



Torsion

ENPC – MSGCE – Projet d'ouvrage d'art 2024
Mathieu MULS

Contenu du cours



1. Définitions générales
2. Torsion pure, libre et uniforme des poutres
 - Définitions
 - Propriétés générales des contraintes de cisaillement dues à la torsion pure, libre et uniforme
 - Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion
 - Torsion libre des profils minces ouverts
 - Torsion libre des profils minces fermés
 - Exemple
3. Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN1992-1-1 et EN 1992-2)
 - Vérifications normatives en Torsion – Principe
 - Cumul Tranchant/Torsion
 - Vérification de la résistance à la torsion combinée au tranchant
 - Exemple



Documents de référence:

- Projet et construction de Ponts – Analyse des tabliers de ponts (J.A Calgaro)
- Poutres à parois minces – Etude du cisaillement (J.A Calgaro)
- Eurocode 2 – Application aux ponts-routes en béton - Guide méthodologique (SETRA)
- EN 1992-1-1 et son Annexe Nationale
- EN 1992-2 et son Annexe Nationale



Définitions Générales

Définitions - Rappels



Centre de cisaillement:

Tout tranchant $\mathbf{V}(V_y, V_z)$ appliqué au centre de cisaillement C n'induit pas de torsion ;

Tout tranchant $\mathbf{V}(V_y, V_z)$ appliqué à un point quelconque $P \neq C$ induit un moment de torsion de valeur $\mathbf{CP} \wedge \mathbf{V}$

Avec (y_C, z_C) les coordonnées (dans le repère Gyz) du *centre de cisaillement C* (ou centre de flexion).

- Si la section de la poutre possède 2 axes de symétrie, $C \equiv G$, au croisement des axes de symétrie. Aussi $T \equiv M_x$
- Pour une section quelconque sans axes de symétrie, $C \neq G$, $T \neq M_x$
 - Si la section est pleine et de forme suffisamment régulière, généralement $C \cong G$ et $T \cong M_x$
 - Si la section est à parois minces il convient en général de ne pas confondre M_x et couple de torsion T .

Définitions - Rappels



Centre de cisailment:

$$T = \underbrace{M_x}_{\text{moment longitudinal d'axe Gx}} + \underbrace{V_y z_C - V_z y_C}_{\text{Moment longitudinal supplémentaire dû à l'excentrement du tranchant (V_y, V_z) appliqué en G, à une distance (-y_C, -z_C) de C}}$$

M_x moment longitudinal d'axe
Gx

Moment longitudinal supplémentaire dû à
l'excentrement du tranchant (V_y, V_z) appliqué
en G, à une distance ($-y_C, -z_C$) de C

La position du centre de cisailment peut être déterminée :

- Directement, une fois calculés les flux de cisailment sous tranchant en tout point, sachant que $MC(\phi(V_y, V_z)) = 0$, ou
- Par la méthode sectorielle

Définitions - Rappels



Centre de cisaillement:

- Par la méthode sectorielle

$$y_C = y_P + 1/I_y \int_{\Gamma} z \psi_P e ds$$

$$z_C = z_P - 1/I_z \int_{\Gamma} y \psi_P e ds$$

La section est rapportée à ses axes principaux d'inertie G_y et G_z ; P est un pôle quelconque de coordonnées (y_P, z_P) à partir duquel on construit la *fonction sectorielle* ψ_P ; I_y, I_z désignent toujours les moments principaux d'inertie.

La fonction sectorielle de pôle P se formule ainsi :

$$\omega_P = \psi_P(s) - f(s)$$

Avec ω_P l'aire sectorielle de pôle P construite à partir d'une origine $I(y_0, z_0)$ quelconque ; $f(s)$ est une fonction scalaire indépendante du pôle P , construite à partir de la même origine I et dont la dérivée est égale à :

- Zéro sur les ramifications ouvertes
- λ_i/e sur l'élément de paroi de la cellule n° i non commun à une autre cellule
- $(\lambda_i - \lambda_j)/e$ sur l'élément de paroi de la cellule n° i , commun à la cellule n° j

Les paramètres λ_i sont obtenus comme solution du système :

Définitions - Rappels

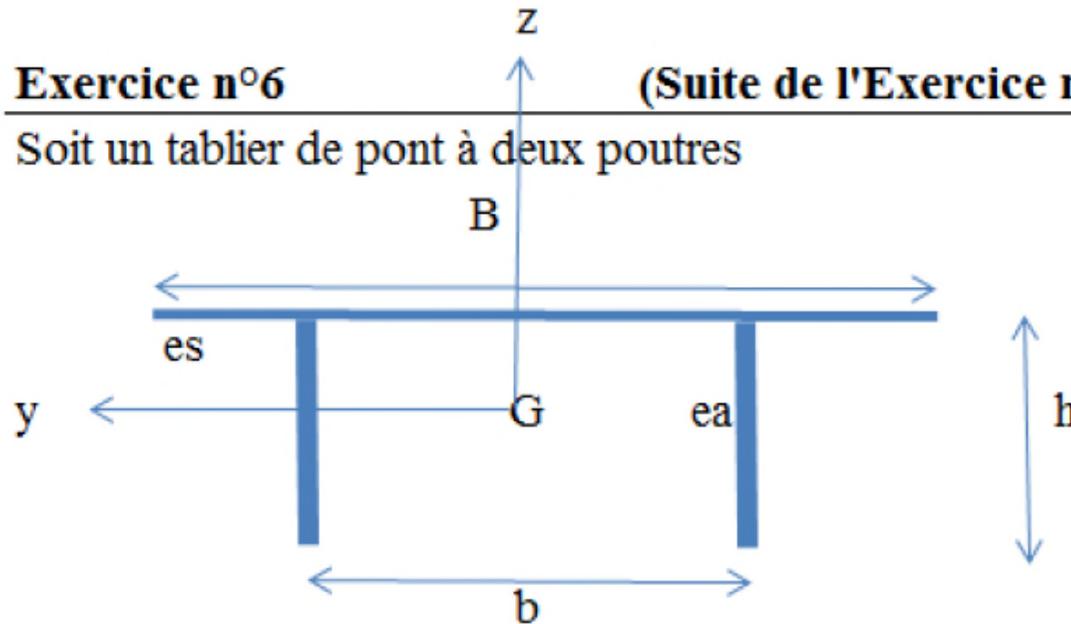


Centre de cisailment: Calcul du centre de cisailment Exemple

Exercice n°6

(Suite de l'Exercice n°3)

Soit un tablier de pont à deux poutres



Gz est axe de symétrie de la section.

