



Notes du cours

# ACOUSTIQUE

Denis DUHAMEL

10 avril 2025



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Historique . . . . .	7
1.2	Onde sonore . . . . .	9
1.3	Niveaux sonores . . . . .	12
1.4	Energie acoustique . . . . .	14
1.5	Sources de bruit . . . . .	16
1.6	Applications de l'acoustique . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Les équations de l'acoustique</b>	<b>19</b>
2.1	L'équation des ondes . . . . .	19
2.2	Impédance acoustique et couplage fluide-structure . . . . .	21
2.3	Condition de radiation . . . . .	22
2.4	Onde plane . . . . .	23
2.5	Source ponctuelle . . . . .	25
2.6	Dipôle . . . . .	26
2.7	Bilan d'énergie . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Microphones et haut-parleurs</b>	<b>31</b>
3.1	Microphone . . . . .	31
3.2	Haut-parleur . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Les signaux sonores</b>	<b>45</b>
4.1	Types de signaux . . . . .	45
4.2	Analyse temporelle . . . . .	46
4.3	Discrétisation du signal . . . . .	47
4.4	Analyse spectrale . . . . .	48
4.5	Analyse par octave . . . . .	49
4.6	Fonctions de transfert . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Perception du son</b>	<b>55</b>
5.1	Effets du son . . . . .	55
5.2	Indicateurs de bruit . . . . .	58
5.3	La gêne et les limites de danger . . . . .	60
5.4	Réglementation . . . . .	61

<b>6</b>	<b>Propagation dans un conduit</b>	<b>65</b>
6.1	Conduit rectangulaire . . . . .	65
6.2	Conduit de section quelconque . . . . .	67
6.3	Matrice de transfert . . . . .	68
6.4	Silencieux . . . . .	70
6.5	Terminaisons . . . . .	72
6.6	Mesure avec un tube de Kundt . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Matériaux acoustiques et absorbeurs de son</b>	<b>77</b>
7.1	Paramètres décrivant les matériaux poreux et fibreux . . . . .	77
7.2	Modèles d'impédance . . . . .	81
7.3	Impédance de surface . . . . .	82
7.4	Résonateur de Helmholtz . . . . .	84
7.5	Panneaux perforés . . . . .	87
7.6	Membrane . . . . .	88
7.7	Diffuseur . . . . .	89
7.8	Autres absorbeurs de son . . . . .	89
<b>8</b>	<b>La propagation du son</b>	<b>91</b>
8.1	Interférence . . . . .	91
8.2	Interface entre deux milieux . . . . .	93
8.3	Diffraction . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Isolation acoustique</b>	<b>99</b>
9.1	Sources de bruit dans les bâtiments . . . . .	99
9.2	Transmission à travers des parois . . . . .	102
9.3	Isolation contre les bruits aériens . . . . .	106
9.4	Isolation contre les bruits solidiens . . . . .	110
<b>10</b>	<b>Le rayonnement acoustique</b>	<b>117</b>
10.1	Cas unidimensionnel . . . . .	117
10.2	Cas d'une sphère . . . . .	118
10.3	Rayonnement d'une structure . . . . .	121
10.4	Solution dans le domaine fluide . . . . .	122
10.5	Intégrale de Rayleigh . . . . .	124
10.6	Couplage fluide-structure . . . . .	125
<b>11</b>	<b>Acoustique des salles</b>	<b>131</b>
11.1	Modes dans une salle . . . . .	132
11.2	Réponse impulsionnelle . . . . .	134
11.3	Théorie de la réverbération . . . . .	137
11.4	Caractérisation de l'acoustique d'une salle . . . . .	142
<b>12</b>	<b>Propagation en milieu extérieur</b>	<b>145</b>
12.1	Facteurs influençant la propagation en milieu extérieur . . . . .	145
12.2	Sources sonores . . . . .	155
12.3	Méthodes de prédiction du niveau sonore en extérieur . . . . .	155

<b>13 Les méthodes numériques</b>	<b>161</b>
13.1 Méthode des éléments finis . . . . .	161
13.2 Méthode des équations intégrales. . . . .	166
13.3 Méthode des rayons . . . . .	169
13.4 La SEA (Statistical Energy Analysis) . . . . .	173
<b>Appendices</b>	<b>181</b>
<b>A Formulaire</b>	<b>183</b>
A.1 Formules utiles . . . . .	183
A.2 Coordonnées polaires . . . . .	183
A.3 Coordonnées sphériques . . . . .	184
<b>Bibliographie</b>	<b>184</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Historique

Que cela soit pour la parole, la perception d'un danger ou la musique (figure 1.1), les ondes sonores ont eu une importance considérable depuis l'origine de l'homme.



FIGURE 1.1 – Joueurs de harpe égyptiens.

Les premières études sur les phénomènes acoustiques remontent au VI<sup>e</sup> siècle avant J.C. En effet, les théoriciens et philosophes grecs dont le plus connu est Pythagore, élaborèrent tout un corps de doctrine étroitement lié à leurs considérations métaphysiques. L'école pythagoricienne, qui prenait pour base le principe de l'identité existant entre la structure du monde physique et celle des nombres débouchait ainsi sur les bases d'une vaste "Harmonie Universelle" : tout l'univers est musique. Les pythagoriciens parvinrent à dégager la relation existant entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son émis et à construire mathématiquement l'échelle musicale. Les anciens avaient également découvert que le son est dû aux chocs et aux mouvements vibratoires en résultant et savaient, comme l'atteste Heron (I à III av. J.C.) qu'il se produit dans l'air des vibrations longitudinales sous forme d'ondes sonores. Les principales lois de propagation et de réflexion étaient aussi comprises comme en témoigne la qualité acoustique de certains amphitheatres grecs comme celui d'épidaure de la figure 1.2.

Ce n'est qu'à partir du 17<sup>e</sup> siècle que l'acoustique, en raison du développement de la mécanique, se détacha de l'art musical pour devenir une science du phénomène sonore. En raison de la



FIGURE 1.2 – Amphit atre grec d'Épidaure.

tradition antique, il était naturel que le problème des cordes vibrantes occup t une position de premier plan dans les recherches. Des résultats importants furent obtenus dans ce domaine par le français Mersenne qui détermina expérimentalement les rapports mathématiques unissant la fréquence, la longueur, la tension et la masse des cordes vibrantes. Hooke (1635 - 1703) parvient aux mêmes conclusions. Robert Boyle (1627 - 1691) en 1660 démontra par une expérience sous vide que l'air est un milieu nécessaire à la propagation du son. La question suivante étant alors de savoir à quelle vitesse celui ci se propage. Mersenne et Kircher se penchèrent tous deux sur cette question ainsi que les italiens Borelli (1608 - 1679) et Viviana (1622 - 1703). Les résultats trouvés allaient de 450 m/s   332 m/s qui fut le plus précis (1738), la variation de la vitesse du son en fonction des principaux paramètres atmosphériques fut également dégagée. C'est à Newton (1642 -1727) que l'on doit la première tentative d'une théorie de l'onde sonore. Dans le deuxième livre de ses "Principes", il compare la propagation du son aux pulsations que transmet un corps vibrant au milieu adjacent qui l'entoure, ce dernier au suivant et ainsi de suite.

Le 18 me siècle vit ainsi se multiplier les recherches théoriques, donnant lieu à un important chapitre de la mécanique rationnelle dont l'acoustique est une branche. Parmi les grands mathématiciens qui y apportèrent leur contribution, citons Taylor, d'Alembert ( quations aux dérivées partielles), Bernouilli, Euler, Young et Chladni (1756 - 1824) qui étudia de façon expérimentale la vibration des plaques et laissa son nom aux lignes nodales (figures de Chladni) matérialisées par du sable lorsque les plaques vibrent. Napoléon offrit par l'intermédiaire de l'Institut de France un prix de 3000 F or à celui qui élaborerait une théorie mathématique de la vibration des plaques. Sophie Germain gagna ce prix en 1815; elle donna l'équation différentielle du 4 me ordre avec toutefois quelques erreurs sur les conditions aux limites. Ce n'est qu'en 1850 que Kirchoff (1824 - 1887) donna une théorie plus élaborée. Poisson (1781 - 1840)  tudia également la transmission du son d'un milieu à un autre. Ainsi, à partir du moment où l'on avait ramené la nature du son   un état vibratoire, on pouvait partir de cette donnée pour l'étude des phénomènes d'interférence et l'analyse des sons complexes. En établissant ainsi la liaison entre les recherches mathématiques portant, par exemple sur les corps vibrants et les recherches expérimentales portant sur l'étude physique de la nature du son, le 19 me siècle vit la mise au point mathématique, grâce aux séries

de Fourier, de l'analyse du son. Les grands développements que connu l'acoustique sur le plan théorique et expérimental sont couronnés par l'ouvrage de Lord Rayleigh (1842 - 1919) : "A theory of sound".

## 1.2 Onde sonore

Physiquement, le son est une onde de pression qui provient de la compression et de la décompression du milieu dans lequel le son se propage, voir figure 1.3. L'excitation dans ce cas est effectuée par un piston effectuant un mouvement de va et vient. Il se crée alors des zones de pression et de densité variables. On étudiera essentiellement la propagation du son dans l'air mais le son peut aussi se propager dans tous les fluides et dans les milieux solides. Le son nécessite un milieu matériel pour se propager et il ne se propage donc pas dans le vide. Dans une onde acoustique, les molécules oscillent sur place et il n'y a pas de mouvement d'ensemble du milieu matériel. Le mouvement du fluide a lieu dans la même direction que la propagation de l'onde. Ainsi l'onde sonore est une onde longitudinale.

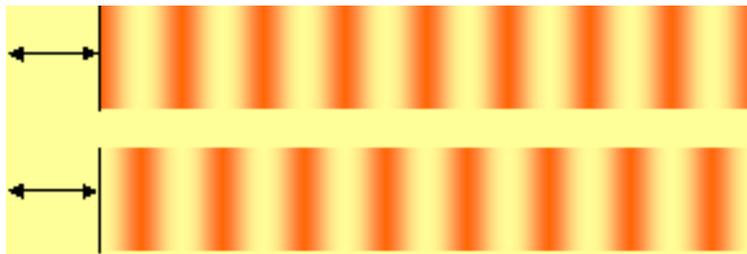


FIGURE 1.3 – Onde acoustique.

Le niveau de pression acoustique s'étend typiquement entre  $2 \cdot 10^{-5} Pa$  et  $100 Pa$  ce qui est très faible par rapport à la pression atmosphérique, voir une illustration sur la figure 1.4. Dans la suite, la pression acoustique sera considérée comme une petite perturbation de la pression atmosphérique normale.

Une onde acoustique sera caractérisée d'abord par son amplitude, voir figure 1.5, qui sera mesurée en Pascal (Pa). On distingue ainsi les sons de forte amplitude des sons de petite amplitude. Un niveau de  $100 Pa$  est un son de très forte amplitude alors qu'un son de  $2 \cdot 10^{-5} Pa$  correspond au seuil de perception d'un individu normal. La seconde caractéristique importante de l'onde est sa fréquence illustrée sur la figure 1.6. La fréquence est le nombre d'oscillations par seconde, elle est exprimée en Hertz (Hz). Les fréquences audibles se situent entre 20Hz et 20000Hz. La longueur d'onde notée  $\lambda$  est la distance entre deux maxima de l'onde sonore, elle s'exprime en mètre (m). La période est l'intervalle de temps entre deux maxima, elle s'exprime en seconde (s). La figure 1.7 illustre ces deux notions. Nous avons différentes relations entre les grandeurs précédentes. Ainsi la période  $T$  est reliée à la fréquence de l'onde  $f$  par  $f = 1/T$ . La longueur d'onde est donnée par  $\lambda = \frac{c}{f}$  avec  $c$  la vitesse du son et le nombre d'onde est  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Physiquement, le nombre d'onde est le nombre d'oscillations de l'onde sur une distance de  $1m$ .

On distinguera la vitesse de l'onde de la vitesse du fluide mis en mouvement qui est généralement beaucoup plus faible. Dans l'air à  $20^\circ C$  la vitesse du son est de  $343m/s$ , dans l'eau à la même température, cette vitesse est de  $1481m/s$ , d'autres valeurs pour différents matériaux sont indiquées dans le tableau 1.1. A titre de comparaison la vitesse des particules du fluide est plutôt de l'ordre

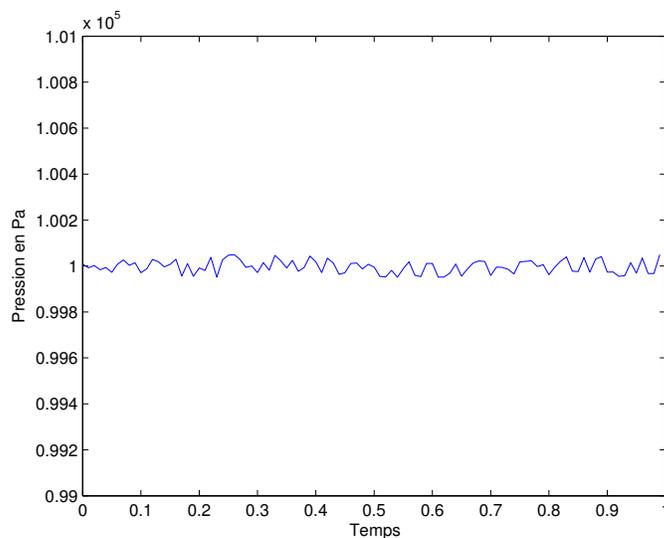


FIGURE 1.4 – Pression acoustique.

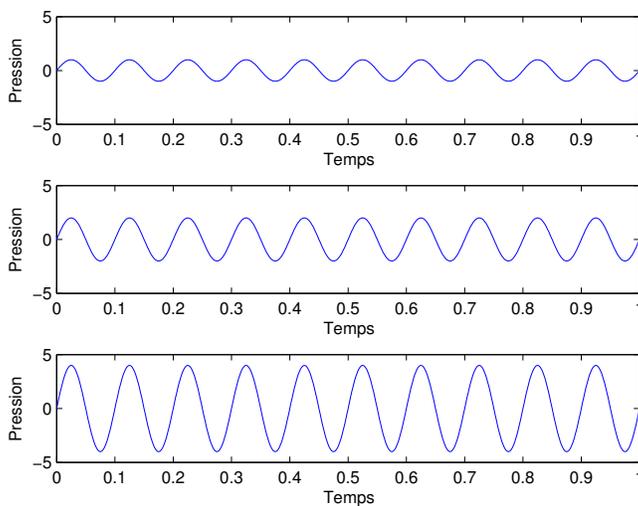


FIGURE 1.5 – Différentes amplitudes d’une onde acoustique.

de quelques  $\mu m/s$  à quelques  $mm/s$ . La vitesse du son est une fonction de la température. Une approximation simple pour cette vitesse dans l’air est  $c = 20\sqrt{T}$  où  $T$  est la température absolue en Kelvin. Par exemple à  $0^\circ C$  on a  $T = 331m/s$  alors qu’à  $20^\circ C$ ,  $T = 343m/s$ . Dans l’air, le son se propage à la même vitesse quelque soit la fréquence. On dit que l’air est un milieu non dispersif. La vitesse ne dépend pas non plus du niveau sonore.

Les sons peuvent être de natures très différentes. Ainsi une onde sinusoïdale ou harmonique est composée d’une seule fréquence. Elle est caractérisée par son amplitude, sa fréquence et sa phase à l’origine. Pour une onde sinusoïdale la distance parcourue durant une période  $T$  à la vitesse  $c$  est

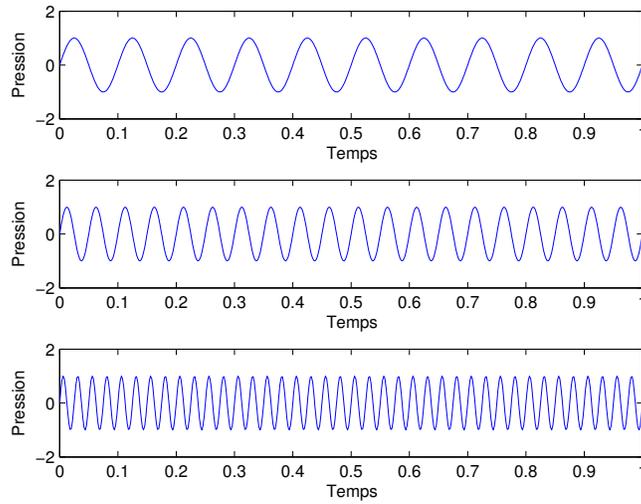


FIGURE 1.6 – Différentes fréquences d’une onde acoustique.

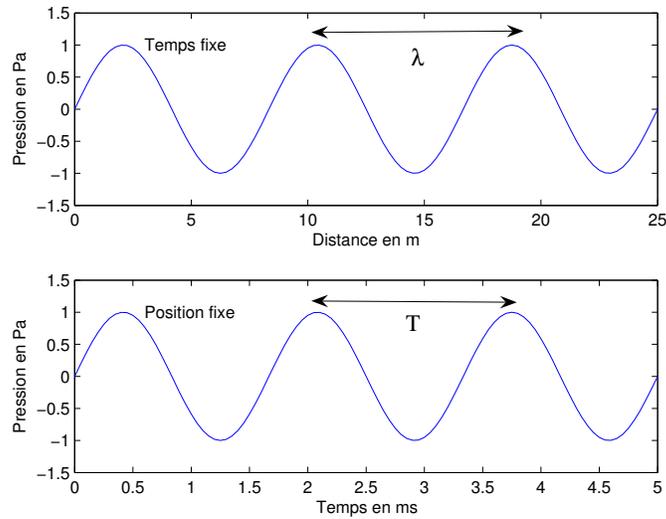


FIGURE 1.7 – Longueur d’onde et période.

$cT$  qui est appelée une longueur d’onde  $\lambda$ .

Une onde périodique non sinusoïdale se reproduit à l’identique au bout d’une période  $T$  mais la forme du signal dans la période est arbitraire. C’est le cas d’une note de musique jouée par un instrument comme le violon ou d’une voyelle que l’on prononce continument.

Lorsque le son ne se reproduit pas à l’identique, le son est non périodique. Dans le cas où le signal est en plus aléatoire, on parle de bruit. Les figures 1.8 et 1.9 montrent respectivement différents signaux déterministes et aléatoires.

Matériau	Masse volumique en $kg/m^3$	Module d'Young en Pa	Vitesse du son en m/s
Aluminium	2700	$7.0 \cdot 10^{10}$	5100
Acier	7800	$2.0 \cdot 10^{11}$	5100
Bois dur	800	$1.0 \cdot 10^{10}$	3500
Bronze	8800	$1.0 \cdot 10^{11}$	3400
eau à $0^\circ C$	1000	$2.06 \cdot 10^9$	1447
eau à $20^\circ C$			1482
Air à $0^\circ C$	1.29	$1.4 \cdot 10^5$	331
Air à $20^\circ C$			343
Caoutchouc souple	1020	$5 \cdot 10^6$	70

TABLE 1.1 – Vitesse du son dans différents matériaux.

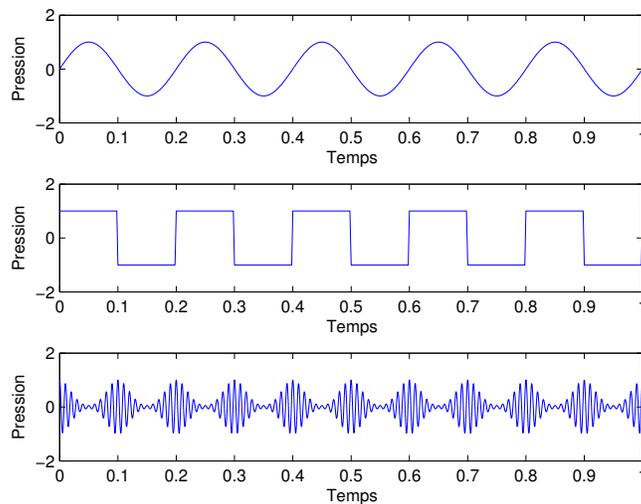


FIGURE 1.8 – Signaux déterministes.

### 1.3 Niveaux sonores

Les niveaux de pression rencontrés dans les phénomènes acoustiques varient sur une étendue très grande, typiquement de  $10^{-5} Pa$  à  $100 Pa$ . De plus, la perception du son par l'homme varie d'une façon sensiblement logarithmique. C'est pour cela que l'on préfère généralement donner le niveau de pression en décibel en utilisant une échelle logarithmique. Le niveau sonore en décibel se définit à partir de la pression  $p$  par

$$L = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} \quad (1.1)$$

avec

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} Pa \quad (1.2)$$

La valeur de  $p_0$  correspond au seuil de sensibilité de l'oreille. Par conséquent, les sons qui ont un niveau sonore négatif ne sont pas entendus. Cette valeur est  $10^{10}$  fois plus faible que la pression atmosphérique. Pour cette valeur de la pression, le déplacement du tympan est d'environ

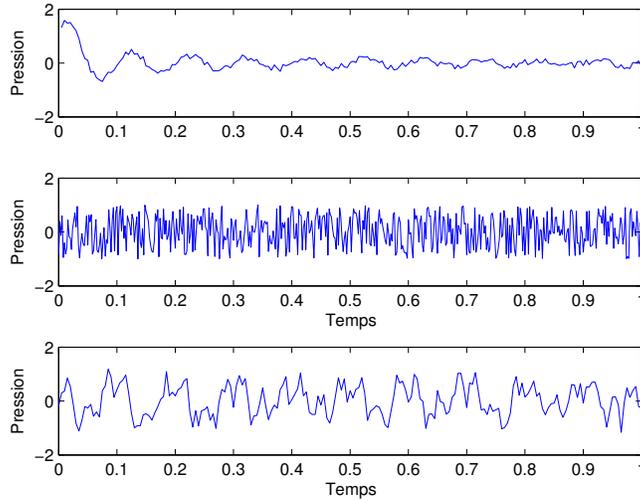


FIGURE 1.9 – Signaux aléatoires.

$0,3 \cdot 10^{-10}m$ , soit de l'ordre de grandeur du rayon de l'atome d'hydrogène. Un décibel correspond sensiblement à l'ordre de grandeur de l'écart perceptible entre deux sons. Ainsi, deux sons dont les niveaux diffèrent de moins d'un décibel semblent de même intensité. Pour une pression de  $1Pa$ , le niveau sonore est de  $94dB$ , alors que pour  $10Pa$  le niveau est de  $114dB$ , soit un niveau très élevé. Des exemples de niveaux sonores sont donnés dans le tableau 1.2. Les valeurs de niveaux sonores sont données en dBA qui tient compte de la réponse de l'oreille humaine, voir le chapitre suivant pour plus de détail sur les dBA.

Les définitions précédentes donnent une valeur instantanée du niveau sonore. Dans le cas d'un signal de pression qui varie irrégulièrement en fonction du temps, ces grandeurs fluctuent beaucoup. Il est alors préférable de définir la moyenne du carré de la pression par

$$\overline{p^2(t)} = p_{rms}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt \quad (1.3)$$

et le niveau sonore par

$$L_p = 10 \log_{10} \frac{\overline{p^2(t)}}{p_0^2} = 20 \log_{10} \frac{p_{rms}}{p_0} \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une onde harmonique  $p(t) = p_0 \cos \omega t$  et on retrouve bien  $p_{rms} = p_0 / \sqrt{2}$ .

On obtient ainsi le niveau énergétique moyen sur la durée d'observation du signal. Lorsque plusieurs sources sont présentes et rayonnent de manière incohérente, on ajoute les puissances pour trouver l'énergie totale émise. Par exemple, dans le cas de deux sources incohérentes

$$L_{tot} = 10 \log_{10}(10^{L_1/10} + 10^{L_2/10}) \quad (1.5)$$

Si  $L_1 = 88dB$  et  $L_2 = 85dB$ , le niveau sonore total si les deux sources sont incohérentes est  $L_{tot} = 89.8dB$ . Dans le cas où  $L_2 = 78dB$  nous trouvons  $L_{tot} = 88.4dB$  et la source de faible niveau contribue très peu au niveau global. Si l'on voulait diminuer le niveau sonore, il serait par conséquent

Niveaux sonores		
Lieux extérieurs	dBA	Lieux intérieurs
Fusée au décollage	190	
Tir d'artillerie	140	Banc d'essai de turbo réacteur
Décollage d'un avion	130	Marteau pilon
Marteau pneumatique	120	<b>Seuil de la douleur</b>
	110	
Moto sans silencieux	100	Bruit d'essai de moteur
Camion	90	Bruit dangereux pour 8h d'exposition
3m d'une route	80	Atelier très bruyant, cris
Zone industrielle, forte circulation en ville	70	Atelier mécanique
Zone industrielle moyenne, trafic urbain	60	Salle bruyante, grand restaurant, conversation face à face
Zone résidentielle urbaine	50	Salle de réunion, restaurant calme
Zone résidentielle calme	40	Bureau, salle de classe
Zone rurale de jour	30	Bureau très calme, tic-tac d'une horloge
Zone rurale de nuit	20	Pièce très isolée, murmure
Bruissement de feuilles	10	
	0	<b>Seuil de l'audition</b>

TABLE 1.2 – Divers niveaux sonores

inutile de vouloir réduire le niveau de la source la plus faible, car cela serait imperceptible sur le niveau global. Dans ce type de problème, il faut d'abord se concentrer sur les sources de niveaux les plus élevés pour espérer un résultat significatif.

Lorsque deux sources cohérentes émettent des ondes sonores de même fréquence et que l'on écoute le son produit en un point donné, le son entendu est la superposition des sons produits par chacune des sources et il y a interférence entre les deux sons. Dans ce cas nous avons la relation  $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$ . Si le point d'écoute est situé à une distance  $r_1$  de la première source et à une distance  $r_2$  de la seconde source, il y a interférence constructive si les deux ondes sont en phase, ce qui se produit si les distances  $r_1$  et  $r_2$  diffèrent par un multiple entier de la longueur d'onde. Il y a interférence destructive si les distances  $r_1$  et  $r_2$  diffèrent par un multiple impair de la demi longueur d'onde.

## 1.4 Energie acoustique

Parfois le niveau est aussi défini à partir de l'intensité acoustique donnée par la moyenne temporelle du produit de la pression par la vitesse du fluide suivant la formule

$$\mathbf{I} = \overline{p\mathbf{v}} = \frac{1}{T} \int_0^T p\mathbf{v}dt \quad (1.6)$$

Le niveau sonore est alors défini en décibel par

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (1.7)$$

avec  $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ . Pour une onde plane dans l'air

$$I = \frac{p^2}{\rho c} \quad (1.8)$$

avec  $\rho c \approx 400 kgm^{-2}s^{-1}$ . On peut vérifier dans ce cas que les deux définitions du niveau sonore sont équivalentes.

La puissance acoustique produite par des sources à l'intérieur d'une surface  $S$  est calculée par la formule suivante

$$W = \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface  $S$ . Nous avons ainsi une définition du niveau sonore en terme de puissance acoustique par

$$L_W = 10 \log_{10} \frac{W}{W_0} \quad (1.10)$$

avec  $W_0 = 10^{-12} W$ . Ici encore la puissance de référence est choisie pour retrouver les définitions en pression dans le cas d'une onde plane. Une puissance de  $1W$  donne ainsi un niveau élevé de  $120dB$ .

Différentes grandeurs caractérisent l'énergie acoustique émise par des sources. Si pendant un temps  $T$ , une source émet une énergie  $E$ , sa puissance est donnée par

$$P = \frac{E}{T} \quad (1.11)$$

La puissance est mesurée en watts. Une source de puissance un watt émet un joule par seconde. Le tableau 1.1 donne la puissance acoustique de quelques sources. La puissance est une caractéristique

Source	Puissance
Montre mécanique	$10^{-6}W$
Voix forte	$0.1mW$
Haut-parleur	$1W$
Avion	$10^3W$

TABLE 1.3 – Puissance acoustique de quelques sources.

intrinsèque de la source et ne dépend pas par exemple de la distance à laquelle on se trouve de la source. Lorsque plusieurs sources émettent de façon incohérente, la puissance acoustique totale est la somme des puissances acoustiques de chaque source.

L'intensité acoustique à travers une surface  $S$  est égale à la puissance traversant cette surface divisée par la surface, soit

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{ST} \quad (1.12)$$

si la surface est traversée par une énergie  $E$  pendant le temps  $T$ . Elle est mesurée en  $W/m^2$ .

## 1.5 Sources de bruit

Tous les dispositifs qui produisent des variations d'efforts ou de pression dans le domaine de fréquences perceptible par l'homme constituent des sources de bruit. Les sources de bruit peuvent être très variées dans leurs formes physiques, leurs caractéristiques et leurs mécanismes de génération du son. Un système mécanique comme une automobile peut être vu comme un ensemble de sources élémentaires et peut générer du bruit par un grand nombre de mécanismes. La liste ci-dessous donne quelques exemples de sources acoustiques.

1. Les sources aéroacoustiques : voix, instruments de musique à vent, écoulement d'air autour de voitures, de trains et d'avions. Le flux d'air crée un son et souvent la turbulence est une source supplémentaire.
2. Les machines sont des sources importantes. Elles comportent des parties en mouvement qui vont rayonner du son dans l'air.

Il y a ainsi deux mécanismes fondamentaux de production du son :

1. soit le mouvement du fluide seul produit un son.
2. soit les vibrations d'une structure se propagent à l'air environnant et créent le rayonnement acoustique.

Du point de vue de leur forme spatiale, on peut classer les sources acoustiques comme étant monopolaires, dipolaires, quadrupolaires ou d'ordres plus élevés. La figure 1.10 donne une représentation du champ de pression émis par ces différentes sources. Les sources monopolaires produisent un déplacement net de volume fluide comme une sphère vibrant avec une vitesse uniforme sur sa surface. On peut classer dans cette catégorie les haut-parleurs avec un baffle, les sirènes, le bruit engendré par une combustion ou le bruit d'échappement. Les sources dipolaires sont obtenues par des variations locales de forces ou par des forces mobiles dans le fluide. Elles peuvent être vues comme constituées de deux monopoles en opposition de phase et placés très proches l'un de l'autre. Le bruit du aux pales d'un ventilateur, la sonnerie d'un téléphone, un moteur, se classent dans cette catégorie. Les sources quadrupolaires sont obtenues par des variations de contraintes dans un fluide, par exemple par turbulence. Le bruit engendré par un jet de fluide en est un exemple.

L'énergie acoustique produite est généralement une fraction infime de l'énergie mécanique mise en jeu. Cela peut expliquer qu'il est difficile de réduire cette énergie, déjà très faible sans une nouvelle conception de la source de bruit. Le meilleur moyen de contrôler le bruit est par un contrôle à la source obtenu dès la conception du système. Cette approche nécessite d'une part de connaître les mécanismes physiques qui engendrent le bruit et de pouvoir agir sur eux à un coût réaliste. Elle n'est donc pas toujours possible ou d'une efficacité limitée. Dans le cas de l'automobile par exemple, le bruit de contact pneumatique chaussée est mal compris et il est difficile de réduire significativement son impact sur le niveau de bruit global d'une automobile. Le bruit moteur peut être réduit par une meilleure conception et par une encapsulation du moteur. Cela nécessite des études poussées et peut influencer sur le coût de la voiture.

