

**Quelques éléments mathématiques et
physiques requis pour une bonne
compréhension du cours de Mécanique
des fluides**

Damien Violeau

École des Ponts

ParisTech

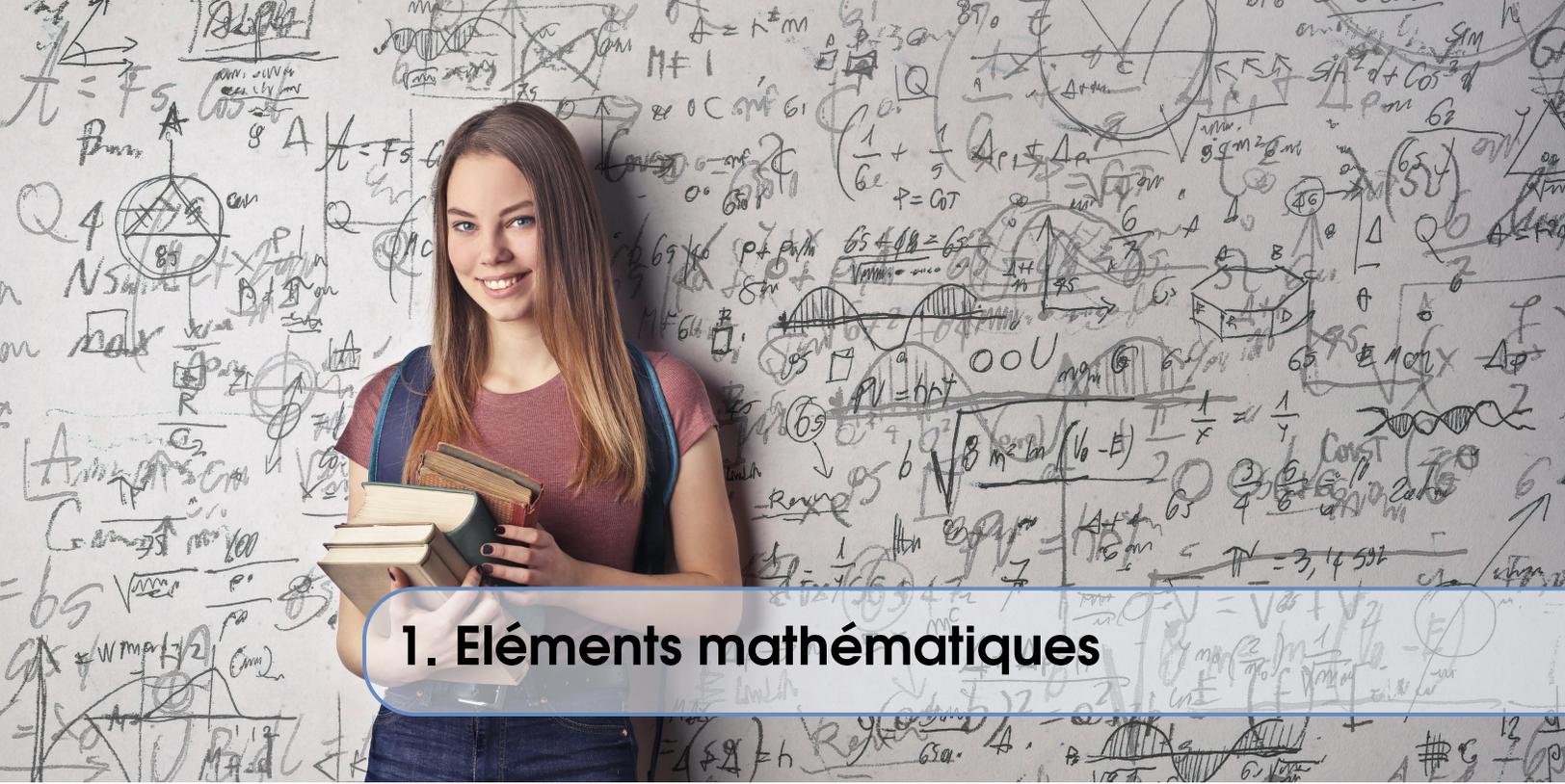


Table des matières

1	Éléments mathématiques	4
1.1	Calcul matriciel	4
1.1.1	Préambule – Rotations du plan	4
1.1.2	Endomorphismes de \mathbb{R}^n	8
1.1.3	Vecteurs propres, valeurs propres	17
1.2	Algèbre tensorielle	24
1.2.1	Notion de tenseur	24
1.2.2	Contractions de tenseurs	26
1.3	Outils intégrro-différentiels	30
1.3.1	Opérateurs différentiels	30
1.3.2	Manipulation des opérateurs	36
1.3.3	Intégrales	38
1.3.4	Equations différentielles ordinaires	47
1.4	Transformée de Fourier	50
1.4.1	Définition et propriétés	50
1.4.2	Applications	56
2	Éléments physiques	58
2.1	Mécanique des milieux continus	58
2.1.1	Tenseur des contraintes	58
2.1.2	Lois de bilans	62
2.2	Mécanique des fluides	64
2.2.1	Equations de Navier–Stokes	64
2.2.2	Deux exemples de solutions analytiques	69

2.2.3	Propagation d'ondes de surface	73
-------	--	----

Grâce aux sites <https://unsplash.com/> et <https://www.pexels.com>, les photographies sont libres de droits.



1. Éléments mathématiques

1.1 Calcul matriciel

1.1.1 Préambule – Rotations du plan

Considérons une base orthonormée du plan $\mathcal{B} \doteq (\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ et un vecteur qui y présente les composantes $(x, y)^T$. Il faut commencer par rappeler que $(x, y)^T$ n'est pas le vecteur mais seulement sa représentation dans la base \mathcal{B} . Le vecteur est

$$\underline{X} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y. \quad (1.1)$$

R Dans ce document, le symbole \doteq désigne une égalité entendue comme définition, par opposition au symbole ordinaire $=$ qui désigne une égalité entendue comme une propriété pouvant résulter de définitions antérieures. Quant à la notation $(x, y)^T$ pour la représentation d'un vecteur du plan, elle sera explicitée (notamment la signification de l'exposant T) au paragraphe 1.1.2.

C'est donc par abus de langage que l'on parle parfois du « vecteur $(x, y)^T$ » ; il serait plus juste d'écrire « le vecteur $(x, y)_{\mathcal{B}}^T$ », mais d'un point de vue ontologique un vecteur est l'ensemble de toutes ses représentations dans toutes les bases possibles.

Si nous nous donnons une autre base orthonormée $\mathcal{B}' \doteq (\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'})$ dont les vecteurs font un angle θ avec les vecteurs de \mathcal{B} (Figure 1.1), alors on peut décomposer $\underline{e}_{x'}$ et $\underline{e}_{y'}$ dans \mathcal{B} comme on vient de le faire pour \underline{X} :

$$\begin{aligned} \underline{e}_{x'} &= (\cos \theta) \underline{e}_x + (\sin \theta) \underline{e}_y, \\ \underline{e}_{y'} &= -(\sin \theta) \underline{e}_x + (\cos \theta) \underline{e}_y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Quant au vecteur \underline{X} , sa représentation dans \mathcal{B}' est notée $(x', y')^T$. On peut l'exprimer en fonction de $(x, y)^T$ en substituant (1.2) dans la décomposition de \underline{X} sur \mathcal{B}' :

$$\begin{aligned} \underline{X} &= x' \underline{e}_{x'} + y' \underline{e}_{y'} \\ &= x' ((\cos \theta) \underline{e}_x + (\sin \theta) \underline{e}_y) + y' (-(\sin \theta) \underline{e}_x + (\cos \theta) \underline{e}_y) \\ &= (x' \cos \theta - y' \sin \theta) \underline{e}_x + (x' \sin \theta + y' \cos \theta) \underline{e}_y. \end{aligned} \quad (1.3)$$

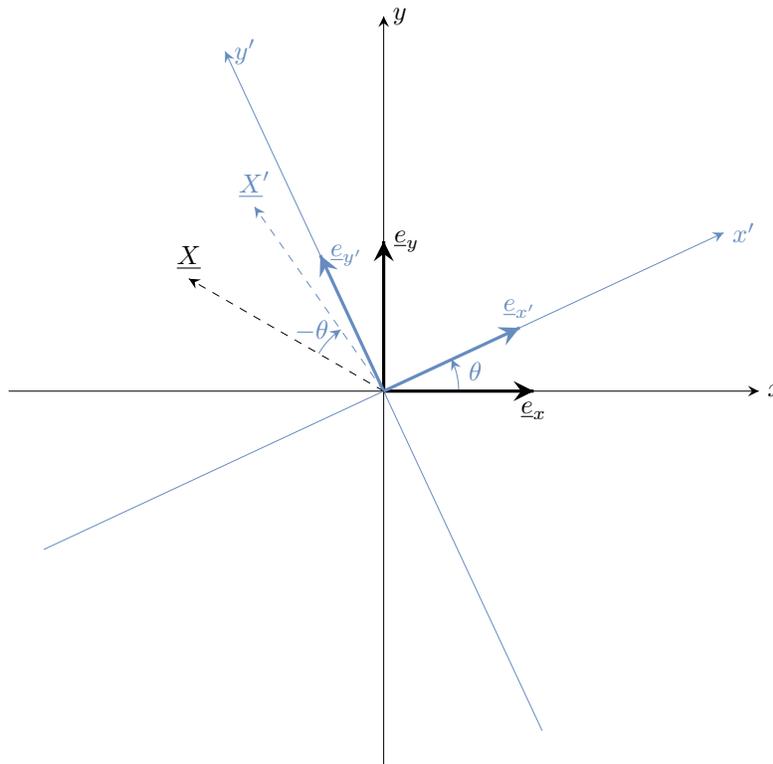


FIGURE 1.1 – Notations pour un changement de base orthonormée.

En identifiant les facteurs devant $e_{x'}$ et $e_{y'}$ à la première et à la dernière lignes de ce calcul, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

c'est-à-dire que les coordonnées de \underline{X} dans \mathcal{B} et dans \mathcal{B}' sont reliées par une transformation *linéaire* ; on parle d'*endomorphisme* car les données transformées appartiennent au même espace que les données d'origine (ici, le plan \mathbb{R}^2). On introduit la *matrice* de cet endomorphisme dans la base \mathcal{B} , en écrivant ce qui précède sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

ce qui constitue une définition du tableau de 2×2 cases appelé *matrice*. Le fait d'avoir placé symboliquement la représentation $(x', y')^T$ à droite de cette matrice suggère qu'un vecteur peut multiplier une matrice à droite de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Cette écriture n'a pour l'instant de sens que dans une base donnée, mais nous verrons plus loin qu'elle présente un caractère universel. L'endomorphisme dont la matrice est donnée par (1.5) dans \mathcal{B} est une transformation géométrique : une rotation centrale d'angle θ . On note

$$\underline{P}_{\theta} \doteq \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

C'est la matrice de cette rotation dans la base \mathcal{B} . On a donc

$$\underline{X} = \underline{P}_{\theta} \underline{X}'. \quad (1.8)$$

Alors que $(x', y')^T$ représente le vecteur \underline{X} dans la base \mathcal{B}' , on peut définir le vecteur $\underline{X}' \doteq x' \underline{e}_x + y' \underline{e}_y$, qui a dans \mathcal{B} les coordonnées de \underline{X} dans \mathcal{B}' (Figure 1.1). Il s'obtient à partir de \underline{X} par la rotation inverse, c'est-à-dire d'angle $-\theta$. Autrement dit, on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Formellement, cela suggère de définir la *matrice inverse* de \underline{P}_{θ} , notée $\underline{P}_{\theta}^{-1}$ et définie en (1.9) par la relation réciproque $\underline{X}' = \underline{P}_{\theta}^{-1} \underline{X}$. Il est visible sur leurs définitions que $\underline{P}_{\theta}^{-1} = \underline{P}_{-\theta}$, ce qui est conforme à l'observation que nous venons de faire.

Si nous envisageons deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 (de signes indéfinis), leur application successive fait tourner de l'angle $\theta_1 + \theta_2$ (notez que cela n'est généralement pas vrai en dimension 3). Si l'on note $\underline{X} = \underline{P}_{\theta_1} \underline{X}'$ et $\underline{X}' = \underline{P}_{\theta_2} \underline{X}''$, alors cette application successive s'écrit $\underline{X} = \underline{P}_{\theta_1} \underline{P}_{\theta_2} \underline{X}'' = \underline{P}_{\theta_1 + \theta_2} \underline{X}''$, ce qui donne $\underline{P}_{\theta_1} \underline{P}_{\theta_2} = \underline{P}_{\theta_1 + \theta_2}$.¹ Sous forme de composantes, cela s'écrit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Plus généralement pour des endomorphismes du plan, cela suggère de définir le produit de leurs deux matrices (dans une base donnée) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Il faut aussi observer que si l'on inverse la transformation résultant du produit $\underline{P}_{\theta_1} \underline{P}_{\theta_2}$, il faut inverser chacune des deux transformations mais aussi inverser leur ordre. On le voit en écrivant $\underline{P}_{\theta_1 + \theta_2}^{-1} \underline{X} = \underline{P}_{\theta_2}^{-1} \underline{P}_{\theta_1}^{-1} \underline{X} = \underline{X}''$, soit :

$$\left(\underline{P}_{\theta_1} \underline{P}_{\theta_2} \right)^{-1} = \underline{P}_{\theta_2}^{-1} \underline{P}_{\theta_1}^{-1}. \quad (1.12)$$

1. Du point de vue de la terminologie, l'ensemble des \underline{P}_{θ} constitue un groupe additif.

Nous n'avons pas encore exploité le fait que les bases choisies sont orthonormées. Si l'on applique (1.8) à $\underline{X} \doteq \underline{e}_{i'}$ on obtient

$$\underline{e}_{i'} = \sum_{k=1}^n (P_\theta)_{i'k} \underline{e}_k, \quad (1.13)$$

où les $(P_\theta)_{ij}$ sont les composantes de \underline{P}_θ dans \mathcal{B} . Cela signifie, comme nous l'avons vu plus haut (équation (1.2)) que ce sont aussi les composantes des vecteurs \underline{e}_i dans la base \mathcal{B}' , soit $(P_\theta)_{i'k} = \underline{e}_{i'} \cdot \underline{e}_k$. On a donc

$$\begin{aligned} \underline{e}_{i'} \cdot \underline{e}_{j'} &= \sum_{k=1}^n (P_\theta)_{i'k} \underline{e}_k \cdot \sum_{\ell=1}^n (P_\theta)_{j'\ell} \underline{e}_\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (P_\theta)_{i'k} (P_\theta)_{j'\ell} \underline{e}_k \cdot \underline{e}_\ell. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le fait que les bases soient orthonormées s'écrit $\underline{e}_k \cdot \underline{e}_\ell = \delta_{k\ell}$ et $\underline{e}_{i'} \cdot \underline{e}_{j'} = \delta_{i'j'}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon). Le calcul (1.14) donne alors

$$\delta_{i'j'} = \sum_{k=1}^n (P_\theta)_{i'k} (P_\theta)_{j'k}. \quad (1.15)$$

A ce stade, nous devons introduire deux concepts/notations. Tout d'abord, la *matrice unité* 2×2 :

$$\underline{I} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{P}_0, \quad (1.16)$$

qui revient donc à faire tourner autour de l'origine d'un angle nul, c'est-à-dire à imposer le *statu quo*. Puis nous introduisons la *transposée* d'une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

qui s'obtient en symétrisant les composantes par rapport à la diagonale principale de coefficients $\{a_{ii}\}_{i=1,2}$. La relation (1.15) s'écrit alors

$$\underline{I} = \underline{P}_\theta \underline{P}_\theta^T, \quad (1.18)$$

ce qui donne

$$\underline{P}_\theta^{-1} = \underline{P}_\theta^T. \quad (1.19)$$

On peut en effet constater avec (1.5) et (1.9) que cette propriété est satisfaite. Il faut préciser qu'elle n'est vraie que pour les matrices de rotation. De telles matrices sont dites *orthogonales*. Elles sont des *matrices de passage* permettant d'exprimer le changement de coordonnées lors d'un changement de base orthonormée.

1.1.2 Endomorphismes de \mathbb{R}^n

Il est maintenant temps de généraliser les concepts qui précèdent. Une transformation linéaire dans un espace euclidien de dimension arbitraire n (endomorphisme de \mathbb{R}^n) est associée à une matrice $\underline{\underline{A}}$ dans une base donnée :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\doteq \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X'}}. \quad (1.21)$$

La matrice $\underline{\underline{A}}$ possède une matrice inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ si

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}, \quad (1.22)$$

la matrice identité en dimension n étant définie par

$$\underline{\underline{I}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Ses coefficients sont donnés par le symbole de Kronecker δ_{ij} , comme en dimension 2. La différence avec les matrices de rotation du plan est qu'il n'existe pas toujours d'inverse pour un endomorphisme quelconque. Il est évident que l'inversion, lorsqu'elle est possible, est une involution : $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$.

■ **Exemple 1.1** On considère la matrice suivante dans une base donnée en dimension 3 :

$$\underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

On voit qu'elle transforme $(x, y, z)^T$ en $(x, y, 0)^T$: il s'agit d'une opération de projection sur le plan (x, y) . Il est donc évident qu'il ne peut y avoir d'inverse puisque tous les vecteurs ayant les mêmes composantes x et y ont la même image quel que soit z . Nous en donnerons plus bas une explication plus formelle. Plus généralement, on appelle *projecteur* un endomorphisme dont la matrice vérifie $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$: elles ne sont pas inversibles. ■

Exercice 1.1 Vérifiez que la matrice (1.24) satisfait $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$.

Solution 1.1

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si une matrice est inversible, la formule (1.21) donne l'expression de l'endomorphisme inverse dans la base retenue :

$$\underline{\underline{X}}' = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{X}}. \quad (1.26)$$

Le produit de deux matrices se généralise de la manière suivante :

Définition 1.1 *Produit de matrices.* Les matrices de coefficients $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ et $\{b_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ dans la même base ont pour produit la matrice suivante, toujours dans cette base :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}b_{in} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Autrement dit, le ij -ième coefficient est donné par $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

Voyons-en quelques propriétés. Tout d'abord, le produit matriciel est associatif, comme la composition de fonctions (en l'occurrence de fonctions linéaires) :

$$\underline{\underline{(AB)C}} = \underline{\underline{A(BC)}} \doteq \underline{\underline{ABC}}. \quad (1.28)$$

En revanche, il n'est généralement pas commutatif :

$$\underline{\underline{AB}} \neq \underline{\underline{BA}}. \quad (1.29)$$

Exercice 1.2 Calculez les produits $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$ avec

$$\underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; \quad \underline{\underline{B}} \doteq \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Commentez.

Solution 1.2

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 3 \\ -8 & -6 & -2 \\ -24 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 24 \\ 26 & -5 & 52 \\ 3 & -3 & 18 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Ces deux matrices ne commutent donc pas. ■

On observe ensuite que la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall \underline{\underline{A}}, \quad \underline{\underline{A}}\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}. \quad (1.33)$$

Quant à l'inverse d'un produit, il se calcule comme pour le cas des rotations du plan, c'est-à-dire en inversant les matrices mais aussi leur ordre d'application :

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}. \quad (1.34)$$

Les démonstrations des deux derniers résultats, très simples, sont laissées en exercices.

Définition 1.2 *Transposition.* On définit la transposée d'une matrice comme plus haut en dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Son ij -ième coefficient est donc a_{ji} .

Il est évident que la transposition est une opération involutive : $(\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}$. Quant à la transposée d'un produit, elle s'écrit

$$(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T. \quad (1.36)$$

Exercice 1.3 Démontrez-le.

Solution 1.3 Le ij -ième coefficient de $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T$ est donné par

$$\begin{aligned}
 (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^T_{ij} &= (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})_{ji} & (1.37) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n (\underline{\underline{A}})_{jk} (\underline{\underline{B}})_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n (\underline{\underline{B}}^T)_{ik} (\underline{\underline{A}}^T)_{kj} \\
 &= (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^T)_{ij}.
 \end{aligned}$$

La définition de la transposée s'étend aux matrices non carrées (non abordées ici). Cela justifie la notation utilisée jusqu'ici pour écrire en ligne les coordonnées d'un vecteur, en utilisant (1.36) :

$$\left(x_1 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_n \right)^T \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Cela permet d'écrire un produit matrice-vecteur comme (1.20) mais avec le transposé d'un vecteur à gauche de la matrice :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{A}} &= (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{X}})^T & (1.39) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n x_i a_{in} \right).
 \end{aligned}$$

Lorsqu'on procède à un changement de base en dimension arbitraire n , la matrice de passage n'est plus aussi simple que dans le cas du plan, mais le calcul (1.14)–(1.15) qui a abouti à (1.19) reste vrai pour des bases orthonormées :

Théorème 1.1 Pour une matrice de passage $\underline{\underline{P}}$ entre bases orthonormées : $\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^T$.

Cependant, il est possible de travailler avec des bases non orthonormées (dans ce cas la formule ci-dessus n'a pas lieu). Nous verrons plus bas que la mécanique nous offre un cadre où l'on peut généralement travailler dans une base orthonormée avec de gros avantages.

De même qu'un vecteur possède une représentation différente dans chaque base, un endomorphisme possède une matrice différente dans chaque base. Donc lors d'un changement de base, une matrice $\underline{\underline{A}}$ change de représentation pour s'écrire $\underline{\underline{A}}'$. Pour trouver comment les deux sont reliées, il faut considérer que l'endomorphisme est inchangé par le choix de la base (comme un vecteur, il

présente une identité absolue). Par exemple, dans le cas d'une rotation du plan le fait de changer de base ne modifie pas l'angle de rotation ; il en va de même pour les homothéties, par exemple. Considérons donc l'image \underline{X} de \underline{X}' par \underline{A} (équation (1.26)) : si on ramène ce vecteur dans sa représentation du premier repère, puis qu'on l'y transforme par l'endomorphisme avant de revenir dans le second repère, on obtient $\underline{P}\underline{A}\underline{P}^{-1}\underline{X}'$. Exprimé dans le nouveau repère, ce vecteur s'écrit aussi $\underline{A}'\underline{X}'$. Tout cela étant vrai pour tout vecteur, on en déduit

$$\underline{A} = \underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{P}. \quad (1.40)$$

On peut dire que c'est ici que la définition (1.20) du produit matrice-vecteur, ainsi que la définition (1.27) du produit de deux matrices prennent leurs véritables sens, car ces produits sont indépendants du choix de la base (c'est le caractère universel que nous évoquions plus haut). Par exemple, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \underline{A}\underline{B} &= (\underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{P})(\underline{P}^{-1}\underline{B}'\underline{P}) \\ &= \underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{B}'\underline{P} \\ &= \underline{P}^{-1}(\underline{A}\underline{B})'\underline{P}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ainsi, $\underline{A}\underline{B}$ se transforme comme \underline{A} et \underline{B} . On peut donc parler de produit (au sens de composition) d'endomorphismes, concept plus général et plus consistant que celui de produit de matrices. On peut encore observer que la matrice identité prend ici aussi son véritable sens car il est inchangé par changement de base, puisque $\underline{P}^{-1}\underline{I}\underline{P} = \underline{P}^{-1}\underline{P} = \underline{I}$; on peut donc parler d'endomorphisme identité.

Exercice 1.4 Montrez que pour tout entier k on a

$$\underline{A}^k = \underline{P}^{-1}(\underline{A}')^k\underline{P}. \quad (1.42)$$

Solution 1.4 En mettant bout à bout k fois $\underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{P}$, les produits $\underline{P}\underline{P}^{-1}$ s'en vont, car ils sont égaux à l'élément neutre \underline{I} par (1.22). ■

Inverser une matrice revient à exprimer explicitement \underline{X}' en fonction de \underline{X} par la formule (1.26), c'est-à-dire à résoudre le système linéaire (1.21) de n équations à n inconnues $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$. Considérons le cas $n = 2$:

$$a_{11}x + a_{12}y = x', \quad (1.43)$$

$$a_{21}x + a_{22}y = y', \quad (1.44)$$

avec pour inconnues x et y , les autres grandeurs étant données. Si une seule solution existe, elle s'écrit

$$x = \frac{a_{22}x' - a_{12}y'}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (1.45)$$

$$y = \frac{-a_{21}x' + a_{11}y'}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.46)$$

Cela n'est possible que si $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$.²

Définition 1.3 Déterminant. On définit comme suit le déterminant d'une matrice, noté $|\underline{A}|$ ou $\det \underline{A}$. En dimension 2 il vaut

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \doteq \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \doteq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.47)$$

La même analyse pour un système de trois équations à trois inconnues donnerait une solution présentant au dénominateur le déterminant de la matrice 3×3 associée sous la forme

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &\doteq a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &- a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

En dimension arbitraire n on définit le déterminant par récurrence sur la base de formules analogues à (1.48).

