et du fluage.

Pour cela, on procède au principe de superposition.

On considère une première structure isostatique soumise au couple  $C$ . La rotation en B au temps  $t_0$  vaut :

$$\theta_0 = -\frac{CL}{6E_c(t_0)}$$

Cette rotation est amplifiée au cours du temps :

$$\theta(t) = \theta_0(1 + \varphi(t, t_0))$$

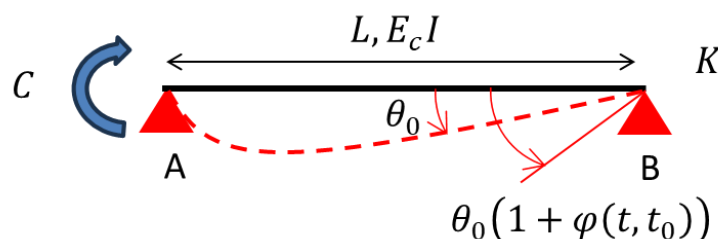


Figure 30 : poutre iso avec fluage libre en B

On considère maintenant la structure avec l'encastrement de raideur  $K$ , actif pour  $t > t_1$  : un moment  $M_B$  se développe progressivement au nœud B sous l'effet du fluage pour bloquer la rotation en B à la valeur rencontrée au temps  $t_1$  :

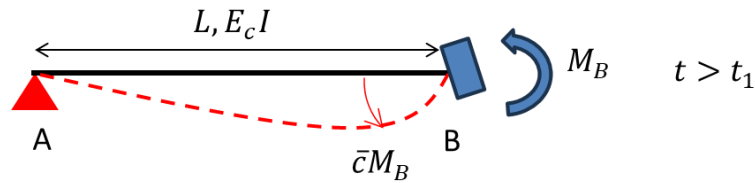


Figure 31 : rotation bloquée au temps  $t_1$

Si la poutre était libre en rotation, sa rotation finale serait égale à  $\theta(t) = \theta_0(1 + \varphi(t, t_0))$ . Le couple  $M_B$  se développe progressivement pour contrecarrer la rotation entre le temps  $t$  et le temps  $t_1$  (puisque l'encastrement est mis en place au temps  $t_1$ ).

La rotation provoquée par un couple en B vaut  $\omega_B = M_B L / 3EI$  selon la RDM. Ici le module d'Young est adapté pour tenir compte du fluage entre  $t_1$  et  $t$  et pour tenir compte de l'apparition progressive du moment provoqué par le fluage. Comme montré précédemment, un moyen commode d'en tenir compte est d'introduire un facteur de vieillissement.

Ainsi la condition de blocage de la rotation s'écrit :

$$\Delta\theta(t) = \theta(t) - \theta(t_1) = \frac{CL}{6E(t_0)I} [\varphi(t; t_0) - \varphi(t_1, t_0)] + M_B \frac{L}{3IE(t_1)\chi(t, t_1)(1 + \varphi(t, t_1))} = 0$$

Soit :

$$M_B = -\frac{CE(t_1)}{2E(t_0)} \frac{\varphi(t; t_0) - \varphi(t_1, t_0)}{\chi(t, t_1)(1 + \varphi(t, t_1))}$$

Remarque : en passant à la limite  $t_1 = t_0 + \varepsilon$ , le moment qui se développe vaut :

$$M_B = -\frac{C}{2} \frac{\varphi(t; t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}$$

Ce qui correspond au moment développé si on bloquait la rotation immédiatement après application du couple  $C$  dans la poutre isostatique.

## 7.5 Effet du retrait sur une poutre continue sous chargement constant (section fissurée)

On se propose de déterminer l'évolution des efforts internes dans une poutre continue à 2 travées égales, soumise à un chargement uniforme  $p$ .

