

# Solution analytique de courbure d'une tôle élasto-plastique en grandes transformations : application à la simulation rapide des enroulements

D. WEISZ-PATRAULT<sup>a</sup>, A. EHRLACHER<sup>b</sup>

a. Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France, (weisz@lms.polytechnique.fr)

b. Laboratoire Navier, Ponts ParisTech, 6 & 8 Ave Blaise Pascal, 77455 Marne La Vallée, France, (alain.ehrlacher@enpc.fr)

## Résumé :

*Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une modélisation rapide des enroulements visant à améliorer la connaissance de l'évolution des contraintes résiduelles dans les tôles d'acier et donc de leur planéité au cours du procédé de bobinage. Une solution analytique exacte du problème d'une tôle élasto-plastique à écrouissage isotrope en grandes transformations soumise à une transformation de courbure est développée. Les problématiques liées à la direction d'écoulement pour un critère de plasticité non-différentiable (Tresca) ont été abordées et une solution unique est obtenue. L'équivalence pour cette transformation entre le critère de Von Mises et de Tresca est démontrée. Cette solution contribue à l'établissement d'un modèle efficace en termes de temps de calcul pour simuler le bobinage en prenant en compte les déformations inélastiques des tôles et permettant des études paramétriques systématiques pour améliorer le procédé.*

## Abstract :

*This work is part of the framework of a fast modeling of winding aiming at improving knowledge of residual stress evolution in steel strips and therefore their flatness during the coiling process. An exact analytical solution of an elasto-plastic strip with isotropic hardening at finite strains under an imposed transformation of curvature is developed. Issues related to flow rules for non-differentiable yield functions (Tresca) have been broached and a unique solution is obtained. The equivalence for this transformation, between Von Mises and Tresca yield functions is demonstrated. This solution contributes to an efficient model by terms of computation times that aims at simulating coiling by taking into account inelastic deformations and enabling parametric studies in order to improve the process.*

**Mots clefs : Enroulement, Solution analytique, Tresca, Von Mises**

## 1 Motivations

Le bobinage est un procédé très courant dans l'industrie sidérurgique. Il consiste à enrouler sous traction une tôle métallique issue de la filière du laminage sur un mandrin cylindrique (voir figure 1). La tôle présente un profil de contraintes résiduelles dues aux déformations plastiques hétérogènes pendant le laminage et aux changements de phases pendant le refroidissement sur la table de sortie, pouvant conduire à des déformations hors plan une fois la tôle déroulée et coupée. Ce profil de contraintes résiduelles est donc appelé défaut de planéité. De nombreuses simulations numériques ont été produites dans le but de prédire l'état de contrainte résiduel de la tôle en fonction des paramètres des procédés de laminage [1, 2] (voir [3] pour une revue bibliographique). En revanche, peu de modèles permettent de simuler l'effet du bobinage sur ces défauts de planéité [4, 5, 6], et donc la qualité finale. Un modèle suffisamment rapide pour permettre des études paramétriques pour établir une stratégie d'enroulement sous traction est souhaitable. Récemment, un modèle non-linéaire élastique a été publié [7]. Ce dernier permet de simuler l'enroulement de la tôle sur elle-même en grandes transformations dans des temps très réduits. La section de la tôle n'est pas nécessairement rectangulaire mais peut présenter un profil géométrique et l'on peut donc modéliser facilement des effets bien connus des industriels de diminution de la largeur de contact de la tôle sur elle-même à mesure que l'enroulement se poursuit (mise en "tonneau" de la bobine). Le principal défaut du modèle est de s'appuyer sur un comportement élastique qui ne permet pas d'évaluer précisément les déformations plastiques irréversibles à l'origine de l'évolution des contraintes internes au cours du procédé de bobinage. Cet article s'inscrit dans ce cadre et vise à contribuer au développement du même modèle reposant non plus sur un comportement purement élastique mais élasto-plastique à écrouissage isotrope, pour évaluer les déformations résiduelles.

Le modèle est fondé sur l'idée qu'à chaque pas de temps une portion infinitésimale de tôle est enroulée sur le reste de la bobine suivant deux étapes distinctes.

- La première étape consiste à imposer une transformation de courbure simple à la tôle (dont le feuillet moyen est initialement plan) à un rayon de courbure test (noté  $R$  dans la suite). Le feuillet moyen de la tôle est transformé en un cylindre. Comme la transformation est imposée l'équilibre local n'est pas respecté et des forces de volumes sont introduites (que l'on peut calculer grâce à la divergence des contraintes de Cauchy). Cependant un équilibre global sur l'épaisseur de la tôle est assuré car la résultante de ces forces de volume compense la résultante des efforts surfaciques introduits.
- La deuxième étape du modèle consiste à mettre en contact la portion de tôle courbée avec le reste de l'enroulement. La pression de contact est dépendante du rayon de courbure imposé pendant la première étape, car les positions des surfaces à mettre en contact sont déterminées par ce paramètre et conditionnent la pression de contact.

