



Tranchant

ENPC – MSGCE – Projet d'ouvrage d'art 2024
Mathieu MULS

Contenu du cours



1. Définitions-Rappels
2. Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines
 - Formulation générale
 - Poutre à plan moyen chargée dans son plan
 - Déformations d'effort tranchant
 - Exemple
3. Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables
 - Section à parois minces ouverte
 - Exemple
 - Section à parois minces fermée
 - Exemple
4. Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)
 - Justifications à l'ELU dans l'âme
 - Justifications à l'ELU à la jonction membrure-âme
 - Effet Résal
 - Vérification à l'ELS pour les âmes



Documents de référence:

- Projet et construction de Ponts – Analyse des tabliers de ponts (J.A Calgaro)
- Poutres à parois minces – Etude du cisaillement (J.A Calgaro)
- Eurocode 2 – Application aux ponts-routes en béton - Guide méthodologique (SETRA)
- EN 1992-1-1 et son Annexe Nationale
- EN 1992-2 et son Annexe Nationale
- Pratique de l’Eurocode 2 (J. Roux)

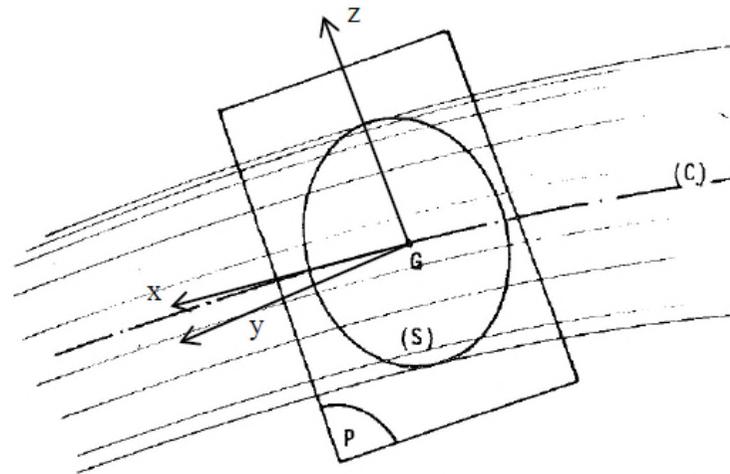


Définitions- Rappels

Définitions - Rappels



Définition de poutre: solide engendré par une aire plane S bornée, contenue dans un plan P , et de centre de gravité G (aussi appelé centre d'inertie), qui décrit une trajectoire C (appelée fibre moyenne), P étant perpendiculaire à C .



Axe x tangent à C (fibre moyenne)

Axes y, z principaux d'inertie de S

S constante ou variable de façon lente et continue.

Gyz axes principaux d'Inertie de S

Si C est une courbe plane on parle de poutre plane.

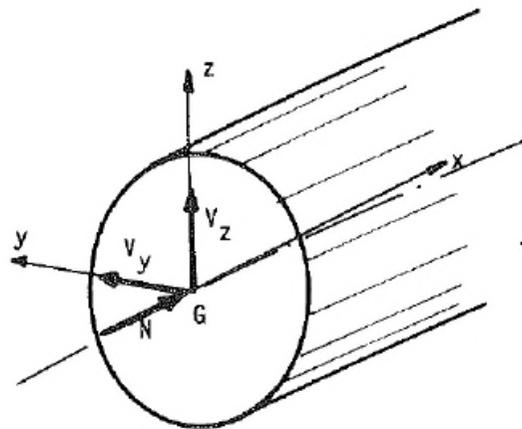
Si le plan qui contient C est un plan de symétrie de S on parle de poutre plane à plan moyen.

Définitions - Rappels



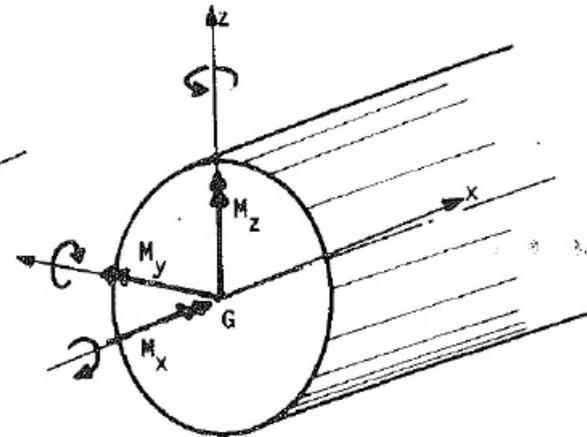
Sollicitations dans une section S d'abscisse curviligne s: éléments de réduction du torseur d'efforts (engendrés par les actions directes ou indirectes) dont les points d'application sont situés à des abscisses curvilignes inférieures à s.

Éléments de réduction du torseur des efforts de « gauche » sur la section S : somme géométrique et moment résultant. Ils se projettent sur le repère Gxyz en les composantes suivantes.



N effort normal positif en compression.

V_y, V_z composantes de l'effort tranchant.



M_x moment longitudinal.

M_y, M_z composantes du moment de flexion.

Définitions - Rappels



Contraintes:

Principe de Saint-Venant: les contraintes et déformations dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant (au centre de gravité de la section) associés à ce système de force.