On peut voir le déterminant d'une matrice 2×2 comme l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs constituant ses colonnes, et le déterminant d'une matrice 3×3 comme le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs constituant ses colonnes (Figure 1.2)³. Comme les colonnes d'une matrice sont, par construction, les images par l'endomorphisme des vecteurs de la base, ce parallélogramme (resp. ce parallélépipède) est l'image du carré (resp. du cube) unité reposant sur les $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$.

L'analyse qui précède montre qu'une matrice 2×2 ou 3×3 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. On admettra le théorème suivant, qui stipule que c'est vrai en toutes dimensions :

Théorème 1.2 Une matrice \underline{A} est inversible si et seulement si $\det \underline{A} \neq 0$.

Exercice 1.5 Calculez $\det \underline{P}_\theta$ (définie par l'équation (1.7)). Commentez.

Solution 1.5

$$\begin{aligned} \det \underline{P}_\theta &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1. \end{aligned} \quad (1.49)$$

2. Si au contraire on a $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, les membres de gauche des deux équations (1.43) et (1.44) sont proportionnels, donc le système n'a de solutions que si les membres de droite x' et y' sont dans le même rapport. Il y a alors une infinité de solutions constituant la droite d'équation $a_{11}x + a_{12}y = y'$.

3. En toute rigueur, cette surface ou ce volume sont munis d'un signe selon l'orientation mutuelle des vecteurs.

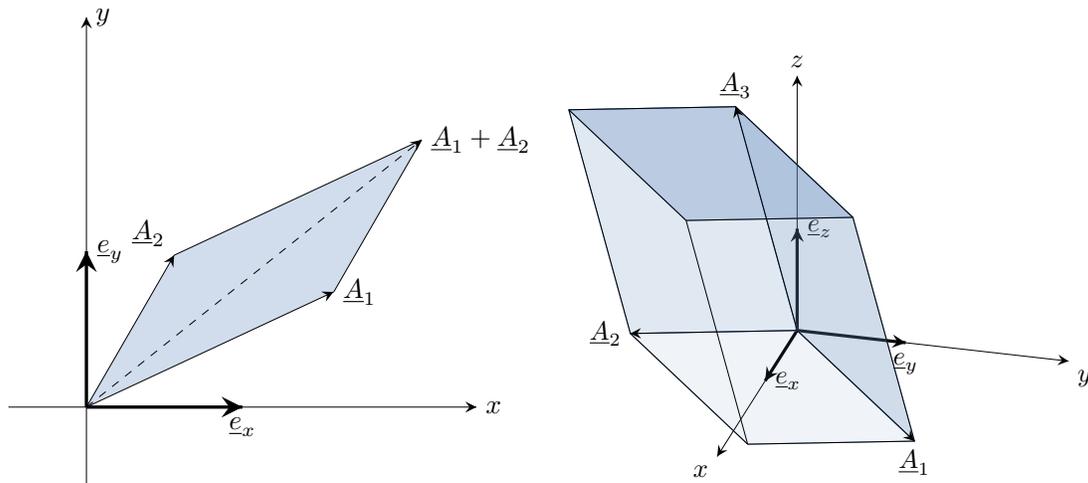


FIGURE 1.2 – Illustration de la notion de déterminant. À gauche : $\det \underline{A}$ est l'aire orientée du parallélogramme défini par les vecteurs \underline{A}_1 et \underline{A}_2 qui forment les colonnes de \underline{A} . À droite : $\det \underline{A}$ est le volume orienté du parallélépipède défini par les vecteurs \underline{A}_1 , \underline{A}_2 et \underline{A}_3 qui forment les colonnes de \underline{A} .

Cela confirme que les matrices de rotations du plan sont inversibles. ■

Exercice 1.6 Calculez le déterminant de la matrice donnée par (1.24). Commentez.

Solution 1.6

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.50)$$

Cela confirme que cette matrice n'est pas inversible, comme celles de tout projecteur. ■

On admettra également ceci :

Théorème 1.3

$$\det(\underline{A}\underline{B}) = (\det \underline{A})(\det \underline{B}). \quad (1.51)$$

En revanche il n'y a pas de formule permettant de simplifier $\det(\underline{A} + \underline{B})$ en général.

Exercice 1.7 Exercice. Démontrez (1.51) pour $n = 2$.

Solution 1.7

$$\begin{aligned}
\det(\underline{\underline{AB}}) - (\det\underline{\underline{A}})(\det\underline{\underline{B}}) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\
&\quad - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\
&\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Exercice 1.8 Montrez que

$$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = (\det\underline{\underline{A}})^{-1}. \tag{1.53}$$

Solution 1.8 La définition (1.23) montre que $\det\underline{\underline{I}} = 1$. Le résultat demandé est alors une conséquence de (1.33) et (1.51). ■

Comme pour le produit de deux matrices, le déterminant est indépendant de la base, si bien qu'on peut parler du déterminant d'un endomorphisme (de même qu'on peut parler de la norme d'un vecteur). En effet :

$$\begin{aligned}
\det\underline{\underline{A}} &= \det(\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{P}}) \\
&= \det(\underline{\underline{P}}^{-1})(\det\underline{\underline{A}}')\det\underline{\underline{P}} \\
&= \det\underline{\underline{A}}'.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

La propriété d'inversibilité est donc, bien entendu, indépendante de la base de travail. Pour déterminer l'inverse d'une matrice (lorsqu'elle existe), nous avons encore besoin d'un élément :

Définition 1.4 *Cofacteurs et comatrice.* Pour une matrice $\underline{\underline{A}}$ de coefficients $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$, chaque coefficient possède un cofacteur défini par

$$\text{cofact}(a_{ij}) \doteq (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.55}$$

Il s'agit donc, au signe près, du déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la i -ième

ligne et la j -ième colonne de $\underline{\underline{A}}$. La comatrice de $\underline{\underline{A}}$ est alors définie par

$$\text{comat } \underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} \text{cofact}(a_{11}) & \cdots & \text{cofact}(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cofact}(a_{n1}) & \cdots & \text{cofact}(a_{nn}) \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Exercice 1.9 Calculez la comatrice d'une matrice 2×2 arbitraire.

Solution 1.9

$$\text{comat} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Théorème 1.4 Pour toute matrice on a

$$(\text{comat } \underline{\underline{A}})^T \underline{\underline{A}} = (\det \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}}. \quad (1.58)$$

Exercice 1.10 Vérifiez-le en dimension 2.

Solution 1.10

$$\begin{aligned} (\text{comat } \underline{\underline{A}})^T \underline{\underline{A}} - (\det \underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}} &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

On en déduit le résultat important que voici :

Théorème 1.5 *Matrice inverse.* Pour toute matrice $\underline{\underline{A}}$ inversible, son inverse est donnée par

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} (\text{comat } \underline{\underline{A}})^T. \quad (1.60)$$

Exercice 1.11 Calculez l'inverse de

$$\underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

puis vérifiez votre résultat par un calcul de produit de matrices.

Solution 1.11 On calcule d'abord

$$\det \underline{\underline{A}} = 11, \quad (1.62)$$

montrant qu'elle est inversible, puis

$$\text{comat } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (1.63)$$

ce qui donne

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

On vérifie enfin que $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$. ■

1.1.3 Vecteurs propres, valeurs propres

Envisageons l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la représentation dans une base \mathcal{B} est la matrice suivante :

$$\underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

La Figure 1.3 en montre une représentation graphique dans cette base, à la manière de la Figure 1.2 : on constate que les vecteurs colinéaires à $(1, 1)^T$ sont dilatés d'un facteur 2 sans subir de rotation, et que les vecteurs colinéaires à $(1, -1)^T$ sont inchangés. Il est évident qu'une telle propriété est intéressante d'un point de vue géométrique puisqu'elle permet de caractériser la dilatation ou la contraction d'un matériau selon la direction envisagée, par exemple. L'étude de ces propriétés présente en réalité un intérêt bien plus large en mathématiques et en physique, et nous allons ici en dresser les lignes principales.

Commençons par quelques définitions.

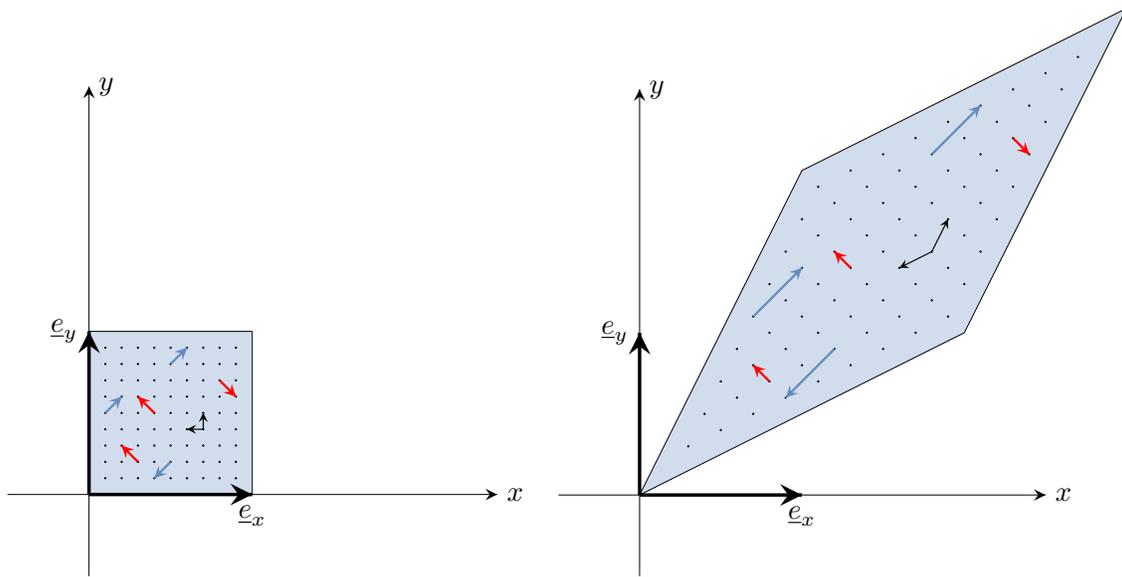


FIGURE 1.3 – Illustration de la notion de valeurs et de vecteurs propres : cas de la matrice (1.65). L'image de droite montre les images de quelques vecteurs par l'endomorphisme. Les vecteurs bleus (resp. rouges) sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 \doteq 2$ (resp. $\lambda_2 \doteq 1$). Les autres vecteurs, comme les exemples en noir, changent d'orientation. D'après Wikipedia.

Définition 1.5 *Trace.* La *trace* d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{Tr } \underline{\underline{A}} \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (1.66)$$

Exercice 1.12 Montrez que

$$\text{Tr}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = \text{Tr}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}). \quad (1.67)$$

Solution 1.12

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) &= \sum_{i=1}^n (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \\ &= \text{Tr}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

■

Exercice 1.13 Montrez que la trace ne dépend pas de la base.

Solution 1.13 On peut en effet parler de la trace d'un endomorphisme, car le résultat de l'exercice précédent donne

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} \underline{\underline{A}} &= \operatorname{Tr}(\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{P}}) \\ &= \operatorname{Tr}(\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}}') \\ &= \operatorname{Tr} \underline{\underline{A}}'.\end{aligned}\tag{1.69}$$

Définition 1.6 *Matrice diagonale.* Une matrice est dite *diagonale* lorsqu'elle présente la forme suivante :

$$\underline{\underline{D}} \doteq \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.\tag{1.70}$$

On la note parfois

$$\underline{\underline{D}} \doteq \operatorname{diag} \{ \lambda_i \}_{i=1, \dots, n}.\tag{1.71}$$

On se convaincra assez facilement des propriétés suivantes :

$$\operatorname{Tr} \underline{\underline{D}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i,\tag{1.72}$$

$$\det \underline{\underline{D}} = \prod_{i=1}^n \lambda_i,\tag{1.73}$$

$$\forall k, \underline{\underline{D}}^k = \operatorname{diag} \{ \lambda_i^k \}_{i=1, \dots, n}.\tag{1.74}$$

Définition 1.7 *Vecteurs et valeurs propres.* Un vecteur $\underline{\underline{X}}$ non nul est dit *vecteur propre* d'une matrice $\underline{\underline{A}}$ si son image par $\underline{\underline{A}}$ lui est colinéaire :

$$\exists \underline{\underline{X}} \neq \underline{\underline{0}}, \quad \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \lambda \underline{\underline{X}}.\tag{1.75}$$

Le facteur de proportionnalité λ est appelé *valeur propre* de $\underline{\underline{A}}$ associé à $\underline{\underline{X}}$.

Dans l'exemple inaugurant ce paragraphe, $\lambda_1 \doteq 2$ et $\lambda_2 \doteq 1$ sont donc valeurs propres de $\underline{\underline{A}}$ associées aux vecteurs propres respectifs $\underline{\underline{X}}_1 \doteq (1, 1)^T$ et $\underline{\underline{X}}_2 \doteq (1, -1)^T$.

Exercice 1.14 Montrez que les valeurs et vecteurs propres ne dépendent pas de la base de travail, autrement dit qu'on peut parler de valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Solution 1.14 On a, d'une part

$$\begin{aligned}\underline{A}\underline{X} &= (\underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{P})(\underline{P}^{-1}\underline{X}') \\ &= \underline{P}^{-1}\underline{A}'\underline{X}',\end{aligned}\tag{1.76}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\lambda\underline{X} &= \lambda(\underline{P}^{-1}\underline{X}') \\ &= \underline{P}^{-1}(\lambda\underline{X}'),\end{aligned}\tag{1.77}$$

ce qui démontre que la relation définissant un vecteur propre est préservée par changement de base, de même que la valeur propre associée. Il faut encore préciser que $\underline{X} \neq \underline{0}$ implique $\underline{X}' \neq \underline{0}$ car une matrice de passage est inversible. ■

Il est clair que pour chaque valeur propre, tous les vecteurs colinéaires à un vecteur propre associé sont vecteurs propres associés à cette même valeur propre. Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs propres associés à λ est un vecteur propre associé à λ . On parle donc d'*espace propre* (ici ce sont des droites : on parle parfois de *directions propres*). D'autre part, il est évident qu'un vecteur propre ne peut être associé à deux valeurs propres distinctes, sinon par soustraction on aurait $(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{X} = \underline{0}$, en contradiction avec le fait que $\underline{X} \neq \underline{0}$ par définition. Ainsi, l'intersection de deux espaces propres est réduite au vecteur nul. Les espaces propres sont donc en somme directe, si bien que la somme de leurs dimensions est au plus la dimension de l'espace de travail. Dans l'exemple précédent, le plan est la somme directe des deux droites propres, qui sont distinctes comme il se doit. On en conclut qu'un endomorphisme de \mathbb{R}^n ne peut avoir plus de n valeurs propres.

Pour avancer, faisons l'observation suivante :

$$\exists \underline{X} \neq \underline{0}, \quad \underline{A}\underline{X} = \underline{0} \iff \det \underline{A} = 0.\tag{1.78}$$

Si en effet \underline{A} était inversible on en déduirait $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{0} = \underline{0}$, en contradiction avec l'hypothèse. On en déduit que \underline{A} n'est pas inversible, donc que $\det \underline{A} = 0$ par le théorème 1.2. Par conséquent, en écrivant (1.75) sous la forme $\exists \underline{X} \neq \underline{0}, (\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{X} = \underline{0}$ on déduit ce qui suit :

Théorème 1.6 Un couple vecteur propre / valeur propre (\underline{X}, λ) de \underline{A} satisfait

$$\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda) = 0,\tag{1.79}$$

où $\mathcal{P}[\underline{A}]$ est appelé *polynôme caractéristique* de \underline{A} , défini par

$$\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda) \doteq \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}).\tag{1.80}$$

Comme le déterminant est indépendant de la base, ce résultat est consistant avec le fait que valeurs et vecteurs propres sont attachés à un endomorphisme plutôt qu'à une représentation matricielle donnée.

Que $\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda)$ soit un polynôme de λ (de degré égal à la dimension n de l'espace de travail) résulte de la définition 1.3 du déterminant.

Exercice 1.15 Exprimez le polynôme caractéristique d'une matrice quelconque de dimension 2 en fonction de son déterminant et de sa trace.

Solution 1.15

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (\text{Tr } \underline{A})\lambda + \det \underline{A}\end{aligned}\tag{1.81}$$

Cela confirme, en tous cas en dimension 2, que le polynôme caractéristique est indépendant de la base, tout comme $\det \underline{A}$ et $\text{Tr } \underline{A}$. ■

En dimension 3, on pourra vérifier le résultat suivant :

$$\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda) = -\lambda^3 + (\text{Tr } \underline{A})\lambda^2 - \frac{1}{2} \left((\text{Tr } \underline{A})^2 - \text{Tr}(\underline{A}^2) \right) \lambda + \det \underline{A}.\tag{1.82}$$

Théorème 1.7 *Théorème de Cayley–Hamilton.* Une matrice annule son polynôme caractéristique :

$$\mathcal{P}\underline{A} = \underline{0}.\tag{1.83}$$

Il faut entendre par là qu'on obtient la matrice nulle en remplaçant λ par \underline{A} dans ce polynôme, à condition de poser $\underline{A}^0 = \underline{I}$.

Exercice 1.16 Vérifiez-le en dimension 2.

Solution 1.16

$$\begin{aligned}P\underline{A} &= \underline{A}^2 - (\text{Tr } \underline{A})\underline{A} + (\det \underline{A})\underline{I} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.84}$$

Faire le même travail en dimension 3 est plus fastidieux mais faisable à la main. On renvoie vers des ouvrages spécialisés pour une démonstration en toutes dimensions, qui reposent sur des notions non abordées ici. ■

Venons-en maintenant au point essentiel de ce paragraphe.

Définition 1.8 *Matrice diagonalisable.* Une matrice (pour être plus précis, un endomorphisme) est dite *diagonalisable* si et seulement s'il existe une base (pas forcément orthogonale) dans laquelle sa représentation est diagonale :

$$\begin{aligned} \exists \underline{P}, \quad \underline{A} &= \underline{P}^{-1} \underline{D} \underline{P} & (1.85) \\ \underline{D} &\doteq \text{diag} \{ \lambda_i \}_{i=1, \dots, n} \\ \forall i, \quad \mathcal{P}[\underline{A}] (\lambda_i) &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 1.17 Prouvez le théorème 1.7 en toutes dimensions pour un endomorphisme diagonalisable.

Solution 1.17 Observons d'abord que la formule (1.42) permet d'affirmer que $\mathcal{P}[\underline{A}](\underline{P}^{-1} \underline{D} \underline{P}) = \mathcal{P}[\underline{A}](\underline{D})$. D'autre part, avec (1.74) et (1.80) on a $\mathcal{P}[\underline{A}](\underline{D}) = \text{diag} \{ \mathcal{P}[\underline{A}](\lambda_i) \}_{i=1, \dots, n} = \underline{0}$. A présent, puisque le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base, en se plaçant dans la base de diagonalisation on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\underline{A} &= \mathcal{P}[\underline{A}](\underline{P}^{-1} \underline{D} \underline{P}) & (1.86) \\ &= \mathcal{P}[\underline{A}](\underline{D}) \\ &= \underline{0}. \end{aligned}$$

Notons que pour un endomorphisme diagonalisable, les valeurs propres étant racines du polynôme caractéristique ce dernier s'écrit

$$\mathcal{P}[\underline{A}](\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad (1.87)$$

avec certains λ_i éventuellement identiques en cas de racines multiples. Dans les cas des dimensions 2 et 3, c'est conforme à (1.81) et (1.82) avec (1.72)–(1.73).

Quand on veut diagonaliser une matrice, il ne suffit pas d'identifier ses valeurs propres ; il faut aussi déterminer une base où l'endomorphisme prend une forme diagonale, c'est-à-dire identifier une matrice de passage \underline{P} convenable. Il peut y en avoir plusieurs si certaines valeurs propres sont associées à des espaces propres de dimension supérieures à 1 ; ce sont évidemment les racines du polynôme caractéristique ayant un degré de multiplicité supérieur à 1. Déterminer un choix \underline{P} se fait grâce au théorème suivant :

Théorème 1.8 Si une matrice de passage \underline{P} vers une base de diagonalisation de \underline{A} est donnée par (1.85), alors son inverse \underline{P}^{-1} est constituée de vecteurs propres formant une famille libre, rangés en colonne.

Preuve. En multipliant (1.85) à droite par \underline{P}^{-1} on trouve

$$\underline{A} \underline{P}^{-1} = \underline{P}^{-1} \underline{D}. \quad (1.88)$$

Si nous notons $\{\underline{X}_i\}_{i=1, \dots, n}$ les vecteurs qui constituent les colonnes de \underline{P}^{-1} , nous réalisons facilement que (1.88) est constitué de colonnes de la forme $\underline{A} \underline{X}_i = \lambda_i \underline{X}_i$. ■

Terminons avec deux théorèmes dont nous ne donnerons pas les démonstrations :

Théorème 1.9 Une matrice (réelle) et symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème 1.10 Deux matrices diagonalisables commutent (i.e. $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}$) si et seulement si elles ont une base commune de diagonalisation.

Donnons un exemple de diagonalisation. On se donne la matrice suivante :

$$\underline{\underline{A}} \doteq \begin{pmatrix} -8 & 0 & 5 \\ 10 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Tout d'abord, le polynôme caractéristique s'écrit, d'après (1.82) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\underline{\underline{A}}](\lambda) &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 \\ &= -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 \doteq 2$ et $\lambda_2 \doteq -3$. La matrice sera diagonalisable si on peut mettre en évidence un plan propre associé à λ_1 . Pour cela, cherchons-en les vecteurs propres. $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = 2\underline{\underline{X}}$ s'écrit

$$-8x + 5z = 2x, \quad (1.90)$$

$$10x + 2y - 5z = 2y, \quad (1.91)$$

$$-10x + 7z = 2z. \quad (1.92)$$

En rangeant tous les termes dans les membres de gauche, on constate que ces équations sont identiques, soit $2x = z$. Le système (1.90) présente donc bien deux degrés de liberté, par exemple x et y , après quoi z est fixé par cette équation. Une base du plan propre associé à λ_1 est donc donné par $\underline{\underline{X}}_1 \doteq (1, 0, 2)^T$, $\underline{\underline{X}}_2 \doteq (1, 1, 2)^T$. Quant à la droite propre associée à λ_2 , elle est dirigée par un vecteur satisfaisant $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = -3\underline{\underline{X}}$:

$$-8x + 5z = -3x, \quad (1.93)$$

$$10x + 2y - 5z = -3y, \quad (1.94)$$

$$-10x + 7z = -3z. \quad (1.95)$$

Cette fois, seule deux de ces équations sont identiques, et il reste

$$-x + z = 0 \quad (1.96)$$

$$2x + y - z = 0. \quad (1.97)$$

On a donc bien un seul degré de liberté, par exemple x , après quoi y et z sont fixés par ces deux équations. On peut donc choisir le vecteur propre $\underline{\underline{X}}_3 \doteq (1, -1, -1)^T$. Le théorème 1.8 dit alors

qu'une matrice de passage vers une base de diagonalisation est donnée par

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.98)$$

Son déterminant vaut $\det \underline{\underline{P}}^{-1} = -1$, et sa comatrice se calcule facilement pour donner son inverse $\underline{\underline{P}}$:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.99)$$

La forme diagonale de la matrice étant $\underline{\underline{D}} \doteq \text{diag}\{2, 2, -3\}$, on vérifie que $\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}$. On peut aussi vérifier que $\text{Tr} \underline{\underline{A}} = \text{Tr} \underline{\underline{D}} = 1$ et que $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{D}} = -12$, enfin que le théorème de Cayley–Hamilton est satisfait.