Finalement, les contraintes dues aux deux étapes successives sont calculées en fonction du rayon de courbure de la première étape, ainsi la résultante des contraintes de traction dans le sens de l'enroulement est calculée. Le rayon de courbure est alors optimisé de telle sorte que cette dernière résultante soit égale à la traction de bobinage imposée par l'utilisateur.

Bien que cette optimisation soit faite numériquement, les temps de calcul sont extrêmement courts car chacune des deux étapes est traitée analytiquement. L'objet de cet article est de proposer une solution analytique avec un comportement élasto-plastique à écrouissage isotrope de la première étape consistant à imposer une transformation de courbure de rayon  $R$ . Une solution analytique de courbure de tôle élasto-plastique sans écrouissage en petites perturbations a été proposée dans le cadre de la simulation du bobinage [8]. Ce travail présente une approche plus générale qui tient compte des grandes rotations pour les fortes courbures et d'un écrouissage isotrope. Deux critères de plasticité sont étudiés : Von Mises et Tresca. Ce dernier est important à considérer car il est concevable que le problème de contact de la deuxième étape (qui n'est pas abordé dans ce travail) sera plus aisé à traiter analytiquement avec un critère de Tresca qu'avec un critère de Von Mises. Cependant, on démontre que dans le cas précis de cette transformation de courbure, les deux critères sont équivalents.

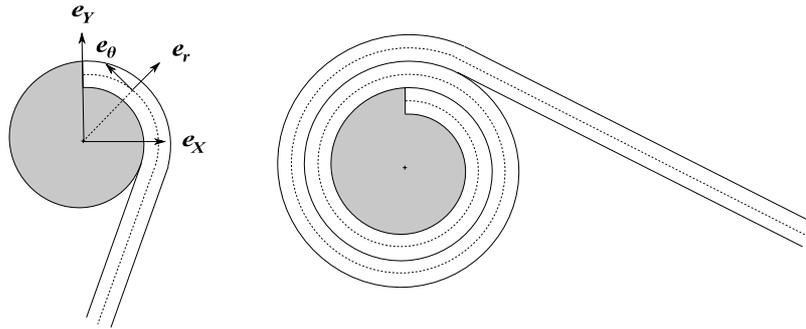


Figure 1: Bobinage

## 2 Transformation de courbure

On considère une plaque pré-contrainte dans la configuration de référence avec des coordonnées cartésienne  $(X, Y, Z)$  où  $X$  est dans le sens de l'enroulement,  $Y$  dans le sens de l'épaisseur de la tôle et  $Z$  dans le sens de sa largeur. On pose  $(e_x, e_y, e_z)$  la base associées à  $(X, Y, Z)$ . La pré-contrainte est supposée portée par la direction de l'enroulement, c'est-à-dire  $e_x$ . On la note :

$$\underline{\Pi}^{(0)} = \Pi_{XX}^{(0)} e_x \otimes e_x \quad (1)$$

Nous travaillons en grandes transformations, ainsi il est utile d'introduire une configura-

tion relâchée sans pré-contrainte (qui ne correspond pas à la configuration initiale pré-contrainte). Un tenseur élastique est nécessairement responsable de la pré-contrainte dans la configuration initiale, ce dernier est noté  $\underline{\mathbf{E}}^{(0)}$  avec  $J_0 = \det(\underline{\mathbf{E}}^{(0)})$ . Le comportement isotrope donne une relation entre ce tenseur élastique et le tenseur de la pré-contrainte  $\underline{\mathbf{\Pi}}^{(0)}$  :

$$\underline{\mathbf{\Pi}}^{(0)} = \frac{\mu_0}{J_0^{\frac{5}{3}}} \underline{\mathbf{E}}^{(0)} \cdot {}^t \underline{\mathbf{E}}^{(0)} + \left( k_0 (J_0 - 1) - \frac{\mu_0}{J_0^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\mathbf{E}}^{(0)} \cdot {}^t \underline{\mathbf{E}}^{(0)})}{3} \right) \underline{\mathbf{1}} \quad (2)$$

Cette expression du comportement s'obtient en considérant l'énergie libre d'un matériau néo-hookéen isotrope compressible et l'équation des bilans. Les détails de ces calculs sont donnés dans [9].