Résultats:

- Principes de RDM valables loin de points d'application des forces
- Quel que soit la nature d'un système de force , seul le torseur résultant au centre de gravité de la section détermine l'état de celle-ci
- La distribution des contraintes tangentes σ_{xz} et σ_{xy} dépendent uniquement de M_x , V_y , V_z
- La distribution des contraintes normales σ_{xx} dépend uniquement de N , M_y , M_z

Définitions - Rappels



$$\mathbf{N} = (\int \sigma_{xx} dS) \mathbf{i}$$

$$\mathbf{V} = (\int \sigma_{xy} dS) \mathbf{j} + (\int \sigma_{xz} dS) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M} = M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} + M_x \mathbf{i} = (\int \sigma_{xx} z dS) \mathbf{j} - (\int \sigma_{xx} y dS) \mathbf{k} + (\int \sigma_{xz} y dS - \int \sigma_{xy} z dS) \mathbf{i}$$

Dans la théorie usuelle des poutres, au principe de St Venant s'ajoute le principe de Navier Bernouilli, selon lequel lors de la déformation d'une poutre, les sections planes avant déformation restent planes après application des efforts.

(Nota: l'effort tranchant V peut être noté T parfois dans la littérature)

Définitions - Rappels



Définition de poutre à section pleine et poutres à section mince:

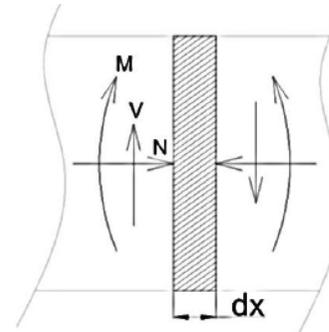
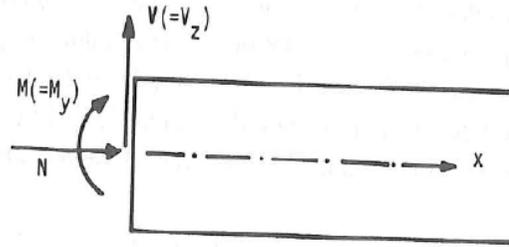
Nous devons distinguer les *poutres à section pleine* (auxquelles s'applique la théorie classique des poutres), des *poutres à section mince*. Dans les poutres à section mince, la section droite a une dimension (épaisseur) essentiellement plus petite que l'autre (la longueur du contour), cette dernière étant à son tour nettement plus petite que la longueur de l'axe de la poutre.

Dans la mesure où les sections transversales peuvent être considérées comme indéformables, les modèles classiques de calcul de contraintes et déformations établis pour les poutres à section pleine peuvent être employés. Cependant, du fait de leurs rapports géométriques particuliers, le principe de St Venant ne leur est pas toujours applicable.

Définitions - Rappels



Poutre chargée verticalement:



Avec cette convention de signes,

$$\frac{dM}{dx} = V \quad ; \quad \frac{dV}{dx} = -p$$

- Les contraintes normales dépendent uniquement de N, M d'après St Venant :

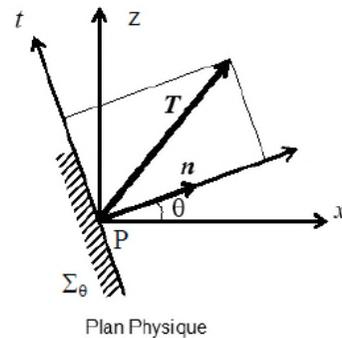
$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{I} v$$

- Les contraintes tangentielles dépendent uniquement de V (tranchant) et T (couple de torsion)

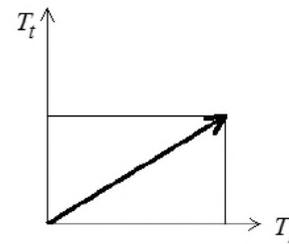
Définitions - Rappels



Cercle de Mohr: Le cercle de Mohr est la représentation des contraintes normales et tangentielles sur toutes les facettes passant par un point quelconque P.



Σ_α facette contenant l'axe Px dont le vecteur normal \mathbf{n} forme un angle θ avec Px



T vecteur-tension au point P peut être décomposé en T_t et T_n

Les contraintes normales et tangentielles à cette facette sont notées $\sigma(\theta)$ et $\tau(\theta)$.