1.2 Algèbre tensorielle

1.2.1 Notion de tenseur

Les tenseurs sont une notion permettant de regrouper et de généraliser les notions de nombre, de vecteur et de matrice. Ainsi, un nombre (un « scalaire ») est appelé tenseur d'ordre 0, un vecteur est appelé tenseur d'ordre 1, une matrice est appelée tenseur d'ordre 2. Il convient de préciser que tout cela (à l'exception des scalaires qui sont naturellement indépendants de la base de travail) doit être reformulé pour donner à ces objets un caractère absolu. On définira donc un tenseur d'ordre p comme un tableau à p entrées dans un espace de dimension n , dont les composantes varient selon la base de travail en généralisant les règles définies à la Section 1.

Un tenseur d'ordre p est souligné p fois, et ses composantes sont indexées p fois : scalaire A , vecteur \underline{A} de composantes A_i ($i = 1, \dots, n$), matrice (parfois appelée tenseur tout court par abus de langage) $\underline{\underline{A}}$ de composantes A_{ij} , etc.

Définition 1.9 *Ecriture vectorielle sur une base.* On note \underline{e}_i les vecteurs d'une base orthonormée.

Ainsi, un vecteur s'écrit $\underline{A} = \sum_{i=1}^n A_i \underline{e}_i = A_1 \underline{e}_1 + \dots + A_n \underline{e}_n = A_x \underline{e}_x + A_y \underline{e}_y + A_z \underline{e}_z$ pour $n = 3$.

Le produit tensoriel de deux vecteurs de la base est noté $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$. Pour faire simple, il représente l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne d'une matrice vide :

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \underline{e}_n \otimes \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Ainsi, une matrice s'écrit $\underline{A} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.

■ **Exemple 1.2** Considérons le tenseur d'ordre 2 suivant :

$$3\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + 8\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

■

A proprement parler, l'exemple précédent ne donne que la représentation d'un tenseur dans une certaine base ; une définition complète exigerait la donnée de cette base. Pour donner un exemple plus général, considérant le symbole de Kronecker δ_{ij} , la matrice identité en dimension n , définie par (1.23), s'écrit

$$\underline{I} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad (1.102)$$

et ce quelle que soit la base retenue.

Définition 1.10 *Convention d'Einstein (sur les indices répétés).* Quand un indice est répété (c'est-à-dire apparaît deux fois) dans un même monôme, il y a une somme implicite sur cet indice. Cela permet d'éviter le recours excessif au symbole de sommation discrète \sum .

Par exemple, la trace d'une matrice $\text{Tr} \underline{A} = \sum_{i,j=1}^n A_{ii}$ peut s'écrire plus simplement A_{ii} . De même, le tenseur $\underline{I} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ peut s'écrire plus simplement $\underline{I} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$. Dans ce dernier exemple, on a deux paires d'indices ; on peut faire jouer cette convention autant de fois qu'on le désire dans un même monôme.

On généralise ainsi la notion de tenseur à l'ordre quelconque. Un tenseur d'ordre p s'écrit

$$\underline{A}_{(p)} = \underbrace{A_{ij\dots k}}_{p \text{ indices}} \underbrace{\underline{e}_i \otimes \dots \otimes \underline{e}_s}_{p \text{ vecteurs}}, \quad (1.103)$$

avec des sommes sur les p indices. Comme annoncé plus haut, là encore il ne s'agit pas d'une définition complète d'un tenseur. La donnée de ses coefficients n'est en effet pas suffisante : il faut qu'ils se transforment selon des règles bien définies lors d'un changement de base. La généralisation des règles (1.21) et (1.40) sera donnée plus bas.

R Si l'on travaillait dans une base non orthonormée, il faudrait introduire la distinction entre deux types de composantes : covariantes et contravariantes, avec des indices placés respectivement en bas et en haut. C'est en particulier indispensable quand on travaille dans une variété riemannienne pour traiter les espaces courbes. En mécanique des fluides cette subtilité est inutile (sauf dans certaines méthodes numériques) ; nous en faisons abstraction dans tout ce document.

Définition 1.11 *Produit tensoriel.* Considérons deux tenseurs d'ordres quelconques p et q , on définit leur produit tensoriel (ou produit extérieur) en les plaçant côte-à-côte, séparés du symbole

⊗. Cela donne un tenseur d'ordre $p + q$:

$$\underline{A}_{(p)} \otimes \underline{B}_{(q)} \doteq \underbrace{A_{ij\dots k}}_{p \text{ indices}} \underbrace{B_{\ell\dots rs}}_{q \text{ indices}} \underbrace{e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_r \otimes e_s}_{p+q \text{ vecteurs}}. \quad (1.104)$$

■ **Exemple 1.3** Le produit extérieur de deux vecteurs est une matrice :

$$\begin{aligned} \underline{A} \otimes \underline{B} &= (A_i e_i) \otimes (B_j e_j) = A_i B_j e_i \otimes e_j \\ &= \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n B_1 & \dots & A_n B_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Le produit extérieur d'une matrice et d'un vecteur est un tenseur d'ordre 3 :

$$\underline{A} \otimes \underline{B} = A_{ij} B_k e_i \otimes e_j \otimes e_k. \quad (1.106)$$

■

1.2.2 Contractions de tenseurs

Définition 1.12 *Contraction du premier ordre.* Pour contracter une fois deux tenseurs d'ordres quelconques, on les rapproche comme pour le produit tensoriel mais sans symbole entre eux, puis on utilise la même lettre pour le dernier indice du premier tenseur que pour le premier indice du second ; enfin on fait jouer la convention d'Einstein pour cet indice :

$$\underline{A}_{(p)} \cdot \underline{B}_{(q)} \doteq \underbrace{A_{ij\dots k}}_{p \text{ indices}} \underbrace{B_{k\dots \ell m}}_{q \text{ indices}} \underbrace{e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_\ell \otimes e_m}_{p+q-2 \text{ vecteurs}}. \quad (1.107)$$

Le résultat est un tenseur d'ordre $p + q - 2$.

■ **Exemple 1.4** Considérons les trois cas usuels que voici :

$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_i B_i$ est le produit *scalaire* de deux vecteurs ($1 + 1 - 2 = 0$).

$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_{ij} B_j e_i$ est le produit matrice-vecteur, un vecteur ($2 + 1 - 2 = 1$).

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ik} B_{kj} e_i \otimes e_j$ est le produit matriciel, une matrice ($2 + 2 - 2 = 2$).

■

Nous pouvons désormais énoncer la règle à laquelle les composantes d'un tenseur doivent obéir lors d'un changement de base.

Théorème 1.11 Lors d'un changement de base orthormée suivant la matrice de passage orthogonale $\underline{\underline{P}}$, un tenseur d'ordre p noté $\underline{A}_{(p)}$ suit la règle que voici :

$$\underline{A}_{(p)} = \underbrace{A'_{ij\dots k}}_{p \text{ indices}} \underbrace{\underline{\underline{P}}^T e_i \otimes \dots \otimes \underline{\underline{P}}^T e_k}_{p \text{ produits matrice-vecteur}}. \quad (1.108)$$

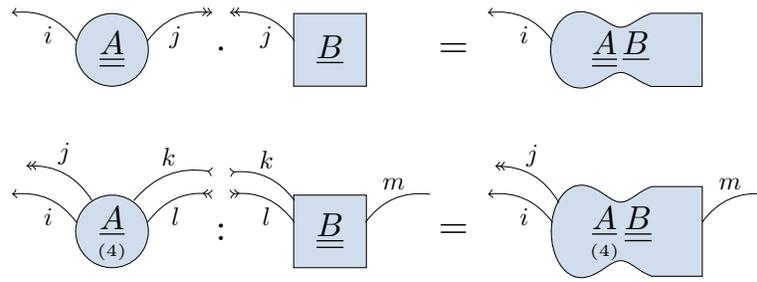


FIGURE 1.4 – Principe du produit contracté illustré par deux exemples avec la technique des « amibes » : chaque tenseur est représenté par une sorte d’amibe d’une espèce déterminée, avec autant de flagelles que son ordre. Des flagelles disparaissent par contraction. Ainsi, nous avons ici le simple produit matrice-vecteur (en haut, cela donne un vecteur) et le double produit d’un tenseur d’ordre 4 et d’une matrice (en bas, et l’on obtient un tenseur d’ordre 3).

Exercice 1.18 Vérifiez que cela redonne le cas d’ordre 2 (1.67).

Solution 1.18 La k -ième composante du vecteur \underline{e}_i est δ_{ik} , donc

$$\begin{aligned} \underline{P}^T \underline{e}_i &= P_{k\ell} \delta_{ik} \underline{e}_\ell \\ &= P_{i\ell} \underline{e}_\ell. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Ainsi, pour $p = 2$ (1.108) s’écrit

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A'_{ij} \underline{P}^T \underline{e}_i \otimes \underline{P}^T \underline{e}_j \\ &= A'_{ij} P_{i\ell} \underline{e}_\ell \otimes P_{jm} \underline{e}_m \\ &= P_{i\ell} A'_{ij} P_{jm} \underline{e}_\ell \otimes \underline{e}_m \\ &= \underline{P}^T \underline{A}' \underline{P}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Définition 1.13 *Contraction d’ordre arbitraire k ; double contraction.* On peut se livrer au même processus que pour la contraction du premier ordre, mais sur les k derniers indices du premier tenseur et sur les k premiers indices du second, ce qui donne un tenseur d’ordre $p + q - 2k$. On considérera dans ce cours seulement le double produit contracté ($k = 2$) :

$$\underline{A}_{(p)} : \underline{B}_{(q)} \doteq \underbrace{A_{ij\dots kl}}_{p \text{ indices}} \underbrace{B_{lk\dots rs}}_{q \text{ indices}} \underbrace{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \dots \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_s}_{p+q-4 \text{ vecteurs}}, \quad (1.111)$$

dont le résultat est un tenseur d’ordre $p + q - 4$.

On se limitera généralement au double produit de deux matrices, qui est donc un scalaire ($2 + 2 - 4 = 0$) :

$$\underline{A} : \underline{B} = A_{ij} B_{ji}. \quad (1.112)$$

C'est une sorte de produit scalaire de deux matrices. Il est d'ailleurs égal à la trace de leur produit :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = A_{ij}B_{ji} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}. \quad (1.113)$$

Il est important d'observer que les produits de tenseurs sont des tenseurs, en ce sens qu'ils se transforment selon la règle (1.108). On laisse la démonstration de ce résultat en exercice pour les plus courageux.

En général, pour bien comprendre le principe du produit contracté, on peut se référer au graphe conceptuel de la Figure 1.4. On laisse en exercice le théorème suivant, très intuitif :

Théorème 1.12 Les produits tensoriel et contractés (d'ordres quelconques) sont linéaires.

Exercice 1.19 Calculez ce qui suit :

$$(3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2). \quad (1.114)$$

Solution 1.19

$$\begin{aligned} \dots &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 3 \times 1 + (-1) \times 5 + 0 \times 2 + 8 \times (-4) \\ &= -34. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Exercice 1.20 Etant donnés trois vecteurs $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$, simplifier l'écriture $(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}}$. Considérer le cas $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}$.

Solution 1.20

$$(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}} = (A_i B_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (C_k \mathbf{e}_k) = A_i B_j C_j \mathbf{e}_i = (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{A}}. \quad (1.116)$$

Dans le cas $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}$, on obtient

$$(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{B}} = |\underline{\underline{B}}|^2 \underline{\underline{A}}. \quad (1.117)$$

Exercice 1.21 Montrez que le produit $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}^T$ est le carré d'une norme (c'est-à-dire une grandeur positive, qui ne s'annule que pour un tenseur nul).

Solution 1.21

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}^T = A_{ij} A_{ji}^T = A_{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2. \quad (1.118)$$

Plus généralement, on note $(A_{ij\dots rs}e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_r \otimes e_s)^T \doteq A_{sr\dots ji}e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_r \otimes e_s$ le transposé d'un tenseur. Cet opérateur n'a d'effet qu'à partir de l'ordre 2, car il intervertit l'ordre de tous les indices. On montre facilement qu'il intervertit aussi l'ordre du produit contracté :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{(p)}^T \cdot \underline{B}_{(q)}^T &= A_{ij\dots k}^T B_{k\dots lm}^T e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_l \otimes e_m \\ &= A_{k\dots ji} B_{lm\dots k} e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_l \otimes e_m \\ &= B_{ml\dots k} A_{k\dots ij} e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_l \otimes e_m \\ &= \left(\underline{B}_{(q)} \cdot \underline{A}_{(p)} \right)^T. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Cette propriété est encore vraie avec le double produit.

Exercice 1.22 Vérifiez-le avec

1. $\underline{A}^T \cdot \underline{B}^T$,
2. $\underline{A}^T \cdot \underline{B}$,
3. $\underline{A} : \underline{B}^T$.

Solution 1.22 On peut écrire les expressions proposées et les expressions recherchées, et montrer qu'elles sont égales à l'aide de quelques manipulations d'indices :

$$\begin{aligned} \underline{A}^T \cdot \underline{B}^T &= A_{ik}^T B_{kj}^T e_i \otimes e_j = A_{ki} B_{jk} e_i \otimes e_j, \\ (\underline{B} \cdot \underline{A})^T &= (B_{ik} A_{kj} e_i \otimes e_j)^T = B_{jk} A_{ki} e_i \otimes e_j. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \underline{A}^T \cdot \underline{B} &= A_{ij}^T B_j e_i = A_{ji} B_j e_i \\ \underline{B}^T \cdot \underline{A} &= B_i A_{ij} e_j = A_{ij} B_i e_j, \end{aligned} \quad (1.121)$$

qui sont identiques après interversion des indices muets (dans ce cas il est inutile de transposer puisque le résultat est un vecteur). Enfin :

$$\begin{aligned} \underline{A} : \underline{B}^T &= A_{ij} B_{ji}^T = A_{ij} B_{ij} \\ \underline{B} : \underline{A}^T &= B_{ij} A_{ji}^T = A_{ij} B_{ij}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Dans ce dernier cas, on aurait aussi pu observer que $\text{Tr}(\underline{A}\underline{B}) = \text{Tr}(\underline{B}\underline{A})$ (équation (1.67)). D'ailleurs plus généralement la trace est insensible à la transposition d'un tenseur d'ordre quelconque. Dans ces calculs et dans tous ceux que l'on peut faire avec des tenseurs, on peut manipuler les grandeurs munies d'indices comme des nombres ordinaires, puisqu'ils le sont. C'est l'avantage de la notation indicielle. ■

R En algèbre matricielle on a défini le transposé d'un vecteur comme un vecteur dont les composantes sont écrites en ligne, et non en colonnes (équation (1.38)). Ce n'est pas l'objet de la transposition que nous venons d'introduire. En revanche, cette dernière coïncide avec la transposition usuelle des matrices.

Aucune spécification n'a été faite concernant la possible dépendance des tenseurs considérés jusqu'à présent envers l'espace et/ou le temps. Ainsi, tout ce qui précède reste valable lorsque tel est le cas. On parle alors de champ de tenseurs :

Définition 1.14 *Champs de tenseurs.* Un champ est une fonction des coordonnées d'espace $\underline{x} = (x, y, z)$ et du temps t . On parle de champ de tenseurs quand cette fonction envoie un point de l'espace-temps (\underline{x}, t) sur un tenseur. Exemple : la température dans un matériau est un champ scalaire $T(x, t)$, la vitesse dans un fluide est un champ de vecteurs $\underline{u}(\underline{x}, t)$. Le temps t est alors considéré à part, les composantes du tenseur ne portant que sur les dimensions spatiales (autrement dit : les indices vont de 1 à n , dimension de l'espace).

Exercice 1.23 Calculez

$$\begin{pmatrix} 4x \\ xy + y^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y \\ 1 - 8x \end{pmatrix}. \quad (1.123)$$

Solution 1.23

$$\begin{pmatrix} 4xy & 4x(1 - 8x) \\ (x + y)y^2 & (x + y)(1 - 8x)y \end{pmatrix}. \quad (1.124)$$

■

1.3 Outils intégral-différentiels

Les bases rigoureuses de la théorie de la différentiation et de l'intégration sont trop longues à exposer pour ce bref support. On fait donc abstraction ici de bien des précautions, renvoyant à des ouvrages spécialisés pour l'établissement des conditions qui président à l'existence de dérivées et d'intégrales. Pour faire simple, disons que les fonctions envisagées ici sont régulières, c'est-à-dire qu'elles présentent une allure graphique lisse et sans coupures, sauf en un certain nombre (fini ou infini) de points isolés.

1.3.1 Opérateurs différentiels

On rappelle la définition de la dérivée d'une fonction d'une variable $A(x)$, qui représente sa pente locale, c'est-à-dire l'inclinaison de la tangente à sa courbe représentative (positive quand la fonction croît, négative quand elle décroît) :

$$\frac{dA}{dx}(x) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(x + \varepsilon) - A(x)}{\varepsilon}. \quad (1.125)$$

On définit de même les dérivées partielles d'une fonction de n variables $A(x, y, \dots)$, étant sous entendu que lorsqu'on dérive par rapport à une variable les autres sont fixées. Dans le cas $n = 2$, soit

$A(x, y)$, qui sera utilisé systématiquement dans la suite à titre d'illustration, cela donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) &\doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(x + \varepsilon, y) - A(x, y)}{\varepsilon} \\ \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) &\doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(x, y + \varepsilon) - A(x, y)}{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{1.126}$$

Les dérivées secondes sont au nombre de trois (pour une fonction de deux variables) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x, y) &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) (x, y) \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(x, y) &\doteq \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) (x, y), \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) &\doteq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) (x, y).\end{aligned}\tag{1.127}$$

Concernant la définition à la troisième ligne de (1.127), on réalise facilement que les dérivées partielles commutent, c'est-à-dire qu'on peut intervertir l'ordre des dérivations. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 1.13 *Théorème de Schwarz.* Les dérivées partielles commutent, c'est-à-dire qu'on a la propriété suivante :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Exercice 1.24 Vérifiez-le avec

$$A(x, y) \doteq x^2 \cos(x - 4y) + 3\sqrt{xy^2 - 1}\tag{1.128}$$

Solution 1.24 Calculons d'abord les dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) &= 2x \cos(x - 4y) - x^2 \sin(x - 4y) + \frac{3y^2}{2\sqrt{xy^2 - 1}}, \\ \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) &= 4x^2 \sin(x - 4y) + \frac{3xy}{\sqrt{xy^2 - 1}}.\end{aligned}\tag{1.129}$$

A présent, calculons la dérivée seconde croisée de deux manières :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \quad (1.130)$$

$$= 8x \sin(x - 4y) + 4x^2 \cos(x - 4y) + \frac{3y}{\sqrt{xy^2 - 1}} - \frac{3xy^3}{2(xy^2 - 1)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x}(x, y)$$

$$= 8x \sin(x - 4y) + 4x^2 \cos(x - 4y) + \frac{3y}{\sqrt{xy^2 - 1}} - \frac{3xy^3}{2(xy^2 - 1)^{3/2}}.$$

A partir de cela, on définit le gradient d'un champ scalaire comme le champ de vecteurs dont les composantes sont les dérivées partielles du champ scalaire, ce qui donne en deux dimensions :

$$(\underline{\text{grad}}A)(x, y) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.131)$$

On peut généraliser cela en dimension arbitraire :

Définition 1.15 *Gradient d'un champ scalaire.* Le gradient d'un champ scalaire est un champ de vecteurs défini par

$$\underline{\text{grad}}A \doteq \frac{\partial A}{\partial x_i} e_i. \quad (1.132)$$

R A partir de maintenant on omettra souvent la dépendance explicite des champs envisagés envers les coordonnées, afin d'alléger les notations. Par exemple, on écrira A pour $A(x, y)$.

■ **Exemple 1.5** On envisage $A(x, y) = 3x^2 + 2y^2$. Le calcul de son gradient donne

$$\underline{\text{grad}}A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2y^2) \\ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \end{pmatrix}. \quad (1.133)$$

Théorème 1.14 Le gradient d'un champ scalaire est localement orthogonal aux isolignes de ce champ.

Preuve. La variation de A est donnée par sa différentielle :

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \\ &= \underline{\text{grad}}A \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Or, sur les isolignes de A , par définition $dA = 0$ quand on se déplace de $d\mathbf{x}$.

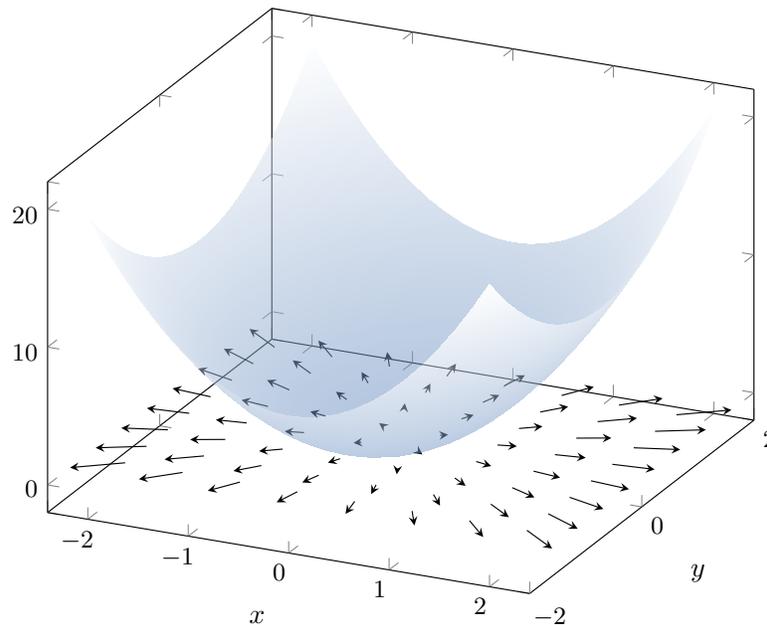


FIGURE 1.5 – graphe de la nappe $A(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ et son champ de gradient (1.133).

La Figure 1.5 montre le champ de gradient de l'exemple (1.133). On constate que les vecteurs fuient le minimum local de la fonction, une propriété générale cohérente avec ce qui précède :

Théorème 1.15 Les vecteurs constituant le champ de gradient d'un champ scalaire se dirigent vers ses maxima locaux, et s'éloignent de ses minima locaux.

La divergence d'un champ vectoriel est définie, en deux dimensions, par

$$\operatorname{div} \underline{A} \doteq \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}, \quad (1.135)$$

ce qu'on peut généraliser en dimension arbitraire :

Définition 1.16 *Divergence d'un champ de vecteurs.* La divergence d'un champ de vecteurs est un champ scalaire :

$$\operatorname{div} \underline{A} \doteq \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (1.136)$$

Comme son nom l'indique, la divergence d'un champ vectoriel qui diverge depuis un point M est positive au point M , et inversement.

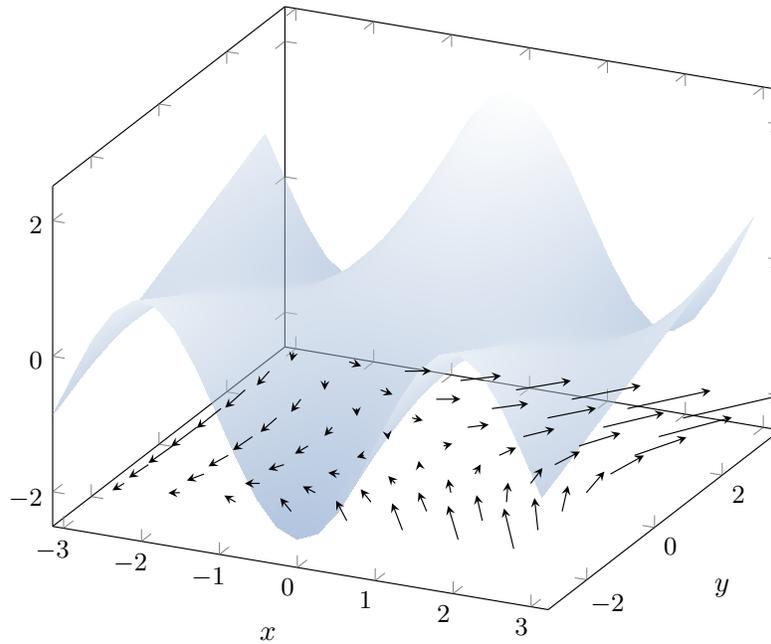


FIGURE 1.6 – graphe du champ de vecteurs (1.137) et de sa divergence (1.138).