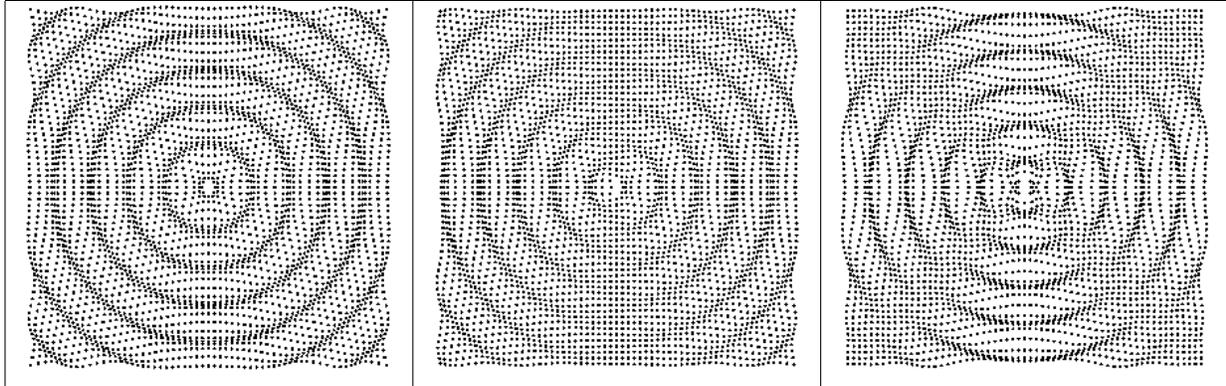


FIGURE 1.10 – Sources monopolaire, dipolaire et quadripolaire (de gauche à droite).

Une source omnidirectionnelle rayonne une énergie uniforme dans toutes les directions. Cela se produit principalement quand les dimensions de la source sont petites par rapport à la longueur d'onde. Pour une telle source de puissance  $P$ , l'intensité à une distance  $r$  est donnée par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (1.13)$$

Lorsque l'énergie n'est pas uniformément répartie la source est dite directive. Cela se produit d'autant plus que la fréquence est élevée. L'intensité est alors une fonction de l'angle  $I(\theta, \phi)$  et l'intensité moyenne  $I_{moy}$  est donnée par la formule 1.13. Le facteur de directivité est alors défini par

$$Q(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_{moy}} \quad (1.14)$$

et l'indice de directivité par

$$ID(\theta, \phi) = 10 \log_{10} Q(\theta, \phi) \quad (1.15)$$

Pour une source omnidirectionnelle, on a  $Q = 1$  et  $ID = 0$ .

## 1.6 Applications de l'acoustique

L'acoustique a de très nombreuses applications pratiques dont les principales sont listées ci-dessous.

1. Audition → médical
2. Parole, intelligibilité, sonorisation
3. Prise de son dans les spectacles
4. Instruments de musique
5. Acoustique des salles
6. Conception acoustique des bâtiments
7. Acoustique des transports : voiture, train, avion
8. Problème de bruit dans l'environnement

9. Bruit des machines
10. Environnement de travail, santé
11. Ultrasons : médical, soudure
12. Acoustique sous marine

Dans ce cours, nous n'aborderons pas toutes ces applications de l'acoustique qui peuvent être trouvées dans les ouvrages cités en bibliographie. Le cours vise principalement à maîtriser les concepts de base de l'acoustique et ses applications au génie civil.

## Chapitre 2

# Les équations de l'acoustique

### 2.1 L'équation des ondes

Le mouvement général d'un fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes (voir le cours de mécanique des milieux continus). Les équations de base sont la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et l'équation d'état du fluide.

Nous commençons par rappeler la loi de conservation de la masse. En notant  $\Gamma$  la masse volumique,  $\mathbf{V}$  la vitesse du fluide et  $R$  la densité volumique du taux de matière reçue par le fluide venant de l'extérieur, la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) = R \quad (2.1)$$

La conservation de la quantité de mouvement est maintenant introduite. Notant  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts extérieurs par unité de volume, et  $\Sigma$  les contraintes dans le fluide, la conservation de la quantité de mouvement est

$$\frac{\partial \Gamma \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma \quad (2.2)$$

Comme  $\operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{V} \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ , l'équation (2.2) devient :

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{V}) \right\} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma \quad (2.3)$$

Combinant les équations (2.1) et (2.3), on obtient finalement :

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Gamma \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{F} + \operatorname{div} \Sigma - R \mathbf{V} \quad (2.4)$$

Le champ de contrainte total est  $\Sigma = -P\mathbf{I} + \Sigma^v$ .  $P$  est le champ de pression dans le fluide et  $\Sigma^v$  est le champ de contrainte provenant de la viscosité du fluide qui est négligée par la suite.

Les équations précédentes sont valables pour un fluide quelconque. Dans le cas de l'acoustique nous pouvons apporter de grandes simplifications à ces relations. Nous avons vu dans les chapitres précédents que les fluctuations du mouvement du fluide sont supposées petites de sorte que l'écoulement du fluide peut être considéré comme peu perturbé par rapport au repos. L'écoulement sera décrit comme la somme d'un écoulement au repos non perturbé indicé 0 et d'une petite perturbation. Les coordonnées d'espace et de temps sont notées  $\mathbf{x}$  et  $t$ . Nous avons donc

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}, t) \\ P(\mathbf{x}, t) = P_0(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ R(\mathbf{x}, t) = 0 + r(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Les équations de conservation linéarisées deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = r \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f} \end{cases}} \quad (2.6)$$

Les compressions et décompressions d'air dans le fluide s'effectuent dans un intervalle de temps petit par rapport au temps de propagation de la chaleur. Par conséquent, les pertes d'énergie par transformation de l'énergie mécanique en chaleur sont petites et le fluide peut être supposé adiabatique. Le fluide peut donc être supposé un gaz parfait (en pratique l'air). Le comportement du gaz donne une relation entre les pressions et masses volumiques totales

$$p_{tot} = p_0 \left( \frac{\rho_{tot}}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.7)$$

avec  $p_0 = 10^5 Pa$ ,  $\rho_0 = 1.293 kg/m^3$  et  $T_0 = 273K$  les pression, masse volumique et température à l'état de référence dans le fluide au repos. On en déduit une relation entre les variables linéarisées  $p$  et  $\rho$  :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\gamma \rho}{\rho_0} \quad (2.8)$$

En introduisant la constante des gaz parfaits  $R_g$  et la masse molaire du gaz  $M$ , on obtient

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2 = \frac{\gamma R_g T_0}{M} \quad (2.9)$$

$c$  est appelé célérité du son isentropique du fluide au repos et est uniforme pour un mouvement isotherme. Dans l'air  $\gamma = 1.41$ ,  $R_g/M = 287 J/kg.^{\circ}C$ ,  $c=331m/s$  à  $0^{\circ}C$ ,  $343m/s$  à  $20^{\circ}C$ , et plus généralement  $c = 20.12\sqrt{T}$  où  $T$  est la température en degré Kelvin.

En remplaçant (2.9) dans la première équation de (2.6), nous obtenons les équations générales de l'acoustique :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = r \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f} \end{cases} \quad (2.10)$$

En prenant la dérivée en temps de la première relation moins la divergence de la seconde, on en déduit l'équation des ondes

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{f}} \quad (2.11)$$

On pourra aussi poser  $r = \rho_0 q$  où  $q$  est identifié comme un débit par unité de volume.

Lorsque l'onde est harmonique avec une dépendance en temps de la forme  $e^{-i\omega t}$ , l'équation des ondes se transforme en l'équation de Helmholtz.

$$\boxed{\Delta p + k^2 p = i\omega r + \text{div} \mathbf{f}} \quad (2.12)$$

où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde (c'est la rotation de phase par unité de longueur).

Remarque :

1. Lorsque des échanges de chaleur importants peuvent avoir lieu comme à proximité d'une paroi ou dans les milieux poreux ou fibreux, la propagation n'est plus adiabatique et l'étude précédente doit être modifiée.
2. Il est possible de modifier le développement précédent dans le cas où le fluide n'est plus au repos mais animé d'une vitesse uniforme. C'est le cas lorsqu'il y a un écoulement de fluide, par exemple en présence de vent.
3. Les équations entourées sont les équations fondamentales de l'acoustique et sont à la base de tous les développements ultérieurs. Elles doivent donc être parfaitement maîtrisées.

## 2.2 Impédance acoustique et couplage fluide-structure

Pour des ondes harmoniques, l'impédance est définie par le rapport entre la pression et la vitesse. C'est généralement une fonction de la position.

$$z(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} \quad (2.13)$$

Dans le cas d'une onde plane, on vérifiera que l'impédance est constante et vaut

$$z = \rho_0 c \quad (2.14)$$

L'inverse de l'impédance est l'admittance qui est définie par  $\beta = 1/z = v/p$ . Ces deux grandeurs seront souvent utilisées par la suite. Le nombre sans dimension  $z/(\rho_0 c)$  est appelé l'impédance réduite. Dans l'air  $\rho_0 c = 412 \text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$  à  $20^\circ \text{C}$ . Cette valeur est souvent approximée par  $\rho_0 c \approx 400 \text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$ .

Lors du couplage d'un fluide avec une structure, il faut écrire la continuité des grandeurs mécaniques entre le fluide et la structure. Rigoureusement, il faudrait écrire la continuité du vecteur vitesse qui exprime qu'il n'y a pas de perte de fluide entre les deux domaines. Cependant comme l'air ou l'eau sont des fluides peu visqueux, les composantes de la vitesse parallèles à la surface du fluide varient considérablement dans une couche limite de très faible dimension. C'est pour cela que la condition aux limites à appliquer dans ce cas est la continuité de la seule composante normale de la vitesse. Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'approche précédente est la plus complète mais elle nécessite la connaissance des vibrations de la structure. Cette condition aux limites peut souvent être remplacée par une condition simplifiée ne faisant intervenir que l'impédance. C'est notamment le cas quand la frontière est constituée

d'une couche de matériau poreux. On écrit alors la condition d'impédance en faisant intervenir la vitesse normale à la frontière.

$$p(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

L'impédance  $z(\mathbf{x})$  est une donnée qui dépend des propriétés physiques du matériau et de son épaisseur et qui peut être obtenue par une mesure ou par un modèle de matériau poreux. Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est dirigé vers la structure.

## 2.3 Condition de radiation

Lorsque le milieu de propagation est infini, ce qui est fréquent en acoustique extérieure, il faut écrire une condition de radiation pour décrire le comportement de la solution à l'infini. Cette condition est l'analogie de la condition aux limites que l'on écrirait sur une frontière bornée du domaine. Lorsque les sources de son sont contenues dans un domaine borné, le son doit se propager des sources vers l'infini et non l'inverse. Pour l'équation de Helmholtz, Arnold Sommerfeld a défini une condition de rayonnement que l'on peut écrire sous la forme

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \quad (2.17)$$

Pour une propagation en dimension trois et avec une convention en fréquence en  $e^{-i\omega t}$ . Si l'on prend la convention  $e^{i\omega t}$ , alors la condition s'écrit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial r} + ikp \right) = 0 \quad (2.18)$$

Dans le domaine temporel, la condition est

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.19)$$

En dimension deux, la condition est similaire en remplaçant la multiplication par  $r$  par la multiplication par  $\sqrt{r}$ . Par exemple, la relation (2.17) devient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \quad (2.20)$$

Enfin, en dimension un, la condition est

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - ikp \right) = 0 \quad (2.21)$$

ou en temps

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.22)$$

conditions qui sont respectivement vérifiées par les fonctions du type  $e^{i(kx-\omega t)}$  et  $p(x-ct)$  mais pas par les fonctions  $e^{i(kx+\omega t)}$  et  $p(x+ct)$ .

## 2.4 Onde plane

Dans le cas unidimensionnel, l'équation des ondes s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.23)$$

La solution générale est la somme d'une onde se propageant vers la droite et d'une onde se propageant vers la gauche, voir les figures 2.1 et 2.2.

$$p(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c) \quad (2.24)$$

Les valeurs des fonctions  $f$  et  $g$  peuvent s'obtenir à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

Dans le cas d'une onde harmonique de pulsation  $\omega$ , l'équation devient

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0 \quad (2.25)$$

et la solution est

$$p(x, t) = \text{Re}(p_1 e^{i(kx - \omega t)} + p_2 e^{-i(kx + \omega t)}) \quad (2.26)$$

ce qui est encore la somme de deux ondes se propageant dans des sens opposés. L'amplitude de la vitesse est donnée par

$$v(x) = \frac{p_1}{\rho c} e^{ikx} - \frac{p_2}{\rho c} e^{-ikx} = v_1 e^{ikx} + v_2 e^{-ikx} \quad (2.27)$$

Nous avons donc les relations

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho c v_1 \\ p_2 &= -\rho c v_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans ce cas l'impédance vaut  $+\rho c$  ou  $-\rho c$  suivant le sens de propagation.

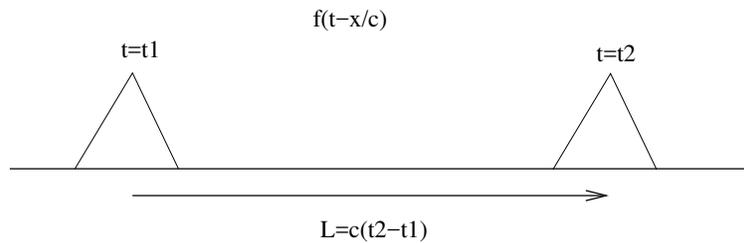


FIGURE 2.1 – Propagation vers la droite.

De manière générale, une onde plane a un champ de pression uniforme sur un ensemble de plans parallèles entre eux. Le champ de pression est donné par

$$p(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \quad (2.29)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est orthogonal aux plans, voir la figure 2.3. La vitesse particulière du fluide est donnée

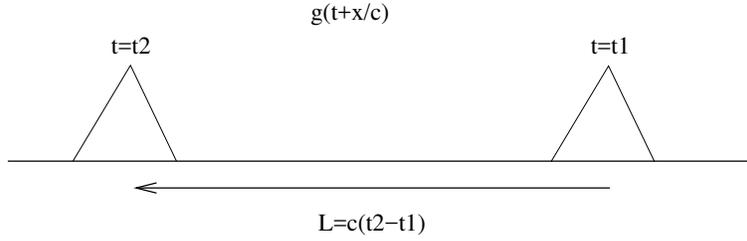


FIGURE 2.2 – Propagation vers la gauche.

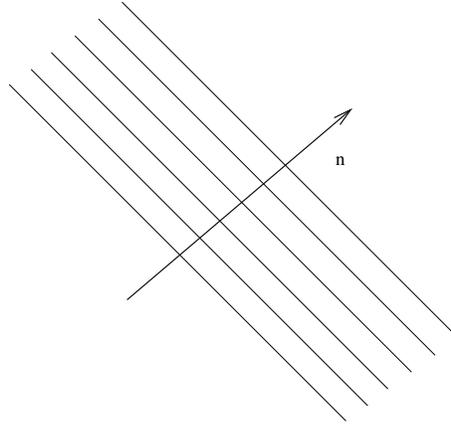


FIGURE 2.3 – Onde plane.

par

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p \\
 \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\mathbf{n}}{c} f' \\
 \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{n}}{\rho c} p
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Dans le cas d'une onde harmonique de pulsation  $\omega$ , le champ de pression est

$$p(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left( e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right)
 \tag{2.31}$$

avec le vecteur d'onde

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = k \mathbf{n}
 \tag{2.32}$$

Dans la pratique, on trouve des ondes planes dans les guides d'onde (voir la suite du cours) et loin des sources. Le front d'onde est la surface où tous les points vibrent en phase. Pour les ondes planes, les fronts d'onde sont des plans alors que pour les ondes sphériques les fronts d'onde sont des sphères. Sur la figure 2.4, le front d'onde sphérique au voisinage de la source se transforme en front d'onde plan très loin de la source.

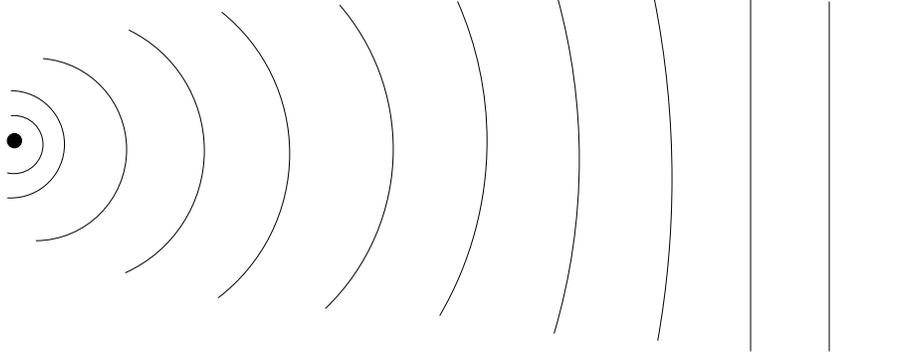


FIGURE 2.4 – Front d’onde.

## 2.5 Source ponctuelle

On peut aussi chercher les solutions à symétrie sphérique ou cylindrique. Le Laplacien en coordonnées sphériques s’écrit

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (2.33)$$

Dans le cas d’une onde sphérique, la solution ne dépend que du rayon et vérifie donc en temps

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.34)$$

que l’on peut aussi écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 r p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.35)$$

La solution s’obtient alors à partir de la solution de l’équation des ondes en 1D et s’écrit

$$p(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \quad (2.36)$$

et dans le cas harmonique

$$p(r, \omega) = p_1 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} + p_2 \frac{e^{-i(kr + \omega t)}}{r} \quad (2.37)$$

Le premier terme est une onde sortante et le second une onde entrante. Le champ de vitesse qui est aussi radial vaut

$$u_r(r, \omega) = \frac{1}{i \rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.38)$$

Dans le cas d’une onde harmonique sortante la vitesse est

$$u_r(r, \omega) = \frac{p}{\rho_0 c} \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \quad (2.39)$$

et l’impédance de l’onde sphérique est donc

$$Z = \frac{\rho_0 c}{\left( 1 + \frac{i}{kr} \right)} \quad (2.40)$$

près de l'origine,  $r$  est petit, et l'impédance est une grandeur complexe qui tend vers  $-i\rho_0 ckr$  quand  $r$  tend vers 0. On est alors en champ proche. Au contraire, quand  $r$  est grand, on est en champ lointain et l'impédance tend vers  $\rho_0 c$  qui est l'impédance spécifique du milieu. On retrouve dans ce cas un comportement d'onde plane.

Une solution particulièrement importante de l'équation de Helmholtz est le cas d'une source ponctuelle en 3D solution de

$$\Delta_x G + k^2 G = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.41)$$

Elle est donnée (voir TD) par

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.42)$$

En coordonnées cylindriques, nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.43)$$

et en dimension deux la solution correspondante est

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (2.44)$$

avec  $H_0 = J_0 + iY_0$  où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel et de Neumann de première espèce d'ordre 0.

## 2.6 Dipôle

Une autre solution possible est le dipôle qui est constitué de deux monopôles en opposition de phase placés à proximité l'un de l'autre. Physiquement, il est obtenu par exemple par le rayonnement d'un piston non bafflé, voir les figures 2.5 et 2.6. La pression engendrée par le dipôle est donnée

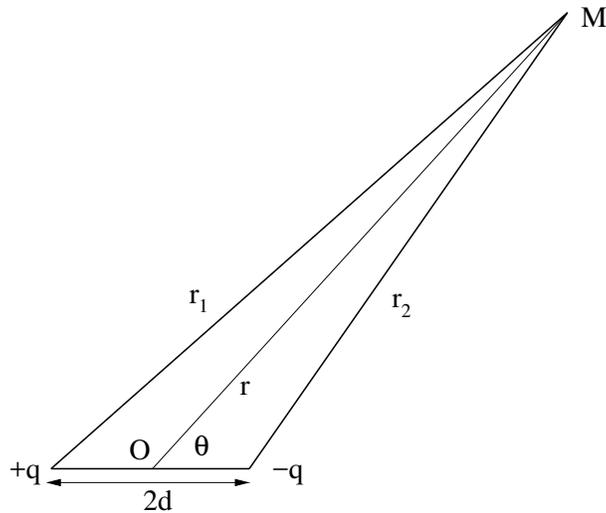


FIGURE 2.5 – Dipôle.

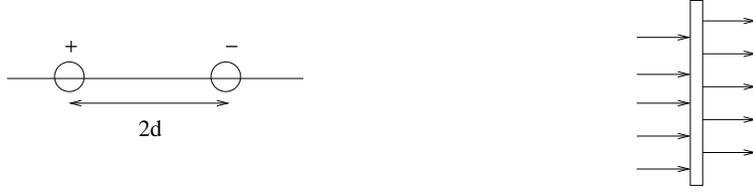


FIGURE 2.6 – Exemples de dipôles.

par

$$p(\mathbf{r}) = q \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} - q \frac{e^{ikr_2}}{4\pi r_2} \quad (2.45)$$

Lorsque  $d$  est petit par rapport à la distance  $r$ , nous avons

$$\begin{aligned} r_1 &\approx r + d \cos \theta \\ r_2 &\approx r - d \cos \theta \end{aligned} \quad (2.46)$$

La pression est donc donnée par

$$p(x) = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (e^{ikd \cos \theta} - e^{-ikd \cos \theta}) = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r} 2i \sin(kd \cos \theta) \quad (2.47)$$

Si de plus  $d$  est petit devant la longueur d'onde, nous obtenons l'expression du champ de pression rayonné par le dipôle

$$p(r, \theta) = \frac{qe^{ikr}}{4\pi r} (2ikd \cos \theta) \quad (2.48)$$

En champ lointain, l'impédance des ondes sphériques est égale à  $\rho_0 c$  et l'intensité vaut

$$I(r, \theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\rho_0 c} \left| \frac{qe^{ikr}}{4\pi r} (2ikd \cos \theta) \right|^2 \right) = \frac{(|q|2kd \cos \theta)^2}{16\pi^2 r^2 \rho_0 c} \quad (2.49)$$

La puissance rayonnée par le dipôle est alors

$$W = 2\pi r^2 \int_0^\pi I(r, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(|q|kd)^2}{3\pi \rho_0 c} \quad (2.50)$$

Pour caractériser l'écart entre le rayonnement d'une source et le rayonnement d'une source isotrope de même puissance, on introduit la notion de directivité selon la formule

$$Q(\theta, \phi) = I(r, \theta, \phi) 4\pi r^2 / W \quad (2.51)$$

Dans le cas du dipôle, nous avons

$$Q(\theta, \phi) = 3 \cos^2 \theta \quad (2.52)$$

Ce diagramme de directivité est représenté sur la figure 2.7.

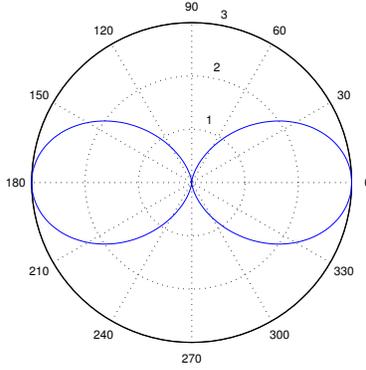


FIGURE 2.7 – Diagramme de directivité d'un dipôle.

## 2.7 Bilan d'énergie

Introduisons une densité de sources de débit volumique  $q(\mathbf{x})$ . Les équations fondamentales de l'acoustique s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \rho_0 q(\mathbf{x}) \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

En notant  $\mathbf{I} = p\mathbf{v}$  le vecteur intensité acoustique, mesuré en  $W/m^2$ , la définition de la puissance rayonnée est

$$W_{ray} = \int_{\Gamma} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) dx \quad (2.54)$$

Ecrivons  $\operatorname{div}(p\mathbf{v})$  à partir des équations (2.53)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) &= \nabla p \cdot \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= -\rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{p}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + pq \end{aligned} \quad (2.55)$$

L'énergie potentielle acoustique  $E_p$  est définie par :

$$E_p = \frac{1}{2\rho_0 c^2} \int_{\Omega} p^2 dx \quad (2.56)$$

L'énergie cinétique acoustique  $E_c$  est définie par :

$$E_c = \frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 dx \quad (2.57)$$

La puissance produite par la source  $W$  est définie par :

$$W = \int_{\Omega} pq dx \quad (2.58)$$

En intégrant la relation 2.55 sur le volume fluide, le bilan final s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \frac{p}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} dx + \int_{\Omega} pq dx \\ \frac{\partial}{\partial t} (E_p + E_c) &= W - W_{ray} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Introduisant  $W_{dis}$  la puissance dissipée par viscosité dans le domaine  $\Omega$ , on peut écrire plus généralement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_p + E_c) = W - W_{ray} - W_{dis} \quad (2.60)$$

Pour une excitation harmonique, les quantités peuvent être moyennées sur une période. A partir de la relation

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(A e^{i\omega t}) \text{Re}(B e^{i\omega t}) dt = \frac{1}{2} \text{Re}(A^* B) \quad (2.61)$$

nous déduisons pour les moyennes sur une période

$$\begin{aligned} \bar{E}_p &= \frac{1}{4\rho_0 c^2} \int_{\Omega} |p|^2 dx \\ \bar{E}_c &= \frac{\rho_0}{4} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx \\ \bar{W}_{ray} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \text{Re}[p \mathbf{v}^*] \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \bar{W} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Re}[pq^*] dx \end{aligned}$$

L'équation (2.59) devient :

$$\bar{W} = \bar{W}_{ray} \quad (2.62)$$

On notera que dans un domaine à frontières rigides, les puissances  $W_{ray}$  et  $W$  sont nulles.

Dans le cas d'une onde plane, le vecteur intensité instantané vaut

$$\mathbf{I}(t) = \frac{p^2(t)}{\rho_0 c} \mathbf{n} \quad (2.63)$$

dans laquelle  $\mathbf{n}$  est la direction de propagation. La densité d'énergie instantanée est donnée par

$$w(t) = e_p(t) + e_c(t) = \rho_0 v^2(t) = \frac{p^2(t)}{\rho_0 c^2} \quad (2.64)$$

On a alors la relation

$$\mathbf{I}(t) = cw(t) \mathbf{n} \quad (2.65)$$

En moyenne sur une période, nous obtenons les quantités correspondantes

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}} &= \frac{|p|^2}{2\rho c} \mathbf{n} \\ \bar{w} &= \frac{|p|^2}{2\rho_0 c^2} \\ \bar{\mathbf{I}} &= c\bar{w} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pour une source ponctuelle de pression  $p = q \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ , le vecteur intensité acoustique moyen sur une période est donné dans ce cas par

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \text{Re}(p\mathbf{v}^*) = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|p(r=1)|^2}{2r^2\rho_0 c} \quad (2.67)$$

L'intensité décroît comme le carré de la distance à l'origine. La puissance acoustique rayonnée par la source est

$$W = \int_{S(r)} \mathbf{I} ds = \frac{4\pi |p(r=1)|^2}{2\rho_0 c} \quad (2.68)$$

C'est une constante indépendante du rayon de la sphère  $S(r)$  ayant servi au calcul. L'intensité acoustique peut s'exprimer par

$$I(r) = \frac{W}{4\pi r^2} \quad (2.69)$$

## Chapitre 3

# Microphones et haut-parleurs

### 3.1 Microphone

#### 3.1.1 Microphone électrodynamique

Les sons sont mesurés par des microphones. Ces appareils sont destinés à mesurer la pression acoustique, grandeur à laquelle l'oreille humaine est sensible. Ils assurent la conversion du signal de pression en un signal électrique. En général, le mouvement des molécules d'air entraîne la mise en mouvement d'un élément solide, la membrane, qui, à son tour, est directement à l'origine du signal électrique, voir la figure 3.1.

Une membrane de surface  $S$  est reliée à une bobine de longueur totale  $l$ . La masse mobile est constituée par la membrane et la bobine. La bobine coulisse dans un espace où règne un champ magnétique  $B$ . Une onde sonore de pression  $p$  provoque une force  $F = pS$  sur la membrane. Si la bobine bouge à la vitesse  $v$ , la tension induite dans la bobine est  $u = Blv$ . Pour une bobine de résistance  $R$  cela induit un courant  $i = \frac{u}{R}$  que l'on peut mesurer.

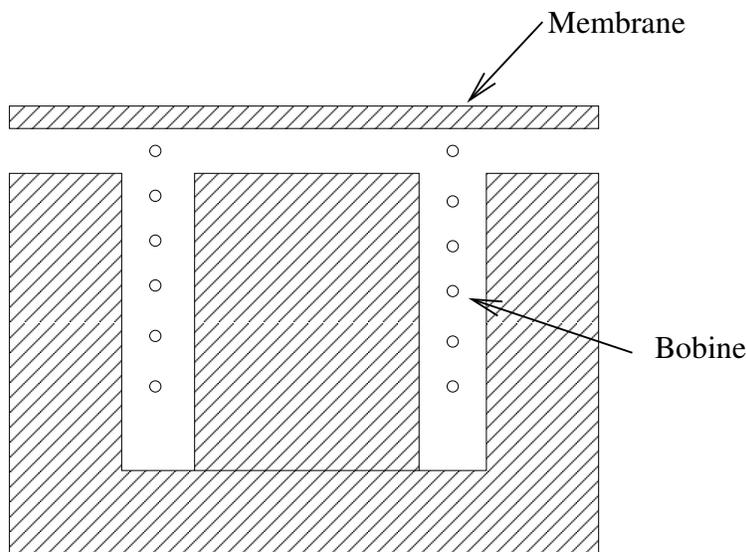


FIGURE 3.1 – Principe d'un microphone électrodynamique.

Un exemple de microphone utilisé pour la prise de son est montré sur la figure 3.2.



FIGURE 3.2 – Microphone pour la prise de son.

### 3.1.2 Microphone électrostatique

Ce microphone fonctionne sur le principe du condensateur. Soit  $V$  la tension aux bornes du condensateur,  $Q$  la charge et  $C$  sa capacité. Nous avons  $C = \frac{Q}{V}$ . La capacité du condensateur peut s'exprimer en fonction de la distance entre les armatures par

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.1)$$

où  $d$  est la distance entre les armatures et  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} F/m$  la permittivité du vide. Dans un microphone électrostatique la membrane forme une des deux armatures. Les armatures sont soumises à une tension de polarisation  $V_0$ . La tension aux bornes des armatures est donnée par

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad (3.2)$$

L'onde sonore fait varier la distance  $d$  et produit donc une tension proportionnelle à cette distance. La tension de polarisation est fournie par une source continue et vaut 100 à 200 V pour des microphones de mesure. Les microphones à électret sont des variantes dans lesquelles la tension de polarisation est fournie par un matériau diélectrique.

Pour les microphones à condensateur, le diaphragme est sous tension avec un isolant à l'arrière, voir la figure 3.3. La distance entre le diaphragme et l'isolant est typiquement de  $20\mu m$ . Ces deux composants forment les deux plaques d'une capacité qui va produire le signal du microphone. La valeur de la capacité s'étend de 2 à 60 pF. La membrane du diaphragme est sous une tension de l'ordre de  $600N/mm^2$  et est généralement constituée de Nickel. Un microphone de bonne qualité doit produire un signal électrique proportionnel au niveau de pression mesuré et ceci dans la plus large bande de fréquence possible.



FIGURE 3.3 – Schéma d'un microphone à condensateur.

### 3.1.3 Caractéristiques des microphones

La sensibilité d'un microphone est le rapport entre la tension fournie et la pression reçue.

$$s = \frac{u}{p} \quad (3.3)$$

Elle est de l'ordre de quelques mV/Pa (de 2mV/Pa à 20 mV/Pa).

La courbe de réponse en fréquence est la tension mesurée par le microphone pour une pression acoustique de même amplitude, voir la figure 3.4. Cette courbe doit être la plus plate possible. La bande passante du microphone est la bande de fréquence pour laquelle la sensibilité ne diffère pas de plus de  $3dB$  par rapport à la sensibilité maximum.