$$T_n \equiv \sigma(\theta)$$

$$T_t \equiv \tau(\theta)$$

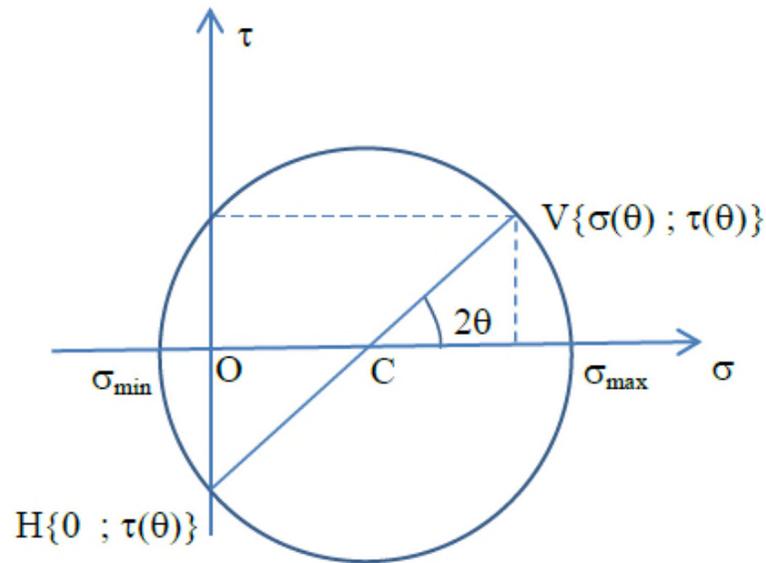
Si l'on fait varier θ de 0 à π radians l'ensemble des points $\{\sigma(\theta) ; \tau(\theta)\}$ décrit un cercle appelé cercle de Mohr.

Le cercle de Mohr est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Définitions - Rappels



Cercle de Mohr:



EX: Cercle de Mohr au niveau du centre d'inertie G (centre de gravité) d'une section en béton précontraint avec une précontrainte exercée uniquement suivant la direction de la fibre moyenne de la poutre.

Le cercle est défini par deux points diamétralement opposés V et H , correspondant respectivement au plan de la section (vertical), et au plan parallèle à la fibre moyenne (horizontal) et normal à l'axe de symétrie de la section.



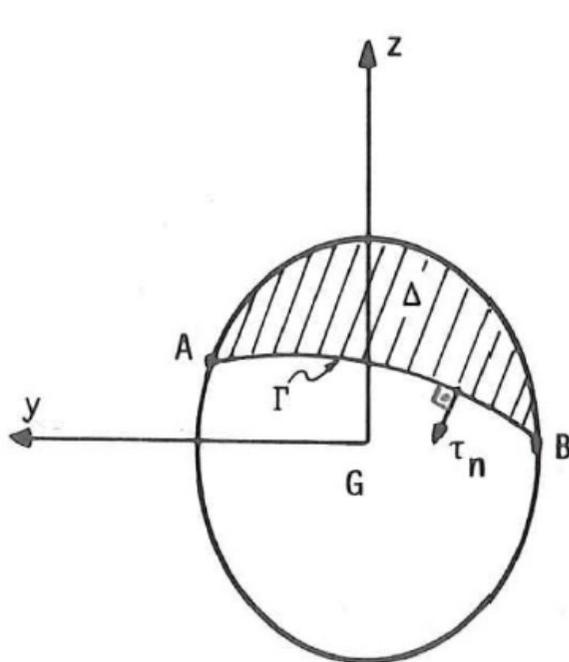
Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines

Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines



Formulation générale: poutre droite à fibres parallèles et section pleine, soumise à l'abscisse x au torseur e sollicitations réduit à V_y, V_z, M_y, M_z en son centre d'inertie G . D'après le principe de St Venant, en dehors des zones voisines des points d'application des efforts concentrés :

- Les contraintes normales $\sigma(x,y,z)$ dépendent uniquement de M_y, M_z
- Les contraintes tangentielles $\tau(x,y,z)$ dépendent uniquement de V_y, V_z



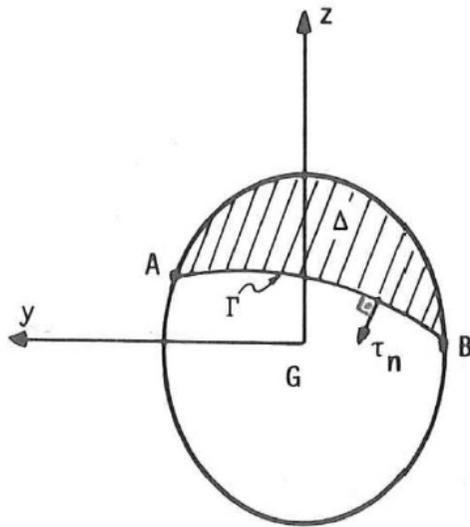
Notre poutre n'est soumise à aucune action tangente sur sa surface latérale. On peut démontrer à partir de l'équilibre d'une tranche infiniment petite (d'épaisseur dx), de section Δ et contour Γ que :

Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines



Formulation générale:

Equilibre:



$$\int_{\Gamma} \tau_n ds = -V_z / I_y S^*_y - V_y / I_z S^*_z$$

$S^*_y = \iint_{\Delta} z dy dz$ moment statique de la surface hachurée Δ par rapport à Gy.

$S^*_z = \iint_{\Delta} y dy dz$ moment statique de la surface hachurée Δ par rapport à Gz.