Ainsi, on obtient facilement que le tenseur élastique est de la forme :

$$\underline{\mathbf{E}}^{(0)} = E_0 \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_X + \tilde{E}_0 (\mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_Y + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z) \quad (3)$$

Et ainsi on obtient que  $E_0$  est l'unique racine réelle du polynôme d'ordre 3 suivant :

$$Q_0(U) = U^3 - U \frac{\Pi_{XX}^{(0)}}{\mu_0} J_0^{\frac{5}{3}} - J_0 \quad (4)$$

où l'on a posé :

$$\det(\underline{\mathbf{E}}^{(0)}) = J_0 = 1 + \frac{\Pi_{XX}^{(0)}}{3k_0} \quad (5)$$

Par ailleurs on a la relation :

$$\tilde{E}_0 = \sqrt{\frac{J_0}{E_0}} \quad (6)$$

On impose une transformation de courbure simple (rayon de courbure  $R$ ) comme le montre la figure 2. Ainsi la base polaire dans la configuration déformée est définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = -\sin(\theta) \mathbf{e}_X + \cos(\theta) \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_\theta = -\cos(\theta) \mathbf{e}_X - \sin(\theta) \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_Z \end{cases} \quad (7)$$

où  $\theta = -X/R$ . Ceci correspond à la transformation imposée suivante :

$$\Phi(X, Y, Z) = (R + Y) \mathbf{e}_r + Z \mathbf{e}_z \quad (8)$$

On calcule le gradient :

$$\underline{\mathbf{F}}(X, Y, Z) = \underline{\nabla} \Phi(X, Y, Z) = -\frac{R+Y}{R} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_X + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_Y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (9)$$

Le modèle est élasto-plastique en grandes transformations. On a la décomposition multiplicative suivante (figure 3) :

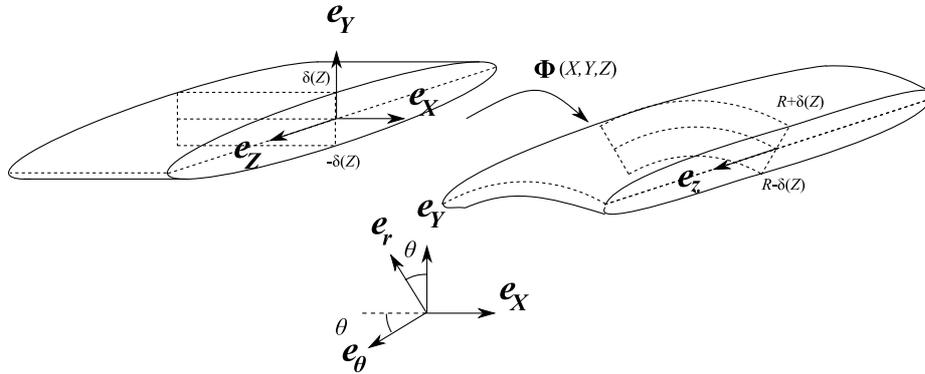


Figure 2: Transformation de courbure simple

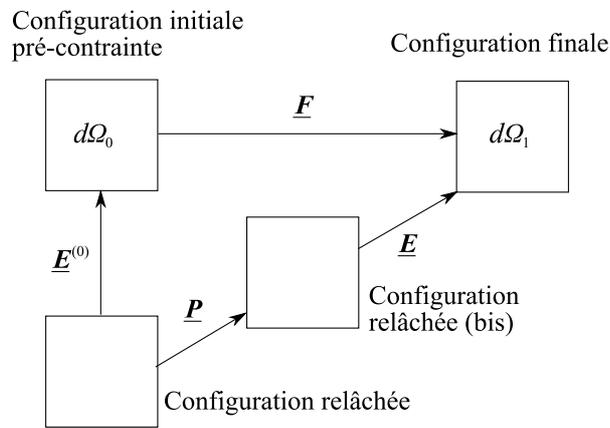


Figure 3: Décomposition multiplicative

$$\underline{\mathbf{F}}^{tot} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^{(0)} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{P}} \quad (10)$$

Ainsi :

$$\underline{\mathbf{F}}^{tot} = -JE_0 \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_X + \tilde{E}_0 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_Y + \tilde{E}_0 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (11)$$

On a la variation de volume suivante :

$$\det(\underline{\mathbf{F}}^{tot}) = JJ_0 \quad (12)$$

On se donne a priori une forme simple pour le tenseur plastique (cela s'avère suffisant) :

$$\underline{\mathbf{P}} = -P_1 \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_X + P_2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_Y + P_3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (13)$$

La transformation plastique est isochore, donc :

$$\det(\underline{\mathbf{P}}) = 1 \Rightarrow P_1 P_2 P_3 = 1 \quad (14)$$

On calcule l'inverse du tenseur plastique :

$$\underline{\mathbf{P}}^{-1} = -\frac{1}{P_1} \mathbf{e}_X \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{P_2} \mathbf{e}_Y \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{P_3} \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_z \quad (15)$$

On en déduit donc une expression du tenseur élastique :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{F}}^{tot} \cdot \underline{\mathbf{P}}^{-1} = \frac{JE_0}{P_1} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\tilde{E}_0}{P_2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\tilde{E}_0}{P_3} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (16)$$

De même que précédemment, on peut écrire le comportement isotrope d'après [9] :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mu_0}{(JJ_0)^{\frac{5}{3}}} \underline{\mathbf{E}} \cdot {}^t \underline{\mathbf{E}} + \left( k_0(JJ_0 - 1) - \frac{\mu_0}{(JJ_0)^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\mathbf{E}} \cdot {}^t \underline{\mathbf{E}})}{3} \right) \underline{\mathbf{1}} \quad (17)$$