Un microphone omnidirectionnel a une sensibilité indépendante de la direction d'incidence du son. Dans le cas contraire le microphone est dit directif. Sa fonction de directivité est donnée par

$$h(\theta) = \frac{s(\theta)}{s_{axe}} \quad (3.4)$$

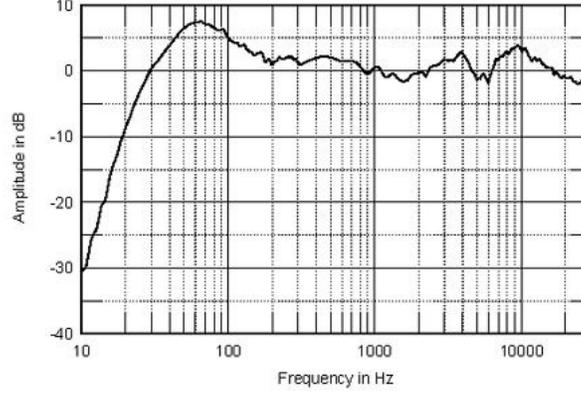


FIGURE 3.4 – Courbe d'étalonnage d'un microphone.

où  $s(\theta)$  et  $s_{axe}$  sont les sensibilités du microphone pour une onde arrivant avec un angle  $\theta$  et dans l'axe du microphone. Des exemples de diagrammes de directivité de microphones sont donnés sur les figures 3.5 et 3.6. On utilise aussi souvent un sonomètre, voir la figure 3.7, qui est un microphone avec un système d'analyse permettant au minimum d'afficher le niveau sonore mesuré. Il permet parfois d'afficher aussi le spectre du son.

Pour estimer la sensibilité d'un microphone, prenons le cas d'un microphone électrostatique. Ce microphone est un condensateur avec une capacité donnée par (voir figure 3.8)

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d-x} = \frac{C_0}{1 - \frac{x}{d}} \approx C_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right) \quad (3.5)$$

où  $C_0$  et  $C$  sont respectivement les capacités du condensateur au repos et soumis à une onde acoustique.  $S$  et  $d$  sont les surfaces et distances entre les armatures.  $x$  est la variation de distance engendrée par l'onde acoustique et  $\epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$  est la permittivité du vide. Cette capacité permet de relier la tension  $V$  et les charges  $Q$  aux bords du condensateur par (voir figure 3.9)

$$Q = CV \quad (3.6)$$

Soit

$$Q_0 + q = C_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right) (V_0 + v) \quad (3.7)$$

où  $q$  et  $v$  sont respectivement les variations de charge et de tension dues à l'onde acoustique. Au premier ordre, cela donne

$$q = C_0 v + C_0 V_0 \frac{x}{d} \quad (3.8)$$

En notant  $E$  le champ électrique entre les armatures et  $e$  sa variation due à l'onde acoustique, nous avons également la relation

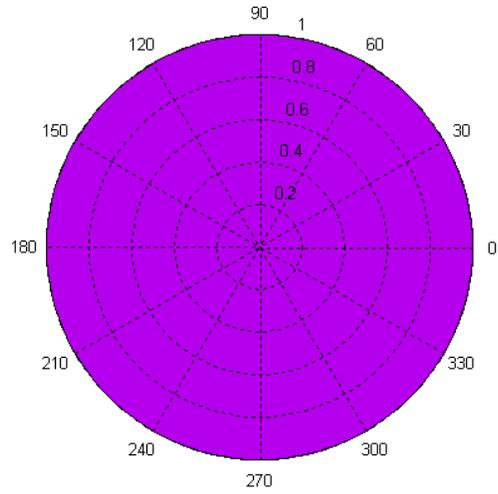
$$E = E_0 + e = \frac{V}{d} = \frac{V_0 + v}{d-x} \quad (3.9)$$

Soit au premier ordre

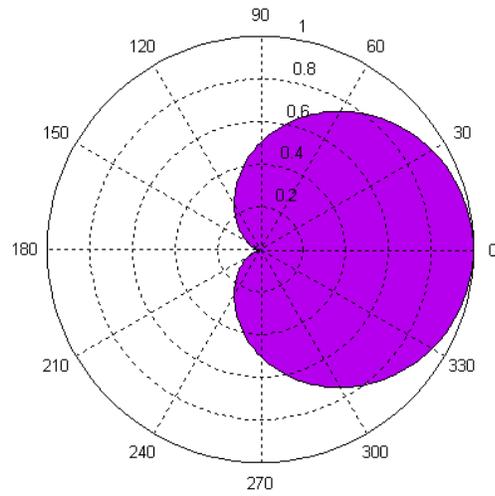
$$v = ed - E_0 x \quad (3.10)$$

Cette variation de tension est équilibrée par la résistance du microphone, soit (voir figure 3.10)

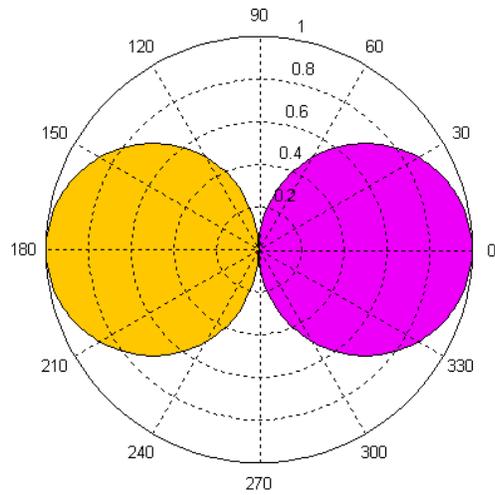
$$v = -Ri = -R\dot{q} \quad (3.11)$$



a)



b)



c)

FIGURE 3.5 – Directivité de microphones : a) omnidirectionnel, b) cardioïde et c) bidirectionnel.

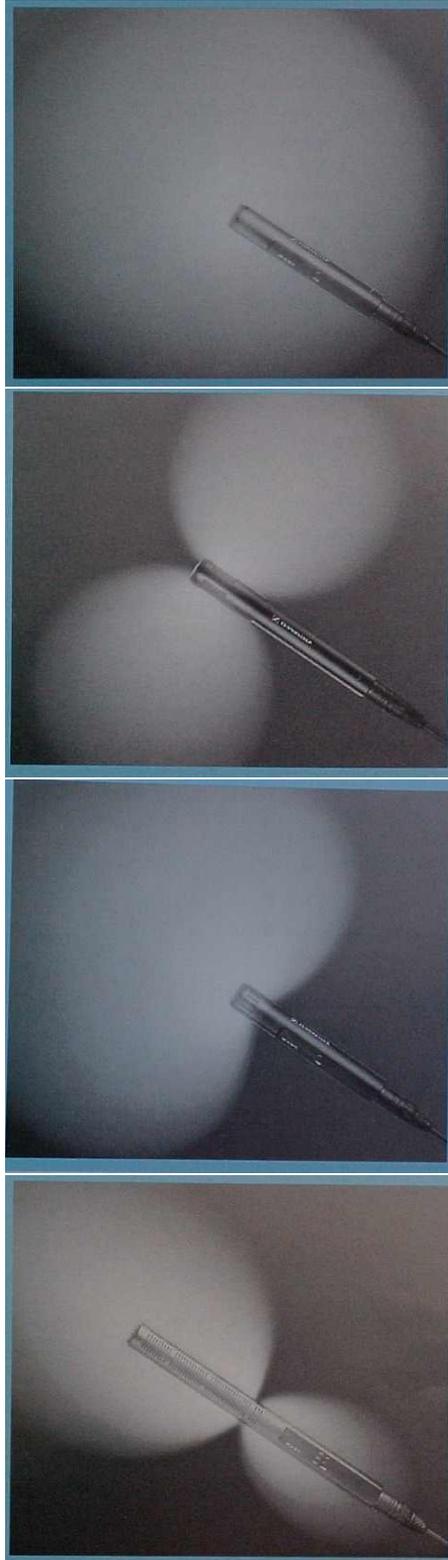


FIGURE 3.6 – Directivité de microphones.



FIGURE 3.7 – Sonomètre.

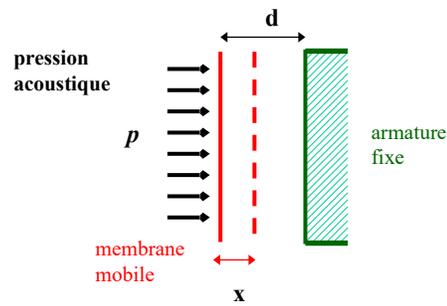


FIGURE 3.8 – Condensateur plan.

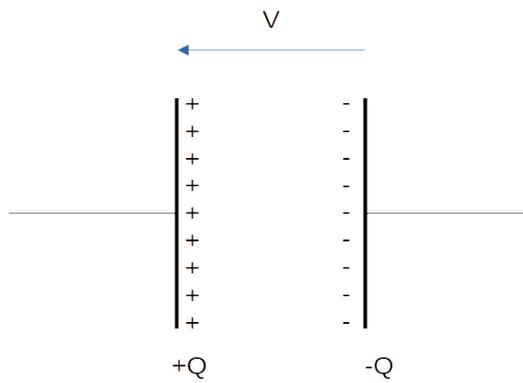


FIGURE 3.9 – Charges et tension aux bornes d'un condensateur plan.

D'autre part, le microphone est aussi un système mécanique qui peut être assimilé à un système unidimensionnel en raison de sa petite taille. Notant  $m$  sa masse,  $c$  son coefficient d'amortissement

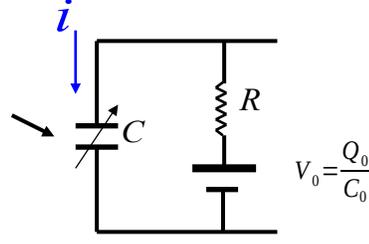


FIGURE 3.10 – Schéma électrique du microphone.

et  $k$  sa raideur, il vérifie

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = EQ - E_0Q_0 + pS = E_0q + eQ_0 + pS = E_0q + \frac{eC_0E_0}{d} + pS \quad (3.12)$$

où les deux premiers membres de droite sont la force électrostatique d'attraction et le troisième membre la force exercée par la pression acoustique. En rassemblant les équations électrique et mécanique, nous obtenons finalement le système de trois équations décrivant le comportement du microphone

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= E_0q + \frac{eC_0E_0}{d} + pS \\ R\dot{q} + ed - E_0x &= 0 \\ q &= -C_0R\dot{q} + C_0V_0\frac{x}{d} \end{aligned} \quad (3.13)$$

En passant dans le domaine fréquentiel, notant  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{P}$  les amplitudes complexes des déplacements, champs électriques, charges et champs de pression, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\omega^2 m\tilde{X} - i\omega c\tilde{X} + k\tilde{X} &= E_0\tilde{Q} + \frac{\tilde{E}C_0E_0}{d} + \tilde{P}S \\ -i\omega R\tilde{Q} + \tilde{E}d - E_0\tilde{X} &= 0 \\ \tilde{Q} &= i\omega C_0R\tilde{Q} + C_0V_0\frac{\tilde{X}}{d} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La dernière relation donne

$$\tilde{Q} = \frac{C_0V_0\tilde{X}}{d(1 - i\omega C_0R)} = Z_q\tilde{X} \quad (3.15)$$

et la seconde

$$\tilde{E} = i\omega R\tilde{Q}/d + E_0\tilde{X}/d = \frac{i\omega RC_0V_0\tilde{X}}{d^2(1 - i\omega C_0R)} + E_0\tilde{X}/d = Z_e\tilde{X} \quad (3.16)$$

L'impédance mécanique est donnée par

$$Z_m = \frac{F_m}{-i\omega X} = -i\omega m + c - \frac{k}{i\omega} \quad (3.17)$$

On obtient finalement

$$\tilde{X} = -\frac{\tilde{P}S}{i\omega Z_m + E_0Z_q + \frac{C_0E_0Z_e}{d}} \quad (3.18)$$

et la sensibilité du microphone est

$$s = \frac{R\tilde{I}}{\tilde{P}} = \frac{-Ri\omega\tilde{Q}}{\tilde{P}} = \frac{i\omega RSZ_q}{i\omega Z_m + E_0 Z_q + \frac{C_0 E_0 Z_e}{d}} \quad (3.19)$$

Cela permet d'étudier la variation de cette sensibilité en fonction des paramètres électrique et mécanique du microphone.

## 3.2 Haut-parleur

Le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique est très semblable au microphone électrodynamique et est présenté sur les figures 3.11 et 3.12a. Dans ce cas, la bobine reçoit un courant électrique  $i$ . Comme la bobine est plongée dans un champ magnétique  $B$ , elle est soumise à la force de Laplace  $F = iBl$ . La membrane qui est soumise à cette force reproduit les variations du courant électrique  $i$ .

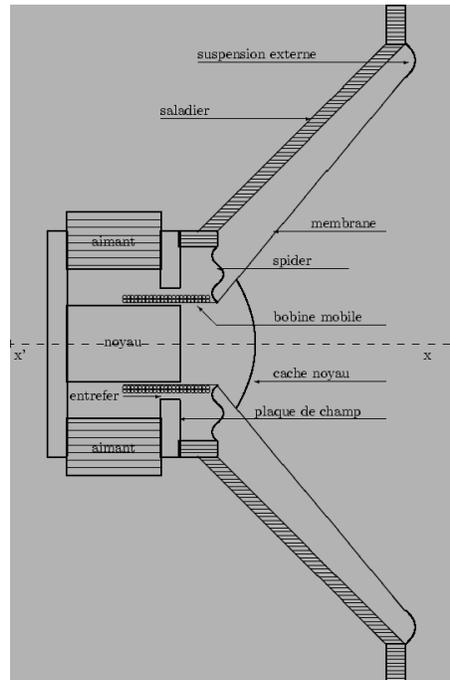


FIGURE 3.11 – Schéma d'un haut-parleur.

L'équation électrique est

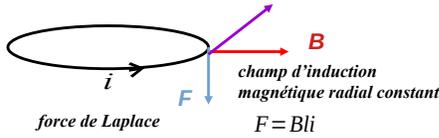
$$u = Ri + L \frac{di}{dt} - Bl\dot{x}(t) \quad (3.20)$$

ou en fréquence

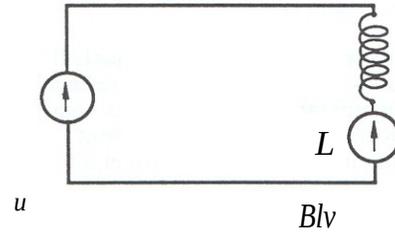
$$\tilde{U} = Z_e \tilde{I} + i\omega Bl\tilde{X} \quad (3.21)$$

avec l'impédance électrique donnée par

$$Z_e = R - i\omega L \quad (3.22)$$



(a) Force agissant sur le circuit électrique d'un haut-parleur.



(b) Composantes du circuit électrique d'un haut-parleur.

FIGURE 3.12 – Schéma électrique d'un haut-parleur.

L'équation mécanique est

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -Bli \quad (3.23)$$

ou en fréquence

$$Z_m(-i\omega\tilde{X}) = -Bl\tilde{I} \quad (3.24)$$

avec l'impédance mécanique donnée par

$$Z_m = -i\omega m + c - \frac{k}{i\omega} \quad (3.25)$$

En regroupant les relations électrique et mécanique, nous obtenons le comportement global du haut-parleur donné par

$$Z_e^* \tilde{I} = \tilde{U} \quad (3.26)$$

avec

$$Z_e^* = Z_e + B^2 l^2 \frac{1}{Z_m} \quad (3.27)$$

La puissance électrique dissipée dans le haut-parleur est l'énergie électrique reçue par le haut-parleur dont une grande partie est transformée en chaleur et une petite partie est convertie en puissance acoustique. La puissance électrique est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de watts. Son expression est  $P = UI$  où  $U$  est la tension et  $I$  l'intensité électrique. Le rapport entre la puissance acoustique rayonnée et la puissance électrique dissipée est de l'ordre de quelques pour cent. Le rendement du haut-parleur est le niveau de pression mesuré dans l'axe du haut-parleur lorsqu'il reçoit une puissance électrique de 1W par exemple 90dB/1W/1m.

La courbe de réponse en fréquence d'un haut-parleur comme celle de la figure 3.13, est le niveau sonore délivré par le haut-parleur pour chaque fréquence lorsqu'on lui envoie un signal électrique de puissance constante. La bande passante est le domaine de fréquence pour lequel la réponse n'est pas inférieure à 3dB par rapport au maximum.

Le niveau acoustique produit par un haut-parleur dépend de l'angle entre l'axe du haut-parleur et la droite reliant le haut-parleur au point de mesure. Il possède une directivité comme pour les microphones, voir des exemples sur la figure 3.14. Si le haut-parleur rayonne librement dans l'espace, dans le domaine des basses fréquences, le son produit par une face de la membrane est en opposition de phase avec le son produit par la face opposée. Il en résulte un rayonnement de dipôle qui atténue beaucoup les basses fréquences. Pour éviter cela, le haut-parleur est monté sur

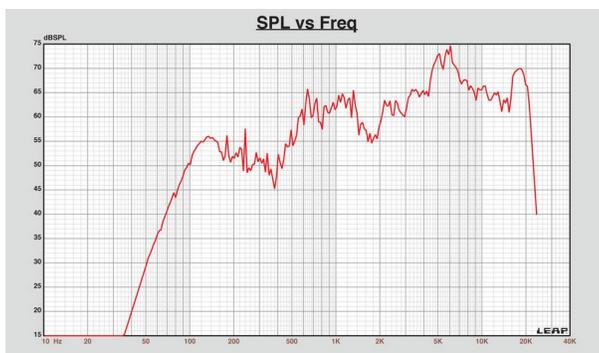


FIGURE 3.13 – Réponse en fréquence d’un haut-parleur.

une enceinte de telle façon que le rayonnement ne se fasse que d’un seul côté, voir la figure 3.15. Un haut-parleur ne peut pas rayonner le son efficacement pour toutes les fréquences. C’est pourquoi une enceinte acoustique, comme celle de la figure 3.15, contient en général plusieurs haut-parleurs adaptés à des bandes de fréquences particulières.

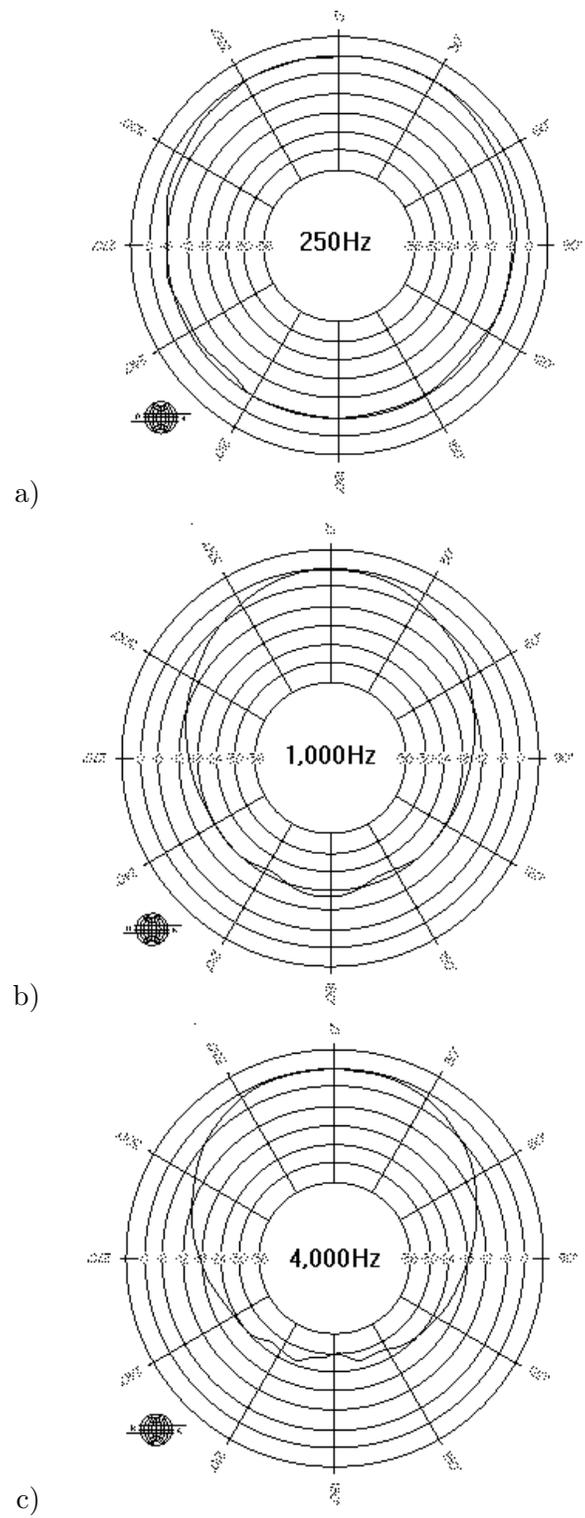


FIGURE 3.14 – Directivité d'un haut parleur : a) 250 Hz, b) 1000 Hz et c) 4000 Hz.

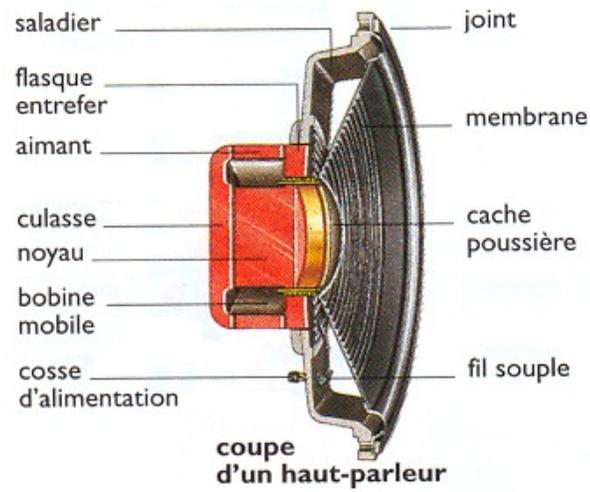


FIGURE 3.15 – Haut-parleur et enceinte acoustique.



# Chapitre 4

## Les signaux sonores

### 4.1 Types de signaux

Les grandeurs mesurables en acoustique sont des signaux dépendant du temps. Ces signaux peuvent être de natures très variables. Il y a des sons harmoniques, continus, impulsionnels, ... On distingue les signaux à durée finie, des signaux à durée que l'on peut supposer infinie. Un signal peut aussi être déterministe, c'est à dire prédictible à chaque instant, ou bien aléatoire si sa valeur ne peut être prédite. Parmi les signaux déterministes certains sont périodiques. Ces signaux périodiques se reproduisent à l'identique au bout d'un certain temps. Parmi ceux-ci certains sont sinusoïdaux. Une classification des signaux déterministes est donnée sur la figure 4.1. Une visualisation de ces signaux est donnée sur les figures 1.8 et 1.9.

Un signal périodique est tel qu'il existe une période  $T$  vérifiant

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \quad (4.1)$$

Un signal d'énergie finie vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)| dt < +\infty \quad (4.2)$$

Un signal de puissance finie est tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x^2(t)| dt < +\infty \quad (4.3)$$

Les signaux aléatoires se classifient selon la logique indiquée sur la figure 4.2. Les signaux stationnaires sont ceux dont les propriétés statistiques telles que la moyenne, la variance sont constantes au cours du temps. Les signaux ergodiques sont tels qu'une moyenne statistique peut être remplacée par une moyenne sur le temps.

Un bruit blanc est un signal aléatoire dont la densité spectrale est constante en fonction de la fréquence. Toutes les fréquences possèdent donc le même niveau sonore et l'énergie acoustique double en passant d'une octave à l'octave supérieure. Ce type de signal est utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle de différents systèmes. En effet, comme le bruit blanc excite toutes les fréquences avec la même énergie, il permet de tracer la courbe de réponse en fréquence. Un bruit rose est un bruit dont le niveau par bande d'octave est constant. La densité spectrale doit donc être divisée par deux d'une octave à l'octave supérieure. Il est par exemple utilisé en acoustique des salles pour évaluer l'isolement acoustique d'une paroi.

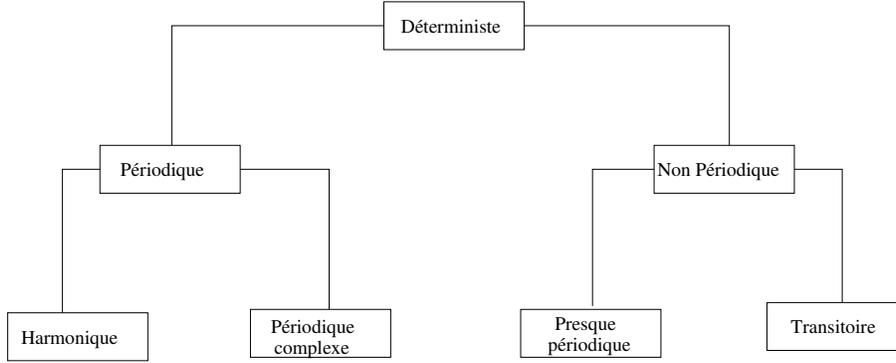


FIGURE 4.1 – Classification des signaux déterministes.

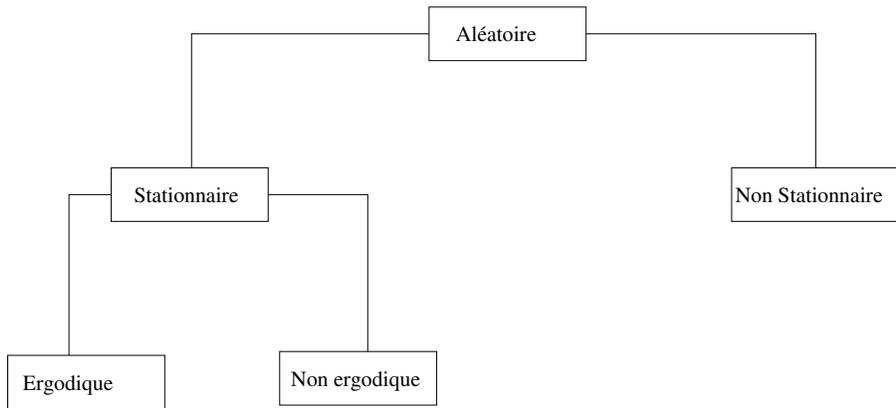


FIGURE 4.2 – Classification des signaux aléatoires.

## 4.2 Analyse temporelle

La première façon d’analyser les signaux est d’utiliser les informations contenues dans le signal temporel. En acoustique, la plupart du temps la moyenne temporelle du signal est nulle et de toute façon la composante continue apporte peu d’information sur la nature du signal. La pression efficace définie par

$$p_{eff}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p^2(t) dt \quad (4.4)$$

donne par contre une information sur le contenu énergétique moyen du signal.

Comme indiqué dans le chapitre 1, les niveaux sonores de bruits continus peuvent aussi être analysés par différentes méthodes qui sont particulièrement adaptées pour des signaux non stationnaires. On distingue ainsi le  $L_5$  niveau dépassé pendant 5% du temps, le  $L_{50}$  niveau dépassé pendant 50% du temps et le  $L_{90}$  niveau dépassé pendant 90% du temps. L’application principale est à l’analyse du bruit de la circulation routière.

On définit aussi le  $L_{eq}$  par

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{T} \int_0^T 10^{L(t)/10} dt \right)$$

qui est le niveau énergétique moyen contenu dans le signal pendant la durée  $T$ . Le niveau énergétique  $L(t)$  est généralement exprimé en décibel A.

Enfin, des notions importantes sont les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélacion entre deux signaux. La fonction d'autocorrélation indique la dépendance de la valeur du signal à un instant par rapport aux valeurs du même signal à d'autres instants. La fonction d'intercorrélacion indique la dépendance entre les valeurs de deux signaux. La fonction d'autocorrélation se calcule par

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt \quad (4.5)$$

tandis que la fonction d'intercorrélacion des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  est donnée par

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt \quad (4.6)$$

### 4.3 Discrétisation du signal

L'échantillonnage consiste à prendre la valeur du signal en un ensemble discret de points en temps. Généralement l'espacement entre deux points en temps est constant et appelé période d'échantillonnage. Si on note  $T$  cette période alors  $F = 1/T$  est la fréquence d'échantillonnage. Le théorème de Shannon montre qu'un signal peut être reconstruit exactement à partir des valeurs échantillonnées si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le signal.

Soit  $f(t)$  une fonction dépendant du temps, on définit un échantillonnage de période  $T$  de  $f$  par la distribution

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (4.7)$$

La transformée de Fourier de  $f_s$  est

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{i\omega nT} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\omega_s = 2\pi/T$  est la pulsation associée à la fréquence d'échantillonnage et  $F$  est la transformée de Fourier de  $f$ . Pour éviter le phénomène d'aliasing, il faut que le support de  $F$  soit contenu dans l'intervalle  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ . Soit  $f_0$  la plus haute fréquence contenue dans le spectre de  $f$ , il faut donc que

$$\frac{1}{2T} \geq f_0 \quad (4.9)$$

En prenant la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, (N-1)T]$  on peut définir la transformée de Fourier discrète et en obtenir un échantillonnage aux fréquences  $\frac{2\pi k}{NT}$  par

$$\hat{F}\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.10)$$

soit en modifiant la notation

$$\hat{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.11)$$

On obtient une valeur approchée de la transformée de Fourier de  $f$  qui est la convolution de la valeur exacte  $F$  par la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage qui est ici la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, (N-1)T]$ . Les calculs numériques sont effectués par FFT et permettent d'obtenir des estimations des puissances spectrales.

## 4.4 Analyse spectrale

L'analyse fréquentielle d'un signal consiste à déterminer la répartition de l'énergie du signal en fonction de la fréquence. La fonction densité spectrale de puissance décrit cette répartition. Une possibilité pour déterminer cette fonction est de prendre une bande de fréquence comprise entre  $f$  et  $f + \delta f$  et de filtrer le signal par un filtre passe bande entre ces deux fréquences puis de calculer la valeur quadratique moyenne du résultat. On notant  $x_{eff}^2(f, \delta f)$  cette valeur, nous avons, si  $\delta f$  est assez petit,

$$x_{eff}^2(f, \delta f) = G_{xx}(f) \delta f \quad (4.12)$$

où  $G_{xx}(f)$  est la densité spectrale de puissance du signal  $x(t)$  à la fréquence  $f$ .

La fonction d'autocorrélation est liée à la puissance spectrale par les relations

$$\begin{aligned} G_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi f \tau i} d\tau \\ R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) e^{2\pi f \tau i} df \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nous avons aussi

$$x_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(f) df = R_{xx}(0) \quad (4.14)$$

qui signifie que la valeur quadratique moyenne d'un signal  $x(t)$  est égale à l'intégrale de la puissance spectrale sur tout le spectre ou à la valeur de la fonction d'autocorrélation en zéro. De même la fonction d'intercorrélacion est liée aux interspectres par les relations

$$\begin{aligned} G_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-2\pi f \tau i} d\tau \\ R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(f) e^{2\pi f \tau i} df \end{aligned} \quad (4.15)$$

On peut aussi tracer les spectres en octave ou tiers d'octave. Il s'agit de sommer l'énergie contenue dans la bande d'octave ou de tiers d'octave choisie pour passer de la description de la puissance spectrale, dite en bande fine, à la description en octave ou tiers d'octave. Dans tous les cas nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |p|^2 dt = \sum_{i=1}^{i=n} S(f_i) \quad (4.16)$$

qui exprime que l'énergie totale d'un signal est toujours égale à la somme des énergies contenues dans les bandes d'octave ou de tiers d'octave.

Nous avons aussi le théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(f)|^2 df \quad (4.17)$$

qui montre l'égalité entre l'énergie calculée dans les domaines réels et fréquentiels.

## 4.5 Analyse par octave

Souvent la connaissance du niveau absolu de bruit ou de vibration n'est pas suffisante mais l'on désire aussi connaître la répartition de l'énergie en fonction de la fréquence. Il existe deux types de représentation possibles. La première consiste à donner la densité d'énergie en fonction de la fréquence comme sur la figure 4.3. On observe, dans le cas de cette figure, un signal composé de quelques raies et d'un spectre continu de niveau plus faible.

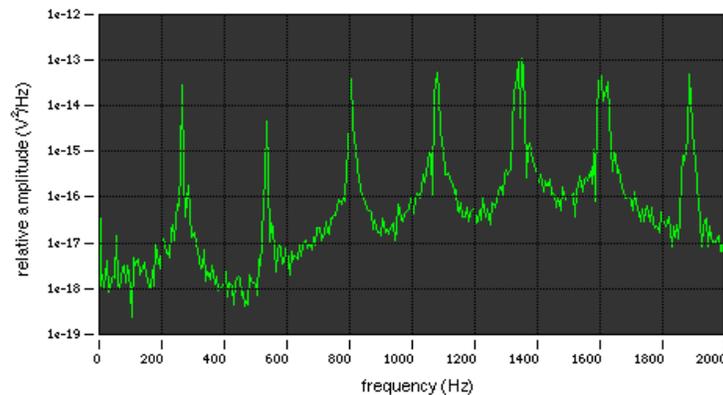


FIGURE 4.3 – Analyse spectrale en bande fine.