Exercice 1.25 Calculez la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\underline{A}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}y + y \sin y \\ x + \frac{1}{4}y^2 \cos x \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Solution 1.25

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{A}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}y + y \sin y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x + \frac{1}{4}y^2 \cos x \right) \\ &= \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}y \cos x. \end{aligned} \quad (1.138)$$

La Figure 1.6 montre le champ de gradient de l'exemple (1.137). On peut étendre ces définitions à des tenseurs d'ordres plus élevés. Pour le cours de mécanique des fluides, on se contentera des opérateurs suivants :

Définition 1.17 *Opérateurs gradient et divergence à l'ordre supérieur.* Le gradient d'un champ vectoriel et la divergence d'un champ matriciel sont respectivement définis par

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{A} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad (1.139)$$

et

$$\underline{\text{div}} \underline{A} \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} e_i. \quad (1.140)$$

Plus généralement, le gradient (resp. la divergence) augmente (resp. diminue) d'une unité l'ordre d'un champ de tenseurs.

Exercice 1.26 Calculez le gradient du champ vectoriel (1.137). Calculez la divergence du champ matriciel suivant :

$$\underline{B}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y & xy + 8y^3 \\ 4x^2y - 7 & 9(x + y) \end{pmatrix}. \quad (1.141)$$

Solution 1.26

$$\underline{\text{grad}} \underline{A}(x, y) = \begin{pmatrix} -5 \sin y & -5x \cos y \\ -2 \sin 2x + 4y^2 & 8xy \end{pmatrix}, \quad (1.142)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{B}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 5x \sin y \\ -4 \sin 2x + 8x \end{pmatrix}. \quad (1.143)$$

Exercice 1.27 Exprimez plus simplement la trace du gradient d'un vecteur.

Solution 1.27

$$\text{Tr}(\underline{\text{grad}} \underline{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \text{div} \underline{A}. \quad (1.144)$$

Théorème 1.16 Règle de la dérivation en chaîne. Lorsqu'on procède à un changement de coordonnées $(x, y)^T \rightarrow (x', y')^T$, les dérivées partielles se transforment par les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x'} &= \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'}, \\ \frac{\partial A}{\partial y'} &= \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Quand il s'agit d'un changement de bases orthonormées, c'est-à-dire de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , la transformation $\underline{X} = \underline{P}\underline{X}'$ étant linéaire il est facile de voir que (1.145) donne

$$(\underline{\text{grad}} \underline{A})_{\mathcal{B}'} = \underline{P}(\underline{\text{grad}} \underline{A})_{\mathcal{B}}, \quad (1.146)$$

ce qui montre que le champ $\underline{\text{grad}}A$ se transforme comme il se doit pour un vecteur.

R Ce qui précède se généralise : les opérateurs introduits ici, ainsi que leurs généralisations d'ordres arbitraires, transforment des tenseurs en tenseurs, en ce sens que le gradient et la divergence d'un tenseur obéissent à la règle (1.108). On ne démontre pas ici ce résultat important, afin de ne pas alourdir le discours.

1.3.2 Manipulation des opérateurs

On peut effectuer bien des opérations avec les tenseurs, notamment composer certains opérateurs différentiels. On a par exemple

$$\text{div } \underline{\text{grad}}A = \text{div} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (1.147)$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\text{grad}}A = \underline{\text{div}} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} \underline{e}_i.$$

L'opérateur ainsi obtenu est appelé laplacien :

Définition 1.18 *Opérateur laplacien.* Le laplacien est noté Δ et défini par

$$\Delta \underline{A}_{(p)} \doteq \frac{\partial^2 \underline{A}_{(p)}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.148)$$

Il s'applique aux tenseurs de tous ordres et conserve l'ordre.

R Dans les formules (1.147) on a écrit $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ et non $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, afin de faire jouer la convention d'Einstein. Certains documents ont pourtant recours à cette dernière notation pour simplifier.

Exercice 1.28 Calculez le laplacien de $A(x, y) = 8 \sin^2 x - 4x^2 \cos y$.

Solution 1.28

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (8 \sin 2x - 8x \cos y) + \frac{\partial}{\partial y} (4x^2 \sin y) \\ &= (16 \cos 2x - 8 \cos y) + (4x^2 \cos y) \\ &= 16 \cos 2x + (4x^2 - 8) \cos y. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Définition 1.19 *Opérateur nabla.* C'est l'opérateur noté ∇ et défini par

$$\nabla \underline{A}_{(p)} = \frac{\partial \underline{A}_{(p)}}{\partial x_i} \otimes \underline{e}_i. \quad (1.150)$$

■ On a alors $\underline{\text{grad}}A = \nabla A$, $\underline{\text{div}}A = \nabla \cdot \underline{A}$, $\Delta A = \nabla \cdot (\nabla A) = \nabla^2 A$.

On peut effectuer des opérations sur des champs de tenseurs, en utilisant les règles de calcul définies plus haut.

■ **Exemple 1.6**

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}(\underline{A}\underline{B}) &= \underline{\text{div}}(AB_i \underline{e}_i) & (1.151) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(AB_i) \\ &= \frac{\partial A}{\partial x_i} B_i + A \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \\ &= (\underline{\text{grad}}A) \cdot \underline{B} + A \underline{\text{div}}\underline{B}. \end{aligned}$$

Exercice 1.29 Développez les entités suivantes :

1. $\underline{\text{div}}(\underline{A}\underline{I})$,
2. $\underline{\text{grad}}(\underline{A} \cdot \underline{B})$,
3. $\underline{\text{div}}(\underline{A} \cdot \underline{B})$.

Solution 1.29

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}(\underline{A}\underline{I}) &= \underline{\text{div}}(A \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) & (1.152) \\ &= \frac{\partial (A \delta_{ij})}{\partial x_j} \underline{e}_i \\ &= \frac{\partial A}{\partial x_j} \delta_{ij} \underline{e}_i + A \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i \\ &= \frac{\partial A}{\partial x_i} \underline{e}_i \\ &= \underline{\text{grad}}A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}}(\underline{A} \cdot \underline{B}) &= \underline{\text{grad}}(A_i B_i) & (1.153) \\ &= \frac{\partial (A_i B_i)}{\partial x_j} \underline{e}_j \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_i \underline{e}_j + A_i \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \underline{e}_j \\ &= \underline{B}^T \cdot \underline{\text{grad}}A + \underline{A}^T \cdot \underline{\text{grad}}B, \end{aligned}$$

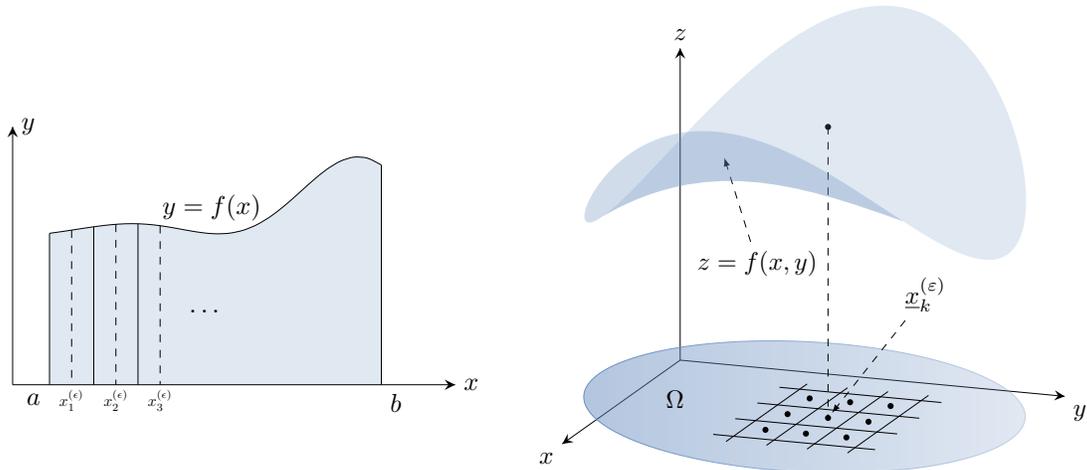


FIGURE 1.7 – Illustration de la définition des intégrales : $n = 1$ à gauche, $n = 2$ à droite.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) &= \operatorname{div}(A_{ij}B_j \underline{e}_i) & (1.154) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}B_j) \\
 &= \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} B_j + A_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \\
 &= (\operatorname{div} \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{B}} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{A}}^T.
 \end{aligned}$$

■

1.3.3 Intégrales

Avant d'aborder les intégrales multi-dimensionnelles, on commence par rappeler une définition et trois propriétés bien connues des intégrales à une dimension.

Définition 1.20 *Intégrale d'une fonction d'une variable.* On la définit, pour une fonction réelle $A(x)$ intégrable sur un segment $[a, b]$, par

$$\begin{aligned}
 \int_a^b A(x) dx &\doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{N^{(\varepsilon)}-1} A(x_k^{(\varepsilon)}) \varepsilon \right), & (1.155) \\
 N^{(\varepsilon)} &= \left\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor, \\
 x_k^{(\varepsilon)} &= a + k\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Dans cette définition simpliste les x_k parcourent le segment $[a, b]$ de façon régulière en partant de a , comme sur la Figure 1.7.

Théorème 1.17

$$\int_a^b \frac{dA}{dx} dx = [A]_a^b \doteq A(b) - A(a). \quad (1.156)$$

Preuve. On commence par écrire cette formule triviale :

$$\sum_{k=0}^{N^{(\varepsilon)}-1} \left[A(x_{k+1}^{(\varepsilon)}) - A(x_k^{(\varepsilon)}) \right] = A(x_{N^{(\varepsilon)}}^{(\varepsilon)}) - A(x_0^{(\varepsilon)}), \quad (1.157)$$

puis on multiplie et divise par ε avant de le faire tendre vers zéro :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{N^{(\varepsilon)}-1} \frac{A(x_{k+1}^{(\varepsilon)}) - A(x_k^{(\varepsilon)})}{\varepsilon} \varepsilon \right) = A \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{N^{(\varepsilon)}}^{(\varepsilon)} \right) - A(a). \quad (1.158)$$

Dans le membre de gauche on voit apparaître la dérivée de A ; à droite le dernier point x_k se rapproche de b quand ε diminue. Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{N^{(\varepsilon)}-1} \frac{dA}{dx}(x_k^{(\varepsilon)}) \varepsilon \right) = A(b) - A(a), \quad (1.159)$$

et le membre de gauche est bien la définition de l'intégrale de $\frac{dA}{dx}$. ■

Théorème 1.18 *Intégration par parties.*

$$\int_a^b \frac{dA}{dx} B(x) dx = [AB]_a^b - \int_a^b A(x) \frac{dB}{dx} dx. \quad (1.160)$$

Preuve. Cette formule très utile, qui permet de calculer bien des intégrales, résulte du théorème précédent et de la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\frac{dAB}{dx} = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}. \quad (1.161)$$

En appliquant (1.156) à (1.161) on obtient (1.160). ■

Exercice 1.30 Calculez l'intégrale suivante :

$$I \doteq \int_0^2 \ln x dx. \quad (1.162)$$

Solution 1.30 Un truc qui marche souvent : utiliser le fait que $A(x) = 1 \times A(x) = \frac{dx}{dx}A(x)$:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \frac{dx}{dx} \ln x \, dx & (1.163) \\
 &= [x \ln x]_0^2 - \int_0^2 x \frac{d \ln x}{dx} dx \\
 &= 2 \ln 2 - \int_0^2 x \frac{1}{x} dx \\
 &= 2 \ln 2 - 2.
 \end{aligned}$$

■

Théorème 1.19 *Changement de variables.* Soit une nouvelle variable X définie par $X \doteq \phi^{-1}(x)$, ϕ étant une fonction continue de réciproque ϕ^{-1} . Pour toute fonction $A(x)$ on a

$$\int_a^b A(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} A(\phi(X)) \phi'(X) dX, \quad (1.164)$$

où $\phi'(X) = \frac{d\phi}{dX}$ est la dérivée de $\phi(X)$.

Preuve. Cette formule s'obtient en écrivant que $dx = \frac{dx}{dX} dX = \phi'(X) dX$. ■

Exercice 1.31 Calculez l'intégrale suivante :

$$I \doteq \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx. \quad (1.165)$$

Solution 1.31 On fait le changement de variable $X \doteq \frac{\pi}{2} - x$:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\pi/2}^0 \ln \cos \left(\frac{\pi}{2} - X \right) (-1) dX & (1.166) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \ln \sin X \, dX,
 \end{aligned}$$

puis on ajoute les deux intégrales :

$$\begin{aligned}
 2I &= \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx + \int_0^{\pi/2} \ln \sin X \, dX & (1.167) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) \, dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x - \ln 2) \, dx.
 \end{aligned}$$

A présent, on effectue le changement de variable $X \doteq 2x$:

$$\begin{aligned}
 2I &= \int_0^{\pi} (\ln \sin X) \frac{1}{2} dX - \frac{\pi}{2} \ln 2 & (1.168) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin X \, dX + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin X \, dX - \frac{\pi}{2} \ln 2.
 \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à I , par (1.166). La seconde intégrale, par le dernier changement de variable $Y \doteq X - \frac{\pi}{2}$, se ramène également à I . On en déduit $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. ■

On généralise ce qui précède à un champ de dimension arbitraire. Par exemple, l'intégrale (double) d'une fonction de $n = 2$ variables $A(x, y)$ sur un domaine Ω du plan (x, y) est donnée par

$$\int_{\Omega} A(x, y) \, dx dy \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_j \sum_k A(x_j^{(\varepsilon)}, y_k^{(\varepsilon)}) \varepsilon^2 \right), \quad (1.169)$$

où les points (x_j, y_k) parcourent le domaine d'intégration Ω comme en Figure 1.7. Il faut noter qu'on n'est pas forcé de recourir aux coordonnées cartésiennes ; en coordonnées polaires (r désignant la distance à l'origine et θ l'angle entre l'axe x et le rayon vecteur de l'origine au point d'intérêt), l'élément de surface $dx dy$ devient $r dr d\theta$:

$$\int_{\Omega} A(x, y) \, dx dy = \int_{\Omega} A(r, \theta) r dr d\theta. \quad (1.170)$$

Exercice 1.32 Ecrivez en coordonnées polaires l'intégrale double suivante, puis calculez-la :

$$I \doteq \int_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy, \quad (1.171)$$

où Ω est la quadrant positif du plan ($x \geq 0, y \geq 0$).

Solution 1.32

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^{+\infty} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.172)$$

On remarque qu'on peut aussi l'écrire en séparant les variables cartésiennes :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right) e^{-y^2/2} dy \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (1.173)$$

En identifiant (1.172) et (1.173) on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.174)$$

Plus généralement, pour une fonction de n variables, on définit de la même manière :

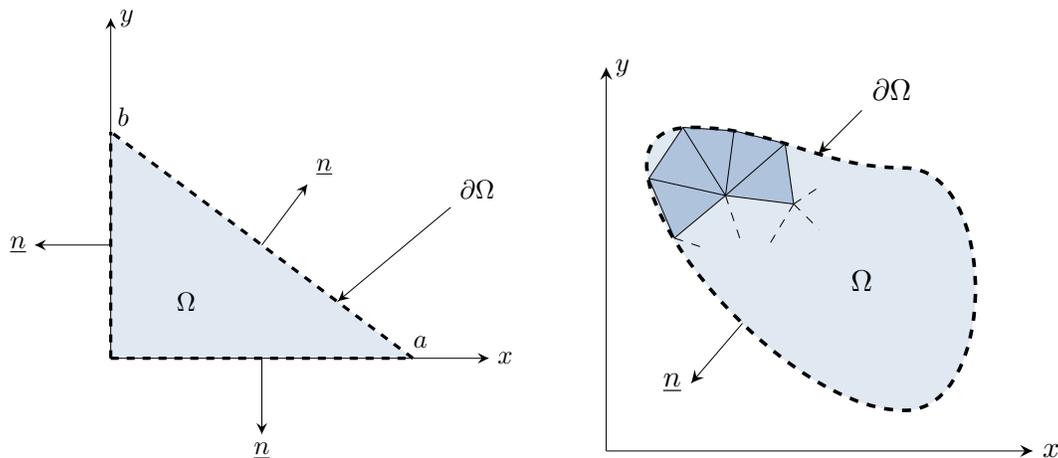


FIGURE 1.8 – Illustration de la preuve donnée ici du théorème de la divergence pour $n = 2$. Dans ce cas le bord $\partial\Omega$ est une courbe, pour $n = 3$ c'est une surface.

Définition 1.21 *Intégrale volumique d'un champ de tenseurs.* L'intégrale volumique d'une fonction en dimension n est notée

$$\int_{\Omega} A(\underline{x}, t) d\Omega, \quad (1.175)$$

$d\Omega$ étant la limite infinitésimale de ε^n . De telles intégrales peuvent être définies pour les tenseurs de tous ordres.

■ **Exemple 1.7** Une intégrale représente l'addition d'une infinité de contributions pour estimer une grandeur macroscopique extensive (c'est-à-dire additive) dont la densité est variable en espace. Par exemple, si ρ désigne le champ de masse volumique (densité de masse) :

$$\int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) d\Omega \text{ est la masse contenue dans } \Omega. \quad (1.176)$$

■ **Exercice 1.33** Exprimez la quantité de mouvement contenue dans Ω par une intégrale.

Solution 1.33 En notant \underline{u} le champ de vitesse, et en omettant les dépendances spatio-temporelles pour alléger :

$$\int_{\Omega} \rho \underline{u} d\Omega \text{ est la quantité de mouvement contenue dans } \Omega. \quad (1.177)$$

■ Pour les besoins de la physique, la notion d'intégrale de volume est capitale, tout autant que celle d'intégrale de bord :

Définition 1.22 *Intégrale de bord d'un champ de tenseurs.* Etant donné un volume Ω dont le bord (c'est-à-dire la frontière) $\partial\Omega$ est suffisamment régulier et orientable, on définit pour un champ A arbitraire son intégrale de bord sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} A(\underline{x}, t) dS = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\sum_k A(\underline{x}_k^{(\sigma)}) \sigma \right), \quad (1.178)$$

les points \underline{x}_k parcourant la surface d'intégration, et dS étant la limite infinitésimale de $\sigma^n \sim \varepsilon^{n-1}$, puisque $\partial\Omega$ a une dimension spatiale de moins que Ω .

Le résultat important qui suit généralise alors le théorème 1.17 :

Théorème 1.20 *dit de la divergence, ou de Gauss, ou encore de Green–Ostrogradski.* Etant donné un volume Ω (éventuellement mobile), on note $\underline{n}(\underline{x}, t)$ le vecteur unitaire, orthogonal et extérieur à $\partial\Omega$ en chacun de ses points. Alors, pour tout champ de vecteurs $\underline{A}(\underline{x}, t)$, on a

$$\int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\partial\Omega(t)} \underline{A}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS. \quad (1.179)$$

Qui plus est, ce résultat se généralise à des tenseurs de tous ordres, à condition d'utiliser l'opérateur divergence approprié. Ce théorème est une généralisation de (1.156) en dimension arbitraire.

Preuve. On se limite ici à $n = 2$ et à un champ vectoriel. On commence par démontrer ce résultat pour un triangle rectangle $\Omega = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$, comme en Figure 1.8. Pour cela, on parcourt le triangle dans deux sens différents pour chacun des termes de $\operatorname{div} \underline{A}$, et on utilise 1.17 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}, t) d\Omega &= \int_0^b \left(\int_0^{a(1-y/b)} \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy + \int_0^a \left(\int_0^{b(1-x/a)} \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_0^b A_x(a(1-y/b), y) dy + \int_0^a A_y(x, b(1-x/a)) dx \\ &\quad - \int_0^a A_y(x, 0) dx - \int_0^b A_x(0, y) dy. \end{aligned} \quad (1.180)$$

On voit immédiatement sur la Figure 1.8 que

$$\begin{aligned} - \int_0^a A_y(x, 0) dx &= \int_{\partial\Omega_x} \underline{A} \cdot \underline{n} dS, \\ - \int_0^b A_x(0, y) dy &= \int_{\partial\Omega_y} \underline{A} \cdot \underline{n} dS. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Le dernier segment $\partial\Omega_{xy}$ de la frontière, a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ce qui donne $b dx + a dy = 0$ (comparer à (1.134)). L'élément d'intégration et le vecteur normal unitaire (ici constant) valent donc

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} dy, \\ \underline{n} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.182)$$

En combinant cela, on trouve facilement $\underline{A} \cdot \underline{n} dS = \frac{bA_x + aA_y}{\sqrt{a^2 + b^2}} dS = A_x dy + A_y dx$, puis

$$\int_{\partial\Omega_{xy}} \underline{A} \cdot \underline{n} dS = \int_0^b A_x(a(1-y/b), y) dy + \int_0^a A_y(x, b(1-x/a)) dx, \quad (1.183)$$

ce qui conclut concernant le triangle rectangle. Tout triangle étant l'union de deux triangles rectangles, ce résultat reste vrai par additivité des intégrales pour des domaines contigus et disjoints (observez que dans ce cas les vecteurs \underline{n} sont opposés sur la frontière commune) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Omega'} \operatorname{div} \underline{A} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{A} d\Omega + \int_{\Omega'} \operatorname{div} \underline{A} d\Omega, \\ \int_{\partial\Omega \cup \partial\Omega'} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} dS + \int_{\partial\Omega'} \underline{A} \cdot \underline{n} dS. \end{aligned} \quad (1.184)$$

Pour en déduire que le théorème est valable sur tout domaine Ω , il suffit enfin de séparer ce dernier en une partition de petits triangles comme en Figure 1.8, avec une erreur qui décroît avec leur taille ε (en fait on n'est pas forcé de faire décroître la taille des triangles à l'intérieur du domaine, seulement près des bords). ■

Exercice 1.34 Ω est un carré de côté 1 et de coin inférieur gauche situé à l'origine, et

$$\underline{A}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.185)$$

Vérifiez l'égalité (1.179) en calculant explicitement les deux membres.

Solution 1.34 On calcule tout d'abord :

$$\operatorname{div} \underline{A} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = y + 2y = 3y, \quad (1.186)$$

ce qui permet de calculer l'intégrale de volume, en utilisant (1.156) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{A} d\Omega &= \int_0^1 \left(\int_0^1 3y dx \right) dy = \int_0^1 [3yx]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 3y dy = \left[\frac{3}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (1.187)$$

On doit calculer l'intégrale de bord par segments. Sur le bord $\partial\Omega_{x-}$ porté par l'axe des x :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{x-}} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_0^1 \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}_{y=0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx = - \int_0^1 x^2 dx \\ &= - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Sur le bord $\partial\Omega_{x+}$ qui lui est parallèle :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{x+}} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_0^1 \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}_{y=1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (1.189)$$

Sur le bord $\partial\Omega_{y-}$ porté par l'axe des y :

$$\int_{\partial\Omega_{y-}} \underline{A} \cdot \underline{n} dS = \int_0^1 \left(\begin{array}{c} xy \\ x^2 + y^2 \end{array} \right)_{x=0} \cdot \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) dy = - \int_0^1 0 dy = 0. \quad (1.190)$$

Enfin, sur le bord $\partial\Omega_{y+}$ qui lui est parallèle :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{y+}} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_0^1 \left(\begin{array}{c} xy \\ x^2 + y^2 \end{array} \right)_{x=1} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) dy = \int_0^1 y dy \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.191)$$

En les additionnant, on obtient l'intégrale de bord, en effet identique à l'intégrale de volume :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} dS = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad (1.192)$$

■

Exercice 1.35 Faites le même travail qu'à l'exercice précédent lorsque Ω est un demi-disque de rayon 1 et de centre situé à l'origine, avec son diamètre frontière sur l'axe des x , et

$$\underline{A}(x, y) = \left(\begin{array}{c} x^3 y + y \\ xy^4 - x \end{array} \right). \quad (1.193)$$

Solution 1.35 Cette fois nous avons

$$\operatorname{div} \underline{A} = \frac{\partial (x^3 y + y)}{\partial x} + \frac{\partial (xy^4 - x)}{\partial y} = 3x^2 y + 4xy^3, \quad (1.194)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{A} d\Omega &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3x^2 y + 4xy^3) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{2} x^2 y^2 + xy^4 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} x^2 (1-x^2) + x(1-x^2)^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{3}{10} x^5 + \frac{1}{6} x^6 \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{5}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

L'intégrale sur la partie du bord portée par l'axe des x vaut

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_-} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_{-1}^1 \left(\begin{array}{c} x^3 y + y \\ xy^4 - x \end{array} \right)_{y=0} \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right) dx = \int_{-1}^1 x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=-1}^{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (1.196)$$

Sur la partie circulaire du bord, on peut calculer $\underline{n}(x, y)$ comme le gradient (normalisé) de la fonction $B(x, y) \doteq x^2 + y^2 - 1$. D'autre part, les isolignes de B vérifient $dB = xdx + ydy = 0$, donc

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \underline{n} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_+} \underline{A} \cdot \underline{n} dS &= \int_{-1}^1 \left(\begin{pmatrix} x^3y + y \\ xy^4 - x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)_{y=\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^5 + x^4 - 2x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. ■

Exercice 1.36 Montrez que

$$\int_{\partial\Omega} \underline{n} dS = 0. \quad (1.198)$$

Solution 1.36 Il faut poser $\underline{A} = \underline{cst}$ (vecteur constant) dans (1.179). ■

Exercice 1.37 Montrez que

$$\int_{\Omega} \underline{\text{grad}} A d\Omega = \int_{\partial\Omega} A \underline{n} dS. \quad (1.199)$$

Solution 1.37 Il faut utiliser la formule (1.152). Le théorème de la divergence donne alors le résultat demandé car $\underline{In} = \underline{n}$. La formule ainsi démontrée conduit au principe d'Archimède. ■

On peut intégrer par parties en plusieurs dimensions comme en une dimension. Il existe de nombreuses variantes d'intégration par parties multi-dimensionnelles.