Or :

$$\underline{\mathbf{E}} \cdot {}^t \underline{\mathbf{E}} = \frac{J_0}{E_0 P_2^2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (18)$$

Ainsi les contraintes de Cauchy sont données composantes par composantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0 (JJ_0)^{-\frac{5}{3}}}{3} \left( 2 \frac{J_0}{E_0 P_2^2} - \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) + k_0(JJ_0 - 1) \\ \sigma_{\theta\theta}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0 (JJ_0)^{-\frac{5}{3}}}{3} \left( -\frac{J_0}{E_0 P_2^2} + 2 \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) + k_0(JJ_0 - 1) \\ \sigma_{zz}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0 (JJ_0)^{-\frac{5}{3}}}{3} \left( -\frac{J_0}{E_0 P_2^2} - \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} + 2 \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) + k_0(JJ_0 - 1) \end{cases} \quad (19)$$

Les seules inconnues du problème sont les champs  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  du tenseur plastique. Pour les déterminer nous considérons soit un critère de Von Mises, soit un critère de Tresca.

### 3 Critère de Von Mises

Nous commençons par résoudre le problème avec un critère de Von Mises qui est différentiable partout et évite donc la discussion de la direction de l'écoulement dans les angles du critère de Tresca. On démontrera par la suite que la solution avec un critère de Tresca est identique à celle obtenue avec le critère de Von Mises. Une comparaison avec un calcul aux éléments finis est proposée pour vérifier l'exactitude des calculs.

Nous introduisons le tenseur plastique dans la configuration relâchée (bis) sur la figure 3 qui s'obtient en relâchant localement le tenseur élastique  $\underline{\mathbf{E}}$  :

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}} = JJ_0 \underline{\mathbf{E}}^{-1} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{E}} = JJ_0 \underline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (20)$$

Dans le cas général ce tenseur n'est pas nécessairement symétrique (mais il l'est dans le cas présent). On note  $\underline{\boldsymbol{\Psi}}^{d,s}$  sa partie déviatorique et symétrique. Ainsi nous avons

composantes par composantes :

$$\begin{cases} \Psi_{rr}^{d,s}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}}}{3} \left( 2 \frac{J_0}{E_0 P_2^2} - \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) \\ \Psi_{\theta\theta}^{d,s}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}}}{3} \left( -\frac{J_0}{E_0 P_2^2} + 2 \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) \\ \Psi_{zz}^{d,s}(X, Y, Z) = \frac{\mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}}}{3} \left( -\frac{J_0}{E_0 P_2^2} - \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} + 2 \frac{J_0}{E_0 P_3^2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

Le critère de Von Mises s'écrit :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\Psi}}^{d,s} : \underline{\underline{\Psi}}^{d,s}} \leq k(p_{cum}) \quad (22)$$

Où  $p_{cum}$  est la déformation plastique cumulée et  $k(p_{cum})$  la limite d'élasticité qu'on suppose être de la forme suivante :

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \gamma(\exp(p_{cum}) - 1)) \quad (23)$$

Où  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité avant écrouissage et  $\gamma$  un paramètre d'écrouissage. Dans la zone élastique on a  $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ . Or à la frontière élastique/plastique le critère est saturé, on obtient donc une équation déterminant univoquement les zones plastiques :

$$\begin{cases} \mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{J_0}{E_0} - J^2 E_0^2 \right) = k(p_{cum}(t=0)) = \sigma_0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ \mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left( J^2 E_0^2 - \frac{J_0}{E_0} \right) = k(p_{cum}(t=0)) = \sigma_0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (24)$$

Dans un problème classique où l'on impose non pas la transformation mais un vecteur contrainte ou des déplacements à la frontière du domaine, les zones plastiques sont des inconnues, en revanche dans le cas où la transformation est imposée l'équation garantissant que l'on sature le critère à la frontière élastique/plastique permet de déterminer complètement les zones plastiques.

Le taux de déformation plastique est donné par :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2} \left( \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} + {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t \dot{\underline{\underline{P}}} \right) \quad (25)$$

D'où :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{\dot{P}_2}{P_2} \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \frac{\dot{P}_1}{P_1} \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + \frac{\dot{P}_3}{P_3} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \quad (26)$$

Le taux de déformation plastique cumulée est donné par :

$$\dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \left( \frac{\dot{P}_1}{P_1} \right)^2 + \left( \frac{\dot{P}_2}{P_2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{P}_3}{P_3} \right)^2 \right)} \quad (27)$$

La loi d'écoulement est associée c'est-à-dire que la direction du taux de déformation plastique est normale au critère. D'après les figures 4 et 5 le vecteur normal au critère (noté  $n_C$ ) est :

$$\frac{n_C}{\|n_C\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{\theta\theta} - \frac{1}{\sqrt{6}} (e_{rr} + e_{zz}) \quad (28)$$