Les données du problème :  $l = 8\text{ m}$  ;  $p = 100\text{ kN/m}$  ;  $E_{c,0} = 33\,346\text{ MPa}$  (C32) ;  $b = 0,6\text{ m}$  ;  $h = 1\text{ m}$  ,  $d = 0,90\text{ m}$  ,  $n = 6$  ,  $\varphi = 2$  ;  $\chi = 0.8$

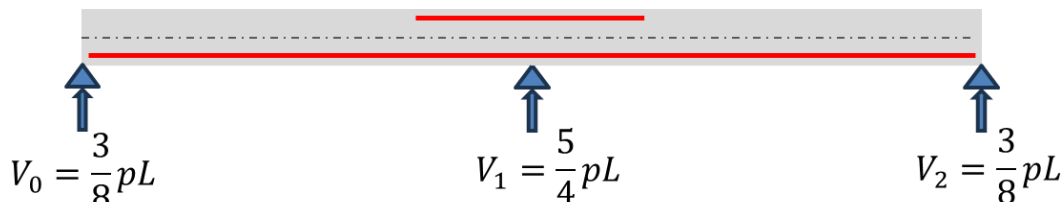


Figure 32 : poutre à deux travées égales uniformément chargée

Selon les calculs RDM, le moment dans la première travée a pour expression :

$$M(x) = \frac{3}{8}pLx - \frac{p}{2}x^2 = \frac{px}{2} \left( \frac{3}{4}L - x \right)$$

Le moment est maximum en travée et vaut  $M_t = \frac{9}{128}pL^2 = 0.45\text{ MN.m}$  ;  $M_a = -\frac{pL^2}{8} = -0.8\text{ MN.m}$ . Le moment est nul aux trois quarts de la travée.

On choisit 5HA32 en lit supérieur, au niveau de l'appui et 5 HA25 en lit inférieur.

Caractéristiques de la section doublement armée (zone d'appui) :

$$x = 0.214m ; I_{a, fis} = 0.013624m^4, EI_a = 454.3 MN.m^2.$$

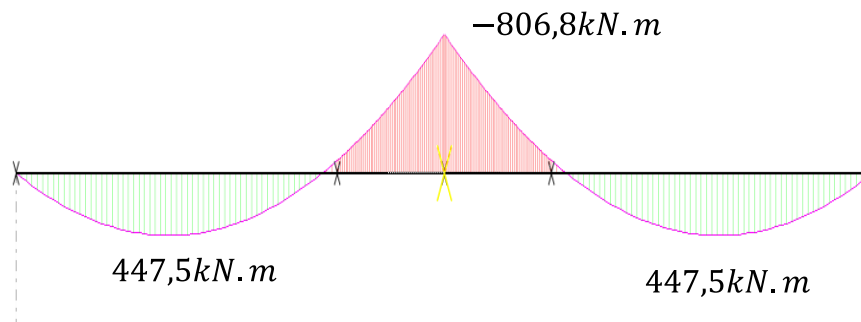
Caractéristiques de la section simplement armée (zone travée) :

$$x = 0.232m ; I_{t, fis} = 0.013260m^4, EI_t = 442.2 MN.m^2.$$

$$\text{Ainsi, } I_{a, fis} / I_{t, fis} = 1,03$$

- Influence du chargement

L'allure du moment fléchissant est donné ci-dessous :



On pourra noter que la disparité du ferrailage entraîne une valeur du moment sur appui plus importante que celle issue du calcul élastique. Ce calcul n'est en généralement pas fait dans les bureaux d'études, les calculs aux éléments finis sont menés dans la grande majorité des cas selon une analyse linéaire élastique à partir des caractéristiques des sections brutes (béton seul).

- Influence du retrait et du fluage

On suppose que la poutre est soumise à un retrait  $\varepsilon_{sh} = -3 \times 10^{-4}$ . Dans la zone d'appui central, la section est armée de manière symétrique. En revanche, dans la zone de travée, elle n'est pas symétrique armée. De ce fait, la poutre subit une courbure comprimant la fibre supérieure. Les paramètres de déformations sont calculés selon la méthode exposée en 6.3.1 : en considérant un coefficient de fluage égal à 2 et un coefficient de vieillissement égal à 0.80, le module ajusté vaut  $E_{ca} = 12\,825 \text{ MPa}$  la courbure vaut  $\kappa_{sh} = -4.954 \times 10^{-4}$  et l'inertie fissurée vaut :  $I_{f, eff} = 0.034235m^4$ , soit une raideur en flexion  $E_{ca}I_{f, eff} = 439 \text{ MN.m}^2$ .