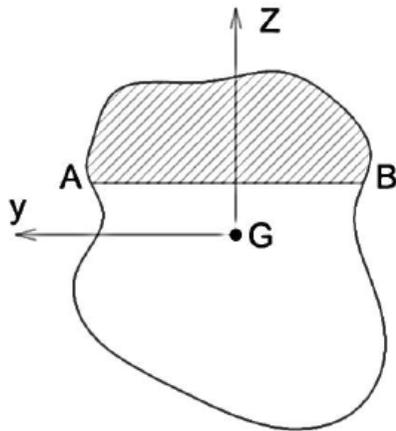
I_y = inertie de la *section totale* par rapport à Gy

I_z = inertie de la *section totale* par rapport à Gz

Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines



Poutre à plan moyen chargées dans son plan: Formule de Jouravsky



$$\int_{\Gamma} \tau(y,z) ds = -V_z / I_y S^*_y(z)$$

$$\underline{\tau(z)} = V_z S^*_y(z) / (b(z) I_y), \text{ avec } b(z) \text{ la largeur AB.}$$

$$\tau = V \mu / (b I)$$

$$\mu = S^*_y(z)$$

$Z = I / \mu_{\max}$ le « bras de levier » du couple élastique dans la section, on peut écrire :

$$\tau_{\max} = V_z / (b Z) = V_z / \Omega'$$

Pour chaque forme de section, on peut définir une « section réduite » $\Omega' = b Z$ telle que le rapport V_z / Ω' fournit la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines



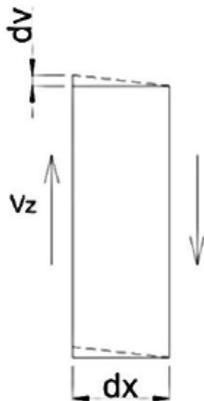
Déformations d'effort Tranchant:

Energie potentielle de déformation élastique d'expression:

$$U = dW/dx = 1/2 \iint_S (\sigma^2/E + \tau^2/G) dy dz$$

E le module de Young du matériau constitutif de la poutre
 $G = E / (2(1+\nu))$ son module de glissement

Comme d'après le principe de St Venant σ ne dépend que de M_y et τ ne dépend que de V_z , on peut dissocier les deux termes de flexion et tranchant.



$$dW_\tau / dx = 1/2 \iint_S \tau^2/G dy dz = -1/2 dv/dx V_z$$

$$dv/dx = -V_z / (G \Omega_1)$$

$$1/\Omega_1 = 1/I_y^2 \int S_y^2(z) / b(z) dz$$

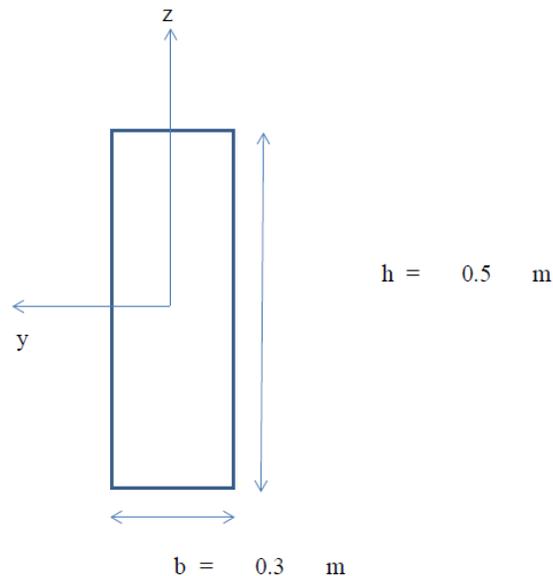
Ω_1 est la section réduite à l'effort tranchant, à prendre en compte pour le calcul de la déformation d'effort tranchant. Ω_1 dépend uniquement de la géométrie de la section.

Calcul du cisaillement dû au tranchant dans les sections pleines



Exemple:

Poutre droite de section constante, chargée dans son plan, soumise à M_y et $V_z = 0.3 \text{ MN}$



$$\begin{aligned} E &= 30000 \text{ Mpa} \\ \nu &= 0.2 \\ G &= 12500 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

- Déterminez la distribution de $\tau(z)$:
- Déterminez la section réduite d'effort tranchant Ω_1
- Comparez la déformation d'effort tranchant avec celle due à la flexion pour une console de longueur l chargée par une force $F = 0.3 \text{ MN}$ à son extrémité



Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables

Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables



Section à parois minces ouverte :

La théorie établie dans le cas d'une poutre à section pleine est utilisable dans le cas d'une poutre à parois minces ouverte si:

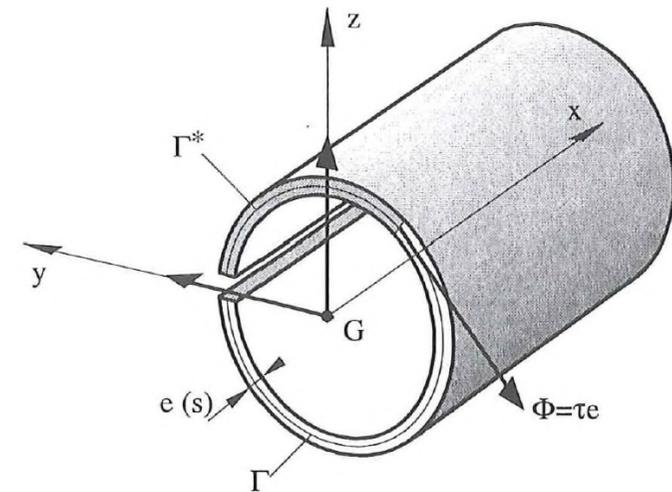
- La section est rapportée à ses axes principaux d'inertie G_y, G_z
- La section est convenablement raidie transversalement pour pouvoir être considérée comme indéformable
- La poutre est à fibres parallèles
- Les coupures le long desquelles on calcule le cisaillement τ_n sont perpendiculaires à la ligne médiane de la section Γ (d'abscisse curviligne s)