$L =$	30 m
$B =$	15 m
$b =$	8.4 m
$h =$	2.775 m
$es =$	0.45 m
$ea =$	0.95 m
$E =$	40000 Mpa
$\nu =$	0.15
$V_y =$	1 MN
$V_z =$	1 MN



Torsion pure, libre et uniforme des poutres

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Définitions:

Torsion pure libre et uniforme: on envisage un mode de sollicitation des poutres qui se réduit à un moment longitudinal constant dans le cadre des liaisons de ces poutres qui ne gênent en aucune manière le gauchissement de leurs sections.

Dans les *poutres à section pleine*, la torsion uniforme peut engendrer des contraintes normales au voisinage des zones d'application d'efforts concentrés, là où le gauchissement peut être gêné. Mais en vertu du principe de St Venant, ces zones sont d'étendue très limitée, et partout ailleurs on peut admettre que le gauchissement est uniforme, ce qui n'entraîne l'apparition d'aucune contrainte normale.

Torsion non uniforme: se caractérise par une distribution non constante du moment de torsion.

le gauchissement n'est plus uniforme et il apparaît des contraintes normales, indépendamment du fait que le gauchissement puisse être gêné ou non dans une section quelconque. Toutefois, il est d'usage de considérer que les contraintes normales dues à la torsion non uniforme, sans être gênée, sont d'intensité modérée et peuvent être négligées dans les calculs.

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Définitions:

Torsion gênée: a lieu en présence de liaisons qui empêchent le gauchissement des sections.

Dans les *poutres dont la section est un profil mince ouvert ou fermé*, la torsion non uniforme ou la torsion gênée engendrent des contraintes normales dont l'intensité est loin d'être négligeable car le principe de St Venant ne leur est pas toujours applicable.

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Propriétés générales des contraintes de cisaillement dues à la torsion pure, libre et uniforme:

La distribution des contraintes de cisaillement dues à la torsion dans une section quelconque ne se prête pas à une formulation analytique simple → analogie de la membrane.

$x = \varphi(y,z)$ = équation de la déformée de la membrane sous une pression uniforme p

V = volume entre la membrane déformée et le plan de la section

T = moment de torsion

τ_{xy} , τ_{xz} composantes de la contrainte de cisaillement au point courant de la section.

L'analogie de la membrane permet d'établir les correspondances suivantes :

$$T \leftrightarrow 2V$$

$$\tau_{xy} \leftrightarrow \partial\varphi / \partial z$$

$$\tau_{xz} \leftrightarrow -\partial\varphi / \partial y$$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



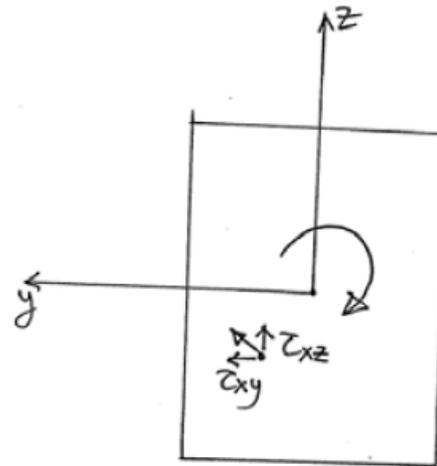
Propriétés générales des contraintes de cisaillement dues à la torsion pure, libre et uniforme:

Considérons une section de poutre soumise au couple de torsion T induisant des contraintes de cisaillement de composantes τ_{xy} , τ_{xz} dans un repère orthonormé Oyz direct.

$$T = \iint_S (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dy dz$$

On peut démontrer que :

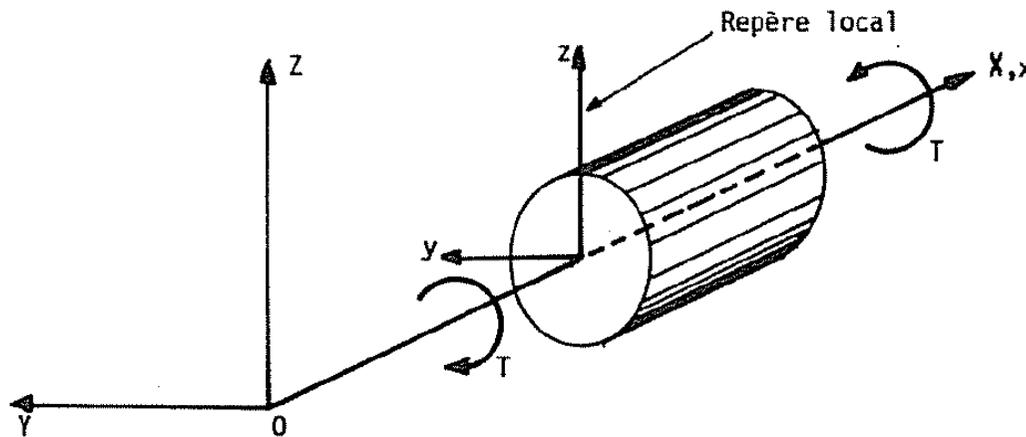
$$\iint_S y \tau_{xz} dy dz = - \iint_S z \tau_{xy} dy dz = T/2$$



Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion



$$d\theta/dx = -T/(GK)$$

Avec *K l'inertie de torsion* (constante ayant pour unités [m⁴])
Le produit GK est également appelé *rigidité de torsion*

