

Corrigé du TD 3

Exercice 1

- Donner l'expression du coefficient d'absorption pour un matériau d'épaisseur e recouvrant un mur rigide.

$$Z_s = -iZ \cotg(kD)$$

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2 \quad (1)$$

- Les absorptions pour $\sigma = 10^2 \text{kg.s/m}^3$, $\sigma = 10^4 \text{kg.s/m}^3$ et $\sigma = 10^6 \text{kg.s/m}^3$ sont tracées sur les figures 1, 2 et 3 respectivement.

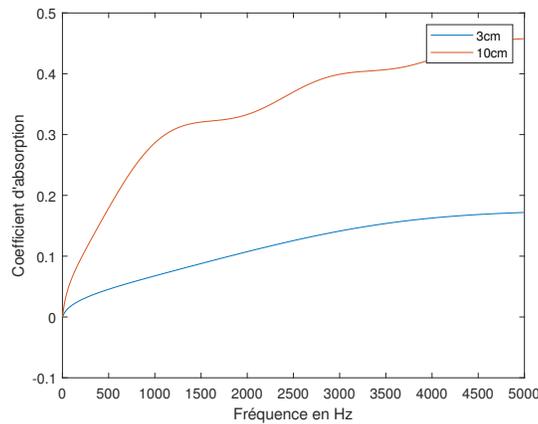


FIGURE 1 – Absorption pour $\sigma = 10^2 \text{kg.s/m}^3$.

- Pour un matériau vérifiant les lois de Hamet avec les paramètres $\Omega = 0.3$, $\sigma = 10^3 \text{kg.s/m}^3$ ou $\sigma = 10^6 \text{kg.s/m}^3$, $K = 3$ ou $K = 6$ et d'épaisseur $e = 10 \text{cm}$, les courbes sont données sur la figure 4.

Exercice 2

- En notant x_2 le déplacement de l'air dans le col du résonateur de droite, x_1 dans celui de gauche et p_1, p_2 les pressions dans les volumes associés, on obtient

$$p_1 S = K(x_1 - x_2)$$

$$p_2 S = K x_2$$

$$M \ddot{x}_1 = (p_{ext} - p_1) S$$

$$M \ddot{x}_2 = (p_1 - p_2) S \quad (2)$$

avec S la surface d'un col.

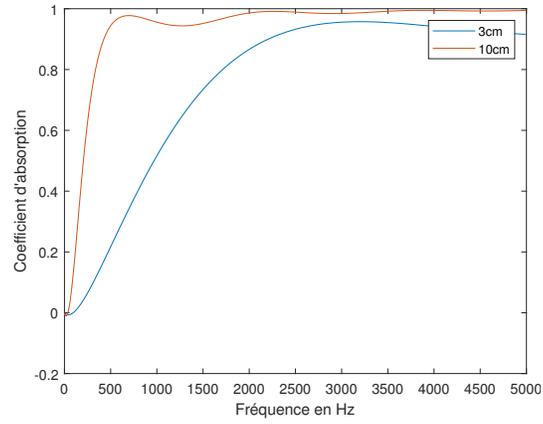


FIGURE 2 – Absorption pour $\sigma = 10^4 kg.s/m^3$.

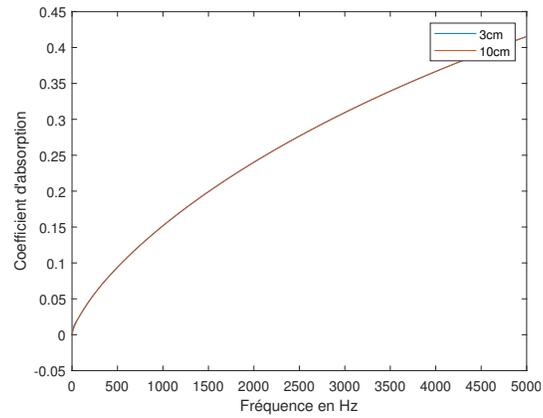


FIGURE 3 – Absorption pour $\sigma = 10^6 kg.s/m^3$.

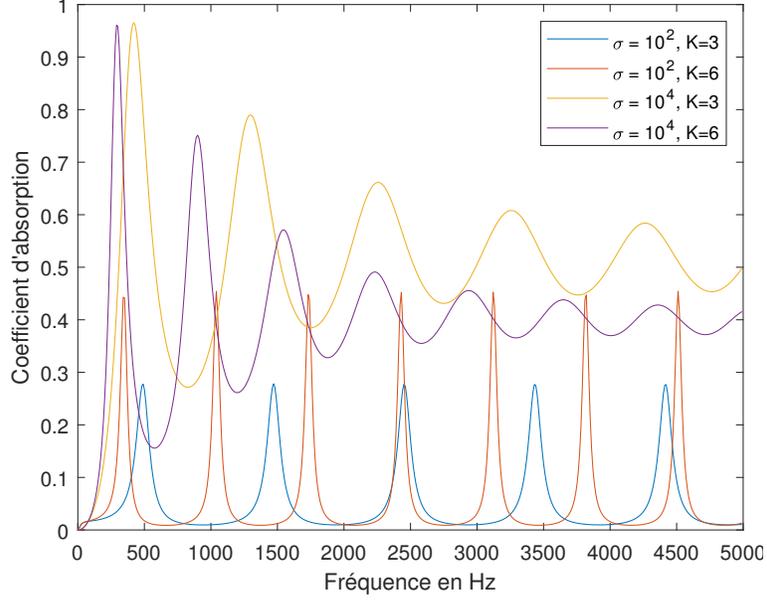


FIGURE 4 – Absorption pour le modèle de Hamet.