■ **Exemple 1.8** En utilisant (1.151) et (1.179), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \operatorname{div} \underline{B} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (A \underline{B}) d\Omega - \int_{\Omega} (\underline{\text{grad}} A) \cdot \underline{B} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} A \underline{B} \cdot \underline{n} dS - \int_{\Omega} (\underline{\text{grad}} A) \cdot \underline{B} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.200)$$

■

1.3.4 Equations différentielles ordinaires

Il arrive très souvent, en physique, que des raisonnements ne permettent pas d'obtenir explicitement la fonction désirée (champ de température dans l'atmosphère, champ de vitesse dans une rivière, etc.) mais seulement une relation faisant intervenir ses dérivées. Par exemple, si l'on note $y(x)$ une grandeur d'intérêt ne dépendant que de la variable x , supposons qu'à l'issue de quelques calculs on parvienne à l'équation suivante :

$$y' = a, \tag{1.201}$$

où a est une constante connue, reliée aux paramètres du problème, le prime désignant la dérivée (il n'y a ici qu'une seule variable, x). Dans ce cas, il suffit d'intégrer en x pour obtenir $y(x) = ax + b$, et la constante b peut être déterminée à l'aide d'une condition limite, c'est-à-dire la donnée de $y(x = x_0)$ pour un x_0 adéquat. Si la variable est le temps t (au lieu de x), on parle plutôt de condition initiale.

Mais que se passe-t-il si nos calculs conduisent à une équation comme celle-ci ?

$$y' = ay. \tag{1.202}$$

Dans ce cas on peut encore s'en sortir simplement, en divisant par y (supposé non nul), ce qui donne $(\ln y)' = a$, donc $\ln y = ax + b$, ou encore :

$$y(x) = Ce^{ax}, \tag{1.203}$$

avec $C \doteq e^b$. L'équation (1.202) est une équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre (car on n'y trouve que la dérivée première de y).

Définition 1.23 Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation dont l'inconnue est une fonction d'une seule variable, qui y apparaît par l'intermédiaire de ses dérivées. La dérivée du plus grand ordre donne l'ordre de l'EDO, par définition.

■ **Exemple 1.9** Le mouvement d'un pendule (une masse pendant à un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixée) obéit à l'EDO suivante :

$$\ell\theta'' = -g \sin \theta, \tag{1.204}$$

où $\theta(t)$ est l'angle que fait le fil avec la verticale, fonction du temps t , et g est l'accélération de la gravité. Il s'agit d'une EDO d'ordre 2, $\theta''(t)$ jouant le rôle de $y''(x)$. ■

Nous venons de montrer que (1.202) admet une famille de solutions. Cela n'est si facile que parce que cette EDO est linéaire, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de solutions est aussi une solution. De plus, l'unique coefficient a est une constante, ce qui facilite aussi les choses. Résumons notre trouvaille :

Théorème 1.21 *EDO linéaire homogène du premier ordre.* L'EDO linéaire homogène du premier ordre à coefficient constant $y' = ay$ admet une famille de solutions $y(x) = Ce^{ax}$ formant une droite vectorielle (c'est-à-dire qu'elles sont toutes proportionnelles). Le coefficient C est à régler au cas par cas en utilisant une condition limite.

L'équation (1.202) est dite *homogène*, car elle ne comporte pas de terme additif ne dépendant pas de la fonction inconnue $y(x)$. Voici un exemple d'EDO non homogène :

$$y' = ay + c(x), \quad (1.205)$$

où $c(x)$ est une fonction arbitraire mais connue. Ici encore nous pouvons déterminer les solutions, en observant que sans cette fonction on retrouverait (1.202). Il est donc tentant de chercher des solutions de (1.205) sous la forme

$$y(x) = C(x)e^{ax}. \quad (1.206)$$

Exercice 1.38 Déterminez $C(x)$ pour que (1.206) satisfasse (1.205). Déduisez-en les solutions de (1.205).

Solution 1.38 En injectant (1.206) dans (1.205) on trouve

$$C(x) = \int_{x_0}^x c(\tilde{x})e^{-a\tilde{x}}d\tilde{x}, \quad (1.207)$$

où x_0 est une constante (la changer revient à ajouter une constante à $C(x)$). Ainsi, la solution générale de (1.205) est donnée par

$$y(x) = e^{ax} \int_{x_0}^x c(\tilde{x})e^{-a\tilde{x}}d\tilde{x}. \quad (1.208)$$

■

Exercice 1.39 Résolvez $y' = -y + x$ avec la condition limite $y(0) = 1$.

Solution 1.39 Cette EDO est de la forme (1.205) (linéaire du premier ordre, non homogène), avec $a = -1$ et $c(x) \doteq x$. La solution (1.208) s'écrit

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x} \int_{x_0}^x \tilde{x}e^{\tilde{x}}d\tilde{x} \\ &= e^{-x}((x-1)e^x + D) \\ &= x - 1 + De^{-x}. \end{aligned} \quad (1.209)$$

On peut directement vérifier que cette solution générale vérifie l'EDO de départ. On fixe la constante D en imposant $y(0) = 1$, soit $D = 2$:

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}. \quad (1.210)$$

■

Les EDO du premier ordre sont assez fréquentes en physique, mais on y trouve aussi des EDO du deuxième ordre. Toujours dans le cas linéaire, avec coefficients constants, cela s'écrit :

$$y'' = ay' + by. \quad (1.211)$$

L'exemple (1.204) donné plus haut est non linéaire à cause de la fonction sinus, mais on pourrait le linéariser en se limitant aux petites valeurs de l'angle θ (petites oscillations) : $\ell\theta'' = -g\theta$, qui

entre bien dans la catégorie (1.211) avec $a = 0, b = -g/\ell$. Forts de notre expérience de l'EDO du premier ordre, nous pouvons tenter notre chance avec des solutions de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$, avec λ à déterminer. L'injection de cet ansatz dans (1.211) donne une équation polynomiale de degré 2 en λ :

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0, \quad (1.212)$$

de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$. Trois cas se présentent alors :

- Si $\Delta > 0$, (1.212) possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 , et nous avons les deux solutions réelles $y_1(x) \doteq e^{\lambda_1 x}, y_2(x) \doteq e^{\lambda_2 x}$.
- Si $\Delta = 0$, (1.212) possède la racine double réelle $\lambda = \frac{a}{2}$, et nous obtenons une première solution réelle, $y_1(x) \doteq e^{\lambda x}$. Mais on réalise alors que $y_2(x) \doteq xe^{\lambda x}$ est aussi solution de l'EDO.
- Si $\Delta < 0$, (1.212) possède deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 \pm i\lambda_2$, et les deux solutions peuvent se recombiner (par linéarité) pour donner deux les solutions réelles $y_1(x) \doteq e^{\lambda_1 x} \cos(\lambda_2 x), y_2(x) \doteq e^{\lambda_1 x} \sin(\lambda_2 x)$.

Il existe donc toujours deux solutions réelles, et même une double infinité de solutions (un espace vectoriel de dimension 2) par combinaison linéaire :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (1.213)$$

Mais nous ignorons pour l'instant s'il existe d'autres types de solutions à (1.211). Pour répondre à cette question, considérons une solution $y(x)$, et définissons le *Wronskien* de l'EDO pour la paire (y_1, y) :

$$W(x) \doteq \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'(x) - y(x)y_1'(x). \quad (1.214)$$

Exercice 1.40 Montrez que W obéit à une EDO linéaire du premier ordre. Déduisez-en une formule donnant $W(x)$ explicitement (à une constante multiplicative près indéterminée).

Solution 1.40 Calculons la dérivée du Wronskien :

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1(x)y''(x) - y(x)y_1''(x) \\ &= y_1(x)(ay'(x) + by(x)) - y(x)(ay_1'(x) + by_1(x)) \\ &= aW(x). \end{aligned} \quad (1.215)$$

W obéit donc à l'équation (1.202). D'après ce que nous savons, nous en déduisons :

$$W(x) = Ce^{ax}. \quad (1.216)$$

■

D'après la définition (1.214) de W , cela donne encore

$$y'(x) - \lambda_1 y(x) = C \exp((a - \lambda_1)x), \quad (1.217)$$

qui est une EDO du premier ordre non homogène. Ainsi, la solution générale (1.208) donne alors

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(\lambda_1 x) \int_{x_0}^x \exp((a - 2\lambda_1)\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp((a - \lambda_1)x). \end{aligned} \quad (1.218)$$

Il reste à observer que la somme des racines du polynôme (1.212) vaut a , si bien que $a - \lambda_1 = \lambda_2$, pour réaliser que $y(x)$ est bien de la forme (1.213). Ainsi :

Théorème 1.22 *EDO linéaire homogène du deuxième ordre.* Soient λ_1, λ_2 les racines (éventuellement confondues) du trinôme $\lambda^2 - a\lambda - b$. L'EDO linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants $y'' = ay' + by$ admet une famille de solutions $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $a^2 + 4b \neq 0$, $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$ sinon. Ces solutions forment donc toujours un plan vectoriel. Les coefficients C_1, C_2 sont à régler au cas par cas en utilisant deux conditions limites.

R Le trinôme $\lambda^2 - a\lambda - b$ est appelé *polynôme caractéristique* de l'EDO du deuxième ordre. Quant aux conditions limites, elles portent le plus souvent sur y et/ou y' .

Exercice 1.41 Résolvez l'EDO $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Solution 1.41 Le trinôme caractéristique s'écrit ici $\lambda^2 + 1$ ($a = 0, b = -1$). Ses racines sont $\lambda_{1,2} = \pm i$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \\ &= D_1 \cos x + D_2 \sin x. \end{aligned} \quad (1.219)$$

Les constantes permettant de satisfaire les conditions limites sont $D_1 = 1$ et $D_2 = 2$. Ce type d'équation caractérise les oscillateurs linéaires non dissipatifs et non forcés, comme c'est le cas d'un pendule effectuant de petites oscillations pour lesquelles on néglige les frottements. ■

R Il existe encore bien d'autres types d'EDO : linéaires d'ordres supérieurs, non homogènes, à coefficients non constants, non linéaires. Lorsqu'on est en présence de champs de plusieurs variables, un système d'équations liant les dérivées partielles des champs d'intérêt est appelé système d'équations aux dérivées partielles (EDP).

1.4 Transformée de Fourier

Ici encore, il ne s'agit pas de définir avec précision le contexte de cet outil, mais d'énoncer sans rigueur mathématique ses propriétés.

1.4.1 Définition et propriétés

Définition 1.24 *Transformée de Fourier.* Étant donnée une fonction $A(x)$ d'une variable réelle x , sa transformée de Fourier par rapport à x (si tant est qu'elle est définie) est la fonction de k suivante :

$$\mathcal{F}_x[A(x)](k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx} dx. \quad (1.220)$$

■ **Exemple 1.10** Soit la fonction $P(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$, 0 sinon (on l'appelle la *fonction porte*, Figure

1.9). Sa transformée de Fourier se calcule assez facilement :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_x[P(x)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ikx} dx & (1.221) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-ikx}}{ik} \right]_{-1/2}^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{-ik/2} + e^{ik/2}}{ik} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k/2)}{k/2}.
 \end{aligned}$$

■

Nous avons besoin pour la suite d'un outil très important en physique mathématique :

Définition 1.25 *Distribution de Dirac.* Elle se note $\delta(x)$ et est définie comme suit :

$$\delta(x) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.222)$$

où P est la fonction porte. Cette définition est étrange, car on y divise par ε avant de le faire tendre vers zéro. Nous allons voir que δ n'est pas une fonction ordinaire. Considérons pour cela l'intégrale suivante :

$$I \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x) dx, \quad (1.223)$$

où ϕ est une fonction arbitraire mais continue. En manipulant un peu (avec notamment le changement de variable $x \doteq \varepsilon X$), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx & (1.224) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} \phi(x) dx. \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1/2}^{+1/2} \phi(\varepsilon X) dX. \\
 &= \int_{-1/2}^{+1/2} \phi(0) dX. \\
 &= \phi(0). & (1.225)
 \end{aligned}$$

Il s'agit en fait de la véritable définition de la distribution de Dirac : une « fonction » qui, lorsqu'on la multiplie par une autre puis qu'on intègre sur toute la droite réelle, donne la valeur de l'autre fonction en zéro. On voit qu'il ne s'agit pas d'une fonction usuelle, car formellement elle est nulle partout et infinie en zéro (voir Figure 1.9).

Exercice 1.42 Calculez la transformée de Fourier de $\delta(x)$.

Solution 1.42

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x[\delta(x)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\end{aligned}\tag{1.226}$$

puisque $e^0 = 1$. ■

On peut généraliser ce qui précède avec le changement de variable $X \doteq x - a$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x[\delta(x-a)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(X) e^{-ik(X+a)} dX \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika},\end{aligned}\tag{1.227}$$

qui redonne bien (1.226) pour $a = 0$.

Nous devons à présent donner quelques propriétés simples de la transformée de Fourier (nous en laissons les démonstrations en exercice) :

Théorème 1.23 *Propriétés essentielles de la transformée de Fourier.*

- La transformée de Fourier est linéaire.
- Une fonction réelle et paire a une transformée de Fourier réelle et paire.
- Une fonction réelle et impaire a une transformée de Fourier imaginaire pure et impaire.
- Translation :

$$\mathcal{F}_x[A(x-a)](k) = e^{ika} \mathcal{F}_x[A(x)](k).\tag{1.228}$$

- Dilatation :

$$\mathcal{F}_x[A(ax)](k) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}_x[A(x)]\left(\frac{k}{a}\right).\tag{1.229}$$

Notons que (1.228) redonne (1.227) à partir de (1.226). Voici maintenant une propriété plus subtile et très importante.

Théorème 1.24 *Dérivée de la transformée, et inversement.* Pour une fonction $A(x)$ qui tend vers zéro aux deux infinis :

$$\frac{d}{dk} \mathcal{F}_x[A(x)](k) = -i \mathcal{F}_x[xA(x)](k),\tag{1.230}$$

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{d}{dx}A(x)\right](k) = ik \mathcal{F}_x[A(x)](k).\tag{1.231}$$

Preuve. En dérivant sous l'intégrale (qui porte sur une autre variable) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} \mathcal{F}_x[A(x)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \frac{d}{dk} e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \int_{-\infty}^{+\infty} x A(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -i \mathcal{F}_x[xA(x)](k).
 \end{aligned} \tag{1.232}$$

Puis, en intégrant par parties (avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = 0$) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_x \left[\frac{d}{dx} A(x) \right] (k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} A(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \frac{d}{dx} e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ik \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx} dx \\
 &= ik \mathcal{F}_x[A(x)](k)
 \end{aligned} \tag{1.233}$$

■

Exercice 1.43 On définit la *distribution de Heaviside* $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, 0 sinon (voir Figure 1.9). Il est facile de vérifier que sa dérivée est la distribution de Dirac. Calculez la transformée de Fourier de $H(x - a)$.

Solution 1.43 On utilise (1.227) et (1.231) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika} &= \mathcal{F}_x[\delta(x - a)](k) \\
 &= \mathcal{F}_x \left[\frac{d}{dx} H(x - a) \right] (k) \\
 &= ik \mathcal{F}_x[H(x - a)](k),
 \end{aligned} \tag{1.234}$$

d'où

$$\mathcal{F}_x[H(x - a)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika}}{ik}. \tag{1.235}$$

■

Voici enfin la plus importante et la plus remarquable des propriétés qu'il nous faut énoncer. On trouvera des démonstrations en ligne ; nous les jugeons trop longues pour être exposées ici :

Définition 1.26 *Transformée de Fourier inverse.* Etant donnée une fonction $A(x)$, on a :

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_x[A(x)](k) e^{ikx} dk. \tag{1.236}$$

Autrement dit : la transformée de Fourier est inversible et son inverse s'écrit

$$\mathcal{F}_k^{-1}[B(k)](x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) e^{ikx} dk. \quad (1.237)$$

On observera le signe + dans l'exponentielle, contrairement à la transformée originale.

■ **Exemple 1.11** Vérifions-le avec la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k/2)}{k/2}$ qui apparaît en (1.221) comme transformée de la fonction porte. On observe d'abord que (1.235) donne

$$\mathcal{F}_k^{-1} \left[\frac{e^{-ika}}{ik} \right] = \sqrt{2\pi} H(x-a). \quad (1.238)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k/2)}{k/2} \right] (x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k^{-1} \left[\frac{1}{ik} \left(e^{ik/2} - e^{-ik/2} \right) \right] (x) \\ &= H(x + \frac{1}{2}) - H(x - \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (1.239)$$

qui coïncide avec $P(x)$, comme on s'en convaincra graphiquement. ■

Exercice 1.44 A l'aide de (1.227), calculez la transformée de Fourier de e^{ik_0x} .

Solution 1.44 (1.227) donne

$$\begin{aligned} \delta(x-a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k^{-1} \left[e^{-ika} \right] (x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk. \end{aligned} \quad (1.240)$$

A présent, répétons cette formule en effectuant les changements $(x, k, a) \leftarrow (k_0, x, k)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \delta(k_0 - k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0x} e^{-ikx} dx \\ &= \mathcal{F}_x \left[e^{ik_0x} \right] (k). \end{aligned} \quad (1.241)$$

Ce résultat est capital, et donne lieu au théorème suivant :

Théorème 1.25 *Décomposition spectrale.* La transformée de Fourier d'une fonction permet de repérer ses tendances oscillantes.

Preuve. Pour une fonction harmonique de nombre d'onde k_0 , c'est-à-dire e^{ik_0x} , (1.241) montre que la transformée est une distribution de Dirac, un pic infini en $k = k_0$, nul ailleurs. Par linéarité, la transformée de Fourier d'une somme discrète d'oscillations présente autant de pics de Diracs que de modes d'oscillation, chacun pointant un nombre d'onde. Pour une fonction arbitraire, la transformée de Fourier est continue et peut s'interpréter comme le spectre de la fonction de départ, un peu comme le spectre d'un signal lumineux ou sonore. La Figure 1.9 montre quelques exemples. ■

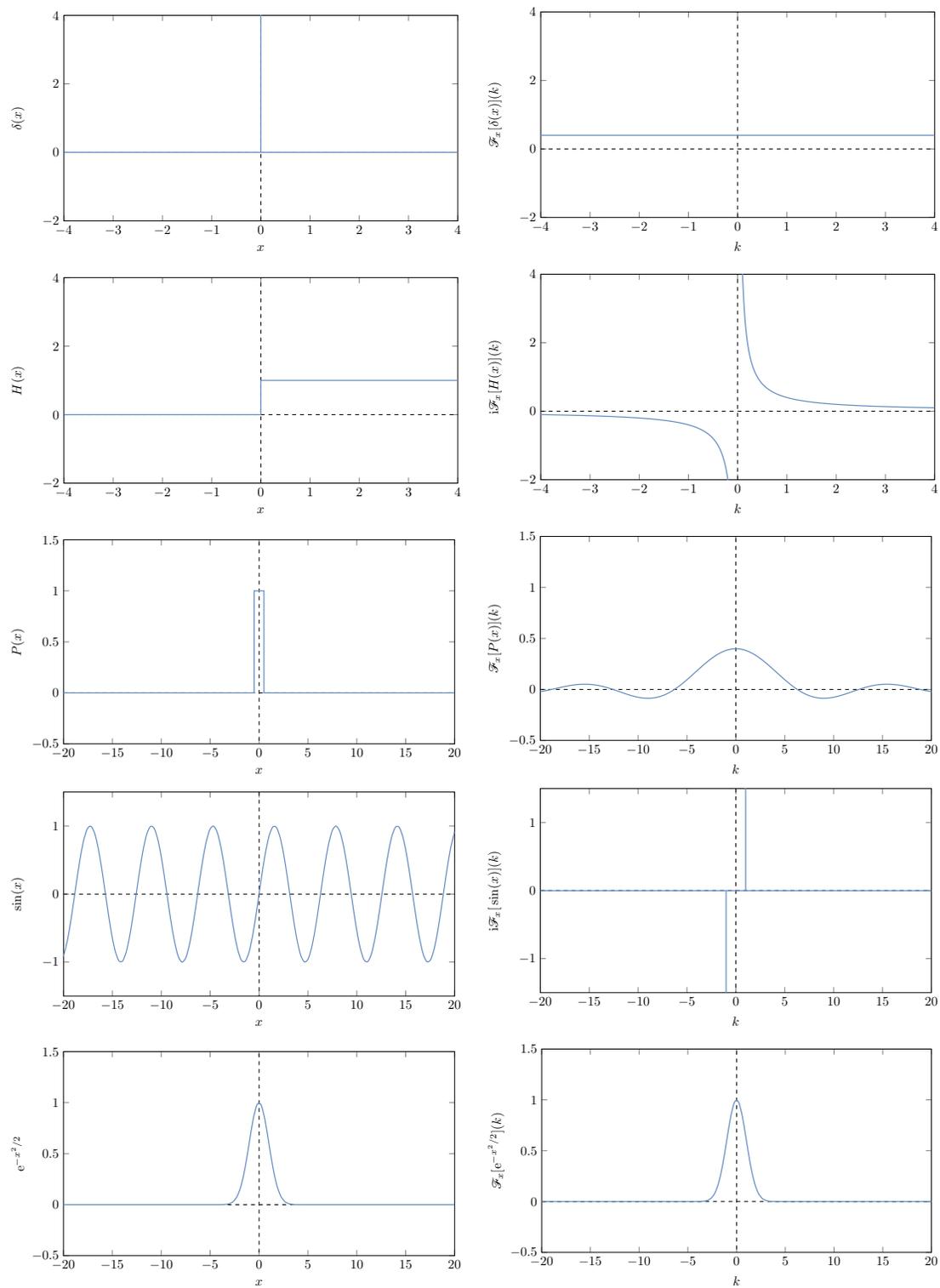


FIGURE 1.9 – Les graphes de droite représentent les transformées de Fourier (ou leur produit par i) des fonctions de gauche. De haut en bas : distributions de Dirac, fonction de Heaviside, fonction porte, sinus, gaussienne. Attention : l'échelle peut changer d'une ligne à l'autre.

Il existe bien d'autres propriétés de la transformée de Fourier, qu'il serait trop long de lister ici. On trouvera sur Internet de nombreuses tables donnant les transformées de fonctions usuelles. On prendra garde qu'il y a plusieurs conventions de notations (au moins trois sont standard ; nous avons retenu ici celle qui nous semble la plus commode). Notons enfin qu'on peut appliquer la transformée de Fourier en plusieurs dimensions spatiales ou par rapport au temps.

1.4.2 Applications

La transformée de Fourier entretient des rapports étroits avec les équations différentielles linéaires. Voyons ce qu'il en est des EDO linéaires, en reprenant le problème de l'exercice (1.41) : $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Commençons par appliquer la transformée de Fourier à l'EDO :

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{d^2 y}{dx^2}(x) \right](k) + \mathcal{F}_x[y(x)](k) = 0. \quad (1.242)$$

En notant $Y(k) \doteq \mathcal{F}_x[y(x)](k)$ et en utilisant (1.231) :

$$(ik)^2 Y(k) + Y(k) = 0, \quad (1.243)$$

ou encore

$$(1 - k^2)Y(k) = 0. \quad (1.244)$$

Par conséquent, $Y(k)$ est non nulle si et seulement si $k = \pm 1$; c'est donc une combinaison linéaire de $\delta(x-1)$ et $\delta(x+1)$:

$$Y(k) = C^- \delta(k-1) + C^+ \delta(k+1). \quad (1.245)$$

En prenant la transformée inverse de ce résultat, nous trouvons grâce à (1.241) une combinaison linéaire de e^{ix} et e^{-ix} , donc une combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$ comme plus haut. Les conditions limites font le reste.