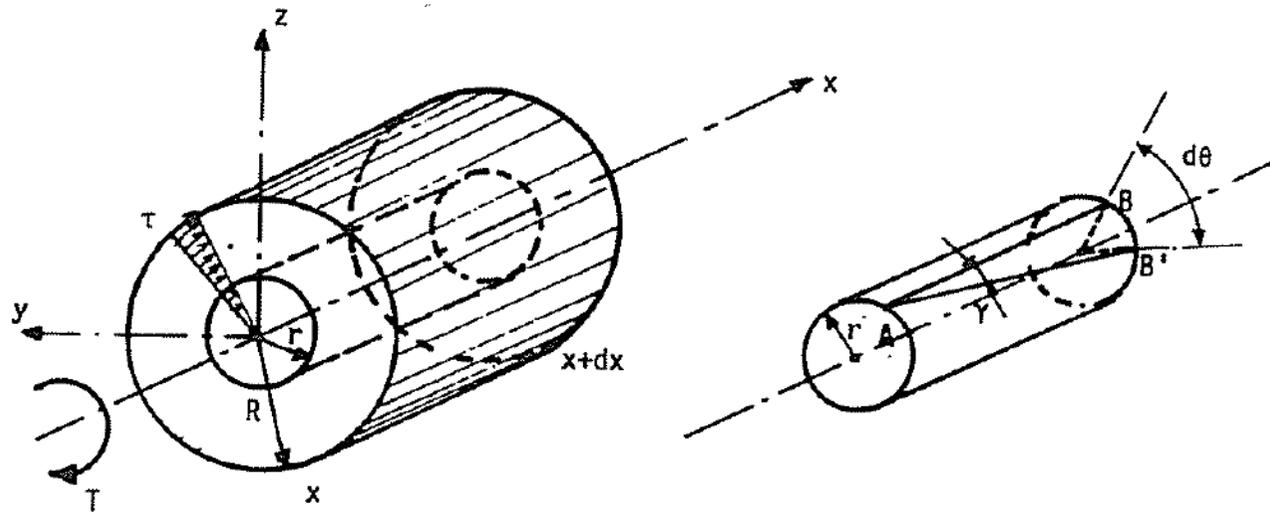
Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion

Section circulaire

Section circulaire de rayon R , soumise à un moment de torsion T uniforme. On peut démontrer que, dans ce cas particulier, la section ne connaît aucun gauchissement : les sections planes restent planes ; elles ne font que tourner les unes par rapport aux autres autour de l'axe de symétrie du cylindre.



Les contraintes de cisaillement engendrées par la torsion sont toujours perpendiculaires au rayon.

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion Section circulaire

$$\tau(r) = T r / K$$

Avec K le moment d'inertie polaire (ou inertie de torsion) :

$$K = \pi R^4 / 2$$

Par ailleurs la contrainte maximale se produit sur les contours de la section et vaut :

$$\tau_{\max} = \tau(R) = T R / K = 2T / (\pi R^3)$$

La déformation engendrée par la torsion est une rotation relative des sections infiniment voisines, de valeur :

$$d\theta/dx = -\tau(r) / (G r)$$

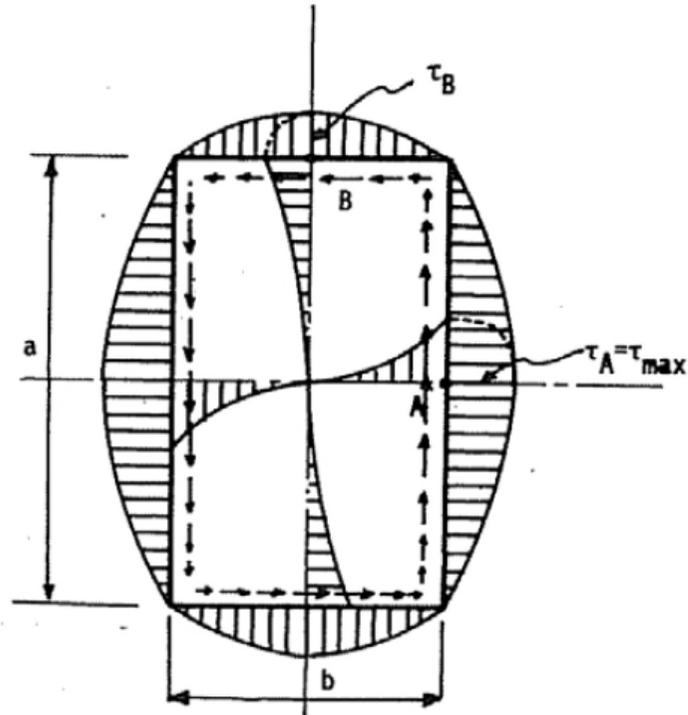
Avec $G = E / (2(1+\nu))$ le module de glissement

La rotation totale d'une poutre de longueur L et section circulaire pleine, encastree à une extrémité, en torsion pure et uniforme, vaudrait donc $\theta = - T L / (G K)$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion Section rectangulaire



