Devoir à la maison

à rendre pour le lundi 10 Juin
en classe ou par email à denis.duhamel@enpc.fr

Comportement acoustique d'une salle

Ce devoir vise à étudier l'acoustique d'une salle de forme simple et son comportement lorsqu'un son est produit dans la pièce. Il nécessite l'utilisation d'un logiciel de type Matlab ou Scilab (pour la partie II). On considère donc une salle de longueur 10m suivant x, de largeur 5m suivant y et de hauteur 3m suivant z. La propagation du son dans cette salle à une pulsation ω est décrite par l'équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = s$$

avec $k = \omega/c$, c étant la vitesse du son égale à 340m/s et s des termes de source. Les conditions aux limites sur les parois seront précisées dans la suite.

I) Acoustique de la salle

1) Cas haute fréquence

i. On se place dans un premier temps dans le cadre d'un champ diffus (haute fréquence). On suppose que le plafond et le plancher ont un coefficient d'absorption de 0.2 alors que les murs ont un coefficient d'absorption de 0.04. Quel est le temps de réverbération de la salle ?

ii. Que faudrait-il faire pour augmenter (respectivement diminuer) ce temps de réverbération ?

2) Approche modale

i. On considère que les murs sont rigides et on se place maintenant dans le régime modal. On cherche les modes propres sous la forme $p(x,y,z) = cos(Ax) * cos(By) * cos(Cz)$. Quelles conditions doit vérifier le triplet (A, B, C) pour obtenir un mode propre de la salle ?

ii. Pour un triplet (A, B, C) vérifiant cette condition, en déduire la pulsation propre associée.

iii. En déduire approximativement le nombre $N(\omega)$ de modes propres inférieurs à une valeur donnée de la pulsation ω. (Un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1$ a pour volume $\frac{4}{3}\pi uvw$.)

iv. En déduire approximativement le nombre de modes propres contenus dans un intervalle $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$ pour $\Delta\omega << \omega_0$.

v. Au voisinage d'une fréquence de résonance ω_0 la pression évolue comme

$$p(\omega) \approx \frac{p_0}{\omega^2 - 2ia\omega - \omega_0^2} \tag{1}$$

Quelle est la largeur du pic de résonance $\Delta\omega$ pour lequel nous avons

$$|p(\omega)| \geq \frac{|p(\omega_0)|}{\sqrt{2}}$$

pour $\omega \in [\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$? Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a = \xi\omega_0$, supposer que l'amortissement est faible $\xi << 1$ et que $\Delta\omega << \omega_0$.

vi. A partir de quelle fréquence F cette largeur de pic calculée dans la question précédente contient-elle au moins six modes en utilisant le calcul fait à la question I)(2))iv ? A quoi peut ressembler la courbe de réponse en fréquence pour des fréquences supérieures à F ? Que se passe-t-il alors ?

vii. Donner la valeur numérique de F pour $a = 15rd/s$. En écrivant $a = \xi\omega_0$, quelle est la valeur du coefficient d'amortissement ξ pour $\omega_0 = 2\pi F$?

viii. Comparer avec le résultat de la formule de Schroeder pour avoir un champs diffus

$$f_{lim} = 2000\sqrt{\frac{T}{V}} \tag{2}$$

3) Réponse pour une source ponctuelle

i. Modifier la fonction de la question ((I)(1))i pour que l'intégrale de son carré soit égal à 1 sur le volume de la salle. On appellera $\Phi_{nmp}(x,y,z)$ cette fonction.

ii. On considère une source ponctuelle placée au point $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Le champ de pression est donc solution de

$$\Delta p + k^2 p = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Montrer que le champ de pression solution est donné par

$$p(x,y,z) = \sum_{n\geq 0, m\geq 0, p\geq 0} \frac{1}{k^2 - k_{nmp}^2} \Phi_{nmp}(x,y,z)\Phi_{nmp}(x_0,y_0,z_0) \tag{3}$$

avec

$$k_{nmp}^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L_z}\right)^2 \tag{4}$$

iii. On suppose maintenant que les parois ne sont plus rigides mais ont une impédance uniforme Z. Quel est le coefficient d'absorption α associé à cette impédance Z ? Donner la valeur numérique de α pour $Z = 30\rho c$.

iv. Montrer que le champ de pression est maintenant donné par l'expression

$$p(x,y,z) \approx \sum_{n\geq 0, m\geq 0, p\geq 0} \frac{1}{k^2 - 2i\tilde{a}k - k_{nmp}^2} \Phi_{nmp}(x,y,z)\Phi_{nmp}(x_0,y_0,z_0) \tag{5}$$

Pour obtenir cette formule, on négligera le couplage entre les modes dans les calculs et on considérera que les modes pour lesquels l'un des nombres n, m ou p est nul a une influence faible dans la somme.

v. Donner la valeur numérique de $\tilde{a}$ pour $Z = 30\rho c$ et comparer avec la valeur de a/c où la valeur de a est $15 rd/s$ comme à la question ((I)(2))vii.

II) Simulation sonore

On se propose d'utiliser les formules précédentes pour effectuer différentes simulations du comportement acoustique de la salle. Pour limiter les calculs, on considérera uniquement le cas bidimensionnel avec

$$\begin{aligned} p(x,y) &\approx \sum_{n\geq 0, m\geq 0} \frac{1}{k^2 - 2i\tilde{a}k - k_{nm}^2} \Phi_{nm}(x,y)\Phi_{nm}(x_0,y_0) \\ k_{nm}^2 &= \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

qui est obtenu en ignorant la composante z dans les formules de la partie I.

1) Réponses en différents points.

i. Adapter la formule de la question ((I)(2))iii au cas bidimensionnel.

ii. Combien y a t-il de modes jusqu'à 4kHz ? jusqu'à 40kHz ?

iii. Tracer les fonctions de réponse en fréquence en $\mathbf{x} = (1.5m, 2.m)$ et $\mathbf{x} = (3.5m, 4.m)$ pour $\mathbf{x}_0 = (5.25m, 3m)$ dans la bande de fréquences $[0\ 2000Hz]$ à partir de la formule de la question ((II)(1))iii en utilisant le nombre de modes trouvé à la question précédente pour $4000Hz$.

iv. Faites une transformation de Fourier numérique pour obtenir les réponses temporelles et les tracer.

v. Retracer les courbes de la question précédente en multipliant la valeur de l'amortissement a par 10 ($a = 150rd/s$).

2) Simulations sonores.

i. Sur le site educnet du cours, pour la séance 2, récupérer le fichier note.wav.

ii. Charger ce fichier dans matlab (ou dans scilab) avec la fonction audioread. Quelle est la fréquence d'échantillonnage du son ?

iii. Tracer l'évolution temporelle du son.

iv. Faire la transformée de Fourier et tracer le spectre.

v. En utilisant les formules 6, supposant que la note est jouée à la position $\mathbf{x}_0$, simuler les réponses aux positions $\mathbf{x}$.

vi. Générer les fichiers .wav correspondants et les écouter. Fournir ces fichiers avec les réponses au devoir.