L'analyse en bande fine est une analyse très détaillée du spectre mais qui est parfois trop riche pour les applications pratiques. Une autre approche est de mesurer les niveaux sonores par des analyses spectrales à bande de largeur relative constante, dont les plus usuelles sont les octaves et les tiers d'octave. Les fréquences centrales  $f_m$  et extrêmes  $f_1$  et  $f_2$  des octaves sont reliées par

$$\begin{aligned} f_m &= (f_1 f_2)^{1/2} \\ f_2 &= 2f_1 \\ f_1 &= \frac{f_m}{\sqrt{2}} \\ f_2 &= \sqrt{2}f_m \end{aligned} \quad (4.18)$$

pour les tiers d'octave les relations sont les suivantes

$$\begin{aligned} f_m &= (f_1 f_2)^{1/2} \\ f_2 &= 2^{1/3} f_1 \\ f_1 &= \frac{f_m}{2^{1/6}} \\ f_2 &= 2^{1/6} f_m \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bande	Octave en Hz			Tiers d'octave en Hz		
	Limite inf	Centre	Limite sup	Limite inf	Centre	Limite sup
11				9,9	12,5	14,1
12	11	16	22	14,1	16	17,8
13				17,8	20	22,4
14				22,4	25	28,2
15	22	31,5	44	28,2	31,5	35,5
16				35,5	40	44,7
17				44,7	50	56,2
18	44	63	88	56,2	63	70,8
19				70,8	80	89,1
20				89,1	100	112
21	88	125	177	112	125	141
22				141	160	178
23				178	200	224
24	177	250	355	224	250	282
25				282	315	355
26				355	400	447
27	355	500	710	447	500	562
28				562	630	708
29				708	800	891
30	710	1000	1420	891	1000	1122
31				1122	1250	1413
32				1413	1600	1778
33	1420	2000	2840	1778	2000	2239
34				2239	2500	2818
35				2818	3150	3548
36	2840	4000	5680	3548	4000	4467
37				4467	5000	5623
38				5623	6300	7079
39	5680	8000	11360	7079	8000	8913
40				8913	10000	11220
41				11220	12500	14130
42	11360	16000	22720	14130	16000	17780
43				17780	20000	22390

TABLE 4.1 – Fréquences centrales des octaves et tiers d'octave.

Les valeurs des fréquences centrales sont normalisées et sont données dans le tableau 4.1. Les sons usuels sont essentiellement répartis dans les octaves de 100Hz à 5000Hz. La puissance spectrale dans une bande de fréquence  $\Delta f$  centrée sur  $f$  est donnée par

$$G(f) = \frac{1}{T\Delta f} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt \quad (4.20)$$

où  $x(f, \Delta f, t)$  désigne le signal filtré par un filtre passe-bande de largeur  $\Delta f$  centré sur  $f$ , voir figure 4.4.

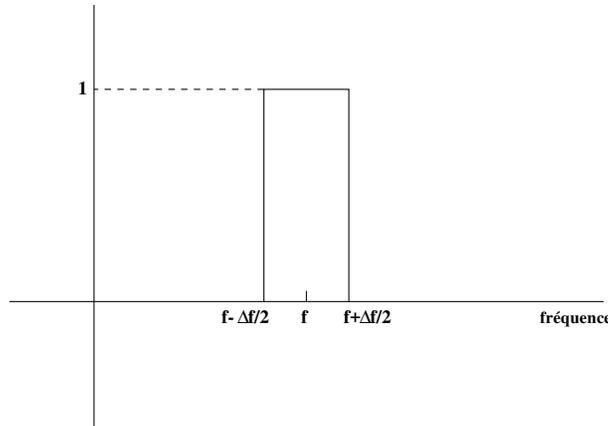


FIGURE 4.4 – Filtre passe-bande.

Pour avoir une analyse en bande fine telle que celle de la figure 4.3, il faut passer à la limite suivante

$$T \rightarrow \infty, \Delta f \rightarrow 0, T\Delta f \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

On obtient alors la densité d'énergie en fonction de la fréquence. Le calcul effectif de cette densité à partir de valeurs mesurées s'effectue par

$$G(f) = \frac{2}{n_d T} \sum_{i=1}^{n_d} |X_i(f, T)|^2 \quad (4.22)$$

$X_i$  est la transformée de Fourier du  $i$ ème échantillon de longueur  $T$ . On moyenne sur  $n_d$  échantillons. Il faut  $T \rightarrow \infty$ , et  $n_d \rightarrow \infty$ .

Une analyse du son par tiers d'octave conduit à la représentation illustrée sur la figure 4.5. Les valeurs sont obtenues par la formule (4.20) dans laquelle  $f$  désigne la fréquence centrale du tiers d'octave et  $\Delta f$  est la largeur du tiers d'octave. Le niveau sonore global peut être calculé à partir de la somme des niveaux dans chaque bande de fréquence par

$$L_{tot} = 10 \log_{10} \left( \sum_{i=1}^{i=N} 10^{L_i/10} \right) \quad (4.23)$$

où l'on a noté  $L_i$  le niveau énergétique dans la bande  $i$  de fréquence.

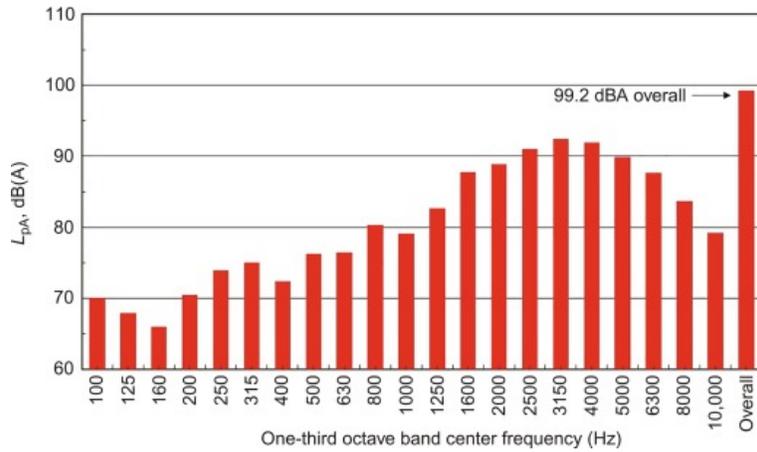


FIGURE 4.5 – Analyse spectrale en tiers d’octave.

## 4.6 Fonctions de transfert

### 4.6.1 Définition

Un système à une entrée et une sortie relie un signal d’entrée  $x(t)$  à un signal de sortie  $y(t)$  comme sur la figure 4.6. Des exemples de tels couples sont pour  $x(t)$  le signal envoyé à un haut-

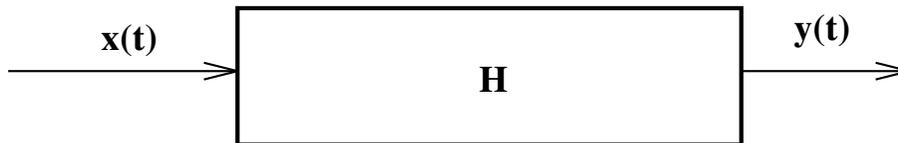


FIGURE 4.6 – Système à une entrée et une sortie.

parleur (noté  $y(t)$  sur la figure 4.7) et pour  $y(t)$  le signal mesuré à un microphone (noté  $e(t)$  sur la figure 4.7). Un exemple en mécanique des structures est pour  $x(t)$  la force appliquée  $F(t)$  en un

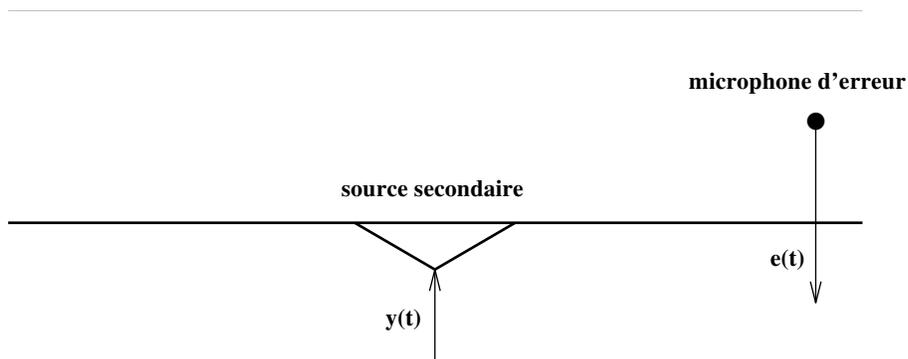


FIGURE 4.7 – Signaux acoustiques.

point et pour  $y(t)$  le déplacement mesuré en un autre point (voit figure 4.8).

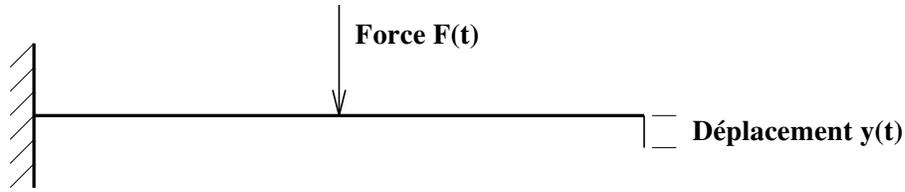


FIGURE 4.8 – Signaux pour une poutre.

Lorsque le système est linéaire, l'entrée est reliée à la sortie par une relation du type

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (4.24)$$

$H$  est la fonction de transfert du système. Cette formulation est très générale et est valable pour tous les systèmes physiques linéaires.

#### 4.6.2 Propriétés des fonctions de transfert

##### Invariance dans le temps

Si les propriétés du système ne dépendent pas du temps, la fonction de transfert doit être invariante lors d'une translation dans le temps. Par conséquent, elle ne peut dépendre que de  $t - \tau$  et on obtient

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (4.25)$$

##### Causalité

La causalité exprime le fait que la sortie du système ne peut pas précéder l'entrée et par conséquent si  $x(t) = 0$  pour  $t < t_0$ , on doit aussi avoir  $y(t) = 0$  pour  $t < t_0$ . L'intégrale doit donc s'écrire

$$y(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (4.26)$$

Dans le cas d'un signal  $x(t)$  que l'on discrétise en  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  avec  $x_i = x(iT)$ . On peut écrire les relations précédentes sous forme discrète, par exemple la convolution devient

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=N} H_i x_{n-i} \quad (4.27)$$

##### Comportement en fréquence

En utilisant le fait que la transformation de Fourier transforme les convolutions en produits nous obtenons

$$y(\omega) = H(\omega)x(\omega) \quad (4.28)$$

Ainsi le système agit en modulant le signal d'entrée pour chaque fréquence.

##### Détermination de la fonction de transfert

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la fonction de transfert  $H$ . L'une d'elles consiste à envoyer une impulsion et à mesurer le signal de sortie. En effet si  $x(t) = \delta(t)$ , on obtient

$$y(t) = \int_0^{+\infty} H(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = H(t) \quad (4.29)$$

### 4.6.3 Cas de plusieurs systèmes

On peut déterminer la fonction de transfert globale d'un ensemble de sous-systèmes.

#### Systèmes en série

La figure 4.9 montre un système composé de deux sous-systèmes en série. Dans ce cas nous

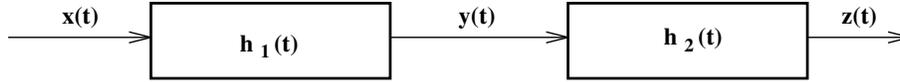


FIGURE 4.9 – Systèmes en série.

avons

$$\begin{aligned}y(\omega) &= h_1(\omega)x(\omega) \\z(\omega) &= h_2(\omega)y(\omega)\end{aligned}\tag{4.30}$$

et par conséquent la fonction de transfert globale est

$$h(\omega) = h_2(\omega)h_1(\omega)\tag{4.31}$$

ce qui donne en temps

$$h(t) = \int_0^t h_2(\tau)h_1(t - \tau)d\tau\tag{4.32}$$

#### Systèmes en parallèle

La figure 4.10 montre un système composé de deux sous-systèmes en parallèle. Dans ce cas nous

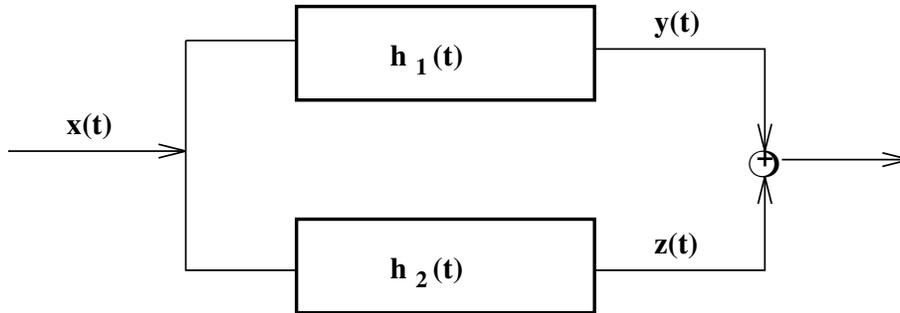


FIGURE 4.10 – Systèmes en parallèle.

avons

$$\begin{aligned}y(\omega) &= h_1(\omega)x(\omega) \\z(\omega) &= h_2(\omega)x(\omega)\end{aligned}\tag{4.33}$$

et par conséquent la fonction de transfert globale est

$$h(\omega) = h_1(\omega) + h_2(\omega)\tag{4.34}$$

ce qui donne en temps

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)\tag{4.35}$$

# Chapitre 5

## Perception du son

### 5.1 Effets du son

Le son a très peu d'effet mécanique sur les structures. Le principal effet est sur l'homme à travers son système auditif. Pour pouvoir comprendre comment se fait la perception du son, il faut connaître les caractéristiques essentielles du système auditif.

L'oreille se compose de trois parties : l'oreille externe, formée du pavillon et du conduit auditif externe qui aboutit au tympan, l'oreille moyenne au delà du tympan qui contient les osselets et l'oreille interne formée par le labyrinthe rempli de liquide. Un schéma est donné sur la figure 5.1. La cochlée dans l'oreille interne transforme les pressions sonores en impulsions nerveuses qui sont conduites au cerveau par le nerf auditif. Cette transformation est effectuée dans l'organe de Corti par des cellules sensorielles, les cellules ciliées. Les vibrations sonores déforment les cils, qui excitent ensuite le nerf auditif. Des muscles permettent d'adapter la raideur du tympan et les points d'appui des leviers formés par les osselets en fonction de l'intensité sonore. Cependant cette action n'est pas instantanée et une exposition rapide à un bruit intense peut présenter des dangers. L'accroissement de raideur du tympan ou la détérioration des cils dans l'organe de Corti sont les causes les plus fréquentes de surdité.

L'oreille n'a pas une réponse linéaire et ses capacités sont limitées que ce soit en fréquence ou en intensité. L'oreille n'est sensible qu'aux sons entre 20Hz et 20kHz, voir figure 5.2. Les infrasons sont les sons inférieurs à 20Hz et les ultrasons ceux supérieurs à 20kHz. La parole se situe principalement entre 100Hz et 6000Hz, la musique entre 50Hz et 16000Hz. Différentes études ont permis de tracer des courbes isosoniques donnant la même sensation auditive à des fréquences et à des niveaux sonores différents, voir figure 5.3. Par exemple un son de 20Hz doit être 70dB plus fort qu'un son de 2000Hz pour produire la même sensation. La sensibilité de l'oreille varie beaucoup en fonction de la fréquence avec un maximum de sensibilité qui se situe vers 2000 Hz. La courbe la plus basse représente le seuil d'audition en fonction de la fréquence. Ce seuil est variable en fonction de la fréquence, néanmoins on retiendra la valeur de 0dB pour le seuil d'audition. Pour les intensités sonores élevées, on atteint le seuil de la douleur qui se situe vers 120dB.

Dans le tableau 5.1 sont indiqués les effets d'une modification du niveau sonore sur la perception. Nous pouvons constater qu'il faut une différence d'environ  $3dB$  sur le niveau sonore pour que l'on perçoive une différence significative entre les niveaux sonores. Une différence de 10dB sera perçue comme un doublement du niveau sonore.

Pour tenir compte de cette sensibilité de l'oreille, il est nécessaire de filtrer un bruit par la courbe

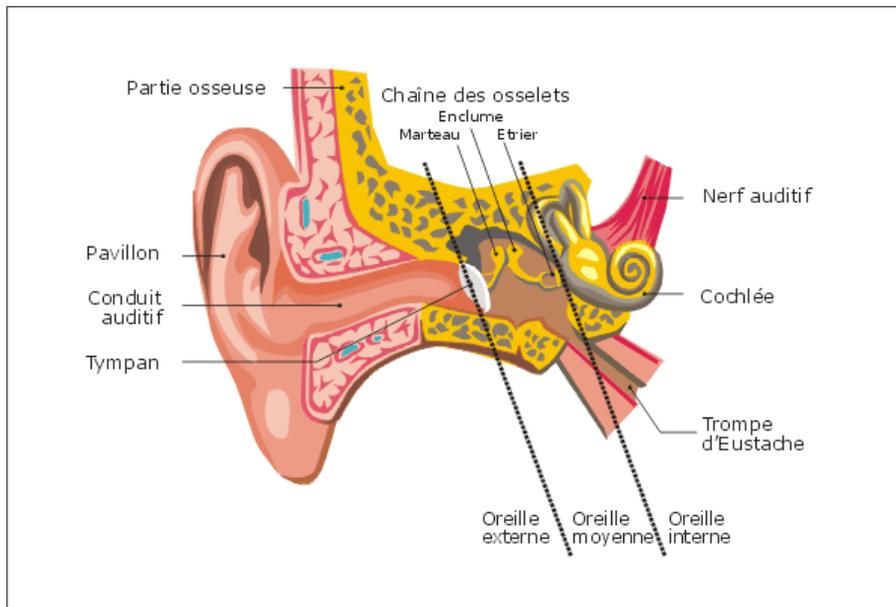


FIGURE 5.1 – Schéma de l'oreille.

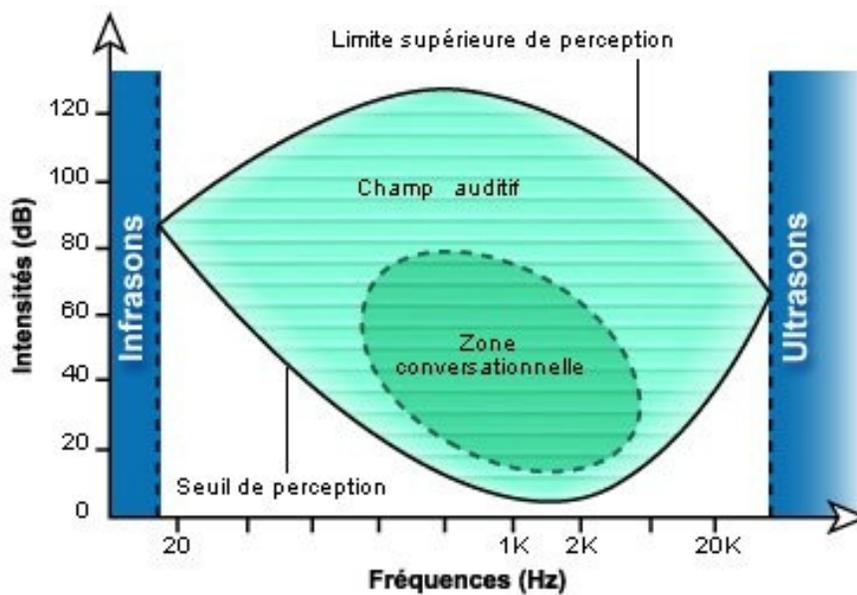


FIGURE 5.2 – Perception du son.

de pondération A représentée sur la figure 5.4 et dans le tableau 5.2, ce qui donne une mesure en dBA. La courbe de pondération A est obtenue à partir de la courbe isotonique pour le niveau de 40dB. Elle permet d'accorder plus d'importance aux fréquences les mieux entendues et donne ainsi une estimation plus réaliste du niveau sonore entendu par l'oreille. Le même bruit mesuré sans ce filtrage est dit donné en dB Lin.

Pour qu'un son soit nettement perçu dans une ambiance bruyante, il faut que son niveau soit

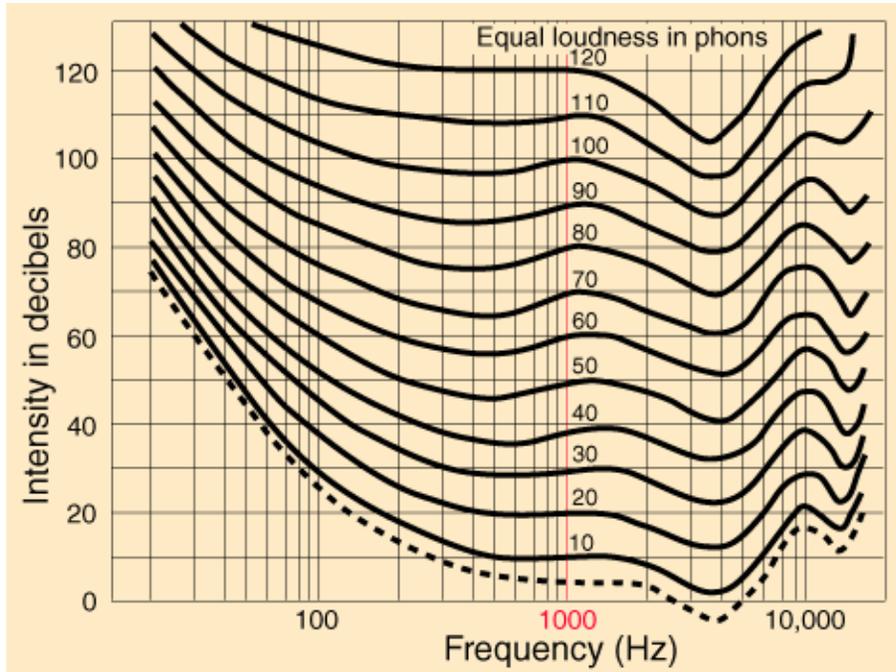


FIGURE 5.3 – Courbes isosoniques.

Changement du niveau sonore (dB)	Changement de la perception
3	Juste perceptible
5	Différence notable
10	Deux fois plus fort
15	Grand changement
20	Quatre fois plus fort

TABLE 5.1 – Perception des niveaux sonores.

Fréquence (Hz)	Pondération A (dB)
63	-26.2
125	-16.2
250	-8.7
500	-3.2
1000	0.0
2000	1.2
4000	1.0
8000	-1.1
16000	-6.7

TABLE 5.2 – Pondération A.

au moins  $15dB$  supérieur au niveau du bruit ambiant.

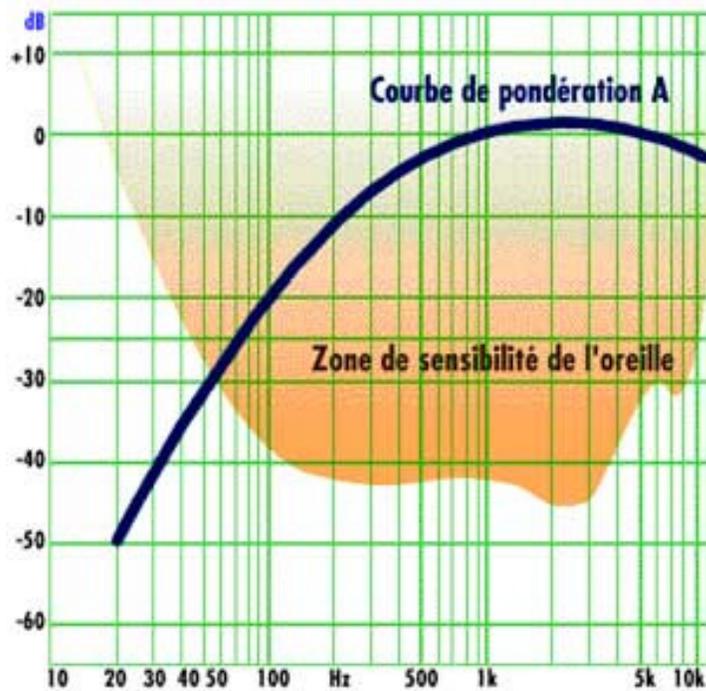


FIGURE 5.4 – Courbe de pondération A.

## 5.2 Indicateurs de bruit

Le bruit se présente généralement sous la forme d'une pression variable en fonction du temps. Il s'agit souvent d'un signal aléatoire comme celui montré sur la figure 5.5. Ce signal varie beaucoup d'un instant à l'autre. Pour pouvoir définir un niveau sonore équivalent, on pose

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p^2(t)}{p_0^2} dt \right) \quad (5.1)$$

Le signal de pression peut être mesuré en dB linéaire ou en dBA. Le plus courant est d'utiliser des dBA. On définit ainsi un niveau équivalent sur la durée T. Cette durée T peut être de quelques secondes ou de plusieurs heures suivant les applications envisagées.

Un autre indicateur possible est de définir le niveau dépassé pendant  $N\%$  du temps. Par exemple le  $L_{10}$  est le niveau dépassé pendant 10% du temps, voir la figure 5.6. Le  $L_{pmax}$  est le niveau maximum atteint durant la durée d'observation.

On définit aussi la dose de bruit admissible comme 85dB pendant 8h. La dose de bruit réelle doit être pondérée par la durée effective à laquelle on est soumis au bruit et par son niveau suivant la formule

$$L = L_{eq,T} + 10 \log_{10} \frac{T}{8} \quad (5.2)$$

ainsi un niveau de bruit de 89.2dB pendant 4h engendre une dose de bruit journalière de

$$L = 89.2 + 10 \log_{10} \frac{4}{8} = 89.2 - 3 = 86.2dB \quad (5.3)$$

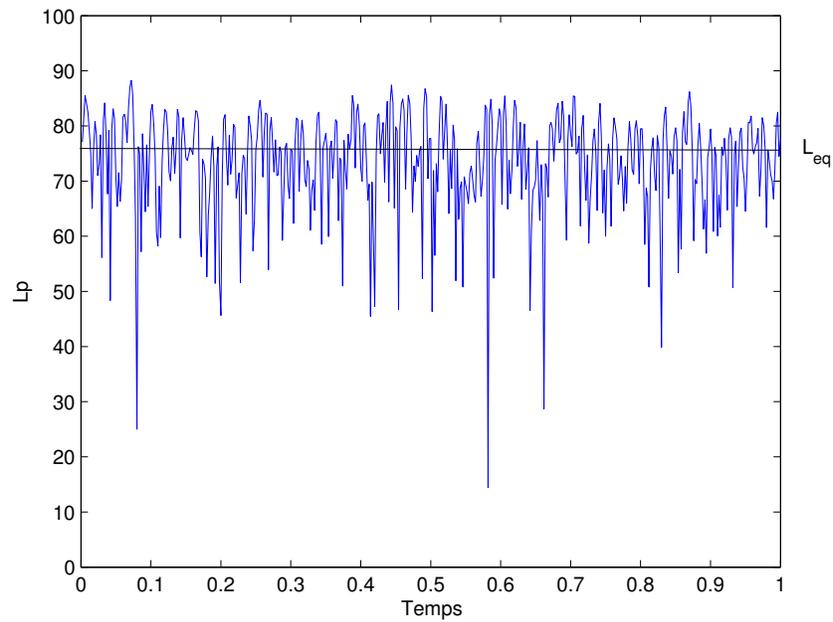


FIGURE 5.5 – Niveau sonore équivalent.

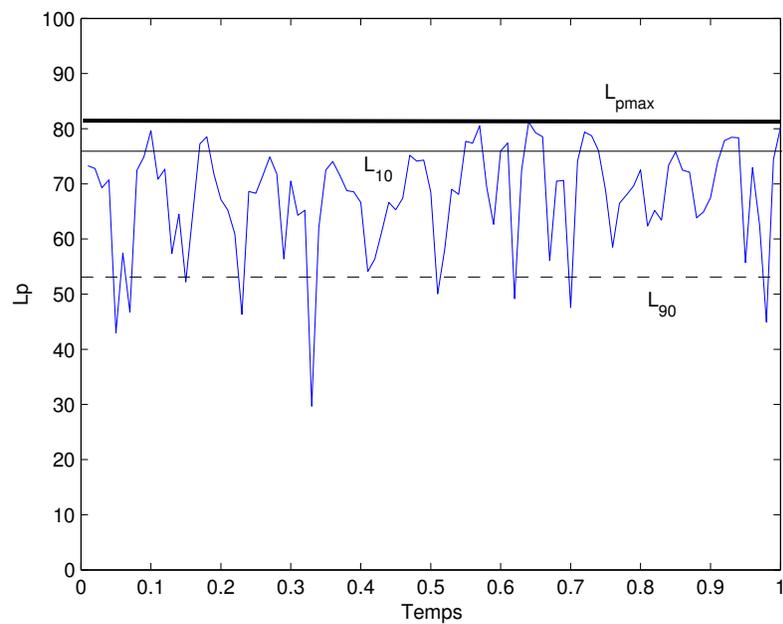


FIGURE 5.6 – Niveau en pourcentage du temps.

Dans le cas de bruits impulsionnels on veillera à ne pas dépasser le niveau de 140 dB. Un bruit impulsionnel est défini comme une augmentation de 40dB en moins de 0.5s. La limite de sécurité

pour l'oreille est fixée à 140dB. A titre d'exemple l'oreille peut supporter 130dB pendant plus de 2mn.

### 5.3 La gêne et les limites de danger

La perception d'un bruit se caractérise par une notion plus ou moins subjective appelée la gêne qui dépend de multiples facteurs comme l'intensité sonore, le spectre du bruit, sa durée mais aussi éventuellement de facteurs plus personnels comme l'état de santé ou l'acceptation plus ou moins grande du bruit en fonction de sa provenance. On admet généralement que, pour un bruit qui ne varie pas trop rapidement, la gêne ressentie varie comme l'énergie moyenne reçue, soit comme le  $L_{eq}$ . On peut aussi utiliser la notation  $L_{eq,T}$  si l'on veut insister sur la durée utilisée pour la mesure du niveau sonore. La durée  $T$  peut être de plusieurs heures quand il s'agit d'estimer la gêne due à un bruit de circulation automobile. Cette durée peut être réduite à une minute ou une seconde dans d'autres cas.

La qualité de l'audition d'un individu peut être mesurée par un audiogramme comme représenté sur la figure 5.7. Ces courbes mesurent l'écart entre une audition parfaite et la perception réelle des oreilles. Généralement, il y a des pertes auditives plus ou moins prononcées et principalement situées dans les hautes fréquences. La figure 5.8 montre trois niveaux possibles de pertes de faible à sévère. Des pertes de -10 à -25 dB sont normales. Les pertes réelles commencent de 30 à 45 dB. Des pertes sévères sont de 70 à 85dB tandis qu'au delà de 90dB les pertes sont profondes et la capacité d'audition très gravement compromise. L'âge influe aussi directement sur les capacités auditives. La figure 5.9 montre les capacités auditives moyennes d'une personne en fonction de son âge. On constate que la détérioration a lieu principalement dans les hautes fréquences. Les pertes d'audition ont pour conséquences des pertes de compréhension de la parole et des signaux. Les effets sont irréversibles et par conséquent seule la prévention est efficace. Les effets constatés sont une élévation du seuil d'audition, les sons de faible intensité ne sont plus perçus, et un abaissement du seuil de la douleur, des sons d'intensité normale pour la plupart des gens deviennent insupportables.