| Flexion composée - Méthode du coefficient de vieillissement - section fissurée |           |                |                             |           |                 |                         |                            |
|--|-----------|----------------|-----------------------------|-----------|-----------------|-------------------------|----------------------------|
| Données  |           |                | Résultats à court terme     |           |                 | Résultats à terme terme |                            |
| <b>-&gt; béton</b>   |           |                |                             |           |                 |                         |                            |
| b  | 0.600     | m              |                             |           |                 | $E_{c,a}$               | 12 825 MPa                 |
| h  | 1.000     | m              |                             |           |                 | $\lambda$               | 0.154                      |
| $A_c$  | 0.600     | m <sup>2</sup> | n                           | 6.00      |                 | $n_a$                   | 15.59                      |
| $E_c(t_0)$   | 33 346    | MPa            | $\varepsilon_{g,0}$         | 0.000E+00 |                 | $\varepsilon_{g,t}$     | -7.738E-05                 |
| $E_c(t)$   | 33 346    | MPa            | $\kappa_0$                  | 0.000E+00 | m <sup>-1</sup> | $\kappa_t$              | -4.954E-04 m <sup>-1</sup> |
| $\varphi(t,t_0)$   | 2.000     |                | contrainte béton (conv. GC) |           |                 |                         |                            |
| $\chi$   | 0.800     |                | $\sigma_c, \text{sup}$      | 0.00      | MPa             | $\sigma_c, \text{sup}$  | -0.32 MPa                  |
| $\varepsilon_{sh}(t,t_d)$  | -3.00E-04 |                | $\sigma_c, \text{inf}$      | 0.00      | MPa             | $y_{na}$                | 0.342 m                    |
| <b>-&gt; Armatures</b>   |           |                |                             |           |                 |                         |                            |
| contrainte armatures   |           |                |                             |           |                 |                         |                            |
| $A_s$  | 0.004     | m <sup>2</sup> | $\sigma_s$                  | 0.00      | MPa             | $\sigma_s$              | 24.16 MPa                  |
| $y_s$  | -0.400    | m              |                             |           |                 |                         |                            |
| $E_s$  | 200 000   | MPa            | $N_c$                       | 0.00      | MN              | $N_c$                   | 0.156 MN                   |
| <b>-&gt; Efforts extérieurs</b>  |           |                |                             |           |                 |                         |                            |
| $N_s$  |           |                | $N_s$                       | 0.00      | MN              | $N_s$                   | 0.097 MN                   |
| $N_e$  | 0.000     | MN             | Total                       | 0.00      | MN              | Total                   | 0.254 MN                   |
| $M_e$  | 0.000     | MN.m           |                             |           |                 |                         |                            |

Tableau 11 : courbure et contrainte d'une poutre soumise au retrait seul

Pour refléter cette déformation imposée dans la section simplement armée, un moment linéique  $M_{sh} = EI\kappa_{sh} = 439 \times 4.954 \times 10^{-4} = 0.217 \text{ MN.m}$ . L'allure de la déformée et du moment fléchissant est donnée ci-dessous, sur la première travée :

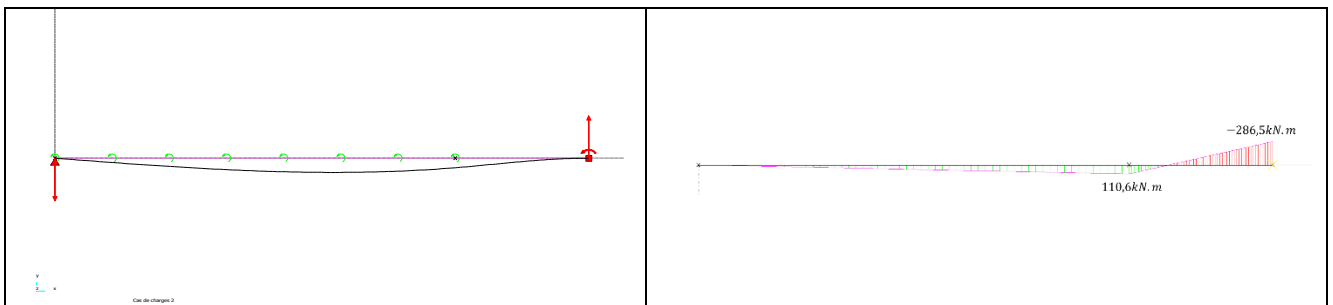


Figure 33 : déformation et moment induits par le retrait

La première figure nous permet de nous assurer de la bonne allure de la déformée. La courbure positive imposée à la première travée entraîne une réaction d'appui de rive négative (vers le bas), ce qui a pour effet de provoquer un moment négatif sur appui, égal à -286 kN.m. Le ferrailage en place et le retrait combiné contribuent ainsi à augmenter le moment sur appui intermédiaire de 30% et à augmenter de 10% le moment maxi en travée.