$\phi = \tau e \rightarrow$ flux de cisaillement au point courant du profil

$$\phi = -V_z S^*y / I_y - V_y S^*z / I_z$$

$$\text{Avec } S^*y = \int_{\Gamma^*} z e ds$$

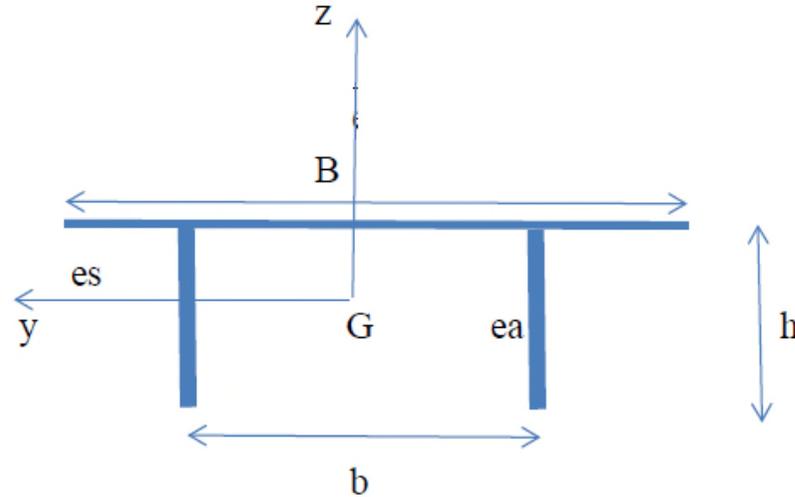
$$S^*z = \int_{\Gamma^*} y e ds$$



Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables



Exemple: Section à parois minces ouverte



$L =$	30 m
$B =$	15 m
$b =$	8.4 m
$h =$	2.775 m
$es =$	0.45 m
$ea =$	0.95 m
$E =$	40000 Mpa
$\nu =$	0.15
$V_y =$	1 MN
$V_z =$	1 MN

Gz est axe de symétrie de la section.

Calculez l'épure du flux de cisaillement engendré par V_z

Calculez l'épure du flux de cisaillement engendré par V_y

Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables



Section à parois minces fermée :

La théorie établie dans le cas d'une poutre à section pleine est utilisable dans le cas d'une poutre à parois minces fermée si:

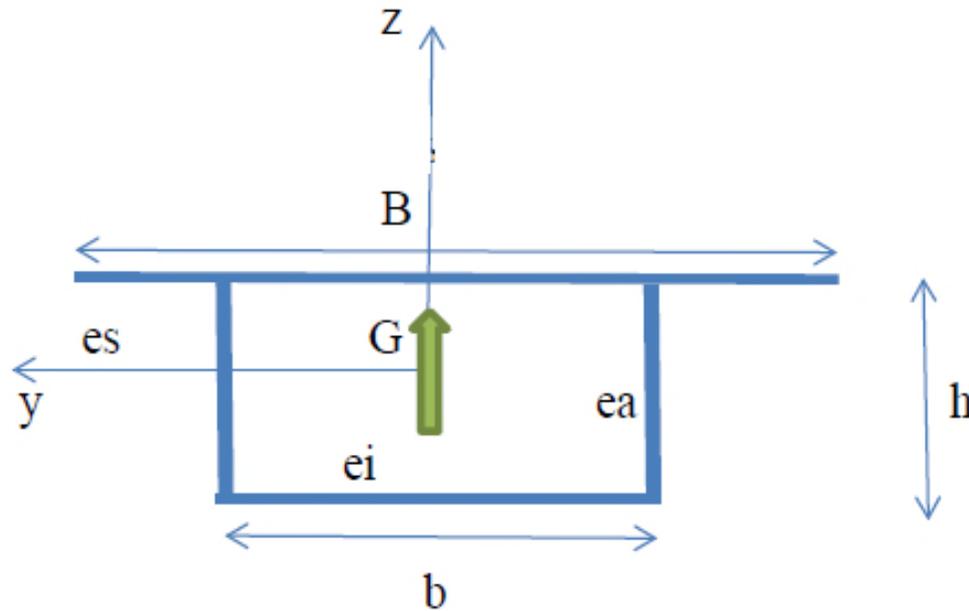
- La section est rapportée à ses axes principaux d'inertie G_y , G_z
- La section est convenablement raidie transversalement pour pouvoir être considérée comme indéformable
- La poutre est à fibres parallèles
- Les coupures le long desquelles on calcule le cisaillement τ_n sont perpendiculaires à la ligne médiane de la section Γ (d'abscisse curviligne s)

$$\phi = -V_z S_y^* / I_y - V_y S_z^* / I_z$$

Cisaillement dû au tranchant dans les sections à parois minces indéformables



Exemple: Section à parois minces fermée



$B =$	12.75 m
$b =$	5.9 m
$h =$	3.2 m
$es =$	0.25 m
$ea =$	0.3 m
$ei =$	0.25 m

Gz est axe de symétrie de la section.