Où l'on a posé les vecteurs  $e_{rr}$ ,  $e_{\theta\theta}$  et  $e_{zz}$  repérant les directions des contraintes  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{zz}$  dans la figure 4 et  $e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}$ . On a donc :

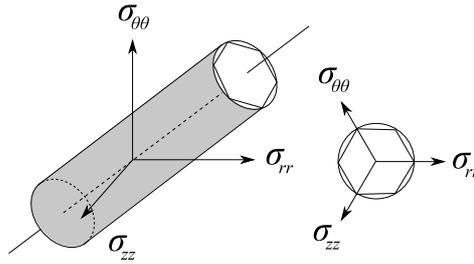


Figure 4: Surfaces des critères de Von Mises et de Tresca

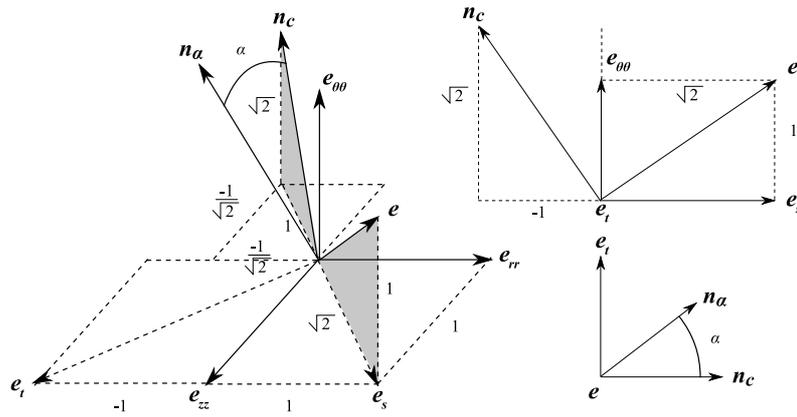


Figure 5: Vecteur normal à la surface du critère

$$\frac{\dot{P}_2}{P_2} = \frac{\dot{P}_3}{P_3} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{P}_1}{P_1} \quad (29)$$

D'où après intégration :

$$P_2^2 = P_3^2 = \frac{1}{P_1} \quad (30)$$

Donc :

$$\dot{p}_{cum} = \left| \frac{\dot{P}_1}{P_1} \right| \quad (31)$$

On détermine le signe de  $\dot{P}_1/P_1$  pour assurer la continuité de la contrainte normale à l'interface élastique/plastique :

$$\begin{cases} \frac{\dot{P}_1}{P_1} \leq 0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ \frac{\dot{P}_1}{P_1} \geq 0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (32)$$

D'où :

$$\begin{cases} p_{cum} = \ln\left(\frac{1}{P_1}\right) & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ p_{cum} = \ln(P_1) & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (33)$$

Donc :

$$\begin{cases} k(p_{cum}) = \sigma_0 \left(1 + \gamma \left(\frac{1}{P_1} - 1\right)\right) & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \gamma (P_1 - 1)) & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (34)$$

On pose par ailleurs :

$$\begin{cases} \varepsilon = -1 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ \varepsilon = 1 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (35)$$

Finalement la saturation du critère de Von Mises dans les zones plastiques peut s'écrire :

$$\varepsilon k(p_{cum}) = \mu_0 (J J_0)^{-\frac{2}{3}} \left( -\frac{J_0 P_1}{E_0} + \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} \right) \quad (36)$$

Et donc finalement  $P_1$  est la seule racine réelle du polynôme de degré 3 suivant :

$$\begin{cases} Q(U) = -J^2 E_0^2 - \frac{\sigma_0}{\mu_0} \gamma (J J_0)^{\frac{2}{3}} U - \frac{\sigma_0}{\mu_0} (1 - \gamma) (J J_0)^{\frac{2}{3}} U^2 + \frac{J_0}{E_0} U^3 \\ \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ Q(U) = -J^2 E_0^2 + \frac{\sigma_0}{\mu_0} (1 - \gamma) (J J_0)^{\frac{2}{3}} U^2 + \left( \frac{J_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{\mu_0} \gamma (J J_0)^{\frac{2}{3}} \right) U^3 \\ \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (37)$$

Cette racine peut se calculer complètement analytiquement et permet d'évaluer toutes les inconnues du problème  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  qui déterminent la solution en contrainte et déformation.

## 4 Critère de Tresca

Dans cette section le problème est traité en considérant un critère de Tresca. Ce choix est pertinent dans la mesure où la seconde étape du modèle d'enroulement (contact avec le reste de la bobine) sera beaucoup plus simple avec ce critère. En revanche, pour le cas de courbure présenté dans cet article, le problème de la non-différentiabilité du critère dans les angles de l'hexagone de Tresca se pose (voir figure 4). Ce problème est très bien identifié dans la littérature, notamment pour les aspects numériques. Des régularisations consistant à éroder les angles des critères possédant des points non-différentiables (Tresca, Mohr-Coulomb etc...) ont été proposées [10, 11]. Une autre approche consiste à considérer que la direction d'écoulement dans les angles du critère se situe dans le sous-différentiel et peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des directions normales des surfaces formant l'angle. Cela donne lieu à des schémas numériques efficaces [12, 13, 14] ou plus récemment [15, 16]. Dans cet article nous adopterons ce dernier point de vue et ne chercherons pas à éroder les angles de l'hexagone du critère de Tresca. La direction d'écoulement est cherchée comme une combinaison linéaire des directions normales des facettes formant l'angle. Nous démontrerons qu'une seule direction d'écoulement stable est possible et que cette dernière correspond à la direction d'écoulement du critère de Von Mises.