Des expositions de longues durées à des bruits peuvent être nuisibles. Cela provoque un assourdissement par suite du réflexe de diminution de sensibilité et si le bruit est trop intense ou s'il dure trop longtemps, une fatigue auditive plus ou moins réparable s'installe. Elle se manifeste par une élévation du seuil d'audition, variable avec la fréquence. Cette fatigue disparaît progressivement au cours du repos. La figure 5.10 donne la perte auditive à différents instants suivant une exposition à un bruit fort. On a fait écouter à un panel représentatif un bruit blanc pendant 10 mn avec un niveau acoustique de 110 dB. Une minute après la suppression du bruit, on fait subir un premier audiogramme à l'ensemble du panel. Leurs moyennes ont donné la courbe notée 1mn. On réalise un second audiogramme après 15 mn de repos, puis un troisième après une heure et ainsi de suite. Cependant au-delà d'une certaine dose d'énergie reçue, le temps de récupération demande un repos de plus en plus long et il reste finalement une perte auditive permanente. Pour 8h heures d'exposition quotidienne, on peut estimer qu'en dessous de 70dBA, il n'y a pas de danger alors qu'au-dessus de 85 dBA le danger de surdité professionnelle est très grand si la durée d'exposition est importante (plusieurs années). La limite de danger pour des bruits continus est indiquée sur le tableau 5.3 en fonction de la durée d'exposition. 5% des individus exposés à des niveaux de 80dBA développent des pertes auditives significatives alors que le taux devient de 15 à 25% pour une exposition de 90dBA. La limite pour des bruits impulsionnels est indiquée sur le tableau 5.4 en fonction du nombre d'impulsions.

Lorsque l'on est exposé à des bruits dépassant les normes de sécurité et qu'il est impossible de réduire le bruit à la source, il est impératif d'utiliser des moyens de protection individuels qui sont soit des bouchons d'oreille, soit des serre-têtes, voir les figures 5.11 et 5.12.

## 5.4 Réglementation

Les problèmes de bruit ont engendré une réglementation abondante et en constante évolution. Elle vise à fixer des seuils réglementaires à ne pas dépasser pour chaque type d'activité ou de matériel.

### Au travail

Le code du travail et plusieurs autres textes prévoient une réglementation au niveau professionnel. Ainsi le décret du 19 juillet 2006 qui traduit en droit français la directive européenne 2003/10/CE fixe les limites suivantes. Lorsque l'exposition sonore quotidienne (pour 8 heures) subie par un travailleur dépasse le niveau de 80 dB(A) ou lorsque la pression acoustique de crête dépasse le niveau de 135 dB, une action de prévention est nécessaire. L'employeur est tenu de mettre à la disposition du salarié des protecteurs individuels contre le bruit. Lorsque l'exposition sonore quotidienne dépasse le niveau de 85 dB(A) ou lorsque la pression acoustique de crête dépasse le niveau de 137 dB, une action corrective doit être appliquée. Il est alors demandé de mettre en œuvre un programme d'actions de réduction d'exposition au bruit. Les limites de 87 dB(A) pour 8 heures ou de 140 dB en pression de crête ne doivent jamais être dépassées.

Niveau de pression acoustique continu équivalent en dB(A)	85 dB(A)	91 dB(A)	100 dB(A)	112 dB(A)
Durée journalière d'exposition équivalente à une exposition de 85 dB	8 heures	2 heures	15 minutes	1 minute

TABLE 5.3 – Exposition à des sons continus.

Niveau de pression acoustique de crête (en dB)	135 dB	115 dB	95 dB	90 dB
Nombre limite d'impulsions ou de chocs pour 8 heures	1	100	10 000	30 000

TABLE 5.4 – Exposition à des sons impulsionnels.

### Bâtiments

La réglementation est là aussi abondante. Par exemple, pour les nouveaux logements, l'isolation vis à vis du bruit de l'extérieur doit être d'au moins 30 dBA. L'isolation entre un logement voisin et la pièce principale d'un logement doit être d'au moins 53 dBA.

### Musique

Dans les locaux recevant du public et diffusant à titre habituel de la musique amplifiée, le niveau sonore ne doit pas dépasser 105 dBA au niveau moyen et 120 dBA au niveau de crête. La puissance maximum de sortie des baladeurs doit être limitée à 100 dBA.

### Transport

Les niveaux sonores diurne (6h - 22h) et nocturne (22h - 6h) des routes nouvelles en façade des

logements initialement situés en zone de bruit modéré sont plafonnés à 60 dBA et 55 dBA. Cela s'applique aussi aux établissements sensibles (santé, soins, enseignement, action sociale). L'intensité sonore émise par une voiture doit être limitée à 74dB.

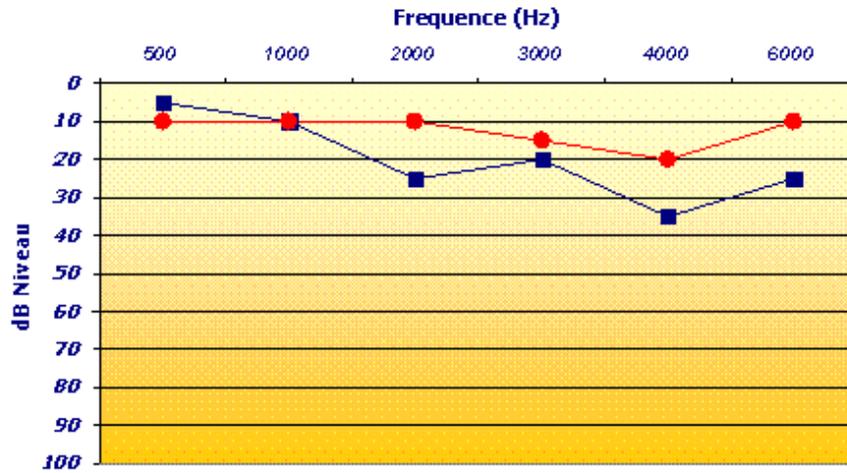


FIGURE 5.7 – Audiogramme.

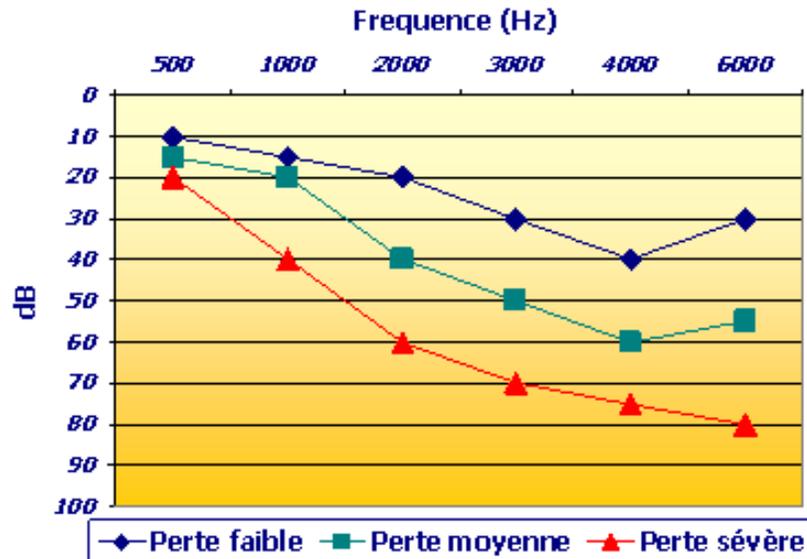


FIGURE 5.8 – Dommages auditifs.

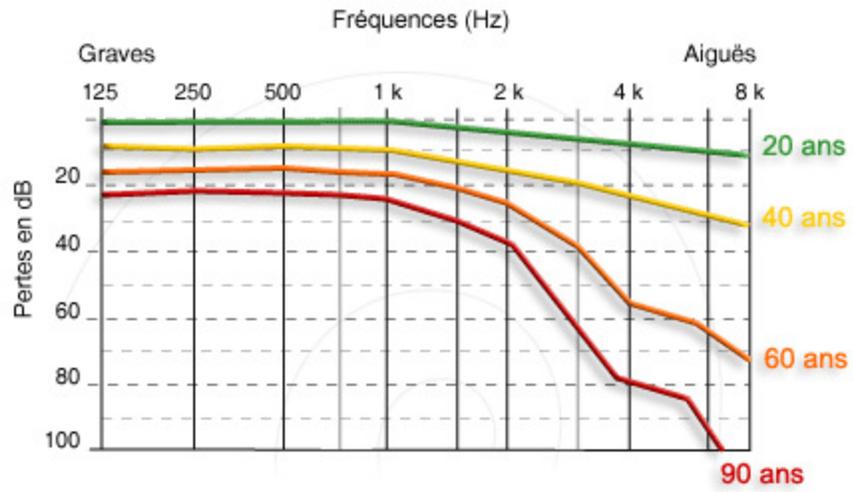


FIGURE 5.9 – Perte auditive.

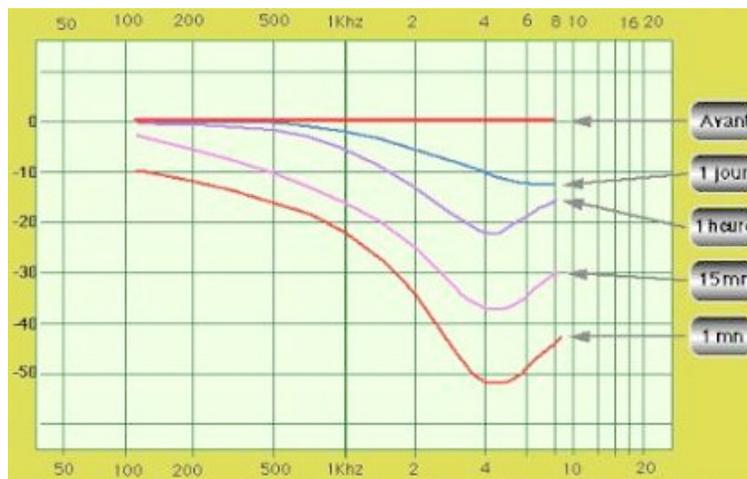


FIGURE 5.10 – Temps de récupération.



FIGURE 5.11 – Bouchon d'oreille.



FIGURE 5.12 – Casque antibruit.

# Chapitre 6

## Propagation dans un conduit

Dans ce chapitre, nous présentons les équations fondamentales concernant la propagation dans les guides d'onde acoustiques. Ce type de dispositif est à la base de nombreuses applications pratiques. Les principales concernent les instruments de musique (flûte et la plupart des instruments à vent), les gaines de ventilation dans le bâtiment et les silencieux dans l'automobile. Nous commencerons par traiter le cas d'un conduit de section rectangulaire avant d'aborder le cas général d'une section quelconque.

### 6.1 Conduit rectangulaire

Considérons le conduit rectiligne, de section rectangulaire, présenté sur la figure 6.1. Nous supposons que les parois sont rigides et que par conséquent la vitesse particulière  $y$  est nulle.

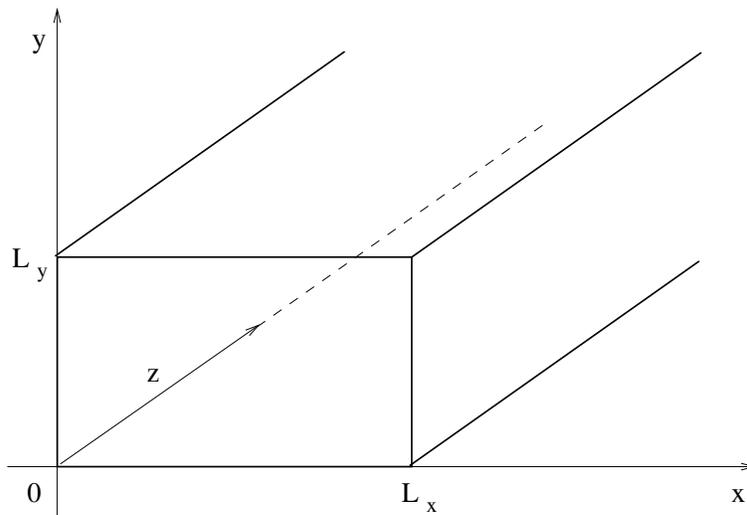


FIGURE 6.1 – Conduit rectangulaire.

Nous cherchons des solutions sous la forme de variables séparées  $p(x, y, z, t) = f(x)g(y)h(z)e^{-i\omega t}$ . Le champ de pression est solution de l'équation de Helmholtz, ce qui conduit à

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (6.1)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} &= -k_x^2 \\
\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} &= -k_y^2 \\
\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} &= -k_z^2 \\
k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

et la solution est de la forme

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_x e^{ik_x x} + b_x e^{-ik_x x} \\
g(y) &= a_y e^{ik_y y} + b_y e^{-ik_y y} \\
h(z) &= a_z e^{ik_z z} + b_z e^{-ik_z z}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

La rigidité des parois impose les conditions

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial x}(L_x) &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial y}(0) &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial y}(L_y) &= 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Les solutions non nulles sont de la forme

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cos \frac{n\pi x}{L_x} \\
g(y) &= b \cos \frac{m\pi y}{L_y}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

et finalement la solution générale est de la forme

$$p(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \left[ a_{nm} e^{ik_z z} + b_{nm} e^{-ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \tag{6.6}$$

avec

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left( \frac{n\pi}{L_x} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \tag{6.7}$$

A partir de ces deux dernières relations, nous pouvons faire les remarques fondamentales suivantes

1. Si  $\frac{\omega^2}{c^2} > \left( \frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L_y} \right)^2$ , le nombre d'onde  $k_z$  est réel et dans ce cas il y a propagation d'une onde dans le conduit suivant la direction  $z$ .
2. Si  $\frac{\omega^2}{c^2} < \left( \frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L_y} \right)^2$ , le nombre d'onde  $k_z$  est imaginaire pur et dans ce cas les ondes sont évanescentes. Il n'y a pas de propagation d'onde dans le conduit suivant la direction  $z$ .

3. Nous pouvons voir que pour une fréquence donnée, il n'y a qu'un nombre fini de modes propagatifs et un nombre infini de modes évanescents. Les fréquences telles que

$$\frac{(2\pi f_{nm})^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \quad (6.8)$$

sont appelées les fréquences de coupure pour le mode  $(n, m)$ . Pour que le mode d'ordre  $(n, m)$  puisse se propager, il faut que la fréquence soit telle que  $f > f_{nm}$ .

4. On peut constater aussi que le premier mode, d'ordre  $(0, 0)$ , est toujours propagatif.

## 6.2 Conduit de section quelconque

Ce qui a été montré dans la section précédente est transposable à un conduit de section quelconque avec les quelques modifications décrites ci-dessous.

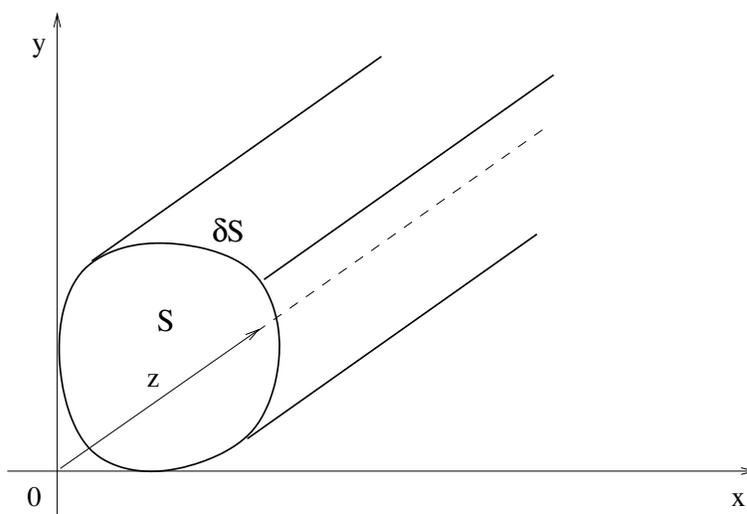


FIGURE 6.2 – Conduit de section quelconque

Dans une section transversale  $S$ , nous pouvons définir des modes propres  $\Psi_i(x, y)$  du Laplacien bidimensionnel  $\Delta_{xy}$  (où  $x, y$  sont les coordonnées dans la section) et leurs valeurs propres  $\lambda_i$  associées.

$$\Delta_{xy}\Psi_i(x, y) = \lambda_i\Psi_i(x, y) \quad (6.9)$$

Les modes propres vérifient aussi la condition de rigidité sur la frontière  $\delta S$  :

$$\nabla\Psi_i(x, y) \cdot \mathbf{n}(x, y) = 0$$

Les valeurs propres sont alors réelles et négatives et on pose  $\lambda_i = -k_i^2$ . Les modes  $\Psi_i(x, y)$  forment une base de l'ensemble des champs de pression, leurs valeurs propres associées  $\lambda_i$  forment une suite décroissante tendant vers  $-\infty$ . Nous allons développer  $p$  sur cette base des modes propres transversaux.

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z)\Psi_i(x, y) \quad (6.10)$$

En utilisant l'équation de Helmholtz, on obtient alors que  $f_i(z)$  vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2} + (k^2 - k_i^2) f_i = 0 \quad (6.11)$$

Nous introduisons  $k_{zi}$  tel que  $k_{zi}^2 = k^2 - k_i^2$ .  $k_{zi}$  est le nombre d'onde associé au mode de propagation  $\Psi_i(x, y)$ . Nous avons alors

$$f_i(z) = a_i^+ e^{ik_{zi}z} + a_i^- e^{-ik_{zi}z} \quad (6.12)$$

On obtient donc l'expression finale de la pression  $p(x, y, z)$  :

$$p(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i^+ e^{ik_{zi}z} + a_i^- e^{-ik_{zi}z}) \Psi_i(x, y) \quad (6.13)$$

La pression s'exprime donc sous la forme d'une somme de modes se propageant vers l'amont ou vers l'aval.

Le nombre d'onde  $k_{zi}$  peut être réel ou imaginaire pur. Pour une fréquence donnée, on a un nombre fini de modes dont le  $k_{zi}$  associé est réel. Ce sont les modes **propagatifs**. Les autres modes sont dits **évanescents**. Ils sont amortis de façon exponentielle lorsque l'onde avance. Inversement, pour un mode donné, il existe une fréquence appelée **fréquence de coupure** à partir de laquelle le mode devient propagatif. Quelque soit la géométrie, le premier mode est plan et a une fréquence de coupure nulle. Cela veut dire qu'il est toujours propagatif. La présence d'ondes évanescentes est intéressante car elle permet de faire des troncatures sur les sommations modales. Pour une fréquence donnée, on peut se contenter de tenir compte des  $N$  premiers modes en considérant que les modes supérieurs sont fortement atténués sur la longueur  $l$  de la portion du conduit. Nous retrouvons donc un comportement très similaire au cas du conduit rectangulaire.

### 6.3 Matrice de transfert

Le champ de pression dans le guide est donné par la relation (6.13). La vitesse particulière du fluide dans la direction de propagation est alors

$$v_z(x, y, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{i=0}^{\infty} k_{zi} (a_i^+ e^{ik_{zi}z} - a_i^- e^{-ik_{zi}z}) \Psi_i(x, y) \quad (6.14)$$

Nous introduisons aussi le débit défini par  $q = Sv_z$ . Considérons maintenant les deux sections  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  correspondants aux positions ( $z = 0$ ) et ( $z = l$ ). Introduisons  $q^A$ ,  $q^B$ ,  $p^A$  et  $p^B$  les vecteurs dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est  $q_i^A$ ,  $q_i^B$ ,  $p_i^A$  et  $p_i^B$ . Ces dernières sont les projections modales de  $q^A(x, y)$ ,  $q^B(x, y)$ ,  $p^A(x, y)$  et  $p^B(x, y)$ . Elles peuvent se calculer par

$$\begin{cases} q_i^A &= \int_S \Psi_i(x, y) q^A(x, y) dx dy \\ q_i^B &= \int_S \Psi_i(x, y) q^B(x, y) dx dy \\ p_i^A &= \int_S \Psi_i(x, y) p^A(x, y) dx dy \\ p_i^B &= \int_S \Psi_i(x, y) p^B(x, y) dx dy \end{cases} \quad (6.15)$$

On en déduit

$$\begin{cases} p_i^A &= a_i^+ + a_i^- \\ p_i^B &= a_i^+ e^{ik_{zi}l} + a_i^- e^{-ik_{zi}l} \\ \frac{\rho_0\omega}{S} q_i^A &= k_{zi} [a_i^+ - a_i^-] \\ \frac{\rho_0\omega}{S} q_i^B &= k_{zi} [a_i^+ e^{ik_{zi}l} - a_i^- e^{-ik_{zi}l}] \end{cases} \quad (6.16)$$

Les deux dernières équations donnent

$$\begin{cases} a_i^+ &= -\frac{\rho_0\omega}{Sk_{zi}} \frac{q_i^A e^{-ik_{zi}l} - q_i^B}{e^{ik_{zi}l} - e^{-ik_{zi}l}} \\ a_i^- &= -\frac{\rho_0\omega}{Sk_{zi}} \frac{q_i^A e^{ik_{zi}l} - q_i^B}{e^{ik_{zi}l} - e^{-ik_{zi}l}} \end{cases} \quad (6.17)$$

En remplaçant  $a_i^+$  et  $a_i^-$  dans les deux premières équations de (6.16), on obtient la relation

$$\begin{cases} p_i^A &= \frac{i\rho_0\omega}{Sk_{zi} \sin(k_{zi}l)} (\cos(k_{zi}l) q_i^A - q_i^B) \\ p_i^B &= \frac{i\rho_0\omega}{Sk_{zi} \sin(k_{zi}l)} (-\cos(k_{zi}l) q_i^B + q_i^A) \end{cases} \quad (6.18)$$

Retenons  $N$  modes respectivement de chaque côté du segment du conduit droit. On peut alors définir la matrice d'impédance  $\begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix}$  que l'on notera  $\underline{\underline{Z}}$  de dimension  $N^2$  et le vecteur source impédance  $\begin{pmatrix} Zs_A \\ Zs_B \end{pmatrix}$  de dimension  $N$  que l'on notera  $\underline{\underline{Zs}}$  et qui traduit l'action de sources éventuelles dans le conduit :

$$\begin{pmatrix} p^A \\ p^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{AA} & Z^{AB} \\ Z^{BA} & Z^{BB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q^A \\ q^B \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Zs_A \\ Zs_B \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Pour un conduit droit à parois rigides, avec un fluide parfait au repos,  $\underline{\underline{Z}}$  s'écrit :

$$\begin{cases} Z_{mn}^{AA} &= \frac{i\rho_0\omega}{Sk_{zm} \tan(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BB} &= \frac{-i\rho_0\omega}{Sk_{zm} \tan(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{AB} &= \frac{-i\rho_0\omega}{Sk_{zm} \sin(k_{zm}l)} \delta_{mn} \\ Z_{mn}^{BA} &= \frac{i\rho_0\omega}{Sk_{zm} \sin(k_{zm}l)} \delta_{mn} \end{cases} \quad (6.20)$$

Une matrice de transfert  $\begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix}$  que l'on notera  $\underline{\underline{T}}$  de dimension  $2N \times 2N$  et le vecteur source transfert  $\begin{pmatrix} Ts_p \\ Ts_q \end{pmatrix}$  que l'on notera  $\underline{\underline{T}s}}$  de dimension  $2N$  sont souvent introduits à la place de la matrice d'impédance.

$$\begin{pmatrix} p^B \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T^{pp} & T^{pq} \\ T^{qp} & T^{qq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^A \\ q^A \end{pmatrix} + q_s \begin{pmatrix} Ts_p \\ Ts_q \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

où  $T^{pp}$ ,  $T^{pq}$ ,  $T^{qp}$  et  $T^{qq}$  sont des matrices de dimension  $N$ .  $Ts_p$  et  $Ts_q$  sont des vecteurs de dimensions  $N$ . La présentation avec matrice de transfert a l'avantage de permettre la multiplication immédiate des matrices des sous-domaines pour calculer la matrice globale du domaine étudié. Les matrices de transfert et d'impédance sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} T^{pp} &= Z^{BB}(Z^{AB})^{-1} \\ T^{pq} &= Z^{BA} - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ T^{qp} &= (Z^{AB})^{-1} \\ T^{qq} &= -(Z^{AB})^{-1}Z^{AA} \\ Ts_p &= Zs_B - Z^{BB}(Z^{AB})^{-1}Zs_A \\ Ts_q &= -(Z^{AB})^{-1}Zs_A \end{cases} \quad (6.22)$$

La matrice de transfert d'un conduit droit, avec parois rigides et fluide parfait au repos s'écrit :

$$\begin{cases} T_{mn}^{pp} &= \cos(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{pq} &= \frac{i\rho_0 \omega}{Sk_m} \sin(k_m l) \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qp} &= -\frac{Sk_m \sin(k_m l)}{i\rho_0 \omega} \delta_{mn} \\ T_{mn}^{qq} &= \cos(k_m l) \delta_{mn} \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans le cas de la propagation du seul mode plan et sans source dans le guide, la relation s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\begin{pmatrix} p^B \\ q^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & \frac{i\rho_0 c}{S} \sin(kl) \\ i \frac{S \sin(kl)}{\rho_0 c} & \cos(kl) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^A \\ q^A \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

## 6.4 Silencieux

Un moyen de réduire la transmission est d'utiliser des changements de section, voir figure 6.3. Rappelons les équations générales de l'acoustique en l'absence de source et pour une onde harmo-

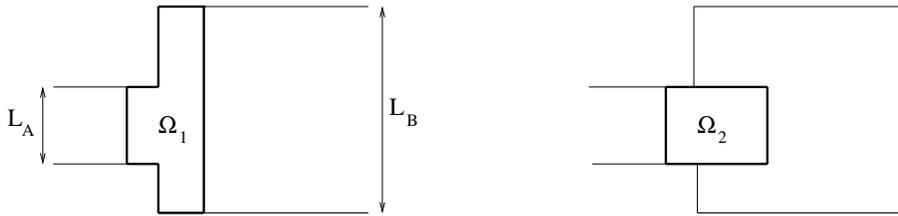


FIGURE 6.3 – Domaines d'intégration  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

nique :

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2}p + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0 \\ -i\rho_0 \omega \mathbf{v} + \nabla p &= 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

Nous définissons deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir figure 6.3) pour un élargissement de section d'une section rectangulaire  $L_A \times h$  à la section rectangulaire  $L_B \times h$  ( $h$  est la dimension transverse). Nous intégrons la première équation de (6.25) sur  $\Omega_1$  et la deuxième sur  $\Omega_2$ .

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{c^2} \int_{\Omega_1} p \, d\mathbf{x} + \rho_0 \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \\ -i\rho_0\omega \int_{\Omega_2} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} p \mathbf{n} \, ds = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

On obtient alors à basses fréquences :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \approx 0 \\ \int_{\Gamma_2} p \, \mathbf{n} \, ds \approx 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Les distributions de pression et de vitesse peuvent être considérées planes dans des sections suffisamment éloignées de la discontinuité. Leurs valeurs sont notées  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $V_A$  et  $V_B$  respectivement. On déduit de (6.27) que :

$$\begin{cases} L_A V_A - L_B V_B \approx 0 \\ P_A - P_B \approx 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

Il y a donc conservation de la pression et du débit à la discontinuité. Il est maintenant possible de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission à travers la discontinuité. Pour cela, il faut introduire l'onde incidente  $a^+$ , l'onde réfléchie  $a^-$  et l'onde transmise  $b^+$ . L'expression de la pression pour  $x < 0$  s'écrit :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{hL_A}} (a^+ e^{ikx} + a^- e^{-ikx}) \quad (6.29)$$

L'expression de la pression pour  $x > 0$  s'écrit :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{hL_B}} b^+ e^{ikx} \quad (6.30)$$

A partir des équations (6.28), on trouve les coefficients de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  :

$$\begin{cases} T = \frac{b^+}{a^+} = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{1 + \epsilon} \\ R = \frac{a^-}{a^+} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \end{cases}$$

où  $\epsilon = \frac{L_B}{L_A}$ . Plus l'élargissement est important, plus le coefficient de réflexion est grand et le coefficient de transmission faible.

Le calcul précédent donne un exemple de comportement de silencieux. Plus généralement, on distingue les silencieux réactifs qui agissent par modification des coefficients de réflexion et les silencieux dissipatifs qui agissent par des matériaux absorbants à l'intérieur du silencieux. Le comportement d'un élément du silencieux est décrit par une matrice de transfert reliant la pression  $p$  et le flux de masse aux deux extrémités de l'élément.

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ S_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ S_1 v_1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Le comportement global du silencieux s'obtient en multipliant ces matrices de transfert

$$\begin{bmatrix} p_n \\ S_n v_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} p_1 \\ S_1 v_1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Par exemple pour une section droite de longueur  $l$ , nous avons

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos kl & i \frac{Z}{S} \sin kl \\ i \frac{S}{Z} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

### Cas d'un embranchement

Dans le cas de l'embranchement de la figure 6.4, le même type de calcul conduit à

$$\begin{aligned} R &= \frac{1 - (m_1 + m_2)}{1 + (m_1 + m_2)} \\ RT_1 &= 10 \log_{10} \frac{(1 + m_1 + m_2)^2}{4m_1} \\ RT_2 &= 10 \log_{10} \frac{(1 + m_1 + m_2)^2}{4m_2} \\ m_1 &= \frac{S_1}{S_0} \\ m_2 &= \frac{S_2}{S_0} \\ RT &= -10 \log_{10} \tau \end{aligned} \quad (6.34)$$

où  $\tau$  est le rapport entre la puissance transmise et la puissance incidente.

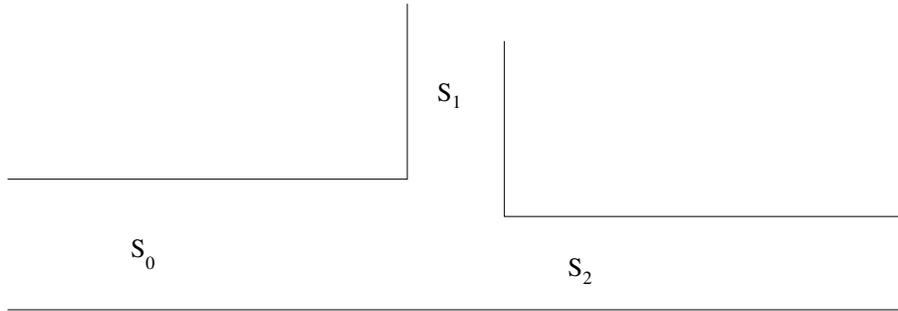


FIGURE 6.4 – Embranchement.