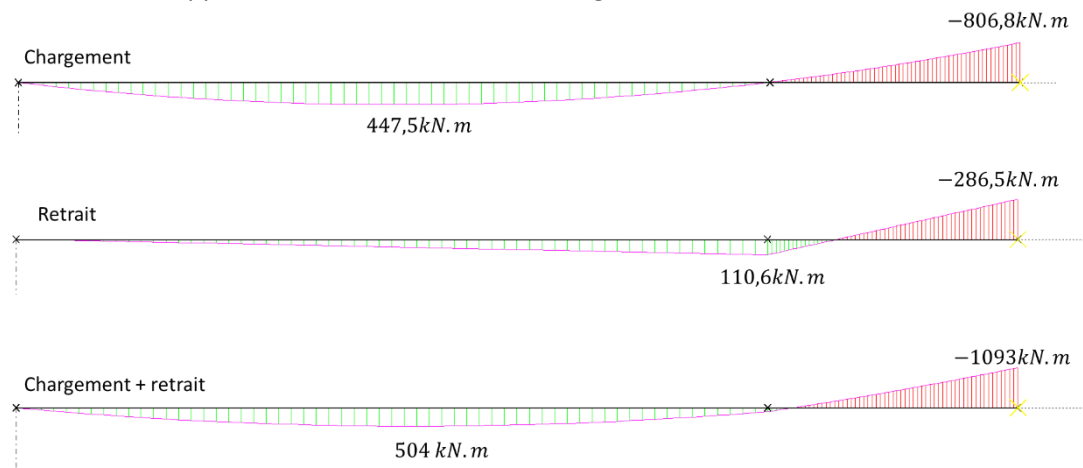


Figure 34 : moments de flexion induits par le chargement et le retrait

## 7.6 Influence du fluage sur les efforts internes d'une construction phasée

Pour illustrer ce phénomène, on considère une poutre à deux travées égales construites à l'avancement. On ne tient pas compte de la présence des armatures et on considère les sections non fissurées. Le phasage de réalisation est donné ci-dessous :

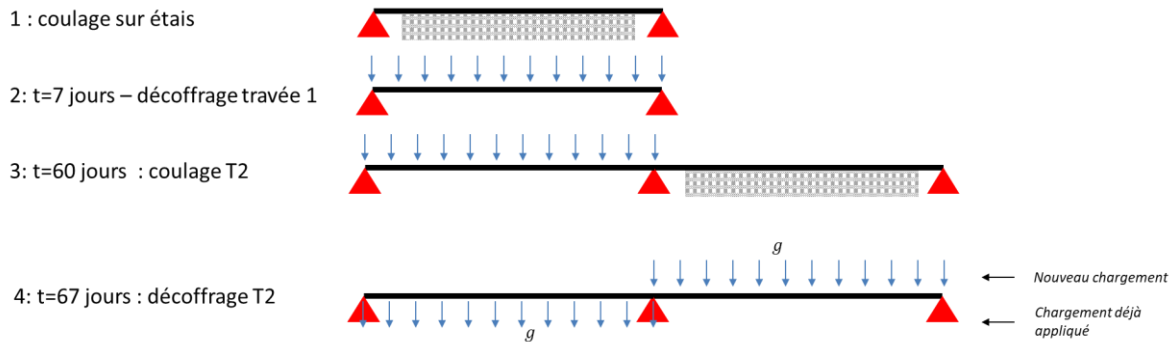


Figure 35 : phasage de réalisation d'une poutre à 2 travées

Phase 2 : On suppose qu'à  $t=7$  jours,  $E_c(7) = E_1 = 30\,000$  MPa.

Le moment dans la travée 1 est connu selon les équations classiques de la RDM :  $M_1^2(x) = \frac{g}{2}x(L-x)$ .

La rotation aux appuis vaut  $\theta^2 = \frac{gL^3}{24E_c(7)I} = \frac{gL^3}{24E_1I}$  en valeur absolue.

