Travaux dirigés 4
Corrigé

Exercice 1

1. Nous avons les relations suivantes en notant p_i, p_r, p_a, p_b et p_t les amplitudes des différentes ondes acoustiques dans les différents milieux.

$$\begin{aligned}
-\omega^2 m x_1 &= p_i + p_r - p_a - p_b \\
-i\omega x_1 &= \frac{1}{i\rho_1\omega}(ik_1 p_i - ik_1 p_r) \\
-i\omega x_1 &= \frac{1}{i\rho_2\omega}(ik_2 p_a - ik_2 p_b) \\
-\omega^2 m x_2 &= p_a e^{ik_2L} + p_b e^{-ik_2L} - p_t \\
-i\omega x_2 &= \frac{1}{i\rho_2\omega}(ik_2 p_a e^{ik_2L} - ik_2 p_b e^{-ik_2L}) \\
-i\omega x_2 &= \frac{1}{i\rho_1\omega} ik_1 p_t
\end{aligned} \tag{1}$$

Pour l'onde transmise, l'origine est prise en $x = L$. Introduisant les impédances, nous avons

$$\begin{aligned}
-\omega^2 m x_1 &= p_i + p_r - p_a - p_b \\
-i\omega x_1 &= \frac{1}{Z_1}(p_i - p_r) \\
-i\omega x_1 &= \frac{1}{Z_2}(p_a - p_b) \\
-\omega^2 m x_2 &= p_a e^{ik_2L} + p_b e^{-ik_2L} - p_t \\
-i\omega x_2 &= \frac{1}{Z_2}(p_a e^{ik_2L} - p_b e^{-ik_2L}) \\
-i\omega x_2 &= \frac{1}{Z_1} p_t
\end{aligned} \tag{2}$$

2. Les trois dernières relations permettent d'exprimer x_2, p_a et p_b à partir de p_t par

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{-i\omega Z_1} p_t \\
p_a &= \frac{1}{2} e^{-ik_2L}(1 + \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{im\omega}{Z_1}) p_t \\
p_b &= \frac{1}{2} e^{ik_2L}(1 - \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{im\omega}{Z_1}) p_t
\end{aligned} \tag{3}$$

puis

$$\begin{aligned}
p_a + p_b &= \left((1 - \frac{im\omega}{Z_1})\cos(k_2L) - i\frac{Z_2}{Z_1}\sin(k_2L)\right) p_t \\
p_a - p_b &= \left(-i(1 - \frac{im\omega}{Z_1})\sin(k_2L) + \frac{Z_2}{Z_1}\cos(k_2L)\right) p_t
\end{aligned} \tag{4}$$

Finalement les trois premières relations de 2 donnent

$$\begin{aligned}
&(-\omega^2 m - i\omega Z_1)\frac{1}{-i\omega Z_2}\left(-i(1-\frac{im\omega}{Z_1})\sin(k_2L)+\frac{Z_2}{Z_1}\cos(k_2L)\right)p_t \\
&= 2p_i - \left((1-\frac{im\omega}{Z_1})\cos(k_2L) - i\frac{Z_2}{Z_1}\sin(k_2L)\right)p_t
\end{aligned} \tag{5}$$

d'où

$$\left(2(1-\frac{i\omega m}{Z_1})\cos(k_2L) - i(\frac{Z_2}{Z_1}+\frac{Z_1}{Z_2}(1-\frac{im\omega}{Z_1})^2)\sin(k_2L)\right)p_t = 2p_i \tag{6}$$

Le coefficient de transmission défini par $T_i = \frac{p_t}{p_i}$ est finalement donné par

$$T_i = \frac{Z_1Z_2}{(Z_1 - i\omega m)Z_2\cos(k_2L) - i\sin(k_2L)((Z_2^2+Z_1^2-m^2\omega^2)/2 - im\omega Z_1)}$$

3. Si le matériau central est presque le vide $\rho_2 \to 0$, $Z_2 \to 0$, k_2 et c_2 restent constants ce qui donne $T_i \to 0$. L'isolation est très bonne dans ce cas.
4. Lorsque l'épaisseur de la couche centrale L tend vers 0

$$T_i = \frac{Z_1}{Z_1 - i\omega m}$$

$$|T_i|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega m}{Z_1}\right)^2}$$

et on retrouve le résultat du cours pour une seule couche.

5. Dans ce cas

$$T_i = \frac{1}{(1-\frac{i\omega m}{Z_1})\cos(k_2L) - i\sin(k_2L)((1-\frac{m^2\omega^2}{2Z_1^2}) - \frac{im\omega}{Z_1})}$$

ce qui donne après calcul

$$|T_i|^2 = \frac{1}{1+\frac{m^2\omega^2}{Z_1^2}\left(\cos(k_2L) - \frac{m\omega}{2Z_1}\sin(k_2L)\right)^2}$$

C'est similaire au simple vitrage dans les basses fréquences mais un peu plus important pour les fréquences plus élevées.