$$\tau_A = \tau_{\max} = T/(\alpha ab^2)$$

$$\tau_B = \eta \tau_{\max}$$

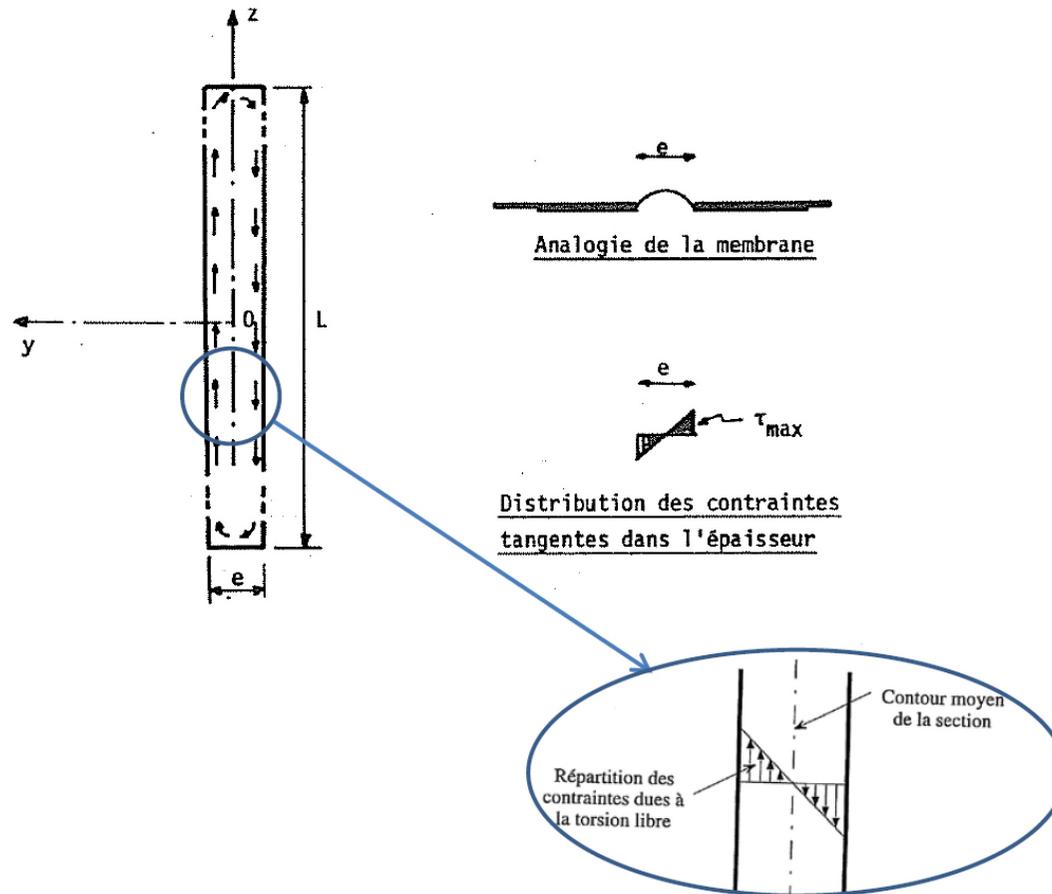
$$K = \beta ab^3$$

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	1/3
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	1/3
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion
Cas particulier d'une bande longue et mince



$$\tau_{\max} = 3T/(Le^2)$$

$$K = Le^3/3$$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion pure des poutres à section pleine – Inertie de torsion Inertie de torsion d'une section pleine composée d'éléments pleins

Considérons une section pleine composée d'éléments pleins, chacun ayant pour inertie de torsion K_i .

Si la section est *indéformable* sous torsion pure, c'est-à-dire, si la rotation de chaque élément pris individuellement est égale à celle des autres éléments et égale à celle de la section totale, alors l'inertie de torsion de la section globale est la somme des inerties de torsion de chacun de ses éléments

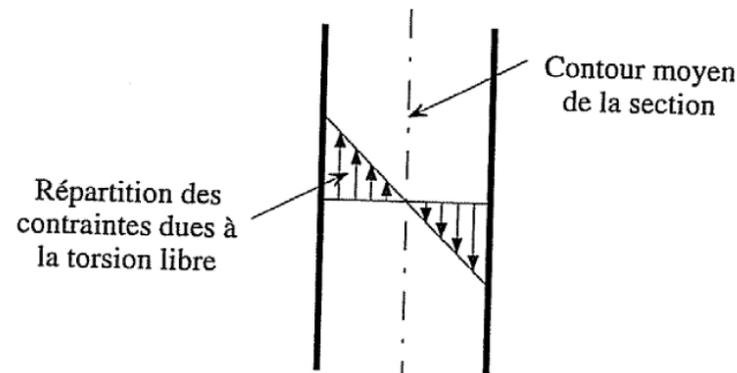
$$K = \sum K_i$$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion libre des profils minces ouverts

Inertie de torsion d'un profil mince ouvert



Si la section est *indéformable* sous torsion pure, c'est-à-dire, si la rotation de chaque élément pris individuellement est égale à celle des autres éléments et égale à celle de la section totale, alors l'inertie de torsion de la section globale est la somme des inerties de torsion de chacun de ses éléments

$$K = \sum(L_i e_i^3/3)$$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion libre des profils minces ouverts

Inertie de torsion d'un profil mince ouvert

Chaque paroi reprend un moment de torsion T_i , de sorte que $\sum T_i = T$, et comme la section est indéformable par hypothèse - $d\theta/dx = T_i / (GK_i)$. On déduit :

$$- d\theta/dx = T_1 / (GK_1) = T_2 / (GK_2) = \dots = T_n / (GK_n) = \sum T_i / (G\sum K_i) = T / (GK)$$

Dans ce cas :

$$\tau_{i,\max} = T e_i / K = 3T_i / (L_i e_i^2) = -G e_i d\theta/dx$$

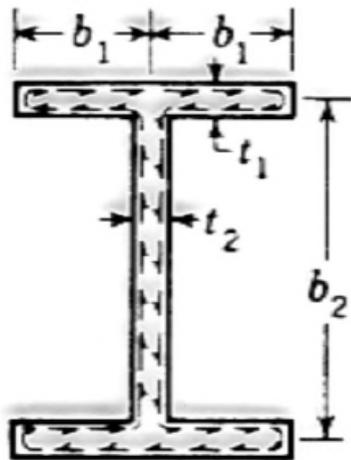
La plus forte contrainte tangente est donc obtenue sur les bords de l'élément le plus épais.