## 6.5 Terminaisons

La terminaison aval est modélisée par une matrice de réflexion  $R_B$ .

$$b_t^- = R_B b_t^+ \quad (6.35)$$

L'indice  $t$  dans le texte signifie que les ondes et les sections sont définies aux terminaisons. Si la terminaison est considérée anéchoïque,  $R_B = 0$ . Ici la terminaison aval est modélisée comme

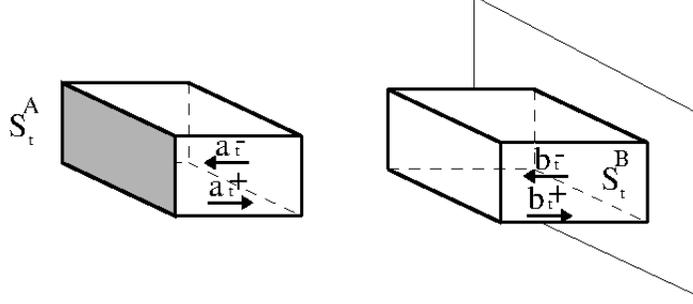


FIGURE 6.5 – Terminaisons amont et aval.

un conduit débouchant dans un plan infini parfaitement réfléchissant. En appliquant l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz dans le domaine extérieur au conduit, on peut démontrer que l'équation intégrale a l'expression de l'intégrale de Rayleigh :

$$p(\underline{s}) = - \int_{S_t^B} G(\underline{s}|\underline{s}_0) \frac{\partial p}{\partial z}(\underline{s}_0) d\underline{s}_0 \quad (6.36)$$

où  $\underline{s}_0 = (x_0, y_0, z_t^B)$ ,  $\underline{s} = (x, y, z_t^B)$  sont des points de la surface  $S_t^B$  et la fonction de Green a l'expression suivante :

$$G(\underline{s}|\underline{s}_0) = \frac{e^{ik|\underline{s}-\underline{s}_0|}}{2\pi|\underline{s}-\underline{s}_0|} \quad (6.37)$$

En remplaçant la pression et sa dérivée normale par les ondes  $b_t^+$  et  $b_t^-$ , l'équation intégrale (6.36) peut être écrite d'une autre façon :

$$(b_t^+ + b_t^-) = G^B M^B (b_t^- - b_t^+) \quad (6.38)$$

où  $G^B$  et  $M^B$  sont des matrices dont les composantes ont les expressions suivantes :

$$G_{mn}^B = \int_{S_t^B} \int_{S_t^B} \Psi_m(x, y) G(\underline{s}|\underline{s}_0) \Psi_n(x, y) dx dy dy_0 dz_0 \quad (6.39)$$

$$M_{mn}^B = ik_m^B \delta_{mn} \quad (6.40)$$

Avec la définition de  $R_B$  dans l'équation (6.35) nous obtenons

$$R_B = (G^B M^B - 1^B)^{-1} (G^B M^B + 1^B) \quad (6.41)$$

Une matrice de réflexion  $R_A$  est introduite de manière similaire pour la terminaison amont.

## 6.6 Mesure avec un tube de Kundt

### 6.6.1 Principe du tube de Kundt

Ce dispositif expérimental sert à mesurer le coefficient d'absorption et l'impédance d'un échantillon de matériau. La méthode consiste à créer une onde stationnaire dans un tube cylindrique et à mesurer le niveau sonore en différents points le long du tube, voir figure 6.6. Le spectre de fréquence

utilisable dépend du diamètre du tube. Un gros tube permet des mesures basses fréquences alors qu'un petit tube est utilisé pour les hautes fréquences. Avec les deux tubes disponibles au laboratoire Navier, il est possible de couvrir le spectre de 90Hz à 6500 Hz. Le tube de grand diamètre (100 mm) permet des mesures entre 90Hz et 1800Hz. Le petit diamètre permet des mesures entre 800Hz et 6500Hz.

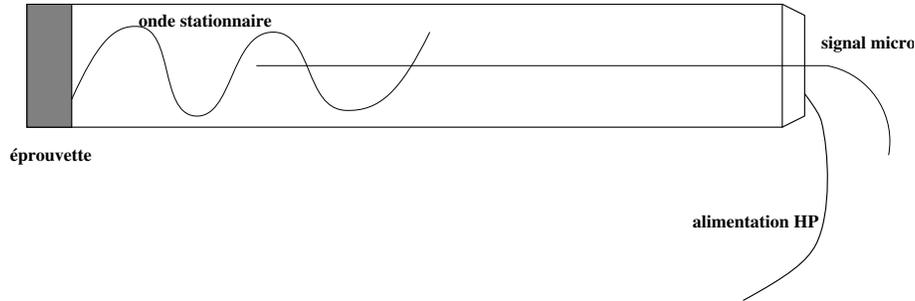


FIGURE 6.6 – Tube de Kundt.

Une onde sonore est générée à une extrémité du tube par un haut-parleur. L'autre extrémité est occupée par l'échantillon à tester. Une onde stationnaire est créée dans le tube. En mesurant le rapport entre le maximum et le minimum de pression dans le tube, on peut calculer le coefficient d'absorption. En mesurant la distance entre la surface de l'échantillon et les minima et maxima de pression, on peut calculer l'impédance. Le tube étant rigide la proportion de l'énergie qu'il absorbe est négligeable par rapport à l'énergie absorbée par l'échantillon.

### 6.6.2 Coefficient d'absorption

L'onde de pression incidente sur l'échantillon est

$$p_i = A \cos 2\pi ft \quad (6.42)$$

L'onde réfléchie par l'échantillon est

$$p_r = B \cos[2\pi f(t - 2y/c) + \varphi] \quad (6.43)$$

où  $f$  est la fréquence,  $y$  la distance entre le point de mesure et la surface de l'échantillon,  $c$  la vitesse du son et  $\varphi$  le déphasage dû à la réflexion. Le champ de pression total est donc

$$p_t = A \cos 2\pi ft + B \cos[2\pi f(t - 2y/c) + \varphi] \quad (6.44)$$

L'amplitude de la pression totale varie donc entre  $A + B$  pour  $\varphi - 4\pi fy/c = 2\pi$  et  $A - B$  pour  $\varphi - 4\pi fy/c = \pi$ . La distance entre ces deux points est  $4\pi f \frac{\Delta y}{c} = \pi$  soit  $\Delta y = \frac{\lambda}{4}$ .

Le coefficient d'absorption est défini comme le rapport entre l'énergie absorbée par le matériau sur l'énergie incidente, soit

$$\alpha = 1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 \quad (6.45)$$

soit

$$\alpha = 1 - r^2 \quad (6.46)$$

en posant

$$r = \frac{B}{A} \quad (6.47)$$

La mesure permet de connaître le rapport

$$n = \frac{A+B}{A-B} = \frac{1+r}{1-r} \quad (6.48)$$

On en déduit

$$r = \frac{B}{A} = \frac{n-1}{n+1} \quad (6.49)$$

d'où

$$\alpha = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad (6.50)$$

En résumé, en mesurant les valeurs du maximum et du minimum de pression dans le tube puis en appliquant la formule ci-dessus, on obtient directement la valeur du coefficient d'absorption.

### 6.6.3 Mesure de l'impédance

L'impédance est définie comme le rapport entre la pression et la vitesse normale sur la surface de l'échantillon. C'est une grandeur complexe. L'impédance de l'air est égale à  $\rho c$  où  $\rho$  est la masse volumique de l'air. La valeur est  $Z = 415 \text{ kg/m}^2/\text{s}$  en prenant  $c = 343 \text{ m/s}$  et  $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ , valeurs pour  $20^\circ\text{C}$  et  $1013 \text{ mbar}$ .

L'impédance de l'échantillon se calcule par

$$Z = \frac{p_i + p_r}{v_i + v_r} \quad (6.51)$$

avec

$$\begin{aligned} p_i &= \rho c v_i \\ p_r &= -\rho c v_r \end{aligned} \quad (6.52)$$

Ces valeurs sont les amplitudes complexes des pressions et vitesses. L'impédance est

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{p_i + p_r}{p_i - p_r}\right) \rho c \\ Z &= \left(\frac{1 + \frac{p_r}{p_i}}{1 - \frac{p_r}{p_i}}\right) \rho c \end{aligned} \quad (6.53)$$

Les pressions incidentes et réfléchies sont reliées par

$$p_r = p_i r e^{i\varphi} \quad (6.54)$$

où  $r$  est le coefficient de réflexion et  $\varphi$  le facteur de phase. Donc

$$Z = \left(\frac{1 + r e^{i\varphi}}{1 - r e^{i\varphi}}\right) \rho c = z \rho c \quad (6.55)$$

avec

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{2r \sin \varphi}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Le facteur  $r$  est donné par la formule (6.49). Il reste à déterminer le facteur de phase  $\varphi$ . En notation complexe on a

$$\begin{aligned} p_i &= A \\ p_r &= B e^{i(\varphi - 2\pi f \frac{2y}{c})} \end{aligned} \quad (6.57)$$

En prenant le rapport des deux pressions on obtient

$$p_r = \frac{B}{A} p_i e^{i(\varphi - 4\pi \frac{y}{\lambda})} \quad (6.58)$$

La pression totale est minimum pour (voir figure 6.7)

$$\frac{4\pi y_1}{\lambda} - \varphi = \pi \quad (6.59)$$

ce qui donne

$$\varphi = \left( \frac{4y_1}{\lambda} - 1 \right) \pi \quad (6.60)$$

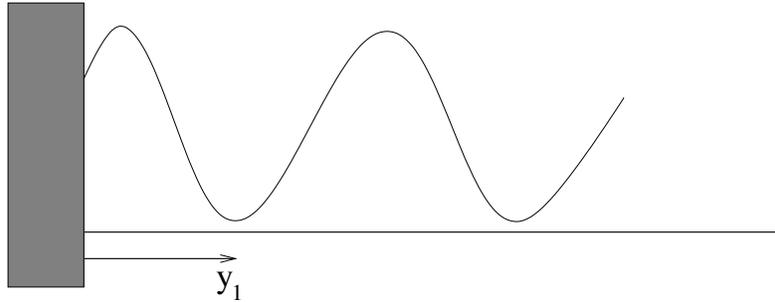


FIGURE 6.7 – Minimum de pression.

L'application des formules (6.56) donne la valeur de l'impédance.

## Chapitre 7

# Matériaux acoustiques et absorbeurs de son

### 7.1 Paramètres décrivant les matériaux poreux et fibreux

Parmi tous les moyens possibles pour contrôler le son, l'utilisation de matériaux absorbants est l'un des plus usuels et des plus anciens. Quelques exemples de matériaux sont présentés sur la figure 7.1. Ces matériaux présentent une importante surface de contact entre l'air et le solide où il y a une couche limite d'épaisseur  $\sqrt{\frac{\mu}{\omega\rho}}$  (0.015mm à 0.15mm en général) avec  $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  la viscosité dynamique de l'air. Les mécanismes physiques responsables de l'absorption d'une onde acoustique dans un matériau sont la dissipation visqueuse dans les pores du matériau (laine minérale, fibre de verre, mousse, ...), la conduction thermique dans le matériau poreux ou les vibrations du squelette. L'énergie acoustique est alors convertie en chaleur. Des vues microscopiques d'exemples de ces matériaux sont données sur la figure 7.2.

En dehors de l'épaisseur, il y a principalement trois paramètres qui ont de l'influence sur les propriétés acoustiques des matériaux poreux à squelettes rigides (dont les vibrations sont négligeables). Il s'agit de la résistance à l'écoulement de l'air, de la porosité et de la tortuosité. Le paramètre de résistance à l'écoulement de l'air peut être mesuré en imposant un flux d'air de vitesse  $v$ , de débit  $Q = Sv$ , à travers un échantillon du matériau de section  $S$  et en mesurant la différence de pression  $\Delta p$  entre les deux faces. Un schéma est présenté sur la figure 7.3. La résistance à l'écoulement de l'air est alors donnée par

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta p}{v} \quad (7.1)$$

Comme son nom l'indique, elle mesure la plus ou moins grande facilité qu'a l'air à traverser le matériau.

La porosité est le rapport entre le volume des vides et le volume total

$$\Omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}} \quad (7.2)$$

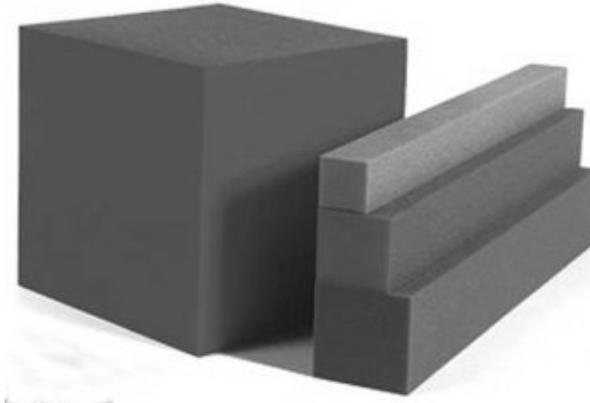
Les porosités peuvent prendre des valeurs très variées entre 0 et 1. Les matériaux poreux intéressants d'un point de vue acoustique, comme les mousses ou les matériaux fibreux, peuvent avoir des porosités allant jusqu'à 0.90 ou 0.95. Seule compte la porosité ouverte, c'est à dire celle reliée à l'extérieur du matériau par un réseau de conduits comme sur la figure 7.4.



(a) Rouleau de laine de verre.

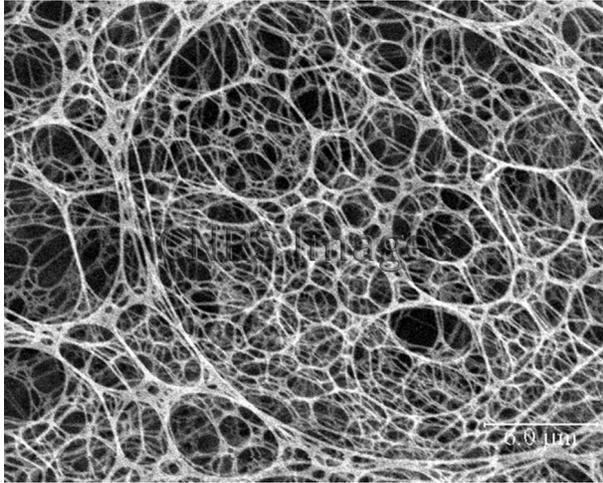


(b) Panneau de laine de roche.

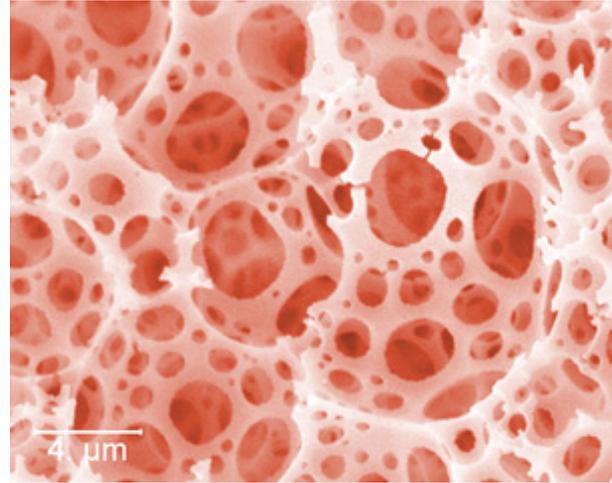


(c) Panneau de mousse.

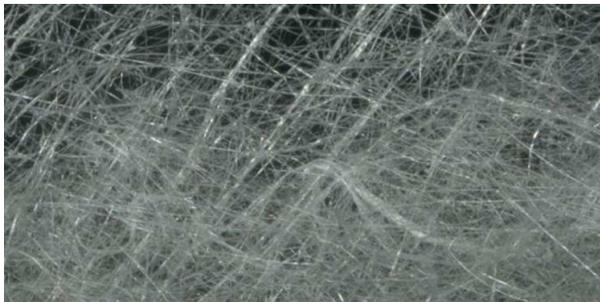
FIGURE 7.1 – Quelques exemples de matériaux poreux.



(a) Polystyrène.



(b) Matériau cellulaire.



(c) Laine de verre.



(d) Enrobé drainant.

FIGURE 7.2 – Vues microscopiques de matériaux poreux.

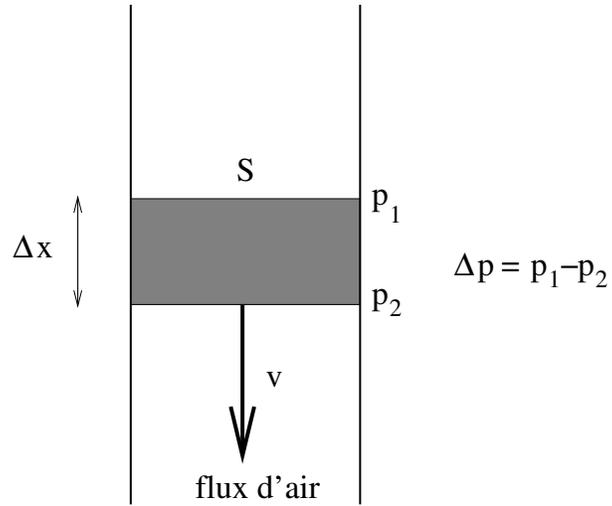


FIGURE 7.3 – Mesure de la résistance à l'écoulement de l'air.

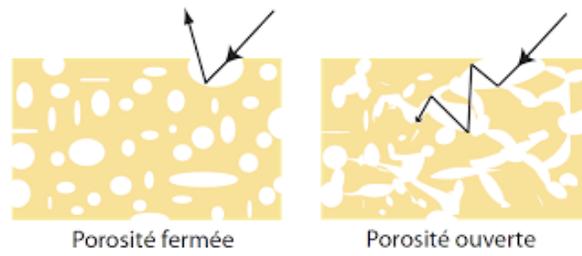


FIGURE 7.4 – Porosités ouverte et fermée.

Matériau	Porosité	Tortuosité	Résistance à l'écoulement de l'air ( $Nsm^{-4}$ )
Balsa	0.95	1.03	$1.94 \times 10^3$
Chêne	0.54	1.36	$1.98 \times 10^5$
Mousse mélamine	0.98	1.00	$8.00 \times 10^3$
Mousse de polyuréthane	0.97	2.52	$8.70 \times 10^4$
Laine	0.94	1.03	$2.80 \times 10^4$
Enrobé drainant	0.31	3.68	$3.30 \times 10^3$
Sol non labouré	0.46	1.60	$1.60 \times 10^5$
Sol labouré	0.60	3.30	$1.00 \times 10^4$
Neige	0.70	1.10	$1.00 \times 10^4$
Sol herbeux	0.45	1.70	$1.59 \times 10^5$

TABLE 7.1 – Paramètres associés à quelques matériaux poreux.

La tortuosité  $K$  est un scalaire supérieur ou égal à 1 qui mesure la sinuosité des pores. Elle traduit aussi la complexité des champs de pression et de vitesse du fluide au niveau microscopique. La figure 7.5 représente le cas d'un pore sinueux dans un matériau. Pour cet exemple, la tortuosité peut être définie comme le rapport entre la longueur réelle du pore et l'épaisseur  $L$  du matériau. Le tableau 7.1 donne les valeurs de la porosité, de la tortuosité et de la résistance à l'écoulement de l'air pour quelques matériaux poreux.

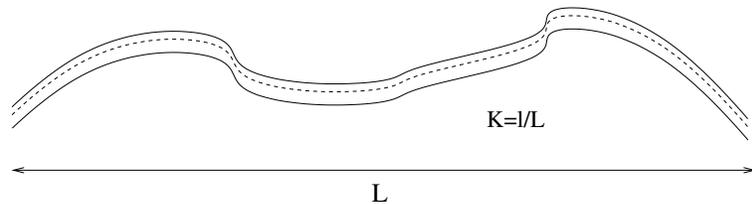


FIGURE 7.5 – Définition de la tortuosité.

## 7.2 Modèles d'impédance

Il y a plusieurs modèles qui essaient d'expliquer les propriétés acoustiques des matériaux à partir de grandeurs physiques comme celles que l'on vient de présenter. Le plus simple est un modèle empirique proposé par Delany et Bazley [14], qui permet d'estimer l'impédance spécifique  $Z(\omega)$  et le nombre d'onde complexe  $k(\omega)$  caractérisant la propagation dans le matériau. Pour une dépendance en temps  $e^{-i\omega t}$ , ces grandeurs s'expriment en fonction de la fréquence  $f$ , de la masse volumique de l'air  $\rho_0$  et de la résistance à l'écoulement de l'air  $\sigma$  par

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \left[ 1 + 10.8 \left( \frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.70} + i10.3 \left( \frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.59} \right] \quad (7.3)$$

$$Z(\omega) = \rho_0 c \left[ 1 + 9.08 \left( \frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.75} + i11.9 \left( \frac{1000f}{\sigma} \right)^{-0.73} \right] \quad (7.4)$$

Ce modèle s'applique bien aux matériaux fibreux.

Un autre modèle un peu plus complexe a été proposé par J.F. Hamet [15]. Il exprime les mêmes grandeurs suivant les formules.

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{K} \gamma \sqrt{1 + i \frac{f_\mu}{f}} \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{\gamma}) / (1 + i \frac{f_t}{f})} \quad (7.5)$$

$$Z(\omega) = \frac{\rho_0 c}{\Omega} \sqrt{\frac{K}{\gamma}} \sqrt{1 + i \frac{f_\mu}{f}} \left( \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{\gamma}) / (1 + i \frac{f_t}{f})} \right)^{-1} \quad (7.6)$$

avec les paramètres suivants  $f_\mu = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\Omega}{\rho_0 K}$ ,  $f_t = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{\rho_0 N_{pr}}$ ,  $\gamma = 1.4$  et  $N_{pr} = 0.71$ . Ce modèle nécessite la connaissance de la porosité  $\Omega$ , de la résistance à l'écoulement de l'air  $\sigma$  et de la tortuosité  $K$ . Ce modèle permet, par exemple, de prévoir les propriétés acoustiques des enrobés drainants, ce qui n'est pas possible avec le modèle de Delany et Bazley.

### 7.3 Impédance de surface

Souvent, en pratique, ces matériaux absorbants sont utilisés en revêtement. Il est alors utile de connaître l'impédance de surface apparente pour une couche de matériau d'épaisseur  $e$  reposant sur un fond rigide, voir la figure 7.6. Le champ de pression dans la couche de matériau poreux est

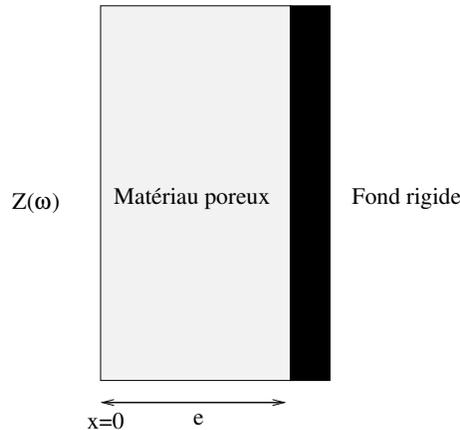


FIGURE 7.6 – Impédance de surface.

la somme d'une onde se propageant dans chaque sens d'amplitudes respectives a et b.

$$p(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx} \quad (7.7)$$

Le nombre d'onde  $k$  est par exemple donné par les formules (7.3) ou (7.5). La vitesse des ondes est donnée par

$$v(x) = \frac{\nabla p}{i\rho\omega} = \frac{1}{Z}(ae^{ikx} - be^{-ikx}) \quad (7.8)$$

En écrivant que  $v(e) = 0$  et que  $Z_s = p(0)/v(0)$ , nous obtenons

$$Z_s = -Z \coth(ike) = iZ \frac{\cos ke}{\sin ke} \quad (7.9)$$

où  $Z$  est l'impédance spécifique du matériau, donnée par exemple par (7.4) ou (7.6). L'impédance de surface d'un matériau peut aussi être mesurée avec un tube à onde stationnaire, encore appelé tube de Kundt (voir figure 7.8).



FIGURE 7.7 – Tube de Kundt.

Si une onde  $e^{ikx}$  est incidente sur le matériau, elle va engendrer une onde réfléchie  $Re^{-ikx}$ . On peut calculer le coefficient de réflexion à partir de l'impédance de surface. Le champ de pression sur l'interface est  $1 + R$  tandis que le champ de vitesse est  $v = \frac{1}{Z_0}(1 - R)$  où  $Z_0$  est l'impédance de l'air. Nous avons alors la relation

$$Z_s = p/v = Z_0 \frac{1 + R}{1 - R} \quad (7.10)$$

Cela donne

$$R = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (7.11)$$

En terme d'énergie le coefficient de réflexion est  $|R|^2$  et le coefficient d'absorption vaut alors

$$\alpha = 1 - |R|^2 = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2 \quad (7.12)$$

Ce coefficient d'absorption peut aussi être mesuré au tube de Kundt. Il est compris entre 0 et 1. Les matériaux intéressants d'un point de vue acoustique ont des coefficients d'absorption

le plus proche de 1 possible. Comme ce coefficient est une fonction de la fréquence, en général, il est proche de 0 aux basses fréquences et proche de 1 aux hautes fréquences. Le tableau 7.2 donne les coefficients d'absorption de différents matériaux pour les fréquences centrales des octaves entre 125Hz et 4000Hz. Les matériaux absorbants sont peu généralement efficaces pour les basses fréquences.

La figure 7.8 montre les parties réelles et imaginaires de l'impédance pour un modèle de Delany et Bazley avec  $\sigma = 20000 Nsm^{-4}$  et une épaisseur  $e = 5cm$ . La courbe 7.9 montre le coefficient d'absorption correspondant. On voit bien que l'absorption est faible dans les basses fréquences et devient importante pour les hautes fréquences. Notons que la puissance absorbée pour une onde

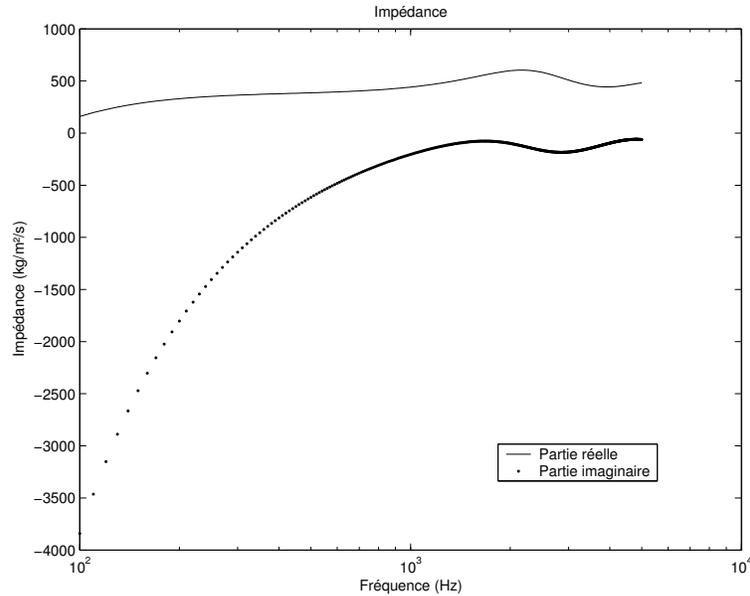


FIGURE 7.8 – Impédance pour  $\sigma = 20000 Nsm^{-4}$ .

d'intensité  $I$  arrivant suivant la normale sur une surface de coefficient d'absorption  $\alpha$  est

$$P_{abs} = \alpha I \tag{7.13}$$

## 7.4 Résonateur de Helmholtz

Il est connu depuis l'antiquité qu'une cavité quelconque, munie d'une ouverture, avec ou sans col, résonne sur une fréquence, qui, en première approximation, ne dépend que du volume de la cavité, de la longueur et de la section du col. Le résonateur est un volume  $V$  communiquant avec l'extérieur par un col de longueur  $l$  et de section  $s$ , la longueur  $l$  pouvant éventuellement être nulle, voir la figure 7.10.

Un résonateur peut être modélisé avec une bonne précision comme un oscillateur amorti. Les impédances de la masse, de l'amortisseur et du ressort sont les suivantes : la masse est celle de l'air contenu dans le col, soit  $\rho_0 s l'$  où  $l'$  est une petite correction à la longueur réelle  $l$  du col. Cette correction permet de prendre en compte la masse d'air extérieure au col entraînée par la vibration.

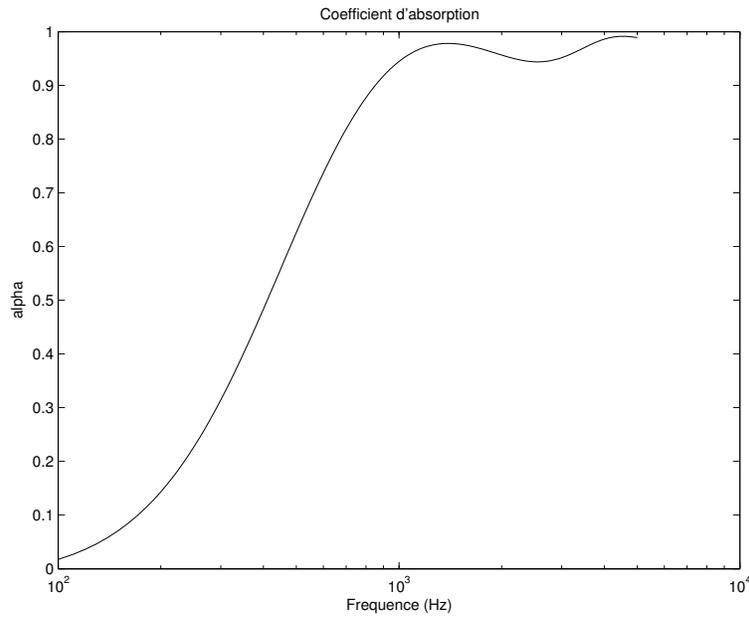


FIGURE 7.9 – Coefficient d’absorption pour  $\sigma = 20000Ns/m^{-4}$ .

Matériaux	Coefficient $\alpha$					
	125Hz	250Hz	500Hz	1000Hz	2000Hz	4000Hz
Carrelage	0.05	0.08	0.02	0.03	0.04	0.04
Moquette de 4mm	0.01	0.03	0.10	0.25	0.40	0.65
Parquet bois collé	0.04	0.04	0.05	0.06	0.06	0.06
Tapis de 12mm	0.15	0.30	0.55	0.83	0.95	0.95
Brique brute	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07
Laine de verre 25mm	0.15	0.38	0.60	0.64	0.62	0.62
Verre	0.05	0.03	0.02	0.02	0.03	0.02
Plâtre	0.02	0.03	0.04	0.05	0.04	0.03
Surface d’eau	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03
Gazon	0.11	0.26	0.60	0.69	0.92	0.99
Sol	0.15	0.25	0.40	0.55	0.60	0.60

TABLE 7.2 – Coefficients d’absorption en fonction de la fréquence pour différents matériaux.

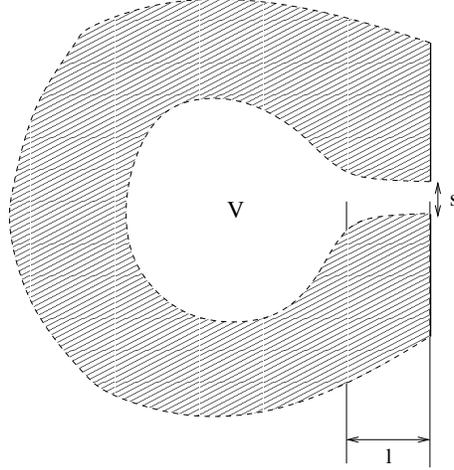


FIGURE 7.10 – Résonateur.

Une approximation courante est de prendre  $l' = l + 0.96\sqrt{s}$ . L'accélération de cette masse d'air est  $-i\omega v$  pour une oscillation harmonique avec une vitesse du fluide  $v$  dans le col. L'impédance due à la masse d'air est donc  $-i\omega\rho_0l'$ .

Une compression élastique de la masse d'air contenue dans le résonateur due à un déplacement  $\delta l$  de l'air contenu dans le col produit une variation de pression  $\delta p$  qui, pour un fluide adiabatique, est donnée par

$$\frac{\delta p}{p_0} = \gamma \frac{s\delta l}{V} \quad (7.14)$$

or on a  $\delta l = v/(-i\omega)$  ce qui donne, compte tenu de la relation  $\gamma p_0 = \rho_0 c^2$ ,

$$\frac{\delta p}{v} = \frac{\rho_0 s c^2}{-i\omega V} \quad (7.15)$$

La dissipation provient en partie de l'énergie acoustique qui est réémise vers l'extérieur du résonateur et en partie d'une dissipation visqueuse. Ces deux dissipations induisent des forces proportionnelles à la vitesse, soit  $F = Z_{dis}sv$ . L'impédance totale du résonateur est la somme des trois contributions précédentes, ce qui donne

$$Z = Z_{dis} - i\omega\rho_0l' + i\frac{\rho_0c^2s}{\omega V} \quad (7.16)$$

La résonance du système est obtenue quand le terme imaginaire s'annule, soit pour la fréquence

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{Vl'}}$$

Par exemple, pour une bouteille de volume  $V = 355ml$ , de longueur de col corrigée  $l' = 8cm$  et de section circulaire de rayon  $1cm$ , la fréquence de résonance est  $f_0 = 180Hz$ .