2. En réorganisant les deux relations précédentes

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= p_{ext}S \\ M\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Soit

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{K}{2K - \omega^2 M} x_1 \\ (K - M\omega^2)x_1 - \frac{K^2}{2K - \omega^2 M} x_1 &= p_{ext}S \end{aligned} \quad (4)$$

et l'impédance est

$$Z = \frac{M^2\omega^4 - 3KM\omega^2 + K^2}{-i\omega(2K - M\omega^2)} \quad (5)$$

3. Posant $\omega_0 = \sqrt{K/M}$, l'impédance devient

$$Z = \sqrt{KM} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}{-i\frac{\omega}{\omega_0}\left(2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \quad (6)$$

L'impédance Z/\sqrt{KM} en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ est tracée sur la figure 5.

4. L'impédance est nulle quand $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donc les solutions sont $x = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}}$. Les valeurs numériques sont

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.618 \\ x_2 &= 1.618 \end{aligned} \quad (7)$$

5. Nous avons

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{K}{2K - \omega^2 M} x_1 \\ x_2 &= \frac{1}{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Pour la première fréquence les phases sont égales alors que pour la seconde fréquence les phases sont en opposition.

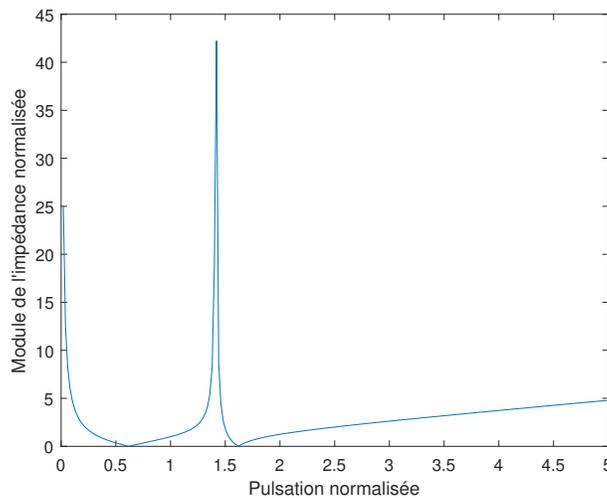


FIGURE 5 – Module de l'impédance normalisée.

Exercice 3

1. La valeur de $Im(Z)/(\omega\rho c)$ est donnée sur la figure 6 obtenue à partir de la formule (7.23) du photocopié.
2. La partie imaginaire vaut approximativement $m = 2.6810^{-3}$ (formules (7.23) et (7.27) du poly.)
3. La fréquence de résonance est donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{mD}} \quad (9)$$

L'application numérique donne pour fréquence de résonance $f = 254Hz$.

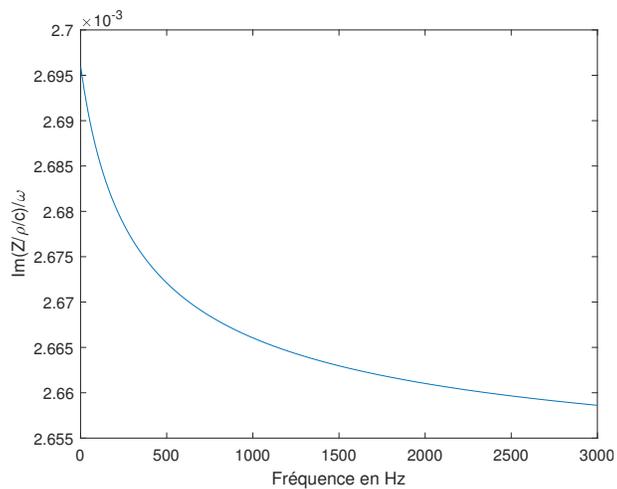


FIGURE 6 – Partie imaginaire de l'impédance divisée par la pulsation.