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Torsion libre des profils minces ouverts

Inertie de torsion d'un profil mince ouvert



$$K = \frac{4}{3} b_1 t_1^3 + \frac{1}{3} b_2 t_2^3$$

Dans les ailes :

$$\tau_{1,\max} = T e_1 / K = 3T e_1 / (4 b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$$

Dans l'âme :

$$\tau_{2,\max} = T e_2 / K = 3T e_2 / (4 b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$$

Rotation de torsion :

$$d\theta/dx = -T/(GK) = 3T/[G(4 b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)]$$

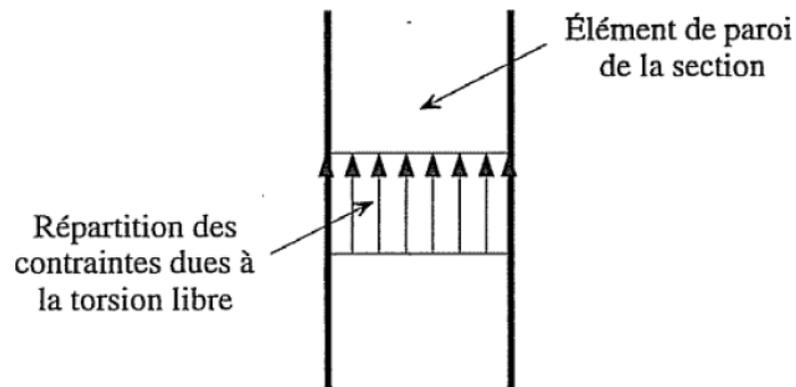
Torsion pure, libre et uniforme des poutres



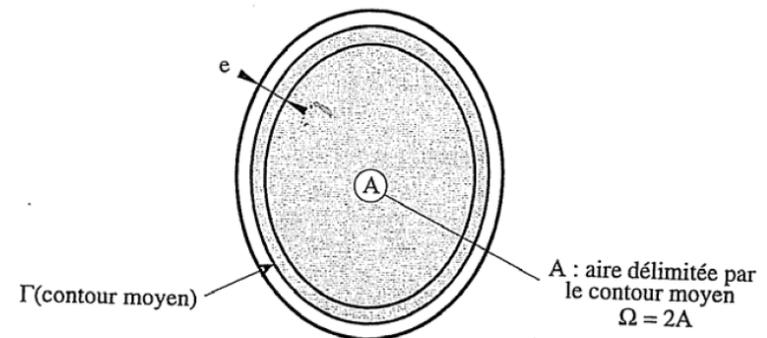
Torsion libre des profils minces fermés

Les contraintes dues à la torsion libre sont contenues dans le plan de la section droite et uniformément distribuées dans l'épaisseur des parois.

Le produit τe de la contraintes de cisaillement par l'épaisseur de la paroi est appelé flux de cisaillement.



$$\phi = \tau e = T/\Omega = T/(2A)$$



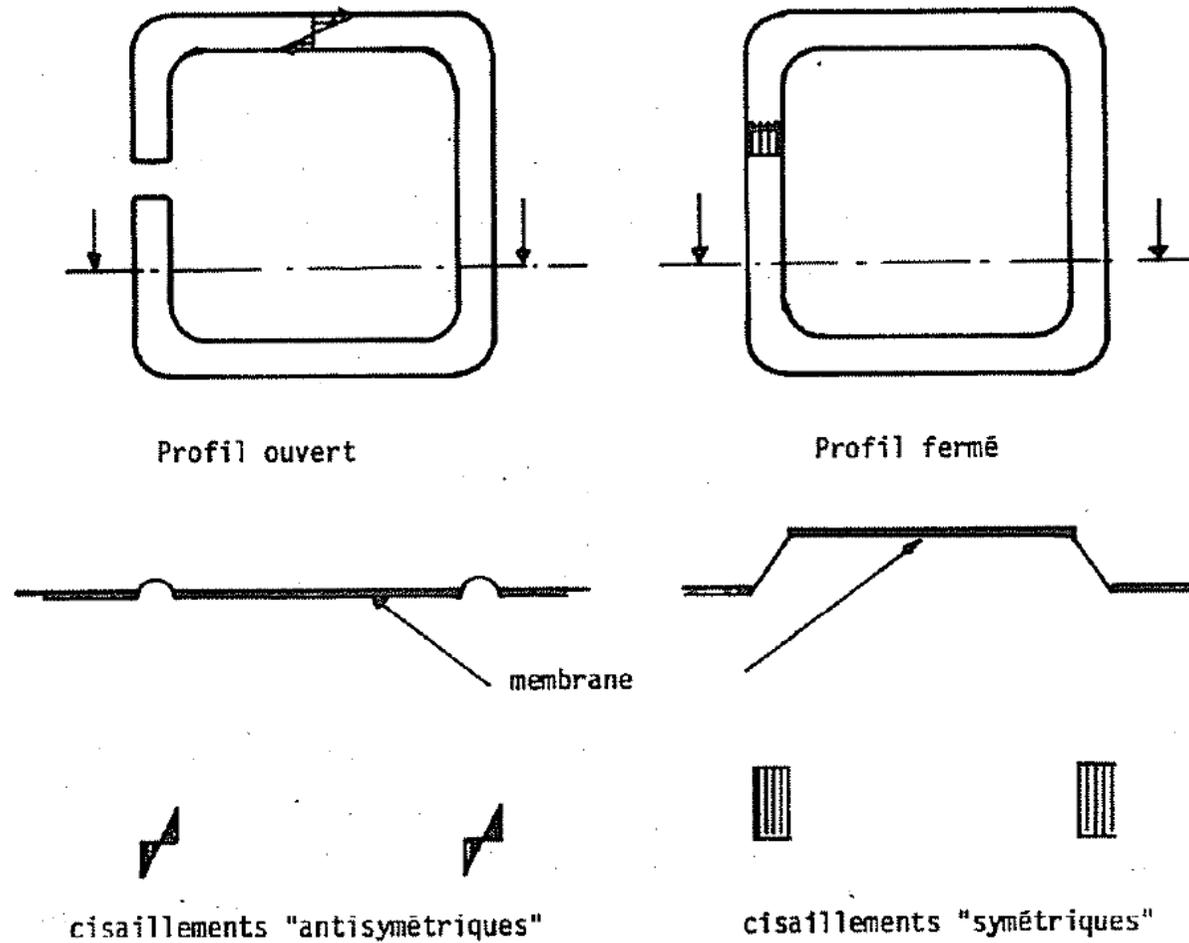
L'inertie de torsion s'écrit :