Phase 3 :

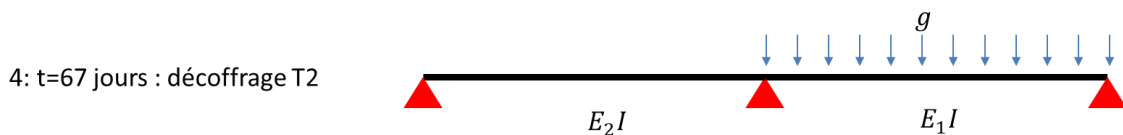
Le moment est inchangé dans la travée 1 :  $M_1^3(x) = \frac{g}{2}x(L-x)$ .

La rotation aux appuis vaut  $\theta^3 = gL^3/24E_1I(1 + \varphi(60,7))$  en valeur absolue.

Phase 4 :

Lorsque qu'on décoffre la poutre 2, celle-ci a un module  $E_c(7) = E_1 = 30\,000$  MPa. La poutre 1 a un âge de 60 jours et on considère que  $E_c(60) = E_2 = 36\,000$  MPa.

On détermine le moment dans la poutre continue provoqué par le décoffrage :



Déterminons le moment sur appui provoqué par le poids propre de la travée 2 décoffrée.

- Rotation dans la travée 1, au niveau de l'appui central, provoqué par  $M_a$  :  $\Omega''_1 = \frac{M_a L}{3E_2 I} = c_1 M_a$
- Rotation dans la travée 2, au niveau de l'appui central, provoqué par  $M_a$  :  $\Omega'_2 = -\frac{M_a L}{3E_1 I} = -a_2 M_a$
- Rotation dans la travée 1, au niveau de l'appui central, provoqué par 0 :  $\omega''_1 = 0$
- Rotation dans la travée 2, au niveau de l'appui central, provoqué par  $g$  :  $\omega'_2 = -\frac{gL^3}{24E_1 I}$

Continuité de la rotation au niveau de l'appui central :

$$(w_a)_g = (w_a)_d \Rightarrow \omega''_1 + \Omega''_1 = \omega'_2 + \Omega'_2$$

Soit :

$$M_a = \frac{\omega'_2 - \omega''_1}{c_1 + a_2} = -\frac{gL^2}{8\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} = -\frac{gL^2}{8(1+k)}$$

Où  $k = E_1/E_2 = 0.833$ .

Dans le cas où le module est constant, on retrouve bien la formule classique  $M_a = -gL^2/16$ . Ici, le béton de la travée 1 est plus raide que celui de la travée, il crée donc un encastrement plus important que celui qui résulterait d'un module constant, égal à  $E_1$ .

Il vient alors  $M_a^4 = -0.0682 gL^2$ .

Le moment dans la travée 1 a alors pour équation :

$$M_1^4(x) = \frac{g}{2}x(L-x) + M_a^4\left(\frac{x}{L}\right)$$

Le moment dans la travée 2 a pour expression :

$$M_2^4(x) = \frac{g}{2}x(L-x) + M_a^4\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Examinons maintenant les déformations

Dans la travée 1, chargée à  $t_2 = 7$  jours, les déformations sont amplifiées par le fluage  $\varphi(t_4, t_2)$  juste avant le décoffrage de la travée 2. La rotation en travée 1, au niveau de l'appui central vaut :

$$\theta^{4-} = (1 + \varphi(t_4, t_2))\theta^2 = \frac{gL^3}{24E_1I}(1 + \varphi(t_4, t_2))$$

Lorsqu'on décoffre la travée 2, une rotation  $(w_a)_g$  s'y ajoute :

$$(w_a)_g = \Omega''_1 = \frac{M_a L}{3E_1I} = -\frac{gL^2}{8(1+k)} \times \frac{L}{3E_1I} = -\frac{gL^3}{24E_1(1+k)I}$$

La rotation à gauche de l'appui central, après décoffrage vaut donc :

$$\theta^{4+} = \theta^{4-} + (w_a)_g = (1 + \varphi(t_4, t_2))\theta^2 - \frac{gL^3}{24E_1I(1+k)I} = \theta^2 \left[ 1 + \varphi(t_4, t_2) - \frac{1}{1+k} \right]$$

Rem : dans le cas où il n'y aurait pas de fluage et où les modules seraient identiques, on trouverait  $\theta^{4+} = \frac{1}{2}\theta^2$ , ce qui correspond au résultat de la RDM.