Exercice 2

1. Les équations aux deux interfaces $x = 0$ et $x = L$ sont

$$\begin{aligned}
p_i + p_r &= p_a + p_b \\
\frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(p_i - p_r) &= \frac{ik_2}{i\rho_2\omega}(p_a - p_b) \\
p_a e^{ik_2L} + p_b e^{-ik_2L} &= p_t \\
\frac{ik_2}{i\rho_2\omega}(p_a e^{ik_2L} - p_b e^{-ik_2L}) &= \frac{ik_1}{i\rho_1\omega}p_t
\end{aligned} \tag{7}$$

soit

$$\begin{aligned}
p_i + p_r &= p_a + p_b \\
\frac{1}{Z_1}(p_i - p_r) &= \frac{1}{Z_2}(p_a - p_b) \\
p_a e^{ik_2L} + p_b e^{-ik_2L} &= p_t \\
\frac{1}{Z_2}(p_a e^{ik_2L} - p_b e^{-ik_2L}) &= \frac{1}{Z_1} p_t
\end{aligned} \tag{8}$$

2. Les deux dernières relations donnent

$$\begin{aligned}
p_a &= \frac{1}{2} e^{-ik_2L}(1 + \frac{Z_2}{Z_1}) p_t \\
p_b &= \frac{1}{2} e^{ik_2L}(1 - \frac{Z_2}{Z_1}) p_t
\end{aligned} \tag{9}$$

et les deux premières

$$p_i = \frac{1}{2}(1 + \frac{Z_1}{Z_2}) p_a + \frac{1}{2}(1 - \frac{Z_1}{Z_2}) p_b \tag{10}$$

d'où finalement

$$p_i = \frac{1}{4} e^{-ik_2L}(1 + \frac{Z_1}{Z_2})(1 + \frac{Z_2}{Z_1}) p_t + \frac{1}{4} e^{ik_2L}(1 - \frac{Z_1}{Z_2})(1 - \frac{Z_2}{Z_1}) p_t \tag{11}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{p_t}{p_i} &= \frac{1}{\frac{1}{4} e^{-ik_2L}(1 + \frac{Z_1}{Z_2})(1 + \frac{Z_2}{Z_1}) + \frac{1}{4} e^{ik_2L}(1 - \frac{Z_1}{Z_2})(1 - \frac{Z_2}{Z_1})} \\
&= \frac{4 Z_1 Z_2}{e^{-ik_2L}(Z_1 + Z_2)^2 - e^{ik_2L}(Z_1 - Z_2)^2} \\
&= \frac{2 Z_1 Z_2}{2 Z_1 Z_2 \cos(k_2L) - i(Z_1^2 + Z_2^2)\sin(k_2L)}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$T = \left|\frac{p_t}{p_i}\right|^2 = \frac{4(Z_1Z_2)^2}{4(Z_1Z_2)^2\cos^2(k_2L) + (Z_1^2 + Z_2^2)^2\sin^2(k_2L)} \tag{13}$$

3. Lorsque $\sin(k_2L) = 0$, on obtient $T = 1$ et la paroi est transparente. Pour le béton nous avons $c_2 = \sqrt{E/\rho} = 3700 m/s$. La première fréquence non nulle pour laquelle la paroi est transparente est

$$f = \frac{1}{2}\frac{c_2}{L} = 6200 Hz \tag{14}$$

4. Pour une paroi mince $L \to 0$ et nous obtenons avec $\cos^2(k_2L) \approx 1$, $\sin^2(k_2L) \approx (k_2L)^2$ et avec $Z_2 >> Z_1$

$$\begin{aligned}
T &\approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(\frac{Z_2}{Z_1})^2 (k_2L)^2} \\
&\approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(\frac{\omega \rho_2 L}{Z_1})^2} \\
&\approx \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(\frac{\omega m}{Z_1})^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

qui est la formule du cours pour un mur mince.

Exercice 3

1. Les ondes incidentes et réfléchies dans le milieu gauche sont

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} p_i \\ p_r(x,y) &= e^{ik(-x\cos\theta + y\sin\theta)} p_r \end{aligned} \tag{16}$$

L'onde transmise est de la forme

$$p_t(x,y) = e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} p_t \tag{17}$$

La conservation de la quantité de mouvement et la continuité de la vitesse sur les interfaces gauche et droite donnent

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 w &= ik\cos\theta(p_i - p_r) \\ -\rho\omega^2 w &= ik\cos\theta p_t \end{aligned} \tag{18}$$