$$K = 4 A^2 / (\oint ds/e)$$

Torsion pure, libre et uniforme des poutres



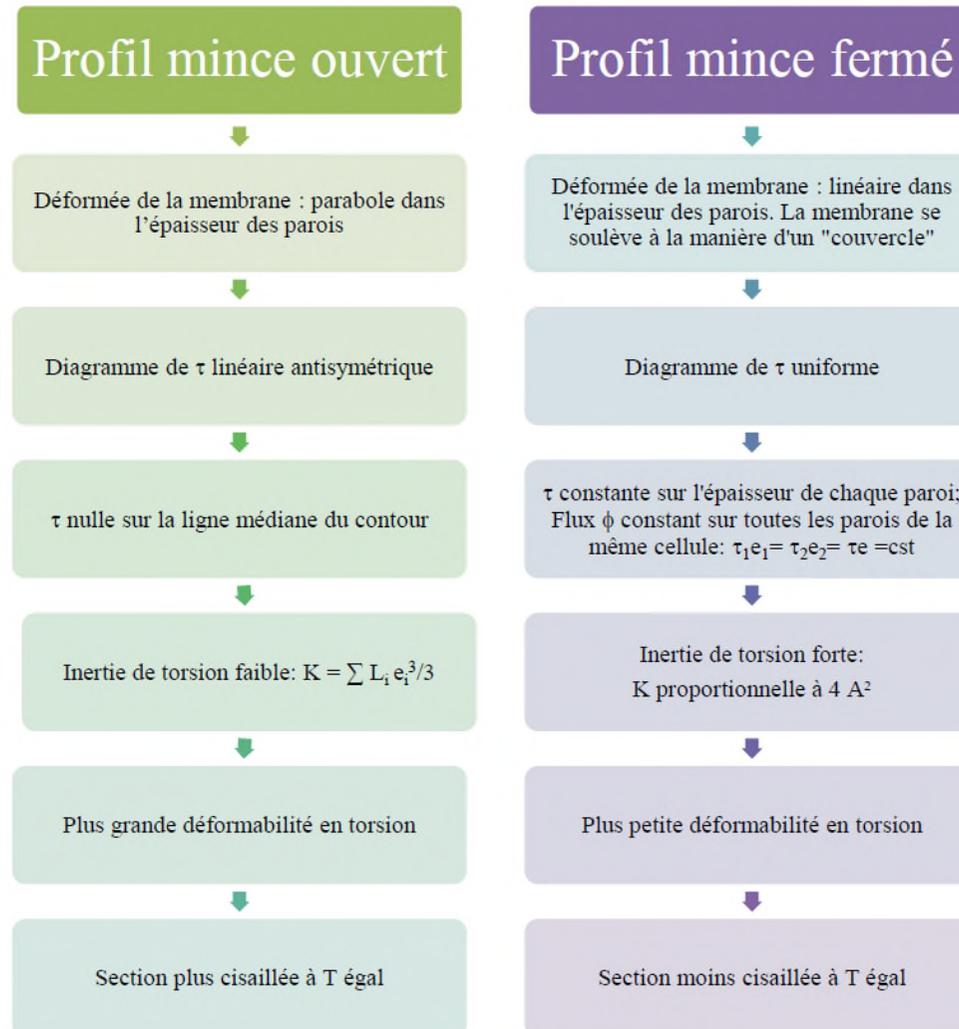
Différences de comportement à la torsion entre les profils minces ouverts et fermés



Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Différences de comportement à la torsion entre les profils minces ouverts et fermés

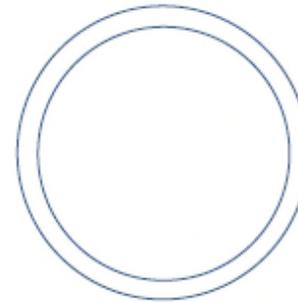
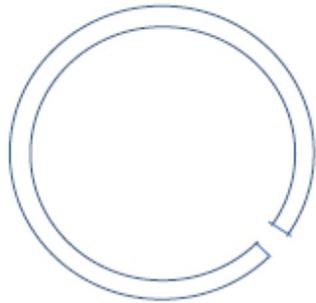


Torsion pure, libre et uniforme des poutres



Exercice:

Soit une section tubulaire ouverte de rayon R et épaisseur e , face à une autre section tubulaire fermée de mêmes rayon et épaisseur.



$R =$	0.75	m
$e =$	0.04	m
$T =$	0.5	MNm

Comparez les comportements à la torsion pure de ces deux sections



Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)

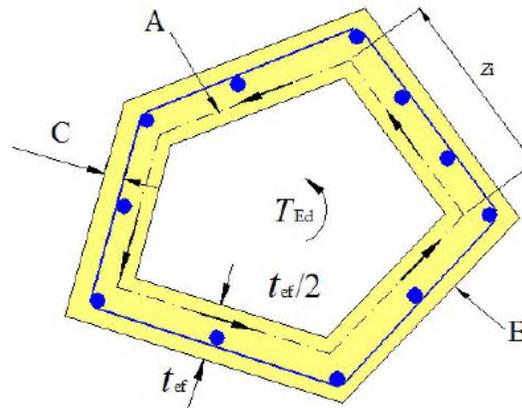
Vérfications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérfications normatives en Torsion - Principe:

L'Eurocode 2 ne traite explicitement que de la résistance à la torsion pure d'un élément de section pleine ou creuse, et énonce que la torsion gênée peut être négligée dans le cas des caissons et des sections pleines.

L'Eurocode 2 effectue la justification de la résistance en torsion pure dans une section fermée à parois minces, à partir de l'équilibre avec le flux de cisaillement exercé. Le cas d'une section pleine est traité en l'assimilant à une section creuse à parois minces équivalente.



A - Feuillet moyen

B - Parement extérieur de la section, périmètre u ,

C - Enrobage

Vérfications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérfications normatives en Torsion - Principe:

Section creuse: $t_{ef,i}$ sont les épaisseurs réelles.