Le critère de Tresca s'écrit :

$$\max_{j \in \{rr, \theta\theta, zz\}} (\Psi_j) - \min_{j \in \{rr, \theta\theta, zz\}} (\Psi_j) \leq k(p_{cum}) \quad (38)$$

Dans la zone élastique on a  $P_1 = P_2 = P_3 = 1$  et dans ce cas on a d'après (21)  $\Psi_{rr} = \Psi_{zz}$ . Ainsi le critère de Tresca revient à :

$$|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}| \leq k(p_{cum}) \quad (39)$$

La saturation du critère à la frontière élastique/plastique permet de déterminer de manière univoque les zones plastiques :

$$\begin{cases} \mu_0 (JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{J_0}{E_0} - J^2 E_0^2 \right) = k(p_{cum}(t=0)) = \sigma_0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ \mu_0 (JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left( J^2 E_0^2 - \frac{J_0}{E_0} \right) = k(p_{cum}(t=0)) = \sigma_0 & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (40)$$

Il s'agit exactement de la même équation (24) qu'avec le critère de Von Mises. Par ailleurs, on plastifie sur l'un des deux angles de l'hexagone de Tresca car dans la zone élastique  $\sigma_{rr} = \sigma_{zz}$ . Les zones plastiques sont définies quand le critère calculé sur la base des contraintes élastiques est violé ainsi on a dans ces zones :

$$\begin{cases} J^2 E_0^2 \leq \frac{J_0}{E_0} - \frac{\sigma_0}{\mu_0} (JJ_0)^{\frac{2}{3}} & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \geq J^2 E_0^2 \\ J^2 E_0^2 \geq \frac{\sigma_0}{\mu_0} (JJ_0)^{\frac{2}{3}} + \frac{J_0}{E_0} & \text{si } \frac{J_0}{E_0} \leq J^2 E_0^2 \end{cases} \quad (41)$$

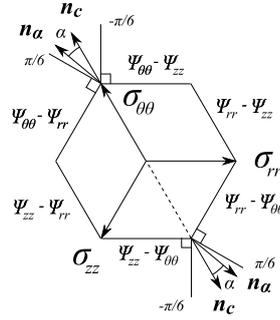


Figure 6: Critère de Tresca et mécanismes plastiques

La loi d'écoulement est associée c'est-à-dire que le taux de déformation plastique est normal à la surface du critère, cependant, comme nous l'avons souligné, le critère de Tresca n'est pas différentiable aux possibles points où la structure peut plastifier (angle de l'hexagone, voir figure 6). La normale à la surface du critère peut donc a priori être n'importe quel vecteur du sous-différentiel. Notons  $\mathbf{n}_\alpha$  l'un de ces vecteurs obtenu par une rotation de  $\mathbf{n}_C$  d'angle  $\alpha \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$  dans le plan des contraintes déviatoriques (de normale  $\mathbf{e} = (1, 1, 1)$ ) comme le montre la figure 5. Les valeurs extrémales  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  correspondent aux directions d'écoulement classiques de l'une ou l'autre des facettes de l'hexagone du critère de Tresca. On a d'après la figure 5 :

$$\frac{\mathbf{n}_\alpha}{\|\mathbf{n}_\alpha\|} = \cos(\alpha) \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_{\theta\theta} - \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{rr} + \mathbf{e}_{zz}) + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_{rr} + \mathbf{e}_{zz}) \quad (42)$$

Le taux de déformation plastique étant colinéaire à  $\mathbf{n}_\alpha$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{P}_2}{P_2} = \frac{\dot{P}_1}{P_1} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\alpha) \right) \\ \frac{\dot{P}_3}{P_3} = \frac{\dot{P}_1}{P_1} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\alpha) \right) \end{array} \right. \quad (43)$$

Donc après intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2^2 = P_1^{-1-\sqrt{3} \tan(\alpha)} \\ P_3^2 = P_1^{-1+\sqrt{3} \tan(\alpha)} \end{array} \right. \quad (44)$$

Cette dernière relation est bien compatible avec le fait que le tenseur plastique est isochore soit  $P_1 P_2 P_3 = 1$ . Nous cherchons les directions d'écoulement stables. Il est clair que si  $\alpha \neq 0$  alors dans les zones plastiques on a  $\Psi_{rr} \neq \Psi_{zz}$  car  $P_2 \neq P_3$  d'après (44). Dans ce cas on plastifie sur l'une des facettes de l'hexagone de Tresca et la normale à la surface du critère passe alors immédiatement à la normale de cette facette ce qui

correspond à  $\alpha = -\pi/6$  ou  $\alpha = \pi/6$ . Les trois directions possibles d'écoulement sont donc  $\alpha \in \{-\pi/6, 0, \pi/6\}$ . Les directions d'écoulement  $\alpha = -\pi/6$  et  $\alpha = \pi/6$  sont également instables.