Dans la plaque, on prend une fonction de la forme $w(y,z) = we^{iky\sin\theta}$ pour avoir la même forme que la vitesse particulaire dans le fluide. Cela donne

$$(-\rho_s h\omega^2 + Dk^4\sin^4\theta)w = p_i + p_r - p_t \tag{19}$$

2. En éliminant p_r et w des relations précédentes, on obtient

$$(-\rho_s h\omega^2 + Dk^4\sin^4\theta)\frac{ik\cos\theta}{-\rho\omega^2} p_t = 2(p_i - p_t) \tag{20}$$

puis

$$\frac{p_i}{p_t} = 1 + i\frac{\rho_s h\omega\cos\theta}{2\rho c}\left(1 - \frac{\omega^2 D}{\rho_s h c^4}\sin^4\theta\right) \tag{21}$$

et

$$T = \left|\frac{p_i}{p_t}\right|^2 = 1 + \left(\frac{\rho_s h\omega\cos\theta}{2\rho c}\right)^2\left(1 - \frac{\omega^2 D}{\rho_s h c^4}\sin^4\theta\right)^2 \tag{22}$$

3. Pour les fréquences basses on obtient

$$T \approx \left|\frac{p_i}{p_t}\right|^2 = 1 + \left(\frac{\rho_s h\omega\cos\theta}{2\rho c}\right)^2 \tag{23}$$

qui est une loi de masse pondérée par $\cos^2\theta$.

4. La paroi est transparente quand

$$\frac{\omega^2 D}{\rho_s h c^4}\sin^4\theta = 1 \tag{24}$$

Il y a un couplage entre les ondes de flexion dans la plaque et les ondes acoustiques dans l'air.

Exercice 4

1. L'isolement acoustique est donné par

$$L_1 - L_2 \approx R + 10\log_{10}\frac{\alpha_2 S_2}{S} \tag{25}$$

2. Il faut donc

$$R \approx L_1 - L_2 - 10\log_{10}\frac{\alpha_2 S_2}{S} \tag{26}$$

   L'application numérique donne

$$R = 30 - 10\log_{10}\frac{0.015\times 80}{12} = 40dB$$

Exercice 5

1. $\tau = 3.2\,10^{-4}$, $S_c\tau = 9.5\,10^{-3}m^2$, $S_2 = 148m^2$ et $\alpha_2 S_2 = 22.2m^2$. On a donc bien $S_c\tau << \alpha_2 S_2$.
2. On applique la formule

$$L_1 - L_2 \approx R + 10\log_{10}\frac{\alpha_2 S_2}{S} \tag{27}$$

   qui donne

$$L_1 - L_2 \approx 33.7dB \tag{28}$$

3. Dans ce cas $S_2 = 550m^2$ et

$$L_1 - L_2 \approx 39dB \tag{29}$$

   L'isolement acoustique dépend des caractéristiques de la salle 2.

Exercice 6

1. En coordonnées sphériques nous avons

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2} + k^2 p = 0 \tag{30}$$

2. On cherche une solution indépendante de φ et évoluant en $\cos\theta$ donc telle que $p(r,\theta,\varphi) = f(r)cos\theta$. On a donc

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = 0 \tag{31}$$

3. La solution de cette équation est $f(r) = \frac{e^{ikr}}{r^2}(kr+i)$.
4. Ce qui donne le champ de pression

$$p(r,\theta,\varphi) = p_0\frac{e^{ikr}}{r^2}(kr+i)\cos\theta \tag{32}$$

   Pour que cette solution soit le champ de pression, elle doit engendrer une vitesse particulaire sur la surface de la sphère égale à celle engendrée par le mouvement de la sphère. Ce mouvement est donné par $v\cos(\omega t)\mathbf{e}_z$. En un point de la sphère le mouvement normal est $v\cos\theta\cos(\omega t)$. Il faut donc que

$$\frac{f'(R)p_0}{i\rho_0\omega} = \frac{e^{ikR}}{i\rho_0\omega R^3}(i(kR)^2 - 2kR - 2i)p_0 = v \tag{33}$$

d'où

$$p_0 = \frac{i\rho_0\omega v R^3 e^{-ikR}}{i(kR)^2 - 2kR - 2i} \tag{34}$$

5. La puissance rayonnée est

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}Re(p^* v)\int_0^\pi 2\pi\cos^2\theta R^2\sin\theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}\pi R^2 Re(p^* v) \end{aligned} \tag{35}$$

ce qui donne

$$P = \frac{2}{3}\pi R^2 Re\left(\left(\frac{i\rho_0\omega R^3 e^{-ikR}}{i(kR)^2 - 2kR - 2i}\right)^* \frac{e^{-ikR}}{R^2}(kR - i)\right)v^2 \tag{36}$$

soit après simplification

$$P = \frac{2}{3}\pi R^2\rho_0 c_0 v^2\frac{(kR)^4}{4 + (kR)^4} \tag{37}$$

alors que pour une sphère pulsante nous avons

$$P = 2\pi R^2\rho_0 c_0 v^2\frac{(kR)^2}{1 + (kR)^2} \tag{38}$$

Pour les basses fréquences $kR << 1$ et la sphère oscillante rayonne moins bien que la sphère pulsante. Cela est du à la nature dipolaire de ce rayonnement alors que la sphère pulsante est un monopôle.