Section pleine: $t_{ef,i}$ est alors supposée constante

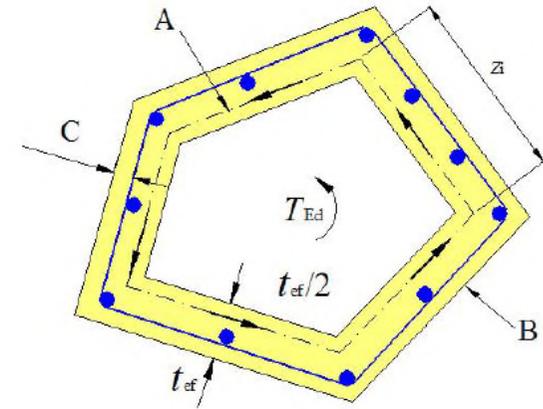
$$t_{ef,i} = A/u \text{ en général}$$

A = l'aire totale de la section délimitée par le périmètre extérieur, partie creuse comprise

u = le périmètre extérieur de la section

Le flux de cisaillement en torsion pure est donné par :

$$\tau_{T,i} t_{ef,i} = T_{Ed} / (2 A_k)$$



A - Feuillet moyen

B - Parement extérieur de la section, périmètre u ,

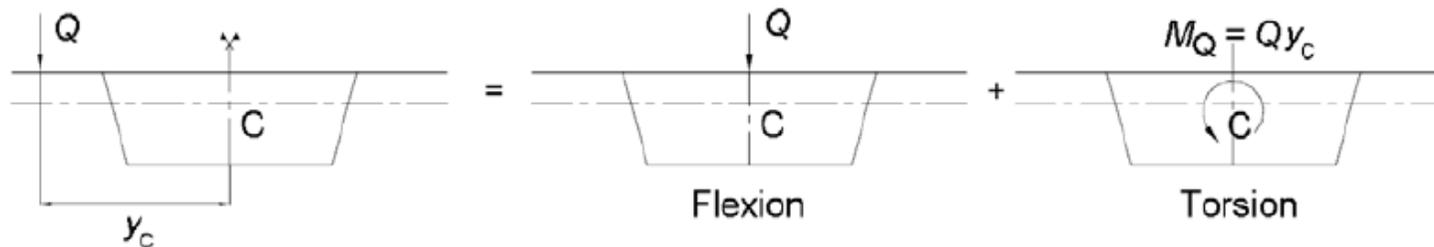
C - Enrobage

Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Cumul Tranchant/Torsion:

A condition d'avoir l'entretoisement et *raidissage suffisant pour assurer l'indéformabilité des sections transversales*, on traite l'excentrement des charges Q et q de trafic en les modélisant par des charges Q et q centrées et des charges de torsion (M_Q concentré et m_q réparti). La figure ci-dessous présente cette décomposition. Le point C est le centre de cisaillement de la section transversale



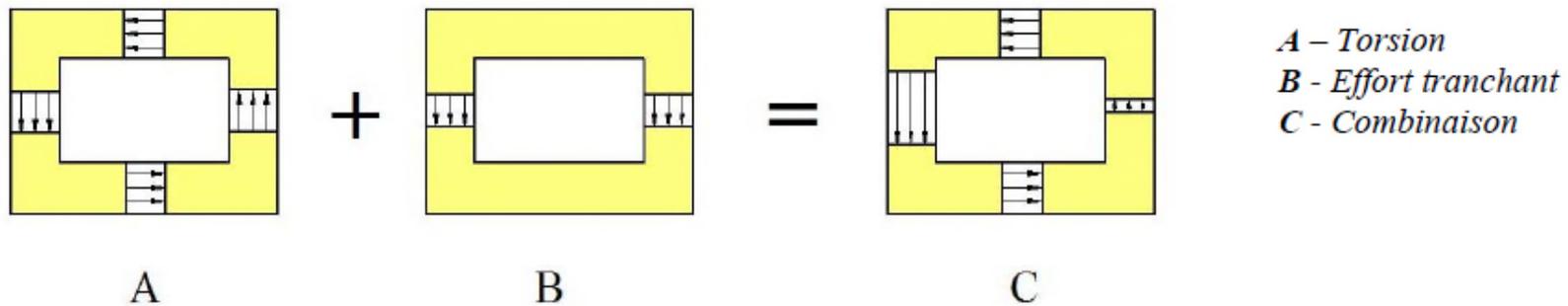
Dans tous les cas, les effets de la torsion et de l'effort tranchant peuvent être cumulés en prenant une même valeur pour l'inclinaison θ des bielles. Les valeurs limites sont celles définies pour l'effort tranchant.

Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Cumul Tranchant/Torsion:

Dans le cas des *caissons*, il convient de vérifier chaque paroi séparément en tenant compte du cumul algébrique des cisaillements de tranchant et de torsion.



Dans le cas de *sections pleines*, le cumul tranchant-torsion ne peut plus se faire simplement par cumul des cisaillements correspondants comme présenté ci-dessus. Le cisaillement de tranchant s'exerce en effet sur toute la largeur de l'élément, alors que le cisaillement de torsion s'exerce sur les parois de la section creuse équivalente.

Vérfications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérification de la résistance à la torsion combinée au tranchant: Vérification de la résistance en compression des bielles

Pour les sections pleines, il convient de vérifier :

$$T_{Ed} / T_{Rd,max} + V_{Ed} / V_{Rd,max} \leq 1$$

Où :

T_{Ed} est le moment de torsion agissant de calcul

V_{Ed} est l'effort tranchant agissant de calcul

$T_{Rd,max}$ est le moment de torsion résistant de calcul donné par :

$$T_{Rd,max} = 2 v a_{cw} f_{cd} A_k t_{ef,i} \sin\theta \cos\theta$$

Avec v donné en [EC2-1-1 6.2.2(6)] et a_{cw} par la note 3 de l'expression (6.9) de l'EC2-1-1, comme nous l'avons vu lors de la précédente séance sur le Tranchant.