En effet, si  $\alpha = \pi/6$  (on peut faire une démonstration identique pour le cas où  $\alpha = -\pi/6$ ), le mécanisme plastique qui doit être activé pour que cette direction soit stable est  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  comme le montre la figure 6. En reportant cette valeur de  $\alpha$  dans (44) on a :

$$\begin{cases} |\Psi_{\theta\theta}(X, Y, Z) - \Psi_{rr}(X, Y, Z)| = \mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left| \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0 P_1^2}{E_0} \right| \\ |\Psi_{\theta\theta}(X, Y, Z) - \Psi_{zz}(X, Y, Z)| = \mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left| \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0} \right| \end{cases} \quad (45)$$

Le mécanisme activé n'est en fait pas  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  mais  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{zz}|$ , ce qui a pour effet de changer aussitôt la direction d'écoulement et  $\alpha$  passe de  $\pi/6$  à  $-\pi/6$  pendant l'incrément plastique. (Réciproquement si la direction d'écoulement est  $-\pi/6$ , le mécanisme activé est  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  au lieu de  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{zz}|$ , ce qui a pour effet de changer immédiatement  $\alpha$  de  $-\pi/6$  en  $\pi/6$ ). Pour démontrer cela simplement supposons que l'on est dans une zone plastique où :  $J^2 E_0^2 \geq \frac{J_0}{E_0}$ , c'est-à-dire qu'on plastifie sur l'angle supérieur de l'hexagone de Tresca (voir figure 6). On a  $\frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0 P_1^2}{E_0} \geq 0$  et  $\frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0}{E_0} \geq 0$  (on aurait une relation similaire dans l'angle inférieur c'est-à-dire pour  $J^2 E_0^2 \leq \frac{J_0}{E_0}$ ). Ainsi le mécanisme activé dépend de la valeur calculée pour  $P_1$ . Si  $P_1 \geq 1$  alors le mécanisme activé n'est pas  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  mais  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{zz}|$  ce qui conduit à l'instabilité de la direction d'écoulement  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , si  $P_1 \leq 1$  alors le mécanisme activé est  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  et la direction d'écoulement  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  serait stable. L'hypothèse  $P_1 \leq 1$  est intuitivement impossible car du fait que  $J^2 E_0^2 \geq \frac{J_0}{E_0}$ , il s'agit d'une zone en traction. On peut démontrer cela facilement dans un cas simple sans écrouissage. En effet, dans la zone plastique si le mécanisme activé était  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  alors la saturation du critère donnerait :

$$\mu_0(JJ_0)^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{J^2 E_0^2}{P_1^2} - \frac{J_0 P_1^2}{E_0} \right) = \sigma_0 \quad (46)$$

Il s'agit d'une équation du second degré en  $P_1^2$  dont la seule racine positive est  $P_1^2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  avec  $a = \frac{J_0}{E_0}$ ,  $b = \frac{\sigma_0}{\mu_0} (JJ_0)^{\frac{2}{3}}$ ,  $c = -J^2 E_0^2$  et  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Or on a dans la zone plastique  $J^2 E_0^2 \geq \frac{\sigma_0}{\mu_0} (JJ_0)^{\frac{2}{3}} + \frac{J_0}{E_0}$  d'après (41). Cela prouve après calculs élémentaires que  $P_1^2 \geq 1$  donc  $P_1 \geq 1$ . Ainsi finalement le mécanisme activé n'est pas  $|\Psi_{\theta\theta} - \Psi_{rr}|$  et la direction d'écoulement  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  est instable. Dans le cas où l'écrouissage est considéré il ne s'agit plus d'une équation du second degré et donc la démonstration est moins évidente, mais le résultat reste vrai.

Ces démonstrations peuvent être reproduites pour les cas où l'on plastifie dans l'angle inférieur de l'hexagone de Tresca (voir figure 6) et pour la direction d'écoulement  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ . Donc les directions  $\alpha = -\pi/6$  ou  $\alpha = \pi/6$  sont instables et la seule direction stable est  $\alpha = 0$ . En effet dans ce dernier cas on a dans les zones élastiques et

plastiques  $\Psi_{rr} = \Psi_{zz}$ . On retrouve alors les mêmes équations que pour le critère de Von Mises. Il faut noter que la saturation du critère de Tresca dans les zones plastiques donne exactement la même équation (36) que pour le critère de Von Mises du fait que  $\Psi_{rr} = \Psi_{zz}$ . Les solutions sont donc identiques et données par l'équation (37).