La puissance transmise au résonateur par l'ouverture est

$$P = \frac{1}{2}sRe(p^*v) = \frac{1}{2}sRe(Z^*v^*v) = \frac{1}{2}sRe(Z_{dis})|v|^2 \quad (7.17)$$

A la résonance  $v$  est grand et la puissance dissipée par le résonateur est importante. Quand la dissipation provient uniquement du rayonnement acoustique à l'extrémité extérieure du col, nous avons, pour une extrémité circulaire de rayon  $a$

$$Z_{dis} = \frac{1}{4}\rho_0 c(ka)^2 - i\omega\rho_0 \frac{8}{3\pi}a \quad (7.18)$$

et alors

$$P = \frac{\pi}{8}\rho_0 ck^2 a^4 |v|^2 \quad (7.19)$$

On peut aussi exprimer la puissance dissipée en fonction de la pression incidente par

$$P = \frac{1}{2} sRe(Z_{dis}) \left| \frac{p}{Z} \right|^2 \quad (7.20)$$

On peut reproduire les calculs effectués dans le cas d'une cavité pour déterminer la pression  $p$  à partir de l'équilibre entre la puissance de la source et la puissance dissipée dans le résonateur. S'il n'y a pas de surface absorbante autre que le résonateur et si l'on note  $P_{source}$  la puissance émise par la source, le niveau sonore est obtenu par

$$P_{source} = \frac{1}{2} sRe(Z_{dis}) \left| \frac{p}{Z} \right|^2 \quad (7.21)$$

soit

$$|p|^2 = \frac{2|Z|^2}{sRe(Z_{dis})} P_{source} \quad (7.22)$$

## 7.5 Panneaux perforés

L'impédance de surface de ces panneaux (voir figure 7.11) peut être estimée par la formule de Maa [16] qui s'exprime par

$$Z_{panneau} = \frac{32\eta t}{\sigma d^2} \left[ \left(1 + \frac{K^2}{32}\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{32} K \frac{d}{t} \right] + i \frac{\rho\omega t}{\sigma} \left[ 1 + \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^{-1/2} + 0.85 \frac{d}{t} \right] \quad (7.23)$$

avec

$$\begin{aligned} K &= d \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{4\eta}} \\ \eta &: \text{coefficient de viscosité } (18.5 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}) \\ t &: \text{épaisseur du panneau} \\ d &: \text{diamètre des trous} \\ \sigma &: \text{taux de perforation} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Cela conduit à un coefficient d'absorption donné par la formule (7.12) où l'impédance de surface vaut

$$Z_s = Z_{panneau} + Z_{cav} \quad (7.25)$$

avec  $Z_{cav}$  l'impédance de la cavité d'air derrière le panneau qui se calcule avec la formule (7.9)

$$Z_{cav} = -iZ_{air} \cot kD \quad (7.26)$$

(le changement de signe part rapport à (7.9) vient de la direction prise pour la vitesse). Cela conduit à l'impédance de surface

$$Z_s = \rho_0 c (r + i(m\omega - \cot(kD))) \quad (7.27)$$

si  $Z_{panneau} = \rho_0 c (r + im\omega)$ . Le maximum d'absorption vaut alors

$$\alpha_{max} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad (7.28)$$

pour la fréquence telle que

$$m\omega_0 - \cot(\omega_0 D/c) = 0 \quad (7.29)$$

soit

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{mD}} \quad (7.30)$$

Ces panneaux ont finalement une fréquence de résonance qui peut être approchée par la formule

$$f_0 \approx \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{(t + 0.85d)D}} \quad (7.31)$$

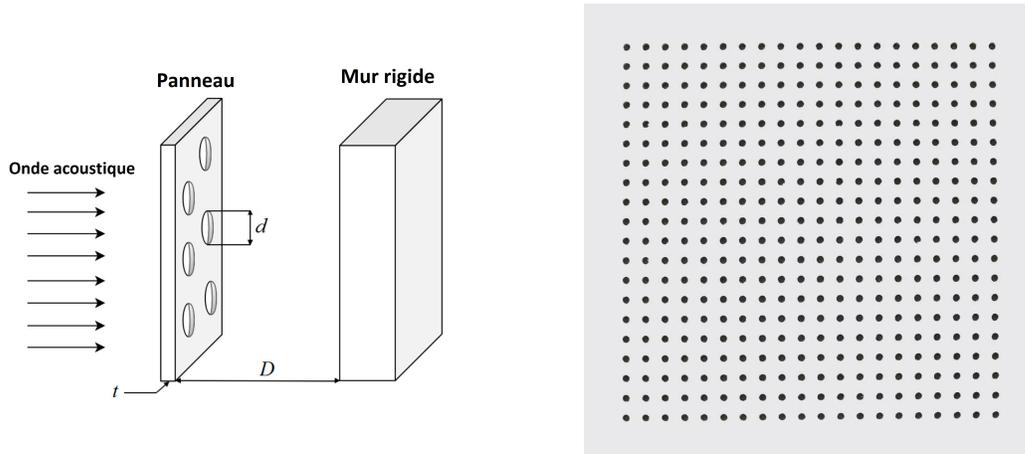


FIGURE 7.11 – Panneau acoustique.

## 7.6 Membrane

Une membrane est un panneau très souple et non perforé (voir figure 7.12) monté près d'une paroi avec une lame d'air. La fréquence propre d'une membrane est donnée par

$$f_0 = \frac{60}{\sqrt{md}} \quad (7.32)$$

avec

- $f_0$  : fréquence de résonance
- $m$  : masse surfacique du panneau
- $d$  : distance entre le panneau et la paroi

La démonstration de la formule (7.32) est effectuée en TD. Son effet est similaire à celui d'un résonateur de Helmholtz ou de panneaux perforés et permet de réduire le niveau sonore autour de la fréquence de résonance.

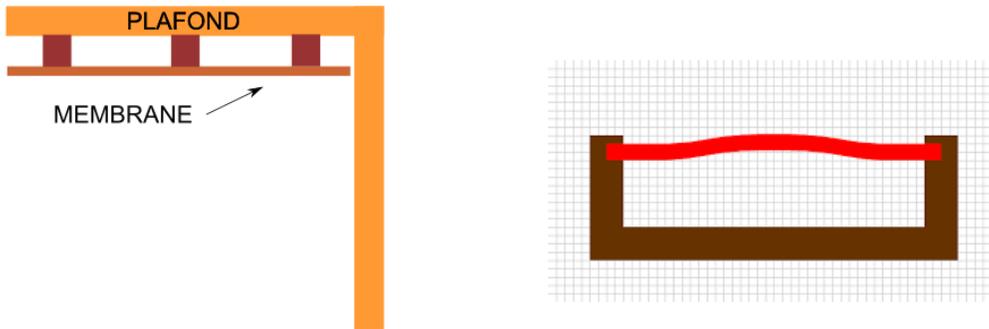


FIGURE 7.12 – Membranes acoustiques.

## 7.7 Diffuseur

Par analogie avec la lumière, on peut créer des diffuseurs de son comme ceux de la figure 7.13. La profondeur des parties en creux est généralement obtenue par une séquence de nombres par exemple pour un diffuseur quadratique par

$$profondeur = n^2 \text{ modulo } p \quad (7.33)$$

où  $n$  parcourt les nombres entiers et  $p$  est un nombre premier. Comme leur nom l'indique ces dispositifs visent à produire des réflexions diffuses lorsqu'une onde acoustique les frappe pour engendrer un son plus uniforme dans la salle (voir figure 7.14).

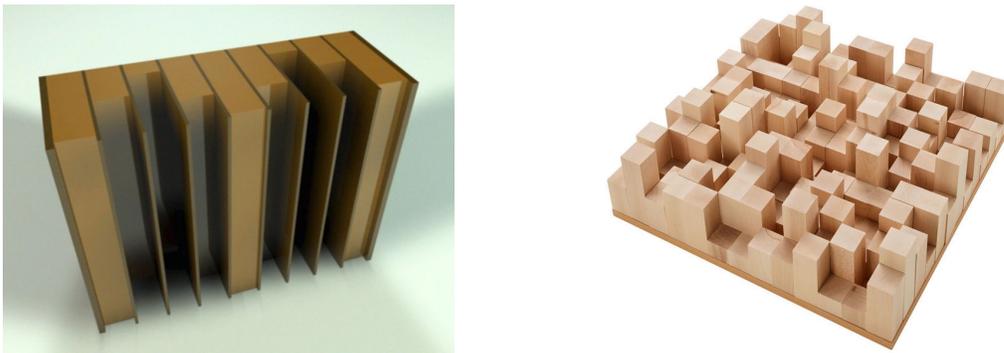


FIGURE 7.13 – Diffuseurs de son.

## 7.8 Autres absorbeurs de son

### 7.8.1 Audience et siège

L'auditoire dans une salle peut contribuer à son absorption, principalement par ses vêtements. Cela est notable pour les moyennes et hautes fréquences car les vêtements sont de faibles épaisseurs.

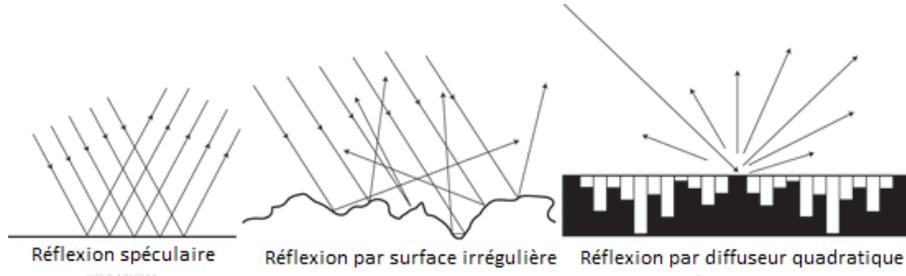


FIGURE 7.14 – Réflexion du son par différentes surfaces.

Type	Aire d'absorption équivalente $A$ en $m^2$					
	125Hz	250Hz	500Hz	1000Hz	2000Hz	4000Hz
Personne avec manteau	0.17	0.41	0.91	1.30	1.43	1.47
Personne sans manteau	0.12	0.24	0.59	0.98	1.13	1.12
Musicien avec instrument	0.60	0.95	1.06	1.08	1.08	1.08
Siège tapissé non occupé	0.44	0.56	0.67	0.74	0.83	0.87

TABLE 7.3 – Absorption en fonction du type d'audience.

La nature et l'organisation des sièges jouent également un rôle, voir le tableau 7.3. Pour tenir compte de tout ceci, l'absorption moyenne est calculée par

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \left( \sum_i S_i \alpha_i + N_p A \right) \quad (7.34)$$

où  $N_p$  est le nombre de personnes et  $A$  l'aire d'absorption d'une personne ( $\alpha S$  pour une personne).

### 7.8.2 Voilage acoustique

Des voiles suspendus dans une pièce peuvent contribuer à l'absorption du son. Leurs performances acoustiques, telles qu'elles sont habituellement décrites par le coefficient d'absorption acoustique, dépend non seulement du textile lui-même mais aussi de la plénitude de la draperie et de l'état du support, c'est-à-dire l'espacement entre le tissu et un mur de support rigide, ou l'absence de support dans le cas d'un rideau suspendu librement. Ses propriétés acoustiques peuvent se caractériser par son impédance  $Z_v$  telle que

$$\Delta p = Z_v v \quad (7.35)$$

où  $\Delta p$  est la différence de pression acoustique entre les deux cotés du voilage et  $v$  la vitesse de vibration du voile. Cette impédance peut s'estimer pour des voiles fins par

$$Z_v = \frac{i\omega m R_s}{i\omega m + R_s} \quad (7.36)$$

avec  $m$  la masse surfacique du voilage et  $R_s$  sa résistance à l'écoulement de l'air.

# Chapitre 8

## La propagation du son

### 8.1 Interférence

Comme les équations de l'acoustique sont linéaires, le principe de superposition s'applique et la pression produite par deux ondes en un point est la somme des pressions produites par chaque onde individuellement. La figure 8.1 illustre ce phénomène. Deux ondes se propagent en sens opposés. Dans la figure centrale, le champ de pression à cet instant est la somme des champs des deux ondes qui ensuite continuent à se propager sans distorsion par rapport à leur forme initiale.

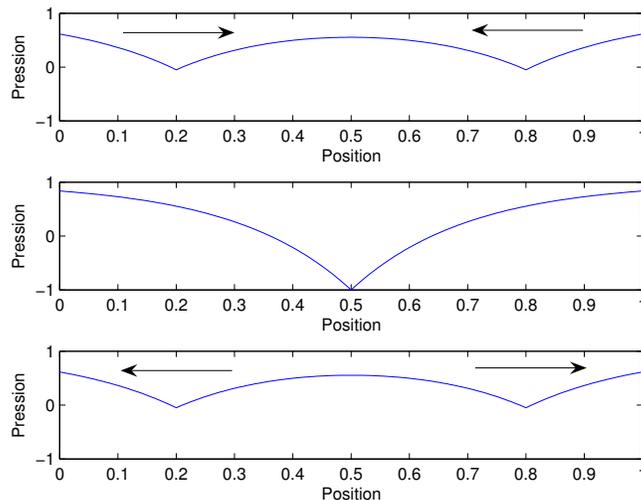


FIGURE 8.1 – Interférence de deux ondes.

La figure 8.2 montre l'interférence entre les champs de pression de deux sources ponctuelles. Le champ de pression total est donné par

$$p_{tot} = \frac{e^{ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{4\pi r_2} \quad (8.1)$$

Dans cette relation  $r_1$  et  $r_2$  sont les distances entre le point de calcul et les positions des sources 1 et 2 respectivement. On voit qu'il y a interférence constructive quand  $kr_1 = kr_2 + 2n\pi$ . Il y

a interférence destructive quand  $kr_1 = kr_2 + (2n + 1)\pi$ . Lorsque  $r_1 \approx r_2$  ce phénomène peut soit doubler le champ de pression d'une seule source dans le cas d'interférences constructives soit engendrer un champ total presque nul dans le cas d'interférences destructives. Cela peut se produire par exemple dans une salle de spectacle avec deux haut-parleurs et un spectateur placé en un point tel que la différence de marche entre les deux ondes soit un multiple impair de la demi longueur d'onde.

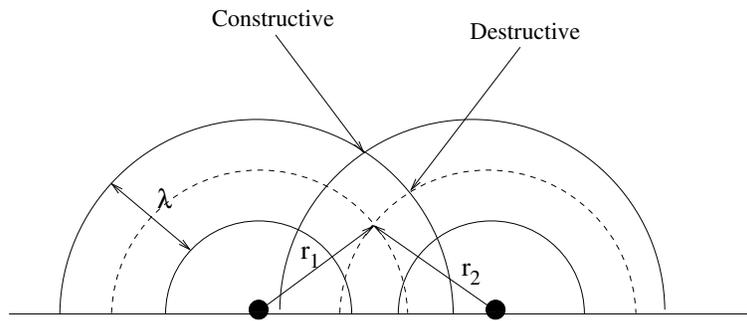


FIGURE 8.2 – Interférence de deux ondes en champ libre.

La figure 8.3 est une autre illustration d'interférences entre les champs produits par deux sources ponctuelles.

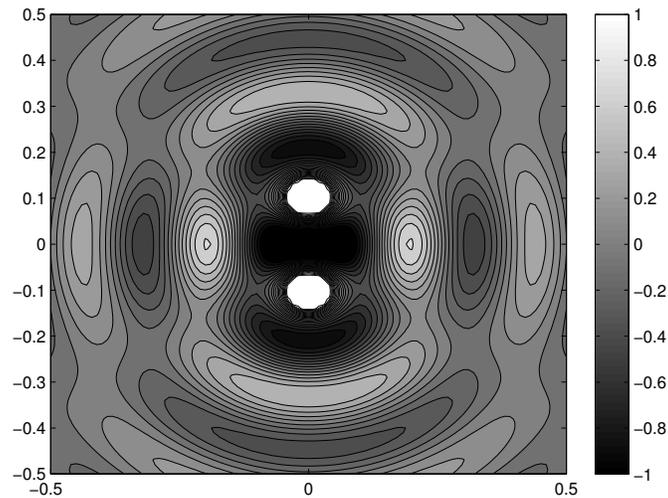


FIGURE 8.3 – Interférence d'ondes produites par deux sources ponctuelles.

## 8.2 Interface entre deux milieux

### 8.2.1 Interface entre deux milieux acoustiques

Lors d'un couplage entre deux milieux, il y a continuité des pressions et des vitesses normales, soit

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8.2)$$

La continuité des pressions vient du principe de l'action et de la réaction de Newton ou de l'application de la loi de la dynamique sur un petit domaine de masse infiniment petite à l'interface entre les deux milieux. Si les forces n'étaient pas opposées, ce petit domaine serait animé d'une accélération tendant vers l'infini. L'égalité des vitesses normales ( $\mathbf{n}$  est la normale) vient de l'absence de décollement entre les deux milieux. On notera qu'il n'y a pas forcément égalité des vitesses tangentielles. Les deux milieux peuvent glisser l'un par rapport à l'autre.

Un exemple de telle situation est décrit sur la figure 8.4. Les pressions incidentes, réfléchies et

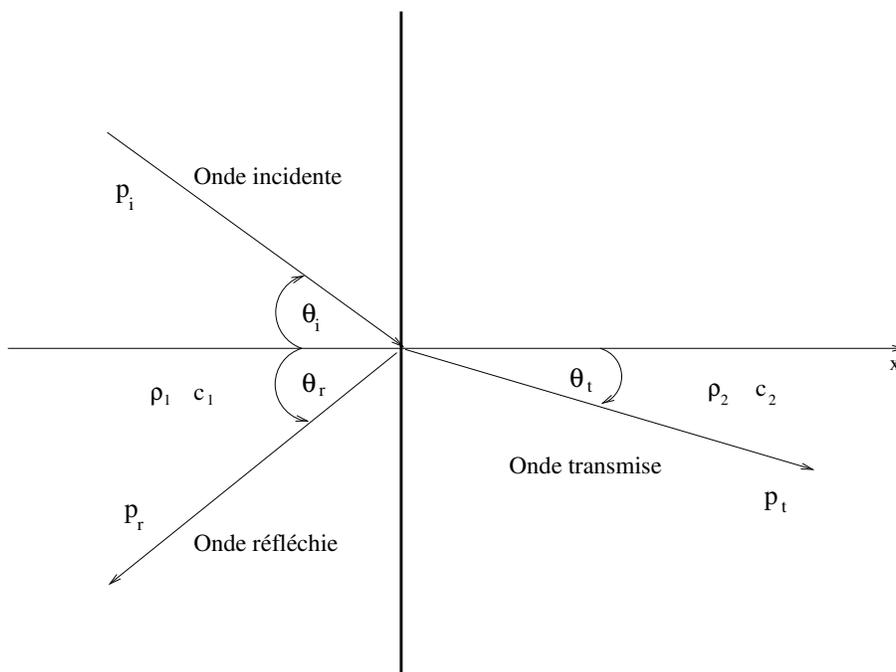


FIGURE 8.4 – Interface entre deux milieux.

transmises sont données par

$$\begin{aligned} p_i(x, y, t) &= p_i e^{i(k_1 \cos \theta_i x - k_1 \sin \theta_i y - \omega t)} \\ p_r(x, y, t) &= p_r e^{i(-k_1 \cos \theta_r x - k_1 \sin \theta_r y - \omega t)} \\ p_t(x, y, t) &= p_t e^{i(k_2 \cos \theta_t x - k_2 \sin \theta_t y - \omega t)} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Par continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface nous obtenons

$$\begin{aligned} p_i(0, y, t) + p_r(0, y, t) &= p_t(0, y, t) \\ \frac{1}{i\rho_1\omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} p_i(0, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} p_r(0, y, t) \right) &= \frac{1}{i\rho_2\omega} \frac{\partial}{\partial x} p_t(0, y, t) \end{aligned} \quad (8.4)$$

soit

$$\begin{aligned} p_i e^{-i(k_1 \sin \theta_i y + \omega t)} + p_r e^{-i(k_1 \sin \theta_r y + \omega t)} &= p_t e^{-i(k_2 \sin \theta_t y + \omega t)} \\ \frac{k_1}{\rho_1 \omega} \left( \cos \theta_i p_i e^{-i(k_1 \sin \theta_i y + \omega t)} - \cos \theta_r p_r e^{-i(k_1 \sin \theta_r y + \omega t)} \right) &= \frac{k_2 \cos \theta_t}{\rho_2 \omega} p_t e^{-i(k_2 \sin \theta_t y + \omega t)} \end{aligned} \quad (8.5)$$

On déduit de la première relation

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (8.6)$$

soit les lois classiques de Descartes

$$\begin{aligned} \theta_r &= \theta_i \\ \frac{\sin \theta_t}{c_2} &= \frac{\sin \theta_i}{c_1} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Lorsque  $c_1 > c_2$ , il existe un angle de réfraction limite  $\sin \theta_t = c_2/c_1$  tandis que lorsque  $c_1 < c_2$ , il existe un angle d'incidence limite tel que  $\sin \theta_i = c_1/c_2$ . Au delà les angles deviennent complexes et traduisent des ondes exponentiellement décroissantes lorsque l'on s'éloigne de l'interface.

Avec les lois de Descartes, l'écriture de la continuité à l'interface devient

$$\begin{aligned} p_i + p_r &= p_t \\ \frac{1}{\rho_1 \omega} (k_1 \cos \theta_i p_i - k_1 \cos \theta_r p_r) &= \frac{1}{\rho_2 \omega} k_2 \cos \theta_t p_t \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} p_i + p_r &= p_t \\ p_i - p_r &= \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} p_t \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} p_i \\ p_t &= \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} p_i \end{aligned} \quad (8.10)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont alors donnés par

$$\begin{aligned} R &= \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} \\ T &= \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} \end{aligned} \quad (8.11)$$

L'impédance de surface est donnée par

$$Z(\theta_i) = \frac{p_i + p_r}{u_i - u_r} \quad (8.12)$$

et vaut dans le cas présent

$$Z(\theta_i) = \frac{Z_1}{\cos \theta_i} \frac{1 + R(\theta_i)}{1 - R(\theta_i)} \quad (8.13)$$

On peut aussi calculer les facteurs de réflexion et de transmission en terme de grandeurs énergétiques, par exemple par

$$\begin{aligned} r(\theta_i) &= \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{p_r}{p_i} \right|^2 = \left( \frac{Z_1 \cos \theta_t - Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i} \right)^2 \\ t(\theta_i) &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} \left| \frac{p_t}{p_i} \right|^2 = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(Z_1 \cos \theta_t + Z_2 \cos \theta_i)^2} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Le coefficient d'absorption est le rapport de l'intensité absorbée sur l'intensité incidente soit

$$\alpha(\theta_i) = \frac{I_i - I_r}{I_i} = 1 - r(\theta_i) \quad (8.15)$$

Ce dernier coefficient est très important dans la pratique car c'est lui qui caractérise globalement le comportement de l'interface.

### 8.2.2 Condition d'impédance de surface

Dans la section précédente, nous avons pu calculer la propagation dans le milieu deux pour en déduire les champs acoustiques dans tout le domaine. Dans la pratique le second milieu est parfois très mal connu. Il faut écrire une condition aux limites qui permette d'en déduire les coefficients de réflexion et d'absorption. Le plus simple est de dire que l'impédance normale est une constante connue sur la surface, soit

$$p = Zu \quad (8.16)$$

On dit alors que la surface est "à réaction localisée". La section précédente a montré que l'impédance était une fonction de l'angle d'incidence. Cette relation est donc une approximation qui est cependant très souvent utilisée. L'impédance normale est de plus facilement mesurable, par exemple avec un tube de Kundt. Avec cette hypothèse on peut calculer les facteurs de réflexion et d'absorption par

$$\begin{aligned} R(\theta_i) &= \frac{\cos \theta_i Z / Z_1 - 1}{\cos \theta_i Z / Z_1 + 1} \\ \alpha(\theta_i) &= 1 - |R(\theta_i)|^2 \end{aligned} \quad (8.17)$$

## 8.3 Diffraction

Les figures 8.5 et 8.6 donnent des exemples de situations avec diffraction du son. Le calcul du champ sonore s'effectue par résolution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = s \quad (8.18)$$

en tenant compte des conditions aux limites sur les surfaces, par exemple

$$\begin{cases} v = v_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ p = Zv & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (8.19)$$

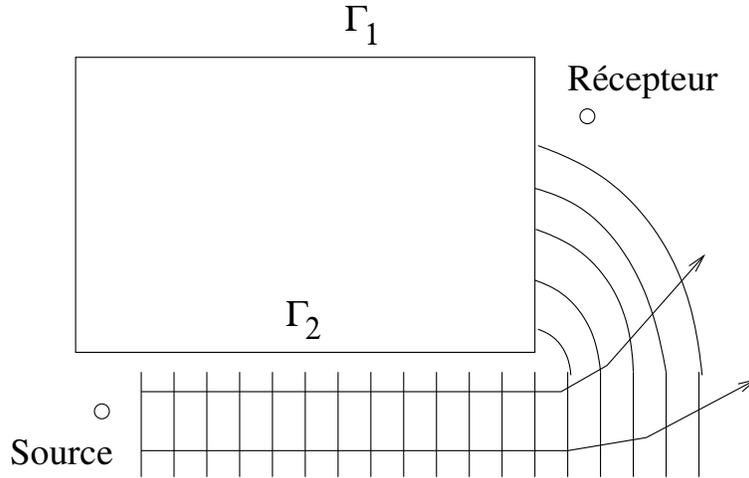


FIGURE 8.5 – Contournement d'un obstacle par diffraction.

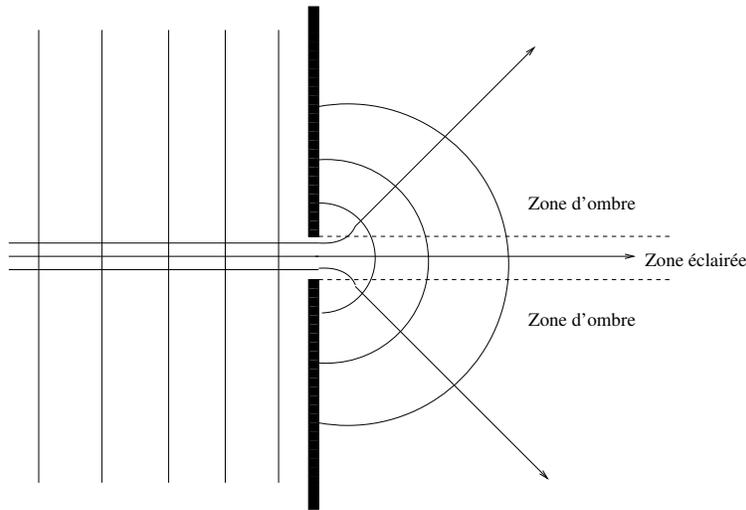


FIGURE 8.6 – Petite ouverture dans un écran.

et de la condition de rayonnement à l'infini

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8.20)$$

quand  $r$  tend vers l'infini. La résolution de ce type de problème est complexe. Les solutions analytiques ne sont connues que dans un nombre très restreint de cas comme pour un obstacle cylindrique ou sphérique.

Une méthode bien connue pour réduire la propagation du son est la construction d'un écran acoustique entre la source et la zone à protéger. Si le point d'écoute est situé dans la zone d'ombre de l'écran, le son ne peut pas parvenir par un chemin direct et ce qui est entendu provient de la diffraction par le sommet de l'écran. Pour estimer l'atténuation apportée par la présence de l'écran, considérons le cas d'un mur rigide placé entre la source  $S$  et l'observateur  $M$ , comme sur la figure 8.7.

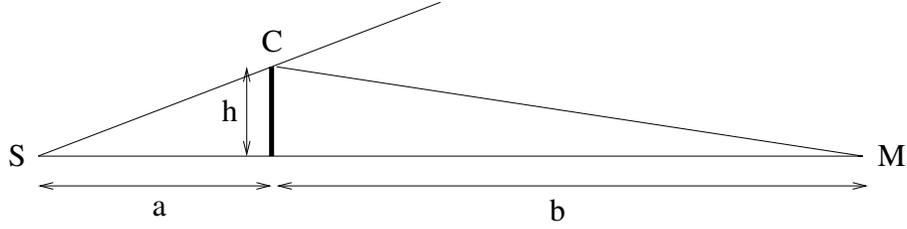


FIGURE 8.7 – Ecran semi-infini.

Une formule approchée est la relation de Kurze qui exprime l'atténuation en fonction du paramètre de Fresnel  $N = 2\delta/\lambda$  avec  $\delta$  donné par

$$\delta = SC + CM - SM \quad (8.21)$$

L'atténuation est donnée par l'expression empirique suivante :

$$\Delta L = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{2\pi N}}{\tanh \sqrt{2\pi N}} + 5 \quad (8.22)$$

pour  $N \geq -0.2$  avec un maximum de  $20dB$ .

D'autres méthodes de calcul plus précises existent qui sont fondées soit sur des calculs analytiques sophistiqués de la propagation acoustique autour du mur, soit sur des méthodes numériques comme les méthodes d'équations intégrales. La transmission à travers la barrière peut être négligée si les matériaux et l'épaisseur fournissent une atténuation supérieure à 20 dB.



# Chapitre 9

## Isolation acoustique

L'isolation acoustique vise à réduire le son perçu dans un local du à une source présente dans un autre local ou à l'extérieur du bâtiment. La source peut être une source sonore mais aussi une source vibratoire. Les chemins de transmission de la source au récepteur peuvent être complexe et leur étude et les moyens d'isolation constituent l'essentiel de ce chapitre.

### 9.1 Sources de bruit dans les bâtiments

Les sources de bruit dans les bâtiments sont très variées. La figure 9.1 en montre quelques unes. On distinguera les bruits aériens qui sont engendrés par des sources n'ayant aucun contact avec la structure du bâtiment (voix, télévision, transports, ...), des bruits solidiens qui sont générés par des sources qui sont liées à la structure du bâtiment, ou qui la frappent.

#### 9.1.1 Sources extérieures aux bâtiments

Un premier type de source est extérieur aux bâtiments et provient de sources de bruit dans l'environnement. Les transports occupent une place prépondérante dans cette catégorie. Dans le cas des trains, les sources sont principalement au niveau du contact roue/rail, des moteurs, du freinage et des sources de bruit aérodynamiques qui deviennent prépondérantes à grande vitesse, voir figure 9.2. Pour les avions, les sources sont également multiples comme indiquée sur la figure 9.3. Enfin le cas d'une voiture, présenté sur la figure 9.4, montre des sources principalement au niveau du moteur, du contact pneumatique chaussée et de l'échappement. Un bruit aérodynamique peut également s'ajouter.

A ces sources liées au transport, on peut ajouter de nombreuses autres sources, telles que les chantiers, les bruits de voisinage, les sources industrielles, les activités commerciales et de loisirs, ... Tous ces bruits se propagent dans l'atmosphère et peuvent pénétrer dans les bâtiments en cas d'isolation insuffisante au niveau des fenêtres et des murs. Pour améliorer cela, la pose de fenêtres avec double vitrage et l'isolation des façades de bâtiments sont des solutions à envisager.

#### 9.1.2 Sources internes aux bâtiments

Les sources internes aux bâtiments sont également très variées, voir figure 9.1. Parmi les sources de bruit, on pourra lister toute la plomberie, les transformateurs électriques et les ascenseurs, les sanitaires, claquement de porte, hotte, locaux techniques et les autres occupants du bâtiment.