Calculez l'épure du flux de cisaillement engendré par V_z

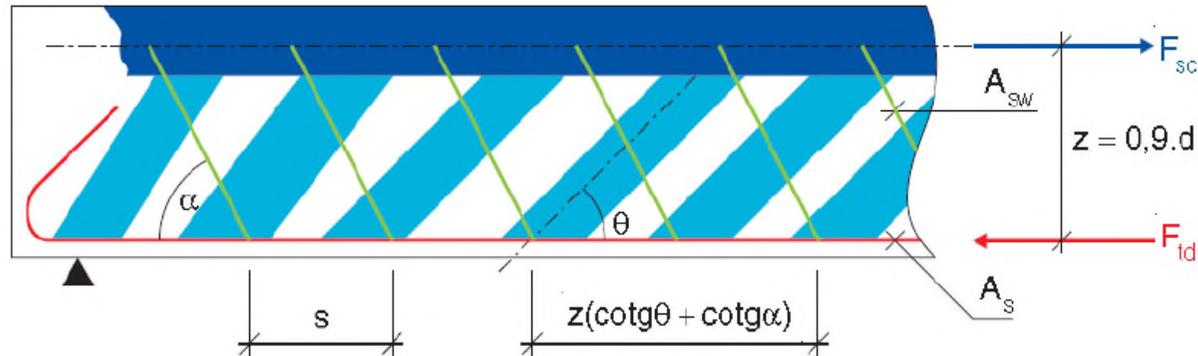


Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme:



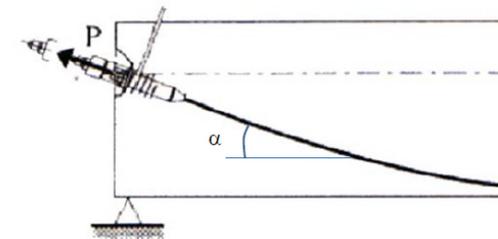
Modèle du treillis de Morsch

EN 1992-1-1 §6.2 sont traitées les justifications à l'effort tranchant.
Cas du béton précontraint:

$$V_{ed} = 1.35 G + P + 1.35 Q \text{ (si charges variables routières)}$$

$$V_{Ed} = 1.35 V_G + 1.35 V_Q - \sum P_i \sin \alpha_i$$

$$N_{conc} = \sum P_i \cos \alpha_i$$



Largeur d'âme de calcul $b_{w,nom}$ (à l'endroit le plus défavorable):

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme:

Largeur d'âme de calcul $b_{w,nom}$ (à l'endroit le plus défavorable):

$$b_{w,nom} = b_w - 1,2 \sum \phi \quad \text{Si gaines métalliques injectées}$$

$$b_{w,nom} = b_w - 0,5 \sum \phi \quad \text{Si gaines non injectées ou précontrainte non adhérente}$$

$VR_{d,c}$ = Effort tranchant admissible dans la section en l'absence d'armatures de tranchant

$VR_{d,max}$ = Effort tranchant admissible dans la structure pour éviter l'écrasement des bielles par compression

$VR_{d,s}$ = Effort tranchant admissible dans la section en fonction des aciers de tranchant mis en place

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme:

- $V_{Ed} < V_{Rd,c}$ il n'y a pas d'aciers de tranchant fournis par le calcul ; On dispose un ferrailage minimal.
- $V_{Ed} > V_{Rd,c}$ il faut mettre en place un ferrailage de tranchant tel que :

$V_{Ed} < V_{Rd,s}$ (résistance des armatures de cisaillement)

$V_{Ed} < V_{Rd,max}$ (résistance des bielles comprimées)

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$

$$V_{Rd,max} = a_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta)$$

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme: résistance des bielles comprimées

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot\theta + \tan\theta)$$

v_1 est un coefficient de réduction de la résistance du béton fissuré à l'effort tranchant

α_{cw} est un coefficient tenant compte de l'état de contrainte dans la membrure comprimée.

$$v_1 = v$$

$$v = 0,6 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \quad (f_{ck} \text{ en MPa})$$

Valeur de α_{cw} :

1	pour les structures non précontraintes
$(1 + \sigma_{cp}/f_{cd})$	pour $0 < \sigma_{cp} \leq 0,25 f_{cd}$
1,25	pour $0,25 f_{cd} < \sigma_{cp} \leq 0,5 f_{cd}$
$2,5 (1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	pour $0,5 f_{cd} < \sigma_{cp} < 1,0 f_{cd}$

où :

σ_{cp} est la contrainte de compression moyenne dans le béton due à l'effort normal de calcul, mesurée positivement. Il convient de la déterminer en faisant la moyenne sur toute la section de béton, en tenant compte des armatures. Il n'y a pas lieu de calculer σ_{cp} à une distance inférieure à $0,5d \cot\theta$ du nu de l'appui.