Nous faisons une comparaison de la solution analytique proposée dans cet article avec un calcul aux éléments finis en grandes transformations [17]. Les résultats sont superposables (voir figure 7) et cela valide l'exactitude des développements proposés. Pour cet exemple numérique nous avons pris un champ de pré-contrainte ainsi que l'écroutissage du matériau nuls pour simplifier le calcul aux éléments finis, par ailleurs  $\sigma_0 = 400$  MPa, l'épaisseur de tôle est 2 mm, et le rayon de courbure est  $R = 100$  mm.

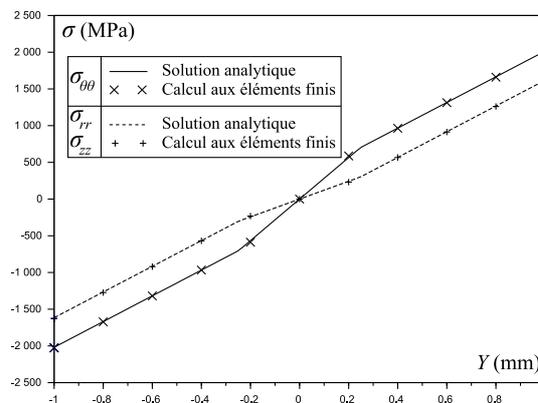


Figure 7: Calculs aux éléments finis vs solution analytique

## 6 Conclusions

Ce travail étend au cadre des l'élasto-plasticité en grandes transformations l'approche proposée dans [7], qui vise à établir un modèle rapide pour simuler les enroulements afin de préciser l'évolution des contraintes internes au cours du procédé de bobinage. Une tôle soumise à une transformation de courbure a été considérée avec un comportement élasto-plastique à écroutissage isotrope et un critère de Von Mises d'une part et de Tresca d'autre part. Les problèmes liés à la non-différentiabilité de ce dernier critère ont été abordés. L'exactitude de la solution obtenue a été vérifiée sommairement grâce à un calcul aux éléments finis. Il reste à modéliser le contact de la tôle sur elle-même dans un cadre élasto-plastique pour que le modèle d'enroulement global aboutisse.

## References

- [1] A. Hacquin. *Modélisation thermo-mécanique tridimensionnelle du laminage: couplage bande-cylindres*. PhD thesis, Cemef Ecole des Mines de Paris, 1996. In French.
- [2] S. Abdelkhalek, P. Montmitonnet, N. Legrand, and P. Buessler. Coupled approach for flatness prediction in cold rolling of thin strip. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53:661–675, 2011.
- [3] P. Montmitonnet. Hot and cold strip rolling processes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:6604–6625, 2006.
- [4] WJ Edwards and G Boulton. The mystery of coil winding. In *2001 Iron and Steel Exposition and AISE Annual Convention*, page 2001, 2001.
- [5] Jantzen L Hinton. *A Study on the Effects of Coil Wedge During Rewinding of Thin Gauge Metals*. PhD thesis, Wright State University, 2011.
- [6] JM Hudzia, F Ferrauto, and P Gevers. Stress calculation applied to a coil, and optimization of coiling tension. *Cah. Inf. Tech. Rev. Metall.*, 91(6):937–943, 1994.
- [7] Daniel Weisz-Patrault, Alain Ehlacher, Nicolas Legrand, and Eliette Mathey. Non-linear numerical simulation of coiling by elastic finite strain model. *Key Engineering Materials*, 2015 (in press).
- [8] WM Quach, JG Teng, and KF Chung. Residual stresses in steel sheets due to coiling and uncoiling: a closed-form analytical solution. *Engineering structures*, 26(9):1249–1259, 2004.
- [9] Huy Le Dang. *Modélisation simplifiée des processus de laminage [Simplified model of rolling process]*. PhD thesis, École des Ponts ParisTech, 2013. In french.
- [10] SW Sloan and JR Booker. Removal of singularities in tresca and mohr–coulomb yield functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, 2(2):173–179, 1986.
- [11] AJ Abbo and SW Sloan. A smooth hyperbolic approximation to the mohr–coulomb yield criterion. *Computers & structures*, 54(3):427–441, 1995.
- [12] JC Simo, JG Kennedy, and S Govindjee. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10):2161–2185, 1988.
- [13] JC Simo and RL Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(3):649–670, 1986.

- [14] N Bićanić et al. Detection of multiple active yield conditions for mohr-coulomb elasto-plasticity. *Computers & Structures*, 62(1):51–61, 1997.
- [15] Johan Clausen, Lars Damkilde, and Lars Andersen. Efficient return algorithms for associated plasticity with multiple yield planes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6):1036–1059, 2006.
- [16] Fotios E Karaoulanis. Implicit numerical integration of nonsmooth multisurface yield criteria in the principal stress space. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(3):263–308, 2013.
- [17] CEA. Cast3m, 2011. Commissariat A l’Energie Atomique, <http://www-cast3m.cea.fr/>.