Ainsi, il est possible de résoudre des EDO par la transformée de Fourier, parce qu'elle transforme les dérivées en multiplications. Notons que cela n'est pas toujours aussi simple. En particulier, pour résoudre le problème (1.39) une difficulté surviendrait car la solution n'a pas de transformée de Fourier bien définie. Qui plus est, cette méthode n'est pas toujours plus aisée (ni plus rapide) que la méthode directe proposée au paragraphe précédent, surtout lorsqu'on s'atèle à la résolution d'équations non homogènes. Nous verrons plus loin que la transformée de Fourier se prête particulièrement bien à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.

Exercice 1.45 Résolvez par deux méthodes l'EDO générale d'un pendule linéaire amorti libre : $y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0$ (physiquement, γ est un coefficient de frottement et ω une fréquence propre ; on suppose $\omega \neq 0$).

Solution 1.45 Par la méthode directe : le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$, avec pour racines

$$\lambda_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}. \quad (1.246)$$

Elles sont distinctes puisque $\omega \neq 0$, et le théorème 1.22 nous donne la solution générale :

$$y(x) = C_+ e^{\lambda_+ x} + C_- e^{\lambda_- x}. \quad (1.247)$$

Par la transformée de Fourier : en posant $Y(k) \doteq \mathcal{F}_x[y(x)](k)$, la transformée de l'EDO s'écrit

$$(-k^2 + 2i\gamma k + \omega^2)Y(k) = 0. \quad (1.248)$$

Donc $Y(k)$ est non nul si et seulement si $k^2 - 2i\gamma k - \omega^2 = 0$, soit :

$$k = i \left(2\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} \right) \doteq k_{1,2}. \quad (1.249)$$

Autrement dit :

$$Y(k) = C_1 \delta(k - k_1) + C_2 \delta(k - k_2), \quad (1.250)$$

qui redonne la solution annoncée si l'on applique la transformée de Fourier inverse, par un calcul analogue à (1.227). ■

Terminons ce paragraphe en observant que les EDO peuvent rendre à la transformée de Fourier la monnaie de leur pièce, c'est-à-dire que certaines transformées se calculent préférentiellement en écrivant une EDO appropriée. L'exemple emblématique est celui d'une fonction gaussienne :

Théorème 1.26 *La transformée d'une gaussienne en est une autre.*

$$\mathcal{F}_x \left[e^{-x^2/2} \right] (k) = e^{-k^2/2}. \quad (1.251)$$

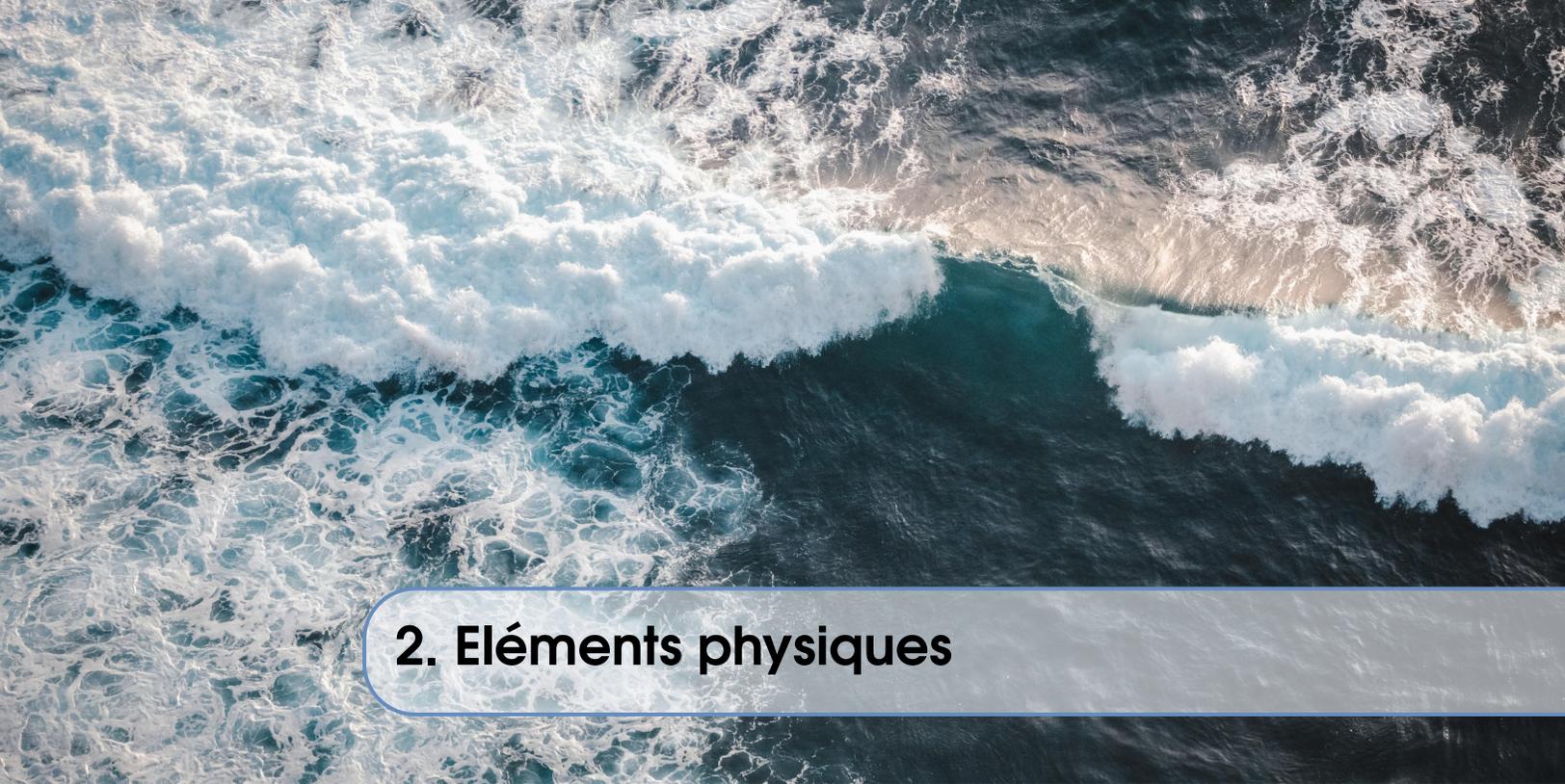
Preuve. Notons $\phi(x) \doteq e^{-x^2/2}$. On commence par observer qu'elle vérifie l'EDO $\phi' + x\phi = 0$ (vérifiez-le !). A l'aide de cette EDO, de (1.230) et de (1.231), dérivons sa transformée :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \mathcal{F}_x[\phi(x)](k) &= -i \mathcal{F}_x[x\phi(x)](k) \\ &= i \mathcal{F}_x \left[\frac{d\phi}{dx}(x) \right] (k) \\ &= -k \mathcal{F}_x[\phi(x)](k). \end{aligned}$$

Par conséquent, en notant $\Phi(k) \doteq \mathcal{F}_x[\phi(x)](k)$, cette fonction satisfait l'EDO $\Phi' + k\Phi = 0$, où le prime désigne ici la dérivée par rapport à k . Il s'agit de la même que satisfait ϕ . Comme c'est une EDO du premier ordre homogène, nous savons par le théorème 1.21 que les solutions sont toutes proportionnelles). Pour en déduire le résultat annoncé, c'est-à-dire $\Phi = \phi$, il reste donc à montrer que ces deux fonctions coïncident en un point, par exemple que $\Phi(0) = \phi(0) = 1$. C'est le cas, car

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \mathcal{F}_x \left[e^{-x^2/2} \right] (0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= 1, \end{aligned} \quad (1.252)$$

grâce à (1.174). ■



2. Éléments physiques

2.1 Mécanique des milieux continus

2.1.1 Tenseur des contraintes

On fait de la mécanique dès lors qu'on étudie le mouvement d'un système en fonction des causes qui le déterminent, c'est-à-dire lorsqu'on envisage les efforts existant au sein du système étudié. Si l'on considère un morceau de milieu continu dans son ensemble, pour lui appliquer la loi fondamentale de la mécanique (masse \times accélération = somme des forces extérieures) il est nécessaire d'établir le bilan des efforts extérieurs qu'il reçoit. Celles-ci sont de deux espèces : les champs extérieurs et les forces de contact avec le milieu contigu :

- Les champs extérieurs sont dus à l'action de champs de force (gravitationnels, électromagnétiques, essentiellement) déterminés par des systèmes distants, de sorte qu'il est légitime de parler d'action à distance bien que cela ne soit pas le cas. Pour le cours de mécanique des fluides, on se contentera du champ de gravité terrestre, représenté par son accélération g . Quant à la gravité propre d'un milieu, c'est-à-dire les forces gravitationnelles que les différentes parcelles de ce milieu exercent les unes sur les autres, elles sont négligeables dans la plupart des cas et seront traitées ainsi dans mon cours.
- Les forces de contact avec le milieu contigu sont fortement dépendantes de la nature du matériau, notamment de sa structure moléculaire (solide élastique, liquide, gaz, plasma, etc.). En toute généralité on peut représenter ces efforts par un champ de vecteurs appelés vecteurs contraintes \underline{T} . Si nous considérons un point r d'un milieu à l'instant t , ainsi qu'un petit plan imaginaire contenant ce point et orienté par le vecteur normal unitaire \underline{n} (Figure 2.1), séparant localement et virtuellement le milieu en deux côtés, alors la force exercée par l'un des deux côtés sur l'autre, par unité de masse, est noté $\underline{T}(x, t, \underline{n})$.

Par convention, $\underline{T}(x, t, \underline{n})$ est exercée *par* le côté vers lequel pointe \underline{n} sur l'autre côté, de sorte que le principe d'action-réaction donne $-\underline{T}(x, t, -\underline{n})$ pour la force exercée *sur* le côté vers lequel pointe \underline{n} par l'autre.

Envisageons à présent un tétraèdre rectangle de matière porté par trois axes orthogonaux choisis comme axes d'un repère (Figure 2.1), et de côtés ε . La loi fondamentale de la dynamique, appliquée

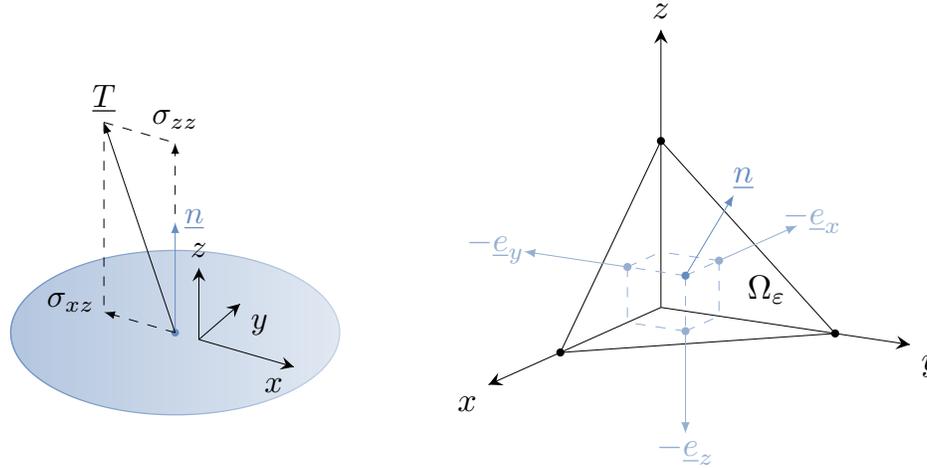


FIGURE 2.1 – Illustration de la définition du vecteur \underline{T} (à gauche) et du *lemme du tétraèdre* de Cauchy (à droite).

à cet élément de matière Ω_ε , s'écrit alors

$$\text{masse}(\varepsilon) \times \text{accélération} = \int_{\Omega} \rho \underline{g} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n}) dS. \quad (2.1)$$

Conformément à ce qui précède, nous avons écrit que les forces extérieures sont la somme de deux contributions, celles des champs extérieurs (intégrale de volume) et des forces de contact (intégrale de bord). Notre objet est désormais de faire tendre ε vers zéro ; ce faisant la masse du tétraèdre et l'intégrale de la force de gravité diminuent comme ε^3 , car elles sont proportionnelles au volume de matière. En revanche, la dernière intégrale diminue comme ε^2 car elle varie comme la surface de l'élément de matière. On en déduit que cette intégrale de bord doit être nulle¹ :

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \underline{T}(\underline{n}) dS = 0. \quad (2.2)$$

Notez que nous avons omis la dépendance explicite par rapport à \underline{x} et t pour alléger ce qui suit. Quant à \underline{x} , on doit désormais considérer qu'il ne varie plus, car la petitesse du tétraèdre nous autorise à assimiler toutes les valeurs de \underline{x} à la position du centre de masse du tétraèdre. De même, si nous décomposons l'intégrale en quatre contributions selon les faces, sur chacune d'elles nous considérerons que le vecteur contrainte est constant, ce qui donne

$$S \underline{T}(\underline{n}) + S_i \underline{T}(-\underline{e}_i) = 0, \quad (2.3)$$

avec la convention d'Einstein. Ce bilan revient à écrire que le système est ici à l'équilibre mécanique. Les trois faces portées par les plans (x, y) , (y, z) et (z, x) ont en effet pour vecteurs normaux extérieurs les opposés des vecteurs de la base \underline{e}_i et leurs aires sont notées S_i , tandis que la face dont les trois

1. Pour être plus précis, elle doit être un infiniment petit d'ordre ε^3 , ce qui implique que la principale contribution, en ε^2 , doit être nulle.

sommets sont répartis sur les axes a pour vecteur normal extérieur \underline{n} et une aire notée S (Figure 2.1). Commençons par observer qu'en vertu du principe d'action-réaction nous obtenons

$$\underline{T}(\underline{n}) = \frac{S_i}{S} \underline{T}(\underline{e}_i), \quad (2.4)$$

tandis que l'équation (1.198) nous donne

$$\underline{n} = \frac{S_i}{S} \underline{e}_i. \quad (2.5)$$

Nous introduisons maintenant le tenseur suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} \doteq \underline{T}(\underline{e}_j) \otimes \underline{e}_j, \quad (2.6)$$

avec, là encore, la convention d'Einstein.

Exercice 2.1 Ecrivez (2.6) sous forme développée.

Solution 2.1 Sachant que la k -ième coordonnée de \underline{e}_i vaut δ_{ik} , les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= T_j(\underline{e}_i) \delta_{ik} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \\ &= T_j(\underline{e}_k) \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k, \end{aligned} \quad (2.7)$$

soit, sous forme développée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} T_x(\underline{e}_x) & T_x(\underline{e}_y) & T_x(\underline{e}_z) \\ T_y(\underline{e}_x) & T_y(\underline{e}_y) & T_y(\underline{e}_z) \\ T_z(\underline{e}_x) & T_z(\underline{e}_y) & T_z(\underline{e}_z) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

comme si l'on concaténait les trois vecteurs $\underline{T}(\underline{e}_i)$ écrits en colonnes. ■

R On est désormais en dimension $n = 3$, voire $n = 2$ si l'écoulement envisagé est invariant par translation selon une direction et s'exerce dans le plan qui lui est perpendiculaire. On utilise souvent les indices x, y, z au lieu de $i = 1, 2, 3$.

Multiplions (2.6) par \underline{n} , en utilisant successivement (2.5), (1.116) et (2.4) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} &= (\underline{n} \cdot \underline{e}_i) \underline{T}(\underline{e}_i) \\ &= \frac{S_j}{S} (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_i) \underline{T}(\underline{e}_i) \\ &= \frac{S_j}{S} \delta_{ij} \underline{T}(\underline{e}_i) \\ &= \frac{S_i}{S} \underline{T}(\underline{e}_i) \\ &= \underline{T}(\underline{n}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ce résultat, valable en tout point et à tout instant, mérite d'être promu au rang de théorème :

Théorème 2.1 *Théorème de Cauchy.* En tout point \underline{x} d'un milieu continu et à chaque instant t , le vecteur contrainte associé à un vecteur normal arbitraire \underline{n} est une fonction linéaire de ce dernier, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ tel que pour tout \underline{n} :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}. \quad (2.10)$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ est appelé champ du tenseur des contraintes de Cauchy.

D'après la définition donnée, on constate que chaque composante σ_{ij} représente la force (par unité de surface) selon l'axe i exercée sur un petit plan imaginaire dirigé par l'axe j . Ainsi, sur le graphe de gauche de la Figure 2.1, σ_{zz} est une compression ou une traction tandis que σ_{xz} est un frottement selon x (on a placé ici le repère local de telle sorte que le frottement σ_{yz} soit nul). Il en résulte ce qui suit :

Définition 2.1 *Compression/traction et cisaillement.* En un point et à un instant donnés, les valeurs diagonales de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ représentent des forces de compression ou de traction, selon leur signe (la convention choisie affectant un $+$ aux tractions, un $-$ aux pressions^a). Quant aux composantes extradiagonales, elles représentent des forces de frottement appelées *cisaillements*.

a. La convention inverse est adoptée en mécanique des sols.

Notez que la démonstration donnée de l'existence de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'apparente à celle que nous avons proposée pour le théorème de la divergence (pour lequel un tétraèdre, au lieu d'un triangle, permettrait de traiter le cas tridimensionnel). Cela tient à ce que le théorème de la divergence est une forme généralisée du principe d'action-réaction, ou plutôt de la complémentarité des flux. Pour comprendre cela, donnons une comparaison avec un cas plus simple : celui d'un bilan de chaleur. Si nous écrivons qu'à l'équilibre thermique la somme des quantités de chaleur Q_i passant à travers chaque face du tétraèdre est nulle, nous avons :

$$Q(\underline{n}) = \frac{S_i}{S} Q(\underline{e}_i), \quad (2.11)$$

qui, avec (2.5), aboutit à

$$Q(\underline{n}) = -\underline{q} \cdot \underline{n}, \quad (2.12)$$

où $\underline{q} \doteq -Q(\underline{e}_i)\underline{e}_i$ est appelé vecteur flux de chaleur. Les formules (2.10) et (2.12) conduisent, lorsqu'elles sont intégrées sur un domaine macroscopique, aux égalités suivantes :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{T} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega, \quad (2.13)$$

$$\int_{\partial\Omega} Q dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{q} d\Omega. \quad (2.14)$$

La parenté de ces deux formules est évidente ; elle à tient à ce que, dans les deux cas, les contributions internes (forces ou quantité de chaleur transportée) s'annulent mutuellement par antisymétrie (le principe d'action-réaction dans le cas des forces), si bien que les intégrales volumiques se ramènent à des intégrales de bord. Cela revient à dire qu'un terme placé sous une divergence n'agit que par un flux à travers le bord du domaine concerné. Cette importante remarque sera exploitée au paragraphe suivant.

2.1.2 Lois de bilans

Un bilan est une équation donnant l'évolution temporelle d'une grandeur intégrée sur un domaine, par exemple la variation temporelle de la concentration totale d'oxygène dans un lac. Les principales lois de bilans utilisées en mécanique des fluides sont les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Pour la masse, par exemple, nous pouvons écrire que dans un domaine Ω fixe (donc de volume fixe), la masse d'un fluide considéré comme incompressible demeure constante. Il en résulte que tout ce qui entre dans ce volume doit être compensé par ce qui en sort. Or, le flux de matière passant par unité de temps à travers un petit élément de surface dS dirigé par le vecteur sortant \underline{n} est $-\rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS$, ρ et $\underline{u}(\underline{x}, t)$ étant la masse volumique et la vitesse du fluide au point envisagé. Le signe choisi aboutit à un flux positif si la vitesse est opposé à \underline{n} , c'est-à-dire si le fluide entre localement dans le domaine Ω , donc l'intégrale de ce flux donne la variation temporelle de la masse contenue dans le domaine :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS. \quad (2.15)$$

Mais comme la masse contenue dans Ω est constante, sa dérivée est nulle. En utilisant le théorème de la divergence pour transformer le membre de droite, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \underline{u}) dS = 0. \quad (2.16)$$

Puisque cette relation est vraie pour tout volume imaginaire Ω , l'intégrande doit être nulle partout : $\operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0$. D'autre part, si le fluide est incompressible sa masse volumique est constante. En utilisant (1.151) avec $A = \rho$ et $\underline{B} = \underline{u}(\underline{x}, t)$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Equation de continuité d'un écoulement incompressible.* Pour un écoulement de fluide (ou un mouvement de milieu continu) sans modification de la masse volumique (donc incompressible et sans concentration variable de toute substance pesante), le champ de vitesse doit obéir, en tout point et à chaque instant, à l'équation de continuité suivante :

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0. \quad (2.17)$$

Nous voyons que quelques raisonnements simples, assortis des relations mathématiques trouvées au Chapitre 1, permettent d'établir des lois qui contraignent les grandeurs d'intérêt, et qui finalement serviront d'équations régissant l'évolution temporelles de ces grandeurs. Voyons brièvement ce qu'il en est de la quantité de mouvement. En écrivant (2.18) pour un domaine Ω arbitraire et en utilisant (2.13), on trouve

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\underline{u}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{g}}) d\Omega. \quad (2.18)$$

Là encore, comme c'est vrai pour tout Ω on peut retirer les intégrales, ce qui donne une relation valable en tout point et à chaque instant :

Théorème 2.3 *Equation de quantité de mouvement de Cauchy.* Pour tout milieu continu, la

variation du champ de vitesse, en tout point et à chaque instant, est donnée par

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{g}}. \quad (2.19)$$

A ce stade, il est important d'observer que dans la démonstration qui précède $\underline{\underline{\sigma}}$ se présente sous une divergence, comme le flux de chaleur dans (2.14). Il s'agit donc d'un flux de quantité de mouvement. Il faut préciser que la convention de signe choisie fait que c'est plutôt $-\underline{\underline{\sigma}}$ qui joue le rôle de flux. Retenons ceci :

Définition 2.2 *Notion de flux.* Etant donné un champ de tenseurs, lorsqu'on écrit l'équation donnant sa dérivée temporelle, la grandeur apparaissant sous une divergence représente le flux du champ, et se présente comme un tenseur d'ordre immédiatement supérieur : 1) le flux de chaleur (associé à la température, champ scalaire) est le champ vectoriel \underline{q} ; 2) le flux de quantité de mouvement (champ vectoriel) est le champ de matrices $-\underline{\underline{\sigma}}$. Le flux d'un champ $\underline{\underline{A}}_{(p)}$ ne fait que redistribuer ce dernier dans l'espace au cours du temps, sans contribuer à l'évolution l'intégrale de $\underline{\underline{A}}_{(p)}$ sur un domaine isolé. Si le domaine est ouvert, l'évolution de cette intégrale est due uniquement à l'intégrale de $\underline{\underline{A}}_{(p)} \cdot \underline{n}$ sur son bord.

Un flux constitue généralement une inconnue supplémentaire ; il est donc nécessaire de proposer une formule exprimant le flux d'une grandeur d'intérêt $\underline{\underline{A}}_{(p)}$ en fonction de $\underline{\underline{A}}_{(p)}$, afin de fermer le système d'équations, c'est-à-dire de ramener le nombre d'inconnues au nombre d'équations. Une telle formule est appelée *relation constitutive*, et ne peut être construite rigoureusement sans faire appel à des considérations empiriques et/ou heuristiques. Dans le cas de $\underline{\underline{\sigma}}$, la relation constitutive est appelée *loi de comportement*, et caractérise un matériau par rapport aux autres, voire un matériau dans un certain régime (par exemple un fluide en régime turbulent).

Il en résulte que nous ne pouvons pas calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ sans une réflexion approfondie, que nous ferons en cours. Cependant, pour rester très général, un bilan de moment cinétique permettrait de montrer que pour presque² tous les matériaux ont un tenseur des contraintes symétrique, c'est-à-dire égal à son transposé :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T, \text{ soit } \forall i, j, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.20)$$

Malgré cela, le système des équations (2.17) et (2.19) contient encore trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations, d'où la nécessité d'une loi de comportement.