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme: résistance des armatures de cisaillement

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$

$$V_{Ed} < V_{Rd,s} \quad \text{d'où} \quad A_{sw} / s \geq V_{Ed} / (z f_{ywd} \cot \theta)$$

Dispositions constructives (EN 1992-1-1 §9) :

Ferrailage minimal d'effort tranchant dans les poutres : $\rho_{wmin} = (0.08 \sqrt{f_{ck}}) / f_{yk}$

Espacement longitudinal maximal des armatures : $s < s_{lmax} = 0.75 d (1 + \cot \alpha)$

Espacement transversal maximal des armatures : $s_{tmax} = 0.75 d \leq 600 \text{mm}$

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



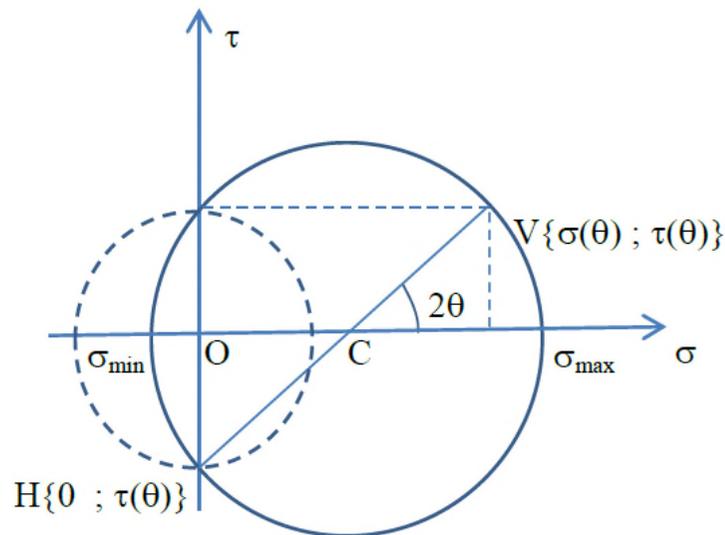
Justifications à l'ELU dans l'âme: choix de l'inclinaison des bielles

$$1 \leq \cotg \theta \leq 2.5$$

en compression simple

$$[1 + \sigma_{ct}/f_{ctm}]^{1/2} \leq \cotg \theta \leq 2.5 [1 + \sigma_{ct}/f_{ctm}]^{1/2}$$

en traction, avec σ_{ct} la traction au centre de gravité ($-f_{ctm} < \sigma_{ct} < 0$)



La contrainte principale de compression forme un angle θ avec la fibre moyenne, de sorte que:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = 2\tau/\sigma$$

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU dans l'âme: choix de l'inclinaison des bielles

Augmenter l'inclinaison des bielles (diminuer θ donc) a pour effets :

- *Effet positif* :
- Diminuer la quantité d'aciers transversaux nécessaires (car $\cotg\theta$ augmente)

- *Effets négatifs* :
- Diminuer l'effort admissible de compression dans les bielles (car $(\cotg\theta + \tg\theta)$ augmente)
- Les aciers longitudinaux de flexion sont augmentés par suite du décalage de la courbe des moments de $0.5 z \cotg\theta$

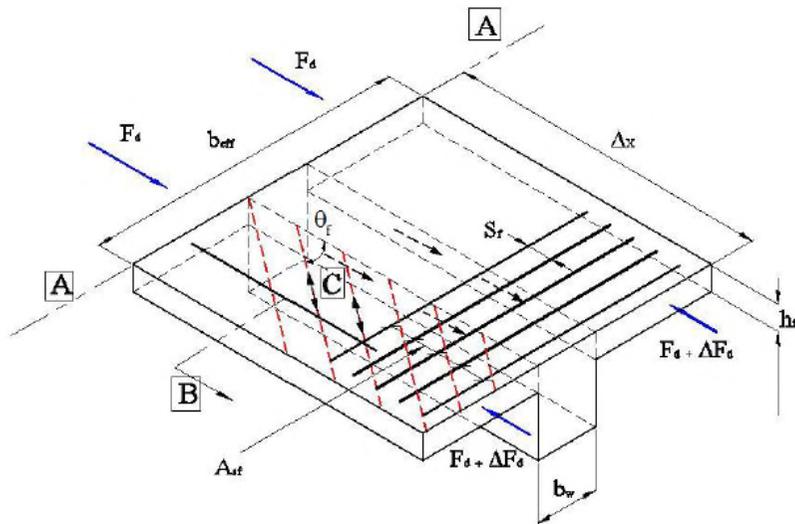
En effet, l'inclinaison des bielles du treillis induit un effort de traction supplémentaire dans les membrures, de valeur $\Delta F_{td} = 0.5 V_{Ed} (\cotg\theta - \cotg\alpha)$.