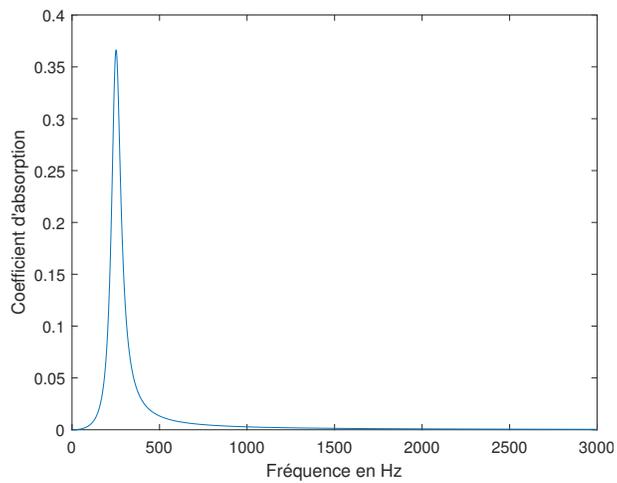


FIGURE 7 – Coefficient d'absorption.

4. L'absorption maximale à cette fréquence est $\alpha = 0.37$.
5. La courbe d'absorption en fonction de la fréquence est donnée sur la figure 7.

Exercice 4

1. Appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la membrane et en prenant l'axe positif vers le haut, nous avons (convention $e^{i\omega t}$)

$$m\dot{v} = -p_{sup} + p_{inf} = i\omega mv \quad (10)$$

2. Pour la lame d'air nous avons

$$Z_s = -iZ_{air}\cotg(kd) \quad (11)$$

et

$$p_{inf} = -Z_s v \quad (12)$$

qui est obtenu à partir des formules (7.8) et (7.9) du cours en notant que la direction de la vitesse est ici opposée à la direction prise dans le poly.

3. En assemblant les relations précédentes

$$p_{sup} = -i\omega mv + iZ_{air}\cotg(kd)v \quad (13)$$

L'impédance de surface sur la membrane est donc

$$Z_{tot} = -i\omega m + iZ_{air}\cotg(kd) \quad (14)$$

4. La fréquence de résonance correspond au minimum de cette impédance de surface

$$i\omega m - iZ_{air}\cotg(kd) = 0 \quad (15)$$

Si kd est petit, on peut approximer $\cotg(kd) \approx 1/(kd)$ et

$$\begin{aligned} \omega m - Z_{air}/(kd) &= 0 \\ f_0 &\approx \frac{\sqrt{cZ_{air}}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{md}} \\ &\approx \frac{60}{\sqrt{md}} \end{aligned} \quad (16)$$

5. L'application numérique donne

$$f_0 = 115Hz$$

Exercice 5

1. L'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques est

$$\begin{aligned} \Delta p + k^2 p &= 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

2. Pour $p(r, \theta, z) = Z(z)\Phi(r, \theta)$, nous avons

$$\frac{1}{\Phi} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad (18)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - \alpha^2) Z &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

pour une constante α .

3. Pour un comportement de type $e^{in\theta}$ en theta, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) p = 0 \quad (20)$$

4. Avec une solution du type

$$a_n J_n(\alpha r) \quad (21)$$

il faut une vitesse nulle sur la paroi du guide et donc

$$J'_n(\alpha a) = 0 \quad (22)$$

5. La première fréquence de coupure est telle que $k_0 = \alpha$ avec $\alpha a = 1.84$. Donc $k_0 = 1.84/a$ et $f_0 = \frac{1.84c}{2\pi a}$

6. Pour un guide de diamètre $15cm$ cette fréquence vaut $1327Hz$ et elle vaut $2655Hz$ pour un diamètre de $7cm$. Au delà de ces fréquences les ondes dans le guide ne sont plus planes et les hypothèses permettant d'utiliser un tube de Kundt ne sont plus valables.

Exercice 6

1. L'équation d'équilibre d'une masse est

$$m\ddot{u}_n(t) = -K_1(u_n - u_{n-1}) + K_1(u_{n+1} - u_n) - K_2 u_n \quad (23)$$

2. On injecte la solution $e^{i(\omega t - kx)}$ dans la relation précédente

$$-m\omega^2 = -K_1(1 - e^{ikd}) + K_1(e^{-ikd} - 1) - K_2 \quad (24)$$

et avec $\omega_0^2 = K_2/m$

$$\begin{aligned} -m\omega^2 &= K_1(e^{ikd} + e^{-ikd} - 2) - m\omega_0^2 \\ -m\omega^2 &\approx -K_1(kd)^2 - m\omega_0^2 \\ m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \omega^2 &\approx (K_1 d^2) k^2 \end{aligned} \quad (25)$$

3. On injecte la forme de la solution $e^{i(\omega t - kx)}$ dans l'équation et on obtient directement la relation

$$\rho\omega^2 = Ek^2 \quad (26)$$

4. La relation de la question 3 est

$$m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \omega^2 \approx (K_1 d^2) k^2 \quad (27)$$

qu'on peut mettre sous la forme de la question 4 avec $E = K_1 d^2$ et $\rho_{eff} = m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. Cette masse effective peut devenir négative quand $\omega < \omega_0$. Comme ω_0 peut être assez grand car associée à une microstructure, pour des ondes macroscopiques la structure aura une masse apparente négative pour la propagation d'onde.