R Etant symétrique et réel, le tenseur des contraintes (en un point de l'espace et à un instant donnés) est diagonalisable dans une base orthonormée (cf. première partie). Ses valeurs propres sont appelées *contraintes principales*.

Exercice 2.2 Considérez le système (2.17) et (2.19). Comparez le nombre d'équations (scalaires) au nombre de de champs inconnus.

Solution 2.2 On compte 4 équations en dimensions 3, puisque l'équation (2.19) est vectorielle. La masse volumique étant constante (au vu de l'équation de continuité), nous avons 3 inconnues de vitesse et 6 inconnues de contraintes, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique, soit 9 inconnues pour 4 équations. ■

2. Avec pour exception les matériaux piézoélectriques.

2.2 Mécanique des fluides

2.2.1 Equations de Navier–Stokes

Les fluides, comme les autres milieux continus, obéissent à l'équation de quantité de mouvement de Cauchy (2.19). Nous montrerons en cours que la loi de comportement exprimant le tenseur des contraintes s'écrit, pour un fluide visqueux en régime incompressible :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u} + (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u})^T), \quad (2.21)$$

où μ est une constante propre au fluide à température donnée, et appelée viscosité moléculaire dynamique. Le terme $-p\underline{\underline{I}}$ est isotrope, c'est-à-dire qu'il est invariant par rotation ; il représente une force de pression (c'est d'ailleurs le nom du nouveau champ $p(x,t)$), à cause du signe négatif. Le terme proportionnel à μ est une matrice de cisaillement, c'est-à-dire de frottement.

Exercice 2.3 Ecrivez le tenseur des contraintes (2.21) sous forme développée.

Solution 2.3

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} & \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} & -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} & \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} & -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

et l'on peut constater qu'il est bien symétrique. ■

Exercice 2.4 Calculez la divergence de (2.21). Utilisez notamment (1.147) et (1.152).

Solution 2.4 Comme μ est constant, il sort de l'opérateur divergence. Par linéarité :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{div}} (p\underline{\underline{I}}) + \mu \underline{\text{div}} (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u}) + \mu \underline{\text{div}} ((\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u})^T). \quad (2.23)$$

Le premier de ces trois termes vaut $-\underline{\text{grad}} p$, en vertu de la formule (1.152). Le deuxième terme s'obtient grâce à la définition du laplacien (1.147) :

$$\underline{\text{div}} (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u}) = \Delta \underline{u}. \quad (2.24)$$

Le calcul du dernier terme réclame le retour aux définitions des opérateurs :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} ((\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{u})^T) &= \underline{\text{div}} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\text{div}} \underline{u}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous avons, à la fin, interverti les deux dérivées partielles, et comme $\underline{\text{div}} \underline{u} = 0$ (pour un écoulement incompressible) ce terme est finalement nul ; il reste :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}} p + \mu \Delta \underline{u}. \quad (2.26)$$

■

En injectant cela dans l'équation de Cauchy (2.19), on obtient l'équation de quantité de mouvement d'une fluide visqueux incompressible. Il faut observer que la dérivée temporelle du membre de gauche de (2.19) est une dérivée matérielle, c'est-à-dire en suivant le mouvement de la matière ; nous montrerons en cours qu'elle s'écrit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\underline{\text{grad}} \mathbf{u})\mathbf{u}, \quad (2.27)$$

Le terme non linéaire $(\underline{\text{grad}} \mathbf{u})\mathbf{u}$ étant appelé *inertie*. Il représente le fait qu'une parcelle de fluide se déplace en transportant une information sur sa propre vitesse. Si l'on joint à cela l'équation de continuité (2.17), on aboutit aux équations de Navier–Stokes :

Théorème 2.4 *Equations de Navier–Stokes.* Un fluide visqueux, en régime incompressible, obéit aux équations suivantes :

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\underline{\text{grad}} \mathbf{u})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (2.29)$$

$\nu \doteq \frac{\mu}{\rho}$ étant la viscosité moléculaire cinématique du fluide à la température envisagée. Sous forme développée, en notant $(u, v, w) = (u_x, u_y, u_z)$ et en orientant l'axe z avec la verticale ascendante, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g. \quad (2.33)$$

Ces équations forment un système d'EDP, et sont associées à des conditions initiales dépendant du cas envisagé, et de conditions aux limites. Pour simplifier (nous approfondirons en cours) :

- la pression est nulle sur une surface libre. En réalité elle est (généralement) constante, mais la pression est définie à une constante près puisqu'elle intervient sous l'opérateur gradient),
- la vitesse sur une paroi est égale à la vitesse de la paroi (par imperméabilité et adhérence d'un fluide visqueux). En particulier, elle est nulle sur une paroi immobile (dans un certain référentiel).

Exercice 2.5 Soit un écoulement entre deux plaques parallèles infinies, séparées d'une distance $2d$. On oublie la gravité. On suppose que la vitesse est constante au cours du temps et parallèle aux plaques. On suppose aussi qu'elle demeure dans un même plan noté (x, y) , l'axe des y étant perpendiculaire aux plaques (la composante $w = u_z$ est donc nulle) et que rien ne dépend de z ; on peut donc travailler dans le plan (x, y) . Ecrivez les équations de Navier–Stokes développées

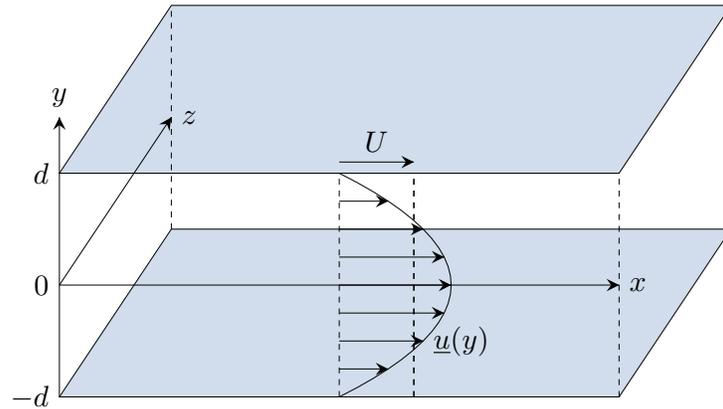


FIGURE 2.2 – Écoulement de Poiseuille plan laminaire.

sous la forme la plus simple possible compte tenu des hypothèses. Montrez que la pression varie linéairement en fonction de x , et calculez la distribution spatiale de vitesse.

Solution 2.5 Dans l'équation (2.30) les deux derniers termes sont nuls car $v = w = 0$ par hypothèse. Ce qu'il en reste montre que u ne dépend pas de x , et ne peut donc dépendre que de y d'après les hypothèses. Avec ce résultat, les trois autres équations donnent :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.34)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.35)$$

La seconde de ces équations montre que p ne dépend pas de y , donc seulement de x selon les hypothèses. La première équation peut alors se récrire ainsi, les dérivées partielles devenant des dérivées ordinaires puisque $u(y)$ et $p(x)$ sont deux fonctions d'une seule variable chacune :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (2.36)$$

Chaque membre de cette équation est fonction d'une variable différente de celle de l'autre membre, donc ils doivent tous deux être constants : il suffit pour s'en convaincre de dériver (2.36) par rapport à x , par exemple. On en déduit que $\frac{dp}{dx} = -\alpha$, donc que la pression varie linéairement selon x : $p(x) = p_0 - \alpha x$. Puis on déduit que $\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\alpha$, donc que la vitesse obéit à un profil parabolique en y , qui doit s'annuler aux deux parois. Or, à une constante multiplicative près, la seule parabole s'annulant en $y = \pm d$ (on place l'origine des y au milieu des plaques) est $d^2 - y^2$. On trouve finalement :

$$u(y) = \frac{\alpha}{2\mu} (d^2 - y^2). \quad (2.37)$$

Il s'agit du profil de vitesse dit *de Poiseuille plan laminaire*. ■

Si l'on revient à la loi de comportement (2.21), l'équilibre (2.36) peut encore s'écrire ainsi :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Il s'agit d'un équilibre des forces, ce qui est normal puisqu'on se trouve en régime permanent. Le gradient de pression selon x est donc en équilibre avec la contrainte de cisaillement. L'interprétation physique de cet équilibre est simple : le gradient de pression est le terme moteur de l'écoulement, le cisaillement représentant un terme frein, qui compense la force motrice pour permettre un régime permanent. Que l'écoulement soit dû au gradient de pression apparaît dans la formule finale (2.37), l'écoulement se dirigeant vers le minimum de pression. Rappelons en effet que le gradient est un champ de vecteurs dirigés vers les maxima locaux de p ; ici sa composante selon x , $\frac{dp}{dx} = -\alpha$, est positive si la pression décroît avec x . En d'autres termes, si l'on pousse depuis la gauche, le fluide part vers la droite...

Exercice 2.6 Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan laminaire, calculez le tenseur des contraintes ainsi que sa divergence.

Solution 2.6 En partant de (2.22) et en injectant les distributions de pression et de vitesse trouvées plus haut, la seule composante non nulle du gradient de vitesse est $\frac{du}{dy} = -\frac{\alpha}{\mu}y$ (on travaille toujours dans le plan (x, y)) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p_0 + \alpha x & -\alpha y \\ -\alpha y & -p_0 + \alpha x \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

On a ensuite :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}. \quad (2.40)$$

D'après l'équation de Cauchy, cela confirme que le système est à l'équilibre. Cela tient aux hypothèses, notamment d'écoulement permanent et de champ de vitesse parallèle aux plaques (écoulement laminaire), ce qui fait disparaître entièrement le membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement. ■

R Une telle situation est très rare, et nous en dirons plus en cours sur la validité de l'hypothèse laminaire. La disparition du terme d'inertie rend les équations linéaires, et c'est ce qui les rend ici si faciles à résoudre analytiquement.

Le tenseur des contraintes permet de calculer la contrainte sur la paroi inférieure, par exemple. Comme il s'agit d'un vecteur, on ne garde ici que la contrainte de cisaillement, c'est-à-dire, d'après (2.10), $\sigma_{xy}n_y$, $n_y = -1$ étant la composante selon y du vecteur normal extérieur. L'usage est noter cette contrainte τ_p :

$$\tau_p = (\sigma_{xy}n_y)_{y=-d} = \alpha d. \quad (2.41)$$

On peut vérifier cela à partir de la loi de comportement et du profil de vitesse :

$$\tau_p = \left(\mu \frac{du}{dy} \right)_{y=-d} = \alpha d. \quad (2.42)$$

- R** Sur la paroi supérieure on trouve une contrainte avec le signe opposé, parce que dans ce cas $n_y = +1$. Les signes des contraintes sont le fruit de la convention choisie plus haut, c'est la valeur absolue qui compte pour un frottement.

Exercice 2.7 Dans le même cas, tracez le profil de vitesse et calculez sa moyenne U sur un profil transversal reliant les deux plaques, appelée *vitesse débitante*.

Solution 2.7 On a

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d u(y) dy & (2.43) \\
 &= \frac{\alpha}{4\mu d} \int_{-d}^d (d^2 - y^2) dy \\
 &= \frac{\alpha d^2}{4\mu} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi \\
 &= \frac{\alpha d^2}{4\mu} \left[\xi - \frac{1}{3} \xi^3 \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} \\
 &= \frac{\alpha d^2}{3\mu}.
 \end{aligned}$$

Le profil de vitesse de Poiseuille (2.37) se réécrit alors

$$u(y) = \frac{3}{2}U \left(1 - \left(\frac{y}{d} \right)^2 \right). \quad (2.44)$$

On voit que la vitesse maximale, qui survient en $y = 0$, vaut $\frac{3}{2}U$ (voir Figure 2.2). ■

Exercice 2.8 Retrouvez le profil de Poiseuille à partir de l'équation de quantité de mouvement de Cauchy sous forme tensorielle et de la loi de comportement d'un fluide visqueux (avec l'aide de l'équation de continuité). On posera $\underline{\underline{\tau}} \doteq \mu \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}} + \mu (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{u}})^T$ (tenseur des cisaillements). Montrez en particulier en particulier que

$$\tau_{xy} = \alpha y, \quad (2.45)$$

et calculez la contrainte de frottement aux parois.

Solution 2.8 Avec les hypothèses de l'écoulement de Poiseuille plan laminaire, l'équation de Cauchy devient, comme on l'a vu, $\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}}$, soit avec la loi de comportement :

$$\underline{\underline{0}} = -\underline{\underline{\text{grad}}} p + \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\tau}}, \quad (2.46)$$

c'est-à-dire, sous forme développée :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.47)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}. \quad (2.48)$$

On tient alors le même raisonnement que plus haut : l'équation de continuité nous dit que la vitesse ne dépend que de y , donc ses dérivées aussi, donc $\underline{\underline{\tau}}$ également. De plus, la seule composante non

nulle du gradient de vitesse étant $\frac{du}{dy}$, on a $\tau_{yy} = 0$. Il reste :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.49)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.50)$$

La seconde équation est déjà connue et dit que $p = p(x)$, et la première permet d'en déduire que chaque membre est constant, donc en intégrant par rapport à y :

$$\tau_{xy} = \alpha y + \tau_0, \quad (2.51)$$

où τ_0 est une constante. En $y = \pm d$, on obtient $\tau_{xy} = \tau_0 \pm \alpha d$. Or la contrainte de frottement τ_p exercée sur le fluide par une paroi vaut $\tau_{xy} n_y$, où $n_y = \pm 1$ est la composante verticale du vecteur normal à la paroi. On en déduit $\tau_p = \pm \tau_0 + \alpha d$, qui impose τ_0 et $\alpha = \frac{\tau_p}{d}$, donc la contrainte de cisaillement est répartie linéairement entre les deux plaques (Figure 2.2) :

$$\tau_{xy}(y) = \tau_p \frac{y}{d}. \quad (2.52)$$

En injectant dans ce qui précède la définition de τ_{xy} , on retrouve bien entendu le profil de vitesse parabolique. ■

2.2.2 Deux exemples de solutions analytiques

Nous proposons ici, sous forme d'exercices, deux solutions des équations de Navier–Stokes utilisant les notions abordées au paragraphe du Chapitre 1 consacré aux équations différentielles, et éclairant le rôle des forces visqueuses. Ces écoulements sont plans comme celui de Poiseuille ; les figures sont donc dessinées en deux dimensions.

Exercice 2.9 On travaille dans le plan (x, y) et on oublie la gravité. On considère le champ de vecteurs suivant :

$$\underline{u}(x, y, t) = U(t) \begin{pmatrix} -\cos(Kx) \sin(Ky) \\ \sin(Kx) \cos(Ky) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

où K est un nombre d'onde arbitraire et U une fonction inconnue. On se donne aussi un champ de pression :

$$p(x, y, t) = P(t)(\cos(2Kx) + \cos(2Ky)). \quad (2.54)$$

Trouvez $U(t)$ et $P(t)$ pour que ces champs obéissent aux équations de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible (tourbillons de Taylor–Green, Figure 2.3).

Solution 2.9 On calcule d'abord la divergence du champ de vitesse :

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = KU(t) (\sin(Kx) \sin(Ky) - \sin(Kx) \sin(Ky)) = 0. \quad (2.55)$$

L'équation de continuité est donc satisfaite. La dérivée partielle en temps de \underline{u} vaut

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = U'(t) \begin{pmatrix} -\cos(Kx) \sin(Ky) \\ \sin(Kx) \cos(Ky) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

où U' est la dérivée de U . Calculons à présent $\underline{\text{grad}} \underline{u}$:

$$\underline{\text{grad}} \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = KU(t) \begin{pmatrix} \sin(Kx) \sin(Ky) & -\cos(Kx) \cos(Ky) \\ \cos(Kx) \cos(Ky) & -\sin(Kx) \sin(Ky) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

et le terme d'inertie s'écrit donc

$$(\underline{\text{grad}} \underline{u}) \underline{u} = -\frac{1}{2} KU^2(t) \begin{pmatrix} \sin(2Kx) \\ \sin(2Ky) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Quant au gradient de pression, il vaut

$$\underline{\text{grad}} p = P(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} = -2KP(t) \begin{pmatrix} \sin(2Kx) \\ \sin(2Ky) \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Enfin, calculons $\Delta \underline{u}$:

$$\Delta \underline{u} = U(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} = -2K^2 U(t) \begin{pmatrix} -\cos(Kx) \sin(Ky) \\ \sin(Kx) \cos(Ky) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

On remarque que $\Delta \underline{u} = -2K^2 \underline{u}$. En injectant tout cela dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient

$$(U'(t) + 2\nu K^2 U(t)) \begin{pmatrix} -\cos(Kx) \sin(Ky) \\ \sin(Kx) \cos(Ky) \end{pmatrix} = \left(\frac{2K}{\rho} P(t) + \frac{1}{2} KU^2(t) \right) \begin{pmatrix} \sin(2Kx) \\ \sin(2Ky) \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Dans la composante selon x de cette équation vectorielle, le membre de gauche dépend de y mais pas celui de droite ; ils sont donc constants, ce qui n'est possible que si chacun des champs scalaires devant les vecteurs est nul :

$$U'(t) + 2\nu K^2 U(t) = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{2K}{\rho} P(t) + \frac{1}{2} KU^2(t) = 0. \quad (2.63)$$

L'équation (2.62) est une équation différentielle dont l'inconnue est la fonction U . Elle a pour solutions $U(t) = U_0 \exp(-2\nu K^2 t)$, la constante U_0 étant déterminée par les conditions initiales. L'équation (2.63) donne enfin $P(t) = \frac{1}{4} \rho U_0^2 \exp(-4\nu K^2 t)$. ■

R L'exercice qui précède montre que la viscosité ν a un effet ralentisseur ; nous l'avons déjà observé avec l'écoulement de Poiseuille plan. Il est également intéressant de remarquer qu'une pression est dimensionnellement homogène au produit d'une masse volumique et du carré d'une vitesse.

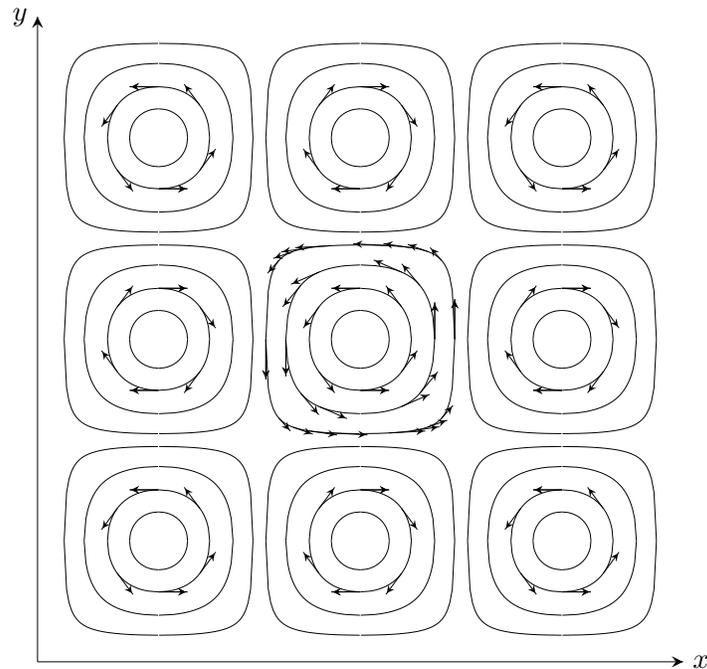


FIGURE 2.3 – Tourbillons de Taylor–Green (Exercice 2.9).

Exercice 2.10 On reste dans le plan (x, y) sans gravité. Le demi-plan $y \geq 0$ est rempli d'un fluide visqueux. Soudain, on met en mouvement à la vitesse $U\mathbf{e}_x$ constante la paroi confondue avec l'axe des x . Calculez le champ de vitesse, en supposant le champ de pression nul et en faisant l'hypothèse d'un champ de vitesse parallèle à la paroi. On aura avantage, à un certain moment, à faire le changement de variable $\xi \doteq \frac{x}{\sqrt{4\nu t}}$. Calculez la contrainte sur la paroi τ_p en fonction du temps.

Solution 2.10 Avec les hypothèses, seule la composante selon x de l'équation de quantité de mouvement est utile. Comme dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan, l'équation de continuité montre que u ne dépend que de y , donc l'inertie est nulle et l'on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.64)$$

En faisant le changement de variable conseillé, on trouve

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (2.65)$$

Il s'agit d'une EDO linéaire du premier ordre à coefficient non constant. Elle s'intègre une première fois en divisant par $\frac{\partial u}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = C \exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right), \quad (2.66)$$

où C est une constante. En cherchant sur Internet, on trouve que la primitive de la fonction qui à ξ associe $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2)$ est donnée par la fonction d'erreur « erf », ce qui donne

$$u(\xi) = a + b \operatorname{erf} \frac{\xi}{2}, \quad (2.67)$$

On impose $u(0) = U$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(y) = 0$ (loin de la paroi son effet ne se fait pas sentir), ce qui, sachant que $\operatorname{erf}(0) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(y) = 1$, donne $a = -b = U$:

$$u(y,t) = U \left(1 - \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right). \quad (2.68)$$

La contrainte en paroi se calcule à partir de la dérivée de la vitesse, que nous connaissons déjà :

$$\begin{aligned} \tau_p(t) &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= -\frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

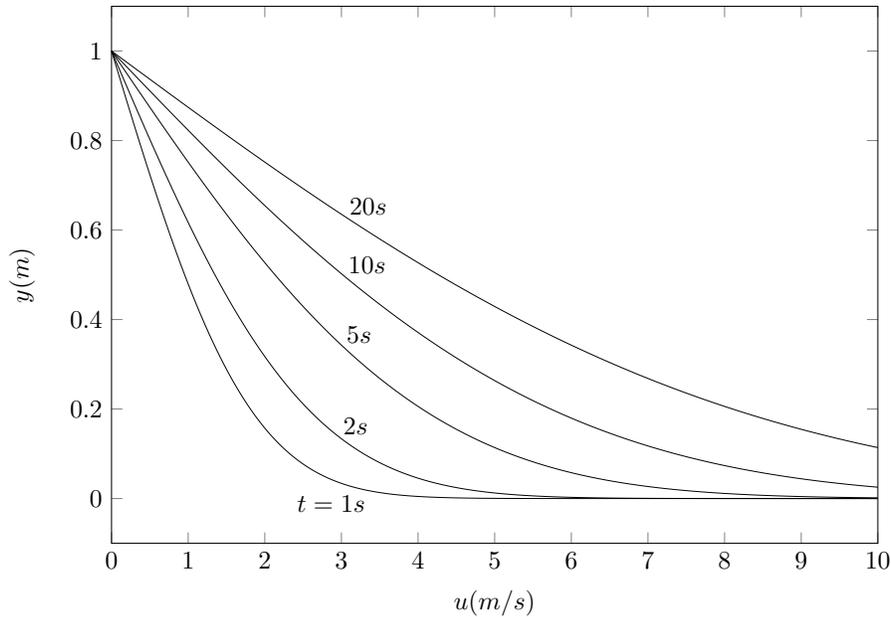


FIGURE 2.4 – Profil de vitesse longitudinal (2.68) en fonction de y à plusieurs instants t , avec $U = 1 \text{ m/s}$ et $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. L'axe $y = 0$ joue le rôle de paroi inférieure et se déplace vers la droite, entraînant le fluide par frottement visqueux.

- R** L'exercice qui précède montre que la viscosité ν a un effet d'homogénéisation : elle tend à rendre le champ de vitesse de plus en plus lisse. Il est également intéressant de remarquer qu'une viscosité est homogène au rapport du carré d'une distance et d'un temps, c'est-à-dire au produit d'une distance et d'une vitesse.