$V_{Rd,max}$ est la valeur maximale de l'effort tranchant résistant de calcul. Il s'agit de la valeur ci-dessous (pour des armatures transversales perpendiculaires à fibre moyenne), comme déjà vu lors de la précédente séance sur le Tranchant :

$$V_{Rd,max} = a_{cw} b_W z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$$

On est dans le cas de sections pleines, et *la largeur complète de l'âme peut être utilisée pour déterminer $V_{Rd,max}$.*

Vérfications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérification de la résistance à la torsion combinée au tranchant: Vérification de la résistance en compression des bielles

Pour les caissons :

Il convient de vérifier séparément chaque paroi pour les effets combinés de la torsion et de l'effort tranchant concomitant s'il existe, appliqués à la paroi. Il faut donc que pour chaque paroi la somme des sollicitations tangentes de torsion et de tranchant reste inférieure à l'effort tranchant résistant de calcul de la paroi, soit :

$$V_{Ed,i(T)} + V_{Ed,i(V)} < V_{Rd,max,i}$$

Avec :

$V_{Ed,i(T)} = \tau_{T,i} t_{ef,i} z_i$: sollicitation tangente dans la paroi i due à la torsion.

$V_{Ed,i(V)}$: part de l'effort tranchant total sollicitant la paroi i

$V_{Rd,max,i}$: effort tranchant résistant de la paroi i , soit la valeur ci-dessous (pour des armatures transversales perpendiculaires à fibre moyenne), comme déjà vu lors de la précédente séance sur le Tranchant

$$V_{Rd,max} = a_{cW} b_W z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$$

On est dans le cas de sections creuses, et la largeur à utiliser pour déterminer $V_{Rd,max,i}$ est naturellement l'épaisseur de la paroi i .

Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérification de la résistance à la torsion combinée au tranchant:

Vérification de la résistance en compression des bielles

Dans le cas des caissons on peut formuler la vérification en fonction des contraintes de cisaillement :

$$\tau_{T,i} + \tau_{V,i} \leq \tau_{Rd,max,i}$$

Où $\tau_{T,i}$ et $\tau_{V,i}$ sont respectivement les contraintes de cisaillement de torsion et de tranchant dans la paroi i et $\tau_{Rd,max,i}$ la contrainte de cisaillement limite admissible.

Contrainte de cisaillement de torsion:

$$\tau_{T,i} = T_{Ed} / (2A_k t_{ef,i})$$

La contrainte de cisaillement de tranchant, issue de l'effort tranchant trouvé dans le treillis constitué par chaque paroi, est obtenue d'après l'Eurocode en divisant cet effort tranchant par la section de la paroi ($t_{ef,i} \times z_i$). Il s'agit donc une contrainte de cisaillement moyenne.

La contrainte de cisaillement limite admissible

$$\tau_{Rd,max} = \alpha_{cw} v_1 f_{cd} z/z_i \sin(2\theta)/2$$

Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)

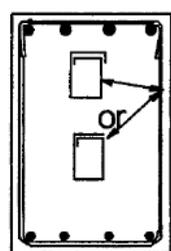


Vérification de la résistance à la torsion combinée au tranchant:
Armatures transversales

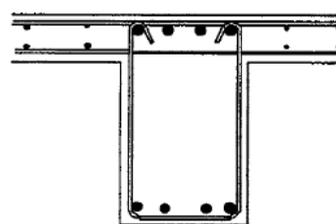
$$A_{sw,i}/s = (V_{Ed,i(V)} + V_{Ed,i(T)}) / (z f_{ywd} \cotg\theta)$$



a1)

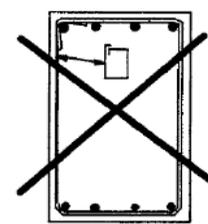


a2)



a3)

a) Configurations recommandées



b)

b) Configuration non recommandée

On peut formuler la vérification en fonction des contraintes de cisaillement.

$$A_{sw,i}/s = (\tau_{V,i} + \tau_{T,i}) \times t_{ef,i} \times z_i / (z f_{ywd} \cotg\theta)$$

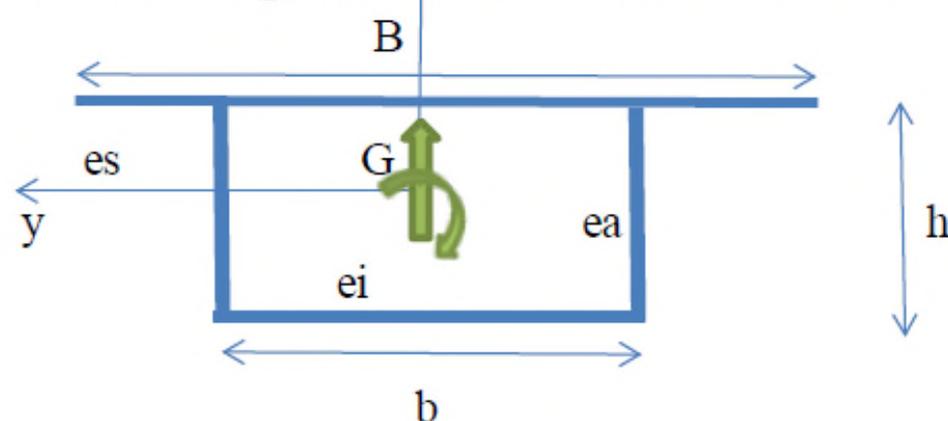
Nota : ne confondons pas $z =$ bras de levier du couple élastique *de la paroi*, avec z_i longueur de la paroi.

Vérifications en Torsion et Tranchant/Torsion (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Exemple:

Soit un tablier de pont caisson soumis à un effort tranchant vertical concomitant à un moment de torsion



$B =$	12.75 m
$b =$	5.9 m
$h =$	3.2 m
$es =$	0.25 m
$ea =$	0.3 m
$ei =$	0.25 m

Gz est axe de symétrie de la section.

$$V_z = V_{Ed} = 9 \text{ MN}$$

$$N_{conc} = 40 \text{ MN}$$

$$\text{Effort de torsion concomitant } T_{Ed} = 1.8 \text{ MNm}$$

Vérifiez la section sous le cumul Tranchant/Torsion. Calculez les armatures nécessaires