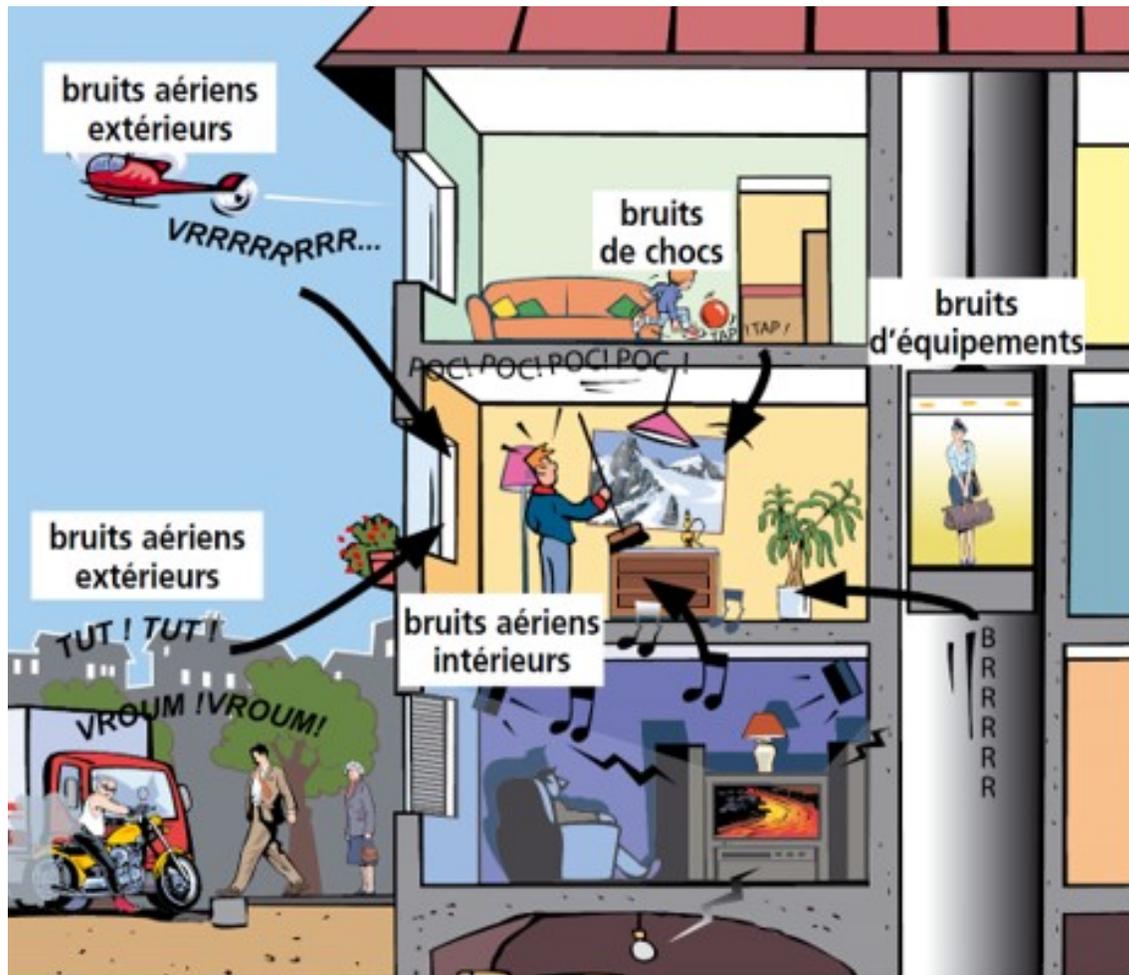


FIGURE 9.1 – Quelques sources de bruit.

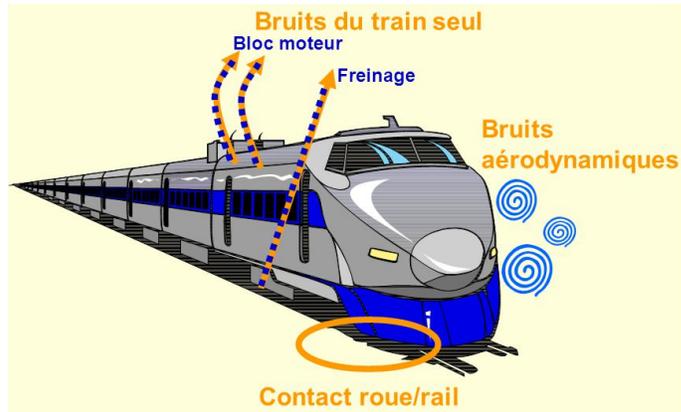


FIGURE 9.2 – Bruit des trains.



FIGURE 9.3 – Bruit des avions.



FIGURE 9.4 – Bruit de voiture.

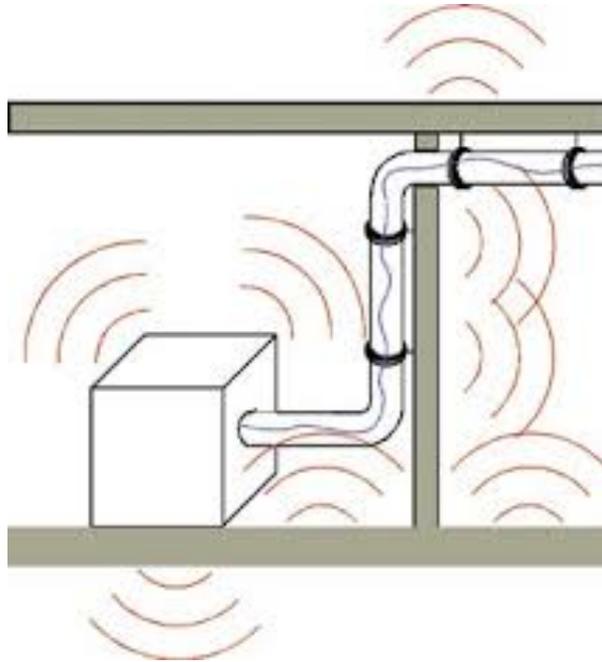


FIGURE 9.5 – Bruit engendré par des conduits.

Les systèmes de ventilation et de manière générale toutes les conduites transportant des fluides sont également des sources importantes, voir figure 9.5. Les sources peuvent provenir de l'équipement mécanique ou du flux d'air dans les conduites. Les équipements mécaniques sont les pompes, compresseurs, générateurs, climatiseurs et systèmes de traitement de l'air. Le bruit engendré provient en général des parties tournantes de ces équipements. Des vibrations peuvent aussi être produites sur la structure du bâtiment. Les flux d'air transmettent les bruits harmoniques engendrés par les équipements listés ci-dessus et peuvent en plus engendrer des bruits dus à la turbulence de l'air transporté. Cette turbulence peut être limitée en réduisant le débit d'air, en évitant les changements brusque de direction ou de section des gaines de ventilation, en recouvrant l'intérieur de matériaux amortissant ou en installant des silencieux.

## 9.2 Transmission à travers des parois

### 9.2.1 Paroi mince

La conception d'une paroi isolante d'un point de vue acoustique est d'une importance capitale pour le contrôle du son dans de nombreuses situations, notamment pour les bâtiments (murs, planchers, fenêtres). Commençons par étudier le cas du dioptré de la figure 9.6 où une onde incidente dans un milieu 1 arrive sur un milieu 2 de propriétés différentes. On suppose que la paroi entre les deux fluides est très fine et qu'elle est caractérisée par une masse par unité de surface  $m$ . En notant  $A$ ,  $B$  et  $C$  les amplitudes des ondes incidentes, réfléchies et transmises, ces différentes ondes s'écrivent :

— Onde incidente :  $Ae^{ikx}$

- Onde réfléchi :  $Be^{-ikx}$
- Onde transmise :  $Ce^{ikx}$

Ecrivons la loi de Newton et la continuité de la vitesse particulière sur le plan de séparation entre les deux milieux

$$-i\omega m v = A + B - C \quad (9.1)$$

$$\frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(A - B) = \frac{ik_2}{i\rho_2\omega}C = v \quad (9.2)$$

On obtient

$$A + B = \left(1 - \frac{i\omega m}{Z_2}\right)C \quad (9.3)$$

$$A - B = \frac{Z_1}{Z_2}C \quad (9.4)$$

avec  $Z_1 = \rho_1 c_1$  et  $Z_2 = \rho_2 c_2$ , soit

$$C/A = 2 \left[1 - \frac{i\omega m}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_2}\right]^{-1} \quad (9.5)$$

Le facteur de transmission de la puissance acoustique est défini par

$$T = \frac{|C|^2}{2Z_2} / \frac{|A|^2}{2Z_1} = \frac{4Z_1/Z_2}{(1 + Z_1/Z_2)^2 + (\omega m/Z_2)^2} \quad (9.6)$$

A basse fréquence, la transmission est déterminée par le rapport des impédances des deux milieux. A haute fréquence, le comportement est défini par la masse surfacique de la paroi. Dans le cas d'une transmission air air à travers une paroi solide, le facteur  $\omega m/\rho_0 c$  est généralement beaucoup plus grand que un et on a alors

$$T = [2\rho_0 c/\omega m]^2 \quad (9.7)$$

Le facteur de transmission est souvent donné sous forme logarithmique

$$TL = 10 \log_{10}(1/T) \quad (9.8)$$

Où TL signifie transmission loss. Dans le cas de l'air

$$TL = 20 \log_{10}(fm) - 42 \quad (9.9)$$

Cette relation exprime la loi de masse. L'atténuation augmente de 6dB par doublement de la masse surfacique ou de la fréquence.

Le tableau 9.1 donne les valeurs d'atténuation pour une paroi en béton de masse volumique  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$  pour différentes fréquences et épaisseurs.

### 9.2.2 Paroi épaisse

Le cas d'une paroi épaisse séparant deux milieux de mêmes propriétés est représenté sur la figure 9.7. Il faut alors tenir compte de la propagation du son à l'intérieur de la paroi. Avec les notations de la figure 9.7, dans la structure, nous avons les ondes suivantes

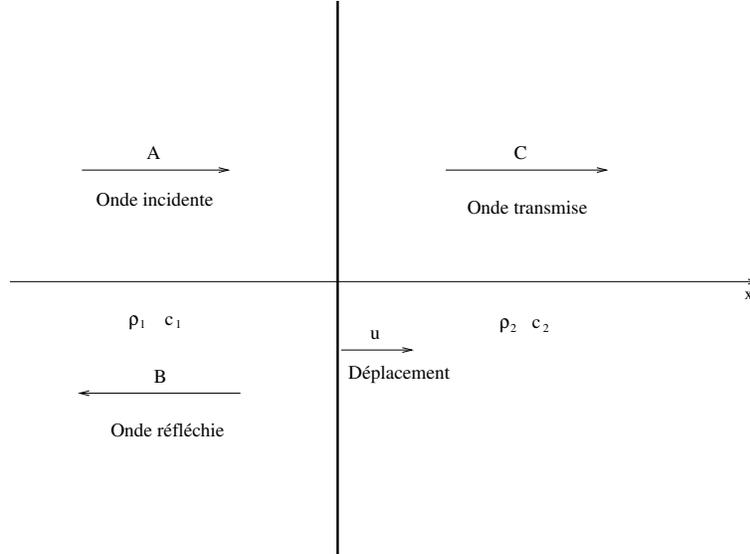


FIGURE 9.6 – Paroi mince séparant deux domaines fluides.

Fréquence (Hz)	Atténuation en dB e=10cm	Atténuation en dB e=5cm	Atténuation en dB e=1cm
100	45	39	25
500	59	53	39
2000	71	65	51
5000	79	73	59

TABLE 9.1 – Atténuation par une paroi en béton

- Onde plane incidente :  $e^{ikx}$
- Onde réfléchie :  $Re^{-ikx}$
- Onde transmise :  $Te^{ikx}$
- Onde dans la cloison :  $Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$

Pour trouver les amplitudes des ondes dans les différentes parties du système, il faut écrire les conditions de continuité de la pression et de la vitesse particulière sur les deux interfaces. On obtient

$$1 + R = A + B \quad (9.10)$$

$$\frac{ik}{i\rho\omega}(1 - R) = \frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(A - B) \quad (9.11)$$

$$Ae^{ik_1l} + Be^{-ik_1l} = T \quad (9.12)$$

$$\frac{ik_1}{i\rho_1\omega}(Ae^{ik_1l} - Be^{-ik_1l}) = \frac{ik}{i\rho\omega}T \quad (9.13)$$

Dans un premier temps, on peut en déduire les valeurs des amplitudes  $A$  et  $B$  à partir des deux

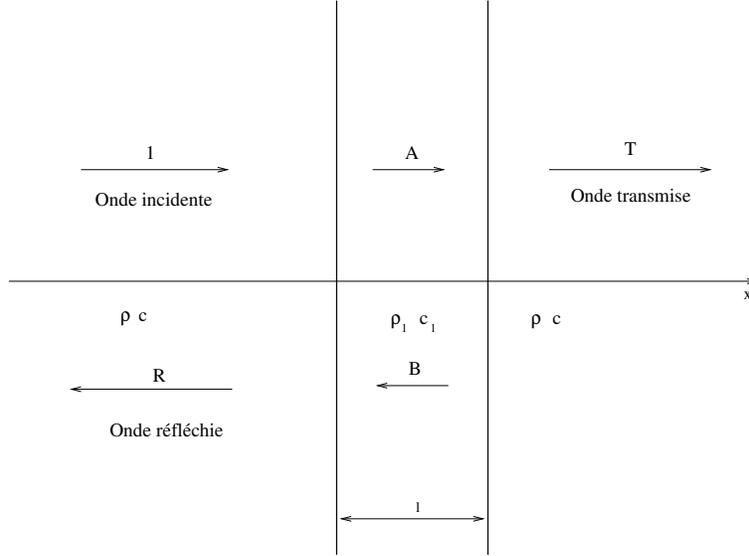


FIGURE 9.7 – Cas d’une paroi épaisse.

dernières relations précédentes.

$$A = \frac{1}{2}e^{-ik_1l}\left(1 + \frac{Z_1}{Z}\right)T \quad (9.14)$$

$$B = \frac{1}{2}e^{ik_1l}\left(1 - \frac{Z_1}{Z}\right)T \quad (9.15)$$

$$(9.16)$$

Nous avons aussi à partir de (9.10) et (9.11)

$$2 = \left(1 + \frac{Z}{Z_1}\right)A + \left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right)B \quad (9.17)$$

Nous en déduisons

$$2 = \left[\frac{1}{2}e^{-ik_1l}\left(1 + \frac{Z}{Z_1}\right)\left(1 + \frac{Z_1}{Z}\right) + \frac{1}{2}e^{ik_1l}\left(1 - \frac{Z_1}{Z}\right)\left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right)\right]T \quad (9.18)$$

d’où la valeur du coefficient de transmission

$$T = \frac{4ZZ_1}{(Z + Z_1)^2e^{-ik_1l} - (Z - Z_1)^2e^{ik_1l}} \quad (9.19)$$

$$T = \frac{4ZZ_1}{-(Z^2 + Z_1^2)2i \sin k_1l + 4ZZ_1 \cos k_1l} \quad (9.20)$$

$$|T|^2 = \frac{1}{\cos^2 k_1l + \frac{(Z^2 + Z_1^2)^2}{4Z^2Z_1^2} \sin^2 k_1l} \quad (9.21)$$

Nous supposons pour la dernière relation que les impédances sont réelles. Nous remarquons que  $T(\omega = 0) = 1$ . Il y a donc transmission totale à basse fréquence. Pour les basses fréquences nous

pouvons aussi utiliser l'approximation  $\sin k_1 l \approx k_1 l$ . En supposant de plus que  $Z_1 \gg Z$  ce qui est généralement le cas si les milieux amont et aval sont de l'air, nous obtenons

$$|T|^2 \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_1 l \omega}{2\rho c}\right)^2} \approx \left(\frac{2\rho c}{\rho_1 l \omega}\right)^2 \quad (9.22)$$

Nous retrouvons que l'atténuation est proportionnelle à  $\rho_1 l$  qui est la masse par unité de surface de la paroi. Par exemple, pour une paroi d'épaisseur  $l = 10\text{cm}$  et de masse volumique  $\rho_1 = 2300\text{kg/m}^3$  (béton), nous obtenons par la formule (9.22) une atténuation de  $45\text{dB}$  à  $100\text{Hz}$  et de  $65\text{dB}$  à  $1000\text{Hz}$ . On pourra aussi remarquer que lorsque  $\sin k_1 l = 0$ , nous avons  $T = 1$ . Pour ces fréquences, il y a transmission totale de l'énergie. Dans la pratique, la transmission n'est pas totale à cause des dissipations dans la paroi. Néanmoins, il y a des fréquences pour lesquelles la paroi est presque transparente.

Les cas étudiés précédemment sont les plus simples. Pour une étude plus complète, il faudrait tenir compte aussi d'ondes ayant des incidences obliques. Les parois utilisées en pratique peuvent être plus complexes avec des cavités internes ou une lame d'air entre deux parois solides. La complexité de la modélisation du comportement de ces parois est bien sûr accrue. Pour des parois élastiques légères, il faut tenir compte des vibrations de plaque de la paroi. On pourra aussi étudier le comportement de ces cloisons en ayant recourt à des moyens expérimentaux pour mesurer la perte par transmission.

### 9.2.3 Fréquence critique

Dans une certaine bande de fréquences, la loi de masse n'est pas vérifiée et l'indice d'affaiblissement peut chuter brutalement de 5 à 10 dB. Cette fréquence critique apparaît lorsque la célérité de l'onde acoustique est égale à la célérité de l'onde de flexion de la paroi. Cette fréquence critique dépend du matériau et de l'épaisseur de la paroi. Pour les matériaux courants (béton, plâtre,...), elle se situe dans la plage de la conversation et crée un "trou" dans l'isolement acoustique (voir figure 9.8). Sur cette figure est indiquée la loi de masse théorique conduisant à une atténuation augmentant de 6dB par octave pour une incidence normale et la loi de 4dB par octave pour une incidence diffuse. On peut déterminer la fréquence critique d'une paroi simple par la formule suivante :

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)m_s}{Ee^3}} \quad (9.23)$$

avec :

- $m_s$  masse surfacique de la paroi en  $\text{kg/m}^2$
- $E$  module d'Young du matériau en Pa
- $e$  épaisseur de la paroi en m
- $c$  vitesse du son dans l'air = 340 m/s
- $\nu$  coefficient de Poisson

## 9.3 Isolation contre les bruits aériens

Les bruits aériens sont engendrés par des sources n'ayant aucun contact avec la structure du bâtiment (voix, télévision, transports, ...) au contraire des bruits solidiens, voir une illustration sur la figure 9.9.

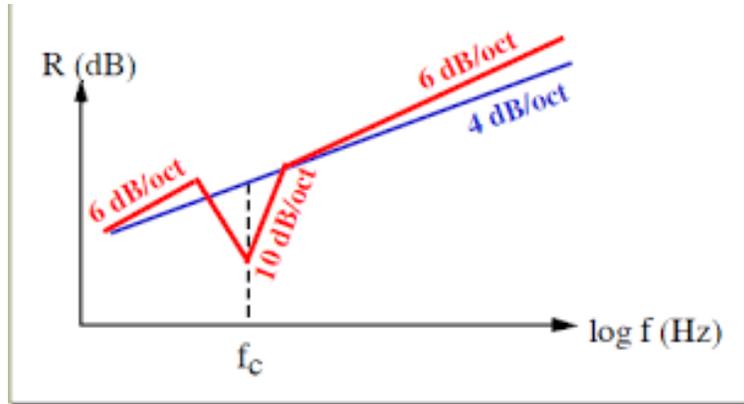


FIGURE 9.8 – Comportement de la paroi autour de la fréquence critique.

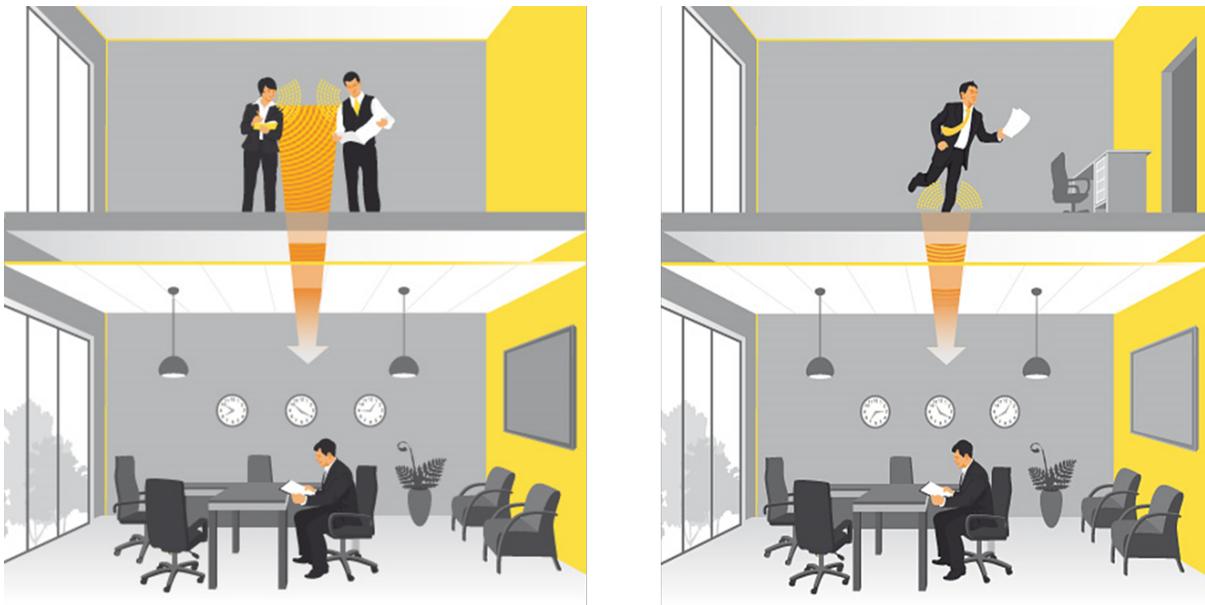


FIGURE 9.9 – Bruits aérien (gauche) et solidien (droite).

### 9.3.1 Bilan d'énergie sur une paroi

Une onde acoustique arrivant sur une paroi se répartit en (voir figure 9.10)

- Une partie transmise de l'autre côté de la paroi
- Une partie absorbée par la paroi
- Une partie réfléchiée par la paroi

ce qui donne

$$E_i = E_r + E_a + E_t \tag{9.24}$$

avec

- $E_i$  : énergie incidente
- $E_r$  : énergie réfléchiée
- $E_a$  : énergie absorbée

—  $E_t$  : énergie transmise

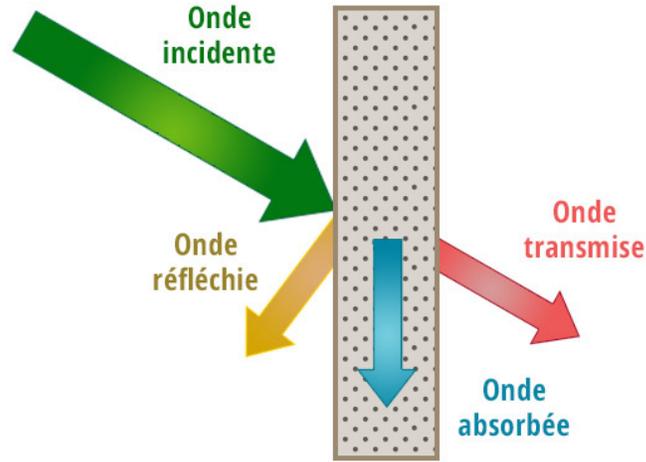


FIGURE 9.10 – Répartition de l'énergie rencontrant une paroi.

Le coefficient de transmission est

$$\tau = \frac{E_t}{E_i} \quad (9.25)$$

Pour l'énergie transmise, on peut définir l'indice d'affaiblissement acoustique (transmission loss en anglais) par

$$R = TL = 10 \log_{10} \frac{E_i}{E_t} = -10 \log_{10} \tau \quad (9.26)$$

Ces grandeurs ne dépendent que des propriétés de la paroi et non de celles des locaux que la paroi sépare. Elles peuvent être déterminées par les méthodes de la section précédente. Dans le cas d'une paroi faite de plusieurs parties différentes de coefficients de transmission  $\tau_i$  et de surfaces  $S_i$ , nous avons

$$\tau_{tot} = \frac{\tau_1 S_1 + \dots + \tau_n S_n}{S_{tot}} \quad (9.27)$$

### 9.3.2 Transmission du son entre locaux

Le son est émis dans un local appelé "local d'émission" et est transmis à un "local de réception", voir figure 9.11. On peut noter trois chemins de transmission possibles : la transmission directe à travers la paroi séparative, la transmission latérale à travers les parois liées à la paroi séparative et la transmission parasite due à des canalisations ou à des défauts dans la paroi séparative.

L'isolement acoustique entre les deux locaux est la différence des niveaux sonores entre le local d'émission et celui de réception

$$D = L_e - L_r \quad (9.28)$$

—  $D$  : Isolement acoustique (dB)

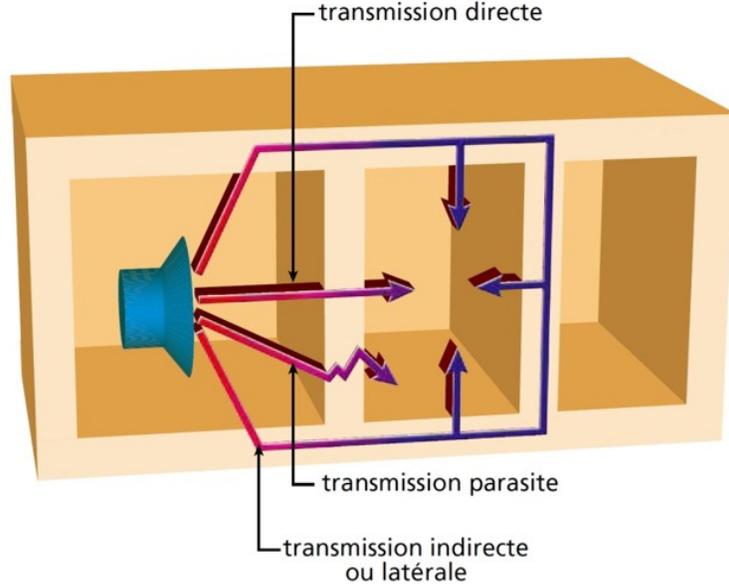


FIGURE 9.11 – Chemins de transmission d’un local à un autre.

- $L_e$  : Niveau sonore émis (dB)
- $L_r$  : Niveau sonore reçu (dB)

Cet isolement ne dépend pas seulement de l’indice d’affaiblissement acoustique de la paroi entre les deux locaux mais aussi de la surface de la paroi, des transmissions latérale et parasite, du volume du local récepteur et des absorbants en paroi du local récepteur.

Pour qu’une conversation ne soit absolument pas perçue d’un local à l’autre, il faut une isolation d’au moins 60dB. Pour 30dB et moins la conversation est clairement perçue.

On peut calculer cet isolement en fonction des caractéristiques de la paroi et des deux salles. Etudions le cas de la transmission directe. Pour la salle un, le bilan d’énergie fait intervenir la puissance de la source  $P$ , l’énergie absorbée par les parois de la salle un  $A_1 I_1$  (avec  $A_1 = \alpha_1 S_1$ ), l’énergie perdue vers la salle deux  $I_1 S_c \tau$  et l’énergie revenant de la salle deux vers la salle un  $I_2 S_c \tau$ , soit

$$P + I_2 S_c \tau = A_1 I_1 + I_1 S_c \tau \quad (9.29)$$

Pour la salle deux, l’énergie est absorbée par les parois de la salle  $A_2 I_2$ , renvoyée vers la salle un  $I_2 S_c \tau$  et gagnée de la salle un  $I_1 S_c \tau$ , soit un bilan

$$I_1 S_c \tau = A_2 I_2 + I_2 S_c \tau \quad (9.30)$$

On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues dont la solution est

$$I_1 = \frac{P(A_2 + S_c \tau)}{(A_1 + S_c \tau)(A_2 + S_c \tau) - (S_c \tau)^2} \quad (9.31)$$

$$I_2 = \frac{P S_c \tau}{(A_1 + S_c \tau)(A_2 + S_c \tau) - (S_c \tau)^2} \quad (9.32)$$

Par conséquent

$$D = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} = 10 \log_{10} \frac{A_2 + S_c \tau}{S_c \tau} \quad (9.33)$$

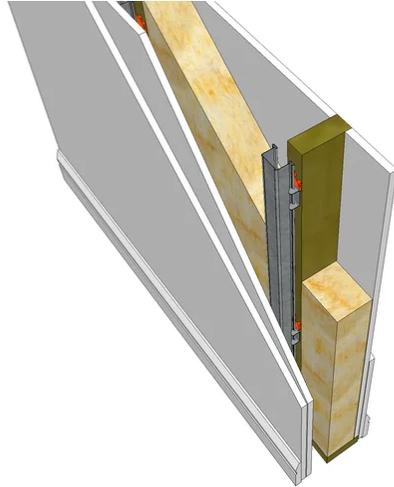


FIGURE 9.12 – Mur à double cloison.

Cette atténuation ne dépend que des caractéristiques de la salle deux mais pas de celles de la salle un. Généralement nous avons  $S_c\tau \ll A_2$  et dans ce cas

$$D \approx R + 10 \log_{10} \frac{A_2}{S_c} \quad (9.34)$$

Pour augmenter l'isolation, on peut donc

- Augmenter l'indice d'affaiblissement de la paroi  $R$
- Augmenter l'absorption dans le local deux  $A_2$
- Diminuer la surface de couplage  $S_c$

Pour avoir des murs qui isolent vraiment du bruit, il faut des doubles parois séparées par une lame d'air ou un matériau absorbant, voir figure 9.12. Ces murs doivent être scellé convenablement (avec des matériaux souples) pour éviter toute apparition de trou d'air par où le son pourrait se propager. Les mêmes considérations s'appliquent pour une isolation au niveau du plafond, voir un exemple figure 9.13.

## 9.4 Isolation contre les bruits solidiens

### 9.4.1 Principe

Les bruits solidiens sont générés par des sources qui sont liées à la structure du bâtiment, ou qui la frappent. Ce bruit provient de l'application d'une force sur une paroi. Cette force est engendrée par exemple par la marche, les déplacements ou chute d'objet, les claquements de porte ou les vibrations d'équipements de bâtiment (chaudière, ascenseurs, robinetterie, ...). Pour pouvoir isoler contre ces bruits, il faut pratiquer une coupure sur le chemin de propagation sous la forme de matériaux souples. Cela conduit par exemple à la pose de dalles flottantes sur le plancher ou une désolidarisation des appareils de chauffage ou de la plomberie, voir figures 9.14, 9.15 et 9.16.

Tous les systèmes vibrants doivent être liés au bâtiment par des liaisons souples pour réduire le transfert des vibrations. Les équipements trop bruyants doivent être placés dans des enceintes.

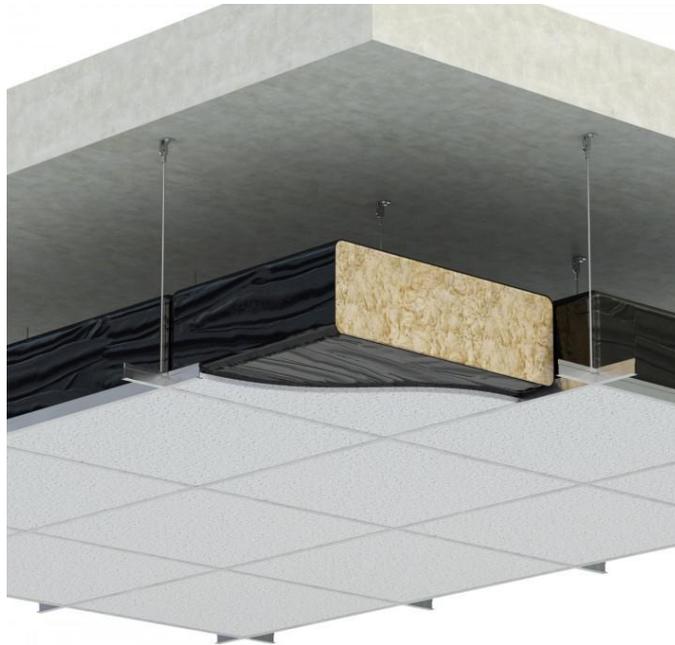


FIGURE 9.13