Pour des éléments comportant un ferrailage d'effort tranchant cet effort ΔF_{td} peut être obtenu par un décalage de la courbe des moments de $a_l = z (\cotg\theta - \cotg\alpha)/2$

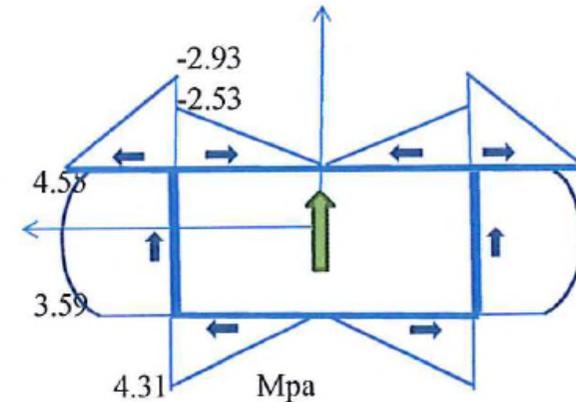
Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU à la jonction membrure-âme:



A - bielles de compression
 B - barre longitudinale ancrée au-delà du point obtenu par construction avec θ_f (voir 6.2.4 (7))



Dans le cas du béton précontraint, et des caissons, en absence d'efforts concentrés apportant de brusques variations d'effort normal dans les hourdis, il est plus judicieux de recourir aux expressions classiques de la RDM et de calculer :

$$v_{Ed} = V_{Ed} S / (h_f I)$$

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Justifications à l'ELU à la jonction membrure-âme:

Vérification de la compression des bielles dans les membrures:

$$v_{Ed} \leq v f_{cd} \sin \theta_f \cos \theta_f$$

Détermination des armatures transversales de couture par unité de longueur A_{sf}/s_f :

$$(A_{sf} f_{yd} / s_f) \geq v_{Ed} \cdot h_f / \cot \theta_f$$

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Effet Résal:

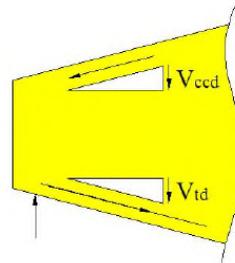
Dans les sections de hauteur variable en T ou en caisson comportant des membrures, la variation d'effort

tranchant due à l'effet Résal doit être prise en compte. Elle est calculée à partir de :

- V_{ccd} : valeur de calcul de la composante d'effort tranchant de la force de compression, dans le cas d'une membrure comprimée inclinée ;

- V_{td} : valeur de calcul de la composante d'effort tranchant de la force de traction dans l'armature tendue, dans le cas d'une membrure tendue inclinée.

La figure ci-dessous précise les conventions de signe [EC2-1-1 Fig.6.2] :

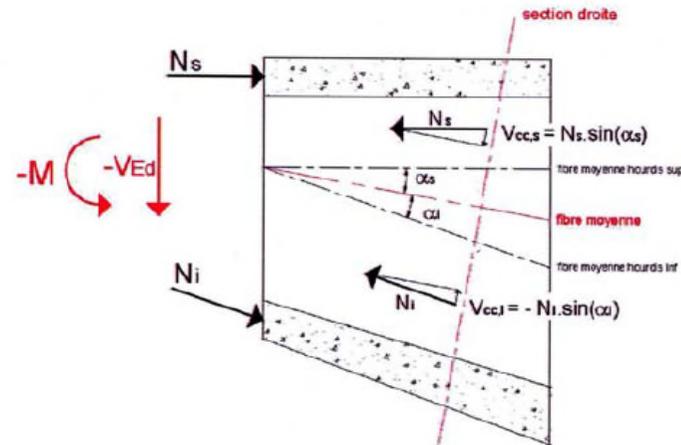


L'effort Tranchant: $V_{Ed} - V_{ccd} - V_{td}$.

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Effet Résal:



N_s est la résultante des contraintes normales du hourdis supérieur ($N_s > 0$ pour une compression).

Dans le cas de traction c'est la somme des efforts de traction des aciers du hourdis .
 α_s est l'angle d'inclinaison de la fibre moyenne par rapport au hourdis supérieur.

N_i et α_i sont les valeurs correspondantes pour le hourdis inférieur.

La variation due à l'effet Résal est égale à : $\Delta V_{\text{Résal}} = -V_{cc,s} - V_{cc,i} = -N_s \cdot \sin(\alpha_s) + N_i \cdot \sin(\alpha_i)$

Avec $N_i > N_s$ et $\alpha_s \approx \alpha_i$, la variation $\Delta V_{\text{Résal}}$ est positive.

L'effort V_{Ed} étant négatif, l'effet Résal est dans ce cas favorable puisqu'il réduit l'effort tranchant (en valeur absolue).

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Effet Résal:

La prise en compte de l'effet Résal est a priori favorable car susceptible de réduire l'effort tranchant général, pour les sections près des appuis intermédiaires.

Par contre lorsque l'on se rapproche de la mi-travée, le hourdis supérieur devient très comprimé, le hourdis inférieur tendu et l'effet Résal accroît l'effort tranchant général.

Justification à l'effort tranchant (EN 1992-1-1 et EN 1992-2)



Vérification à l'ELS pour les âmes:

L'Annexe QQ de l'EN 1992-2 tente de formuler la maîtrise de la fissuration d'effort tranchant par cisaillement des âmes

La contrainte principale de traction σ_1 qui s'exerce sur l'âme doit être inférieure à la résistance à la traction du béton

$$\sigma_1 \leq f_{ctb} = (1 - 0.8 \sigma_3/f_{ck}) f_{ctk0.05}$$