2.2.3 Propagation d'ondes de surface

Abordons pour finir un problème général illustré par un cas d'école, pour lequel nous devons accepter de faire quelques approximations ou quelques hypothèses simples. Pour commencer, supposons que nous soyons en présence d'un écoulement de champ de vitesse \underline{U} , et qu'une perturbation se développe sur cet écoulement initial, portant le champ de vitesse à $\underline{U} + \underline{u}$. Nous avons déjà observé que le terme d'inertie est non linéaire, et il peut alors se décomposer en quatre termes :

$$(\underline{\text{grad}} \underline{u})\underline{u} = (\underline{\text{grad}} \underline{U})\underline{U} + (\underline{\text{grad}} \underline{U})\underline{u} + (\underline{\text{grad}} \underline{u})\underline{U} + (\underline{\text{grad}} \underline{u})\underline{u}. \quad (2.70)$$

Il arrive souvent qu'aucun de ces termes ne soit négligeable devant les autres, comme c'est le cas pour l'étude des écoulements turbulents. Toutefois, dans certains cas le champ perturbateur \underline{u} est si petit qu'on peut négliger le terme quadratique, c'est-à-dire le dernier terme de (2.70). On parle alors de *linéarisation* des équations, l'avantage étant de se ramener à des équations linéaires pour lesquelles il existe des techniques simples de résolution. Par exemple, si l'écoulement initial \underline{U} est constant, dirigé selon x et ne variant que selon y , on obtient l'expression suivante, linéaire en (u, v, w) :

$$\left(U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) \underline{e}_x + U \frac{\partial v}{\partial x} \underline{e}_y + U \frac{\partial w}{\partial x} \underline{e}_z. \quad (2.71)$$

Dans le cas où le fluide est initialement au repos ($\underline{U} = \underline{0}$), le terme d'inertie disparaît purement et simplement. Envisageons ce cas, avec en plus un écoulement restreint au plan (x, z) pour simplifier notre propos. Nous allons également supposer que les phénomènes visqueux sont négligeables dans le cas qui nous intéressent (on précisera en cours les conditions sous lesquelles ces approximations sont valables). Les équations de Navier–Stokes pour l'écoulement perturbé \underline{u} se ramènent alors à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2.74)$$

R Quand on néglige le terme visqueux (on parle de modèle de fluide parfait), le fluide n'est plus censé adhérer aux parois, et la condition limite en paroi rend seulement compte de l'imperméabilité : $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$.

Il peut par exemple s'agir d'un fluide initialement au repos avec une surface libre horizontale, sur lequel de petites vagues vont se développer, comme en Figure 2.5. Dans ce cas, la vitesse verticale $w(x, z, t)$ est si faible qu'on peut négliger sa dérivée temporelle devant la gravité, et (2.74) se simplifie encore pour donner

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (2.75)$$

On peut intégrer cela, compte tenu de la condition de pression nulle en surface libre, pour écrire la distribution de pression :

$$p(z) = \rho g(\eta - z), \quad (2.76)$$

où η est la cote de la surface libre. C'est ce qu'on appelle la *pression hydrostatique* : elle croît linéairement à mesure qu'on descend sous la surface. Mais le passage des vagues modifie η qui est en réalité variable en espace et en temps, et l'on devrait plutôt écrire

$$p(x, z, t) = \rho g (\eta(x, y, t) - z). \quad (2.77)$$

R Comme nous l'avons dit, cette approximation n'est valable que pour des ondes de surface de telle nature qu'on puisse négliger w , c'est-à-dire pour des ondes longues (on précisera cette appellation en cours).

En dérivant (2.77), nous obtenons

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2.78)$$

A présent, cherchons à relier la cote de la surface libre au champ de vitesse. Il est évident que pour des ondes de petite amplitude comme c'est le cas ici (condition requise pour linéariser), la vitesse verticale en surface donne simplement la dérivée temporelle de η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w(x, h, t), \quad (2.79)$$

où la vitesse verticale est prise en $z = h$ et non en $z = \eta(x, t)$, par linéarisation. Nous avons supposé le fond de l'océan plat, h étant la hauteur d'eau au repos, l'origine des z étant située au fond. L'équation (2.79) est la *condition limite cinématique* en surface. Pour terminer la construction de notre modèle simplifié de propagation de vagues, nous intégrons (2.72) entre le fond de l'océan et la surface, en supposant que la vitesse u ne dépend que de (x, t) et en utilisant le fait que $w = 0$ au fond (condition d'imperméabilité). Cela donne, après linéarisation :

$$w(x, h, t) = -h \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.80)$$

En réunissant (2.78), (2.79) et (2.80) et les injectant dans la dérivée temporelle de (2.73), il vient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.81)$$

avec $c \doteq \sqrt{gh}$. Pour comprendre le sens de l'EDP (2.81), qui régit l'évolution spatio-temporelle du champ de vitesse associé aux vagues de grandes longueur et petite amplitude, il est commode de procéder momentanément au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} X(x, t) &\doteq x - ct, \\ Y(x, t) &\doteq x + ct. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Les dérivées partielles vont s'en trouver modifiées, selon la règle de la dérivation en chaîne (1.145) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} = c \left(-\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les dérivées secondes s'en déduisent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2 \left(-\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}.\end{aligned}\quad (2.84)$$

Avec ces notations, (2.81) prend la forme simple que voici :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (2.85)$$

Intégrons une première fois, par rapport à Y :

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \Phi(X), \quad (2.86)$$

la « constante » d'intégration Φ étant constante par rapport à Y , mais *a priori* variable en X . Intégrons à présent en X , en notant ϕ une primitive de Φ :

$$u(X, Y) = \phi(X) + \psi(Y), \quad (2.87)$$

et cette fois, la « constante » d'intégration ψ dépend de l'autre variable, Y . En revenant aux variables primitives x et t , ce qui précède donne

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct). \quad (2.88)$$

Il s'agit là de la solution la plus générale de (2.81). Pour en comprendre le sens, imaginons qu'un individu marche le long d'une rivière rectiligne (ou d'un canal) à la vitesse constante c . Si nous notons x son abscisse le long de l'axe du canal, nous voyons que $x = x_0 + ct$, donc $x - ct$ est constant pour cet observateur, par conséquent s'il pouvait mesurer $\phi(x - ct)$ il lui trouverait sans cesse la même valeur. De même, une observatrice déambulant le long du même canal à la même vitesse mais dans l'autre sens vérifierait $x + ct = cst$, et mesurerait donc sans cesse la même valeur de $\psi(x + ct)$. En pratique, quand on résout l'équation (2.81) les fonctions ϕ et ψ sont déterminées par les conditions initiales et/ou limites (voir l'exercice plus bas).

De ce raisonnement on déduit ce qui suit :

Théorème 2.5 *Propagation des ondes.* la solution (2.88) de l'équation (2.81) est la superposition de deux ondes se propageant à la vitesse $c \doteq \sqrt{gh}$ dans deux sens opposés dans la direction du canal. Quant aux « trajectoires » de ces ondes dans l'espace-temps, ce sont des droites d'équations respectives $x \pm ct = cst$; on les nomme les *courbes caractéristiques* du problème envisagé. L'équation (2.81) est une équation d'ondes appelée *équation de D'Alembert*. Un exemple de solution est donné en Figure 2.5.

On en déduit aussi :

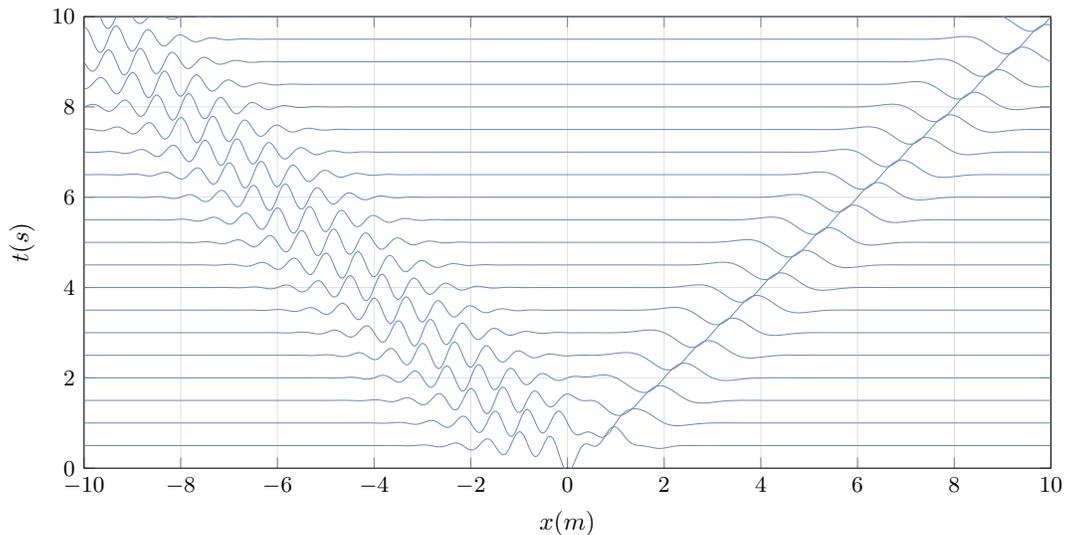


FIGURE 2.5 – Exemple de solution de (2.81), conformément à (2.88), avec $\phi(\xi) = 4 \sin(\pi\xi) \exp(-\xi^2)$ et $\psi(\xi) = 3 \sin(3\pi\xi) \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$, avec $c = 1$ m/s. Dans ce plan d'espace-temps (x, t) , on voit nettement les deux composantes de l'onde se propageant chacune dans une direction en partant de l'origine, et en gardant leurs formes respectives. Notez que l'amplitude est gonflée pour rendre les ondes visibles malgré leur petite amplitude ; il en résulte que la surface libre apparaît beaucoup plus cambrée qu'elle ne l'est en réalité, c'est-à-dire que la longueur d'onde apparaît réduite en comparaison de l'amplitude.

Définition 2.3 *Vitesse de propagation des ondes de surface de grande longueur et de petite amplitude.* Pour de telles ondes se propageant sur une profondeur au repos h , cette vitesse est $c \doteq \sqrt{gh}$.

Exercice 2.11 Calculez la vitesse de propagation d'un tsunami dans l'Océan Pacifique, où l'on estime la profondeur à $h = 4000$ m.

Solution 2.11 On trouve $c = \sqrt{9,81 \times 4000}$ m/s, soit 198 m/s ou 713 km/h. ■

R Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas de la vitesse de l'eau, mais de la célérité d'une onde (penser aux spectateurs faisant la ola dans les tribunes d'un stade : aucun d'entre eux ne court le long des gradins). Il faut aussi noter qu'il existe d'autres équations que celle de D'Alembert qui caractérisent la propagation d'ondes (nous en verrons en cours). Certaines sont non linéaires, certaines sont dispersives, c'est-à-dire que la vitesse des ondes dépend de leur longueur. Ce n'est pas le cas ici, ce qui explique que les ondes se propagent à vitesse constante et sans changer de forme. Une constante des équations d'ondes à surface libre est que la célérité c est une fonction croissante de la hauteur d'eau, avec d'importantes conséquences que nous verrons en cours.

Exercice 2.12 Montrez que la cote de la surface $\eta(x, t)$ obéit à la même équation que $u(x, t)$,

sous les mêmes hypothèses :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (2.89)$$

Solution 2.12 En dérivant (2.79) par rapport à t et en faisant appel à (2.80), (2.73) et (2.78), nous trouvons l'équation demandée. ■

Il est intéressant d'examiner la réponse de l'équation (2.81) à une onde plane monochromatique, c'est-à-dire $u(x, t) = \exp(iKx - i\omega t)$ (en fait sa partie réelle), K et ω étant un nombre d'onde et une pulsation arbitraires. La dérivée seconde temporelle est alors remplacée par $-\omega^2$ et la dérivée seconde en x par $-K^2$, ce qui donne :

$$\omega^2 - c^2 K^2 = 0, \quad (2.90)$$

ou encore

$$\omega = \pm cK. \quad (2.91)$$

Définition 2.4 *Relations de dispersion.* La formule (2.91) est ce qu'on appelle une relation de dispersion, c'est-à-dire une équation donnant la pulsation en fonction du nombre d'onde, c'est-à-dire la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en fonction de la longueur d'onde $\ell = \frac{2\pi}{K}$. On voit qu'avec l'équation de D'Alembert cette relation dit simplement que la célérité des ondes vaut simplement $\frac{\ell}{T} = \frac{\omega}{K} = \pm c$, en accord avec le raisonnement fait plus haut.

Bien entendu, on aurait pu obtenir le même résultat en substituant des ansatz identiques dans les équations de départ, sans construire l'équation d'ondes. On aurait pu encore appliquer aux équations une double transformée de Fourier en espace et en temps, avec le même résultat.

Exercice 2.13 Faites-le en partant de (2.72), (2.73) et (2.79), avec les Ansatz suivants :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U \exp(iKx - i\omega t), \\ w(x, t) &= WKz \exp(iKx - i\omega t), \\ p(x, t) &= -\rho g (N \exp(iKx - i\omega t) - z). \end{aligned} \quad (2.92)$$

où U , W et N sont des constantes. Ces formules sont justifiées par les hypothèses faites plus haut (vitesse horizontale indépendante de z , pression hydrostatique, équation de continuité).

Solution 2.13 Injectons les formes proposées dans (2.72), (2.73) et (2.79) :

$$iKU = -KW, \quad (2.93)$$

$$-i\omega U = -iKgN, \quad (2.94)$$

$$-i\omega N = WKh. \quad (2.95)$$

En éliminant N , les formules (2.94) et (2.95) donnent $-i\omega^2 U = WK^2 gh$. Avec (2.93), cela donne bien $(Kc)^2 = \omega^2$ puisque $c \doteq \sqrt{gh}$. ■

Exercice 2.14 Avec les hypothèses faites dans ce paragraphe, trouvez un lien entre u et η , puis résolvez (2.81) avec les conditions initiales suivantes : $\eta(x, 0) = \eta_0(x) \doteq H \exp(-\frac{1}{2}K^2x^2)$ (H est une amplitude de vague) et $u(x, 0) = 0$.

Solution 2.14 En combinant (2.73) et (2.78) nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2.96)$$

On sait par l'exercice 2.12 que η obéit à l'équation de D'Alembert ?? si l'on fait les mêmes hypothèses, notamment d'une onde longue et de faible amplitude, ce qui impose de petites valeurs de K et H (petites devant h , comme nous le verrons en cours). On a donc $\eta(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ avec deux fonctions inconnues ϕ et ψ . Pour $t = 0$, la condition initiale sur η nous donne :

$$\phi(x) + \psi(x) = \eta_0(x). \quad (2.97)$$

D'autre part, la relation trouvée entre u et η donne $\frac{\partial u}{\partial t} = -g\phi'(x - ct) - g\psi'(x + ct)$, d'où l'on déduit :

$$u(x, t) = \frac{g}{c} (\phi(x - ct) - \psi(x + ct)). \quad (2.98)$$

La condition initiale portant sur u donne alors

$$\phi(x) - \psi(x) = 0. \quad (2.99)$$

En combinant (2.97) et (2.99) on trouve $\phi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}\eta_0(x)$, puis

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} (\eta_0(x - ct) + \eta_0(x + ct)), \quad (2.100)$$

$$u(x, t) = \frac{g}{2c} (\eta_0(x - ct) - \eta_0(x + ct)). \quad (2.101)$$

Ce résultat est valable pour tout type de surface libre initiale $\eta_0(x)$ si la vitesse initiale est nulle. Avec la condition donnée dans l'énoncé :

$$\eta(x, t) = H \exp(-\frac{1}{2}K^2(x^2 + c^2t^2)) \cosh(K^2xct), \quad (2.102)$$

$$u(x, t) = \frac{gH}{c} \exp(-\frac{1}{2}K^2(x^2 + c^2t^2)) \sinh(K^2xct). \quad (2.103)$$

La surface libre est représentée sur la Figure 2.6. ■

Exercice 2.15 Que deviennent les équations d'onde (2.81) et (2.89) dans le cas où les vagues se propagent sur un état initial où la vitesse n'est pas nulle mais constante (horizontale), soit $U = cst \neq 0$? Indice : seules les équations (2.73) et (2.79) sont modifiées.

Solution 2.15 L'équation (2.73) en est modifié par l'ajout d'un terme d'inertie, comme dans (2.71), tandis qu'un terme de convection apparaît dans (2.79) car la vitesse verticale en surface donne la dérivée temporelle de η en suivant le courant moyen :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = w(x, h, t). \quad (2.105)$$

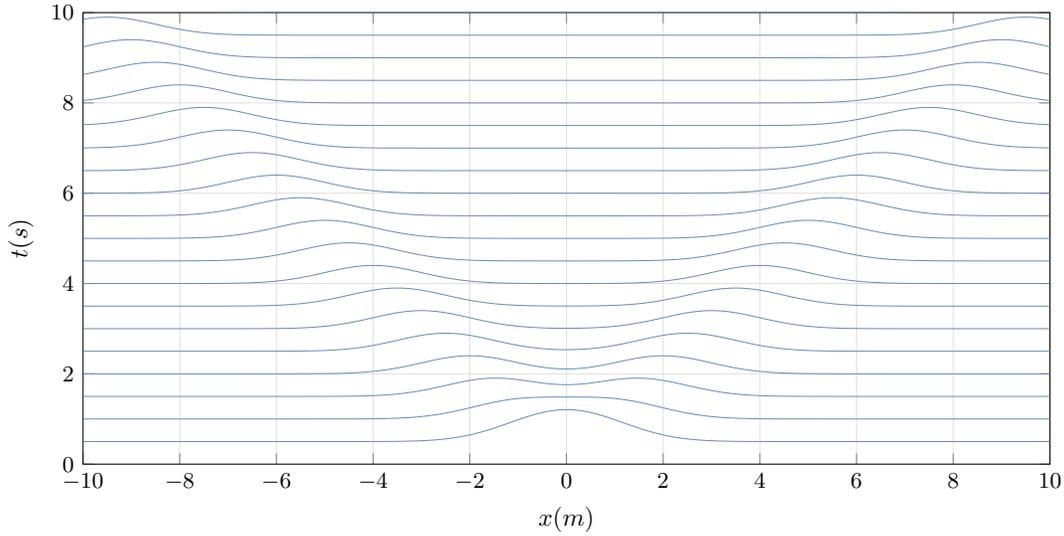


FIGURE 2.6 – Solution (2.102) dans le plan (x, t) , avec $K = 1 \text{ m}^{-1}$ et $c = 1 \text{ m/s}$. Notez que l’amplitude est gonflée pour rendre les ondes visibles malgré leur petite amplitude ; il en résulte que la surface libre apparaît beaucoup plus cambrée qu’elle ne l’est en réalité, c’est-à-dire que la longueur d’onde apparaît réduite en comparaison de l’amplitude.

Avec (2.80) et (2.78), nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = -h \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.107)$$

On peut introduire l’opérateur de *dérivée matérielle* $\frac{d}{dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.108)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -h \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.109)$$

En appliquant l’opérateur $\frac{d}{dt}$ à (2.108) et en utilisant (2.109), nous obtenons l’équation de D’Alembert modifiée en présence de courant :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.110)$$

En procédant de la même manière que sans courant, on peut la factoriser ainsi :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (U + c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (2.111)$$

avec la même équation pour η . Cela montre que les ondes se propagent toujours à la célérité c dans les deux sens, mais *par rapport au courant* U . Ainsi, la solution générale s’écrit maintenant $\eta(x, t) = \phi(x - (U + c)t) + \psi(x - (U - c)t)$. La Figure 2.7 montre ce qu’il adviendrait ainsi de la solution (2.102). ■

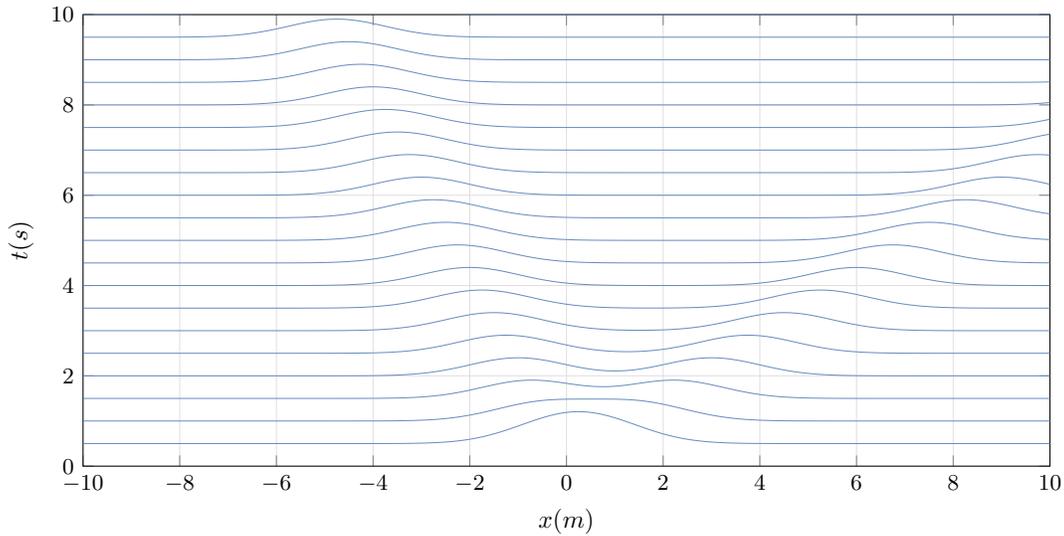


FIGURE 2.7 – Solution (2.102) dans le plan (x, t) , avec $K = 1 \text{ m}^{-1}$ et $c = 1 \text{ m/s}$, modifiée par l'ajout d'une vitesse $U = 0,5 \text{ m/s}$ conformément à l'Exercice 2.15.

Montrons enfin comment la Transformée de Fourier peut aider à résoudre l'EDP (2.81). Nous définissons pour cela une transformée en espace, comme plus haut :

$$\begin{aligned}\widehat{u}(k, t) &\doteq \mathcal{F}_x[u(x, t)](k, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx.\end{aligned}\quad (2.112)$$

La dépendance temporelle, elle, est laissée telle quelle. Avec la propriété (1.231), l'équation (2.81) dans l'espace de Fourier devient

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + k^2 c^2 \widehat{u} = 0, \quad (2.113)$$

qui se présente comme une EDO : la dérivée ne porte plus que sur le temps. Elle est formellement identique à (1.22), donc présente les mêmes solutions (ici écrites sous forme d'exponentielles complexes) :

$$\widehat{u}(k, t) = C_+(k) e^{ikct} + C_-(k) e^{-ikct}. \quad (2.114)$$

Comme on a résolu l'EDO par rapport à t , les « constantes » d'intégration C_1 et C_2 sont en réalité des fonctions de l'autre variable, k . Pour poursuivre la résolution il faut faire appel aux conditions limites, par exemple celles de l'exercice 2.14. La condition $u(x, 0) = 0$ donne dans l'espace de Fourier $\widehat{u}(k, 0) = 0$. Introduite dans (2.114), cette condition donne $C_-(k) = -C_+(k)$, donc

$$\widehat{u}(k, t) = 2iC_+(k) \sin(kct). \quad (2.115)$$

Ecrivons maintenant la transformée de Fourier de (2.96) :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -ikg\widehat{\eta}. \quad (2.116)$$

En insérant (2.115), nous en déduisons

$$\widehat{\eta}(k, t) = -\frac{2c}{g} C_+(k) \cos(kct). \quad (2.117)$$

La condition limite $\eta(x, 0) = \eta_0(x) \doteq H \exp(-\frac{1}{2}K^2x^2)$ donne

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}(k, 0) &= \mathcal{F}_x[\eta_0(x)](k) \\ &= H \mathcal{F}_x[e^{-K^2x^2/2}](k) \\ &= H e^{-k^2/(2K^2)}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

grâce à (1.251) et (1.229). En insérant cela dans (2.120) il vient

$$C_+(k) = -\frac{gH}{2c} e^{-k^2/(2K^2)}, \quad (2.119)$$

d'où

$$\widehat{\eta}(k, t) = H e^{-k^2/(2K^2)} \cos(kct). \quad (2.120)$$

La solution est enfin donnée par la transformée de Fourier inverse.

Exercice 2.16 calculez-la.

Solution 2.16

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= H \mathcal{F}_k^{-1} \left[e^{-k^2/(2K^2)} \cos(kct) \right] (x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/(2K^2)} \cos(kct) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/(2K^2)} \left(e^{ik(x+ct)} + e^{ik(x-ct)} \right) dk \\ &= \frac{1}{2} H \left(\mathcal{F}_k^{-1} \left[e^{-k^2/(2K^2)} \right] (x+ct) + \mathcal{F}_k^{-1} \left[e^{-k^2/(2K^2)} \right] (x-ct) \right) \\ &= \frac{1}{2} H \left(e^{-K^2(x+ct)^2/2} + e^{-K^2(x-ct)^2/2} \right), \end{aligned} \quad (2.121)$$

qui se ramène bien à (2.102) après un peu d'algèbre. ■