La rotation à droite de l'appui central, après décoffrage, vaut :

$$\theta'^{4+} = \omega'_2 + \Omega'_2 = -\frac{gL^3}{24E_1I} + \frac{gL^2}{8(k+1)} \times \frac{L}{3E_1I} = -\frac{gL^3}{24E_1I} \left[ 1 - \frac{1}{1+k} \right] = -\frac{gL^3}{24E_1I} \frac{k}{1+k}$$

Soit :

$$\theta'^{4+} = -\frac{1}{1+k}\theta^2$$

Rem : si on considère un module constant, alors  $k=1$  et on obtient  $\theta'^{4+} = 0,5\theta^2$ , ce qui correspond bien au résultat de la RDM.

Phase 5 : Calcul à long terme – effet du fluage dans les travées 1 et 2

Dans la mesure où les raideurs des deux poutres sont différentes au cours du temps car les bétons ont des âges différents et des âges de chargements distincts, le moment sur appui calculé en phase 4, après décoffrage, va se redistribuer. On note  $\Delta M_a$  la variation de moment. Celle-ci doit répondre à la compatibilité des rotations de part et d'autre de l'appui.

On note  $\Delta\theta_1^\infty$  la variation de la rotation en travée 1 au niveau de l'appui due au fluage entre  $t = 67$  jours et  $t = \infty$  :

$$\Delta\theta_1^\infty = \theta^2 \times (\varphi(\infty, 7) - \varphi(67, 7)) + (w_a)_g \times \varphi(67, 7)$$

On note  $\Delta\theta_2^\infty$  la variation de la rotation en travée 2 au niveau de l'appui due au fluage entre  $t = 67$  jours et  $t = \infty$  :

$$\Delta\theta_2^\infty = \theta'^{4+} \times \varphi(\infty, 7)$$

Le moment  $\Delta M_a$ , qui se développe progressivement, provoque des rotations :

- Dans la travée 1 :  $\overline{\Delta\Omega''_1} = \frac{\Delta M_a L}{3E_{1,a}I} = \bar{c}_1 \Delta M_a$
- Dans la travée 2 :  $\overline{\Delta\Omega'_2} = -\frac{\Delta M_a L}{3E_{2,a}I} = \bar{a}_2 \Delta M_a$

Où

$E_{1,a} = \frac{E(7)}{1+\chi^{(\infty,60)}\varphi^{(\infty,60)}}$  est le module ajusté de la poutre 1 qui est chargée à un âge de 60 jours

$E_{2,a} = \frac{E(7)}{1+\chi^{(\infty,7)}\varphi^{(\infty,7)}}$  est le module ajusté de la poutre 2 qui est chargée à un âge de 7 jours

La compatibilité des déformations entraîne :

$$\Delta\theta_1^\infty + \overline{\Delta\Omega''_1} = \Delta\theta_2^\infty + \overline{\Delta\Omega'_2}$$

Soit :

$$\Delta M_a = \frac{\Delta\theta_2^\infty - \Delta\theta_1^\infty}{\bar{c}_1 + \bar{a}_2}$$

Cette quantité est négative.

Le moment sur appui au temps  $t = \infty$  vaut donc :

$$M_B = M_a + \Delta M_a$$

Cela signifie qu'avec le temps, le moment sur appui B augmente en valeur absolue.

## 8. REFERENCES

- [R1] NF EN 1992-1-1 [2005] Calcul des structures en béton – règles générales et règles pour les bâtiments
- [R2] NF EN 1992-2 [2005] : Calcul des structures en béton – Ponts en béton – Calcul et dispositions constructives
- [R3] EN 1992-1-1 :2023 : Calcul des structures en béton – Règles générales et règles pour les bâtiments, les ponts et les ouvrages de génie civil.
- [R4] R.I. Gilbert & G. Ranzi [2011] : Time-dependent Behaviour of Concrete Structures , Spon Press (2011).
- [R5] A Ghali , R Gavre & M Elbadry : concrete structures - stresses and deformations - analysis and design for serviceability, Spon Press (4<sup>th</sup> edition, 2012)
- [R6] Z. P. Bazant : Prediction of Concrete Creep Effects using Age-Adjusted Effective Modulus method, Journal of the American Concrete Institute (1972)
- [R7] Z. P. Bazant : Theory of Creep and Shrinkage in Concrete Structures : A Précis of Recent Developments, Mechanics Today (1975)
- [R8] M. Jirasek, Z.P. Bazant : Inelastic Analysis of Structures, Wiley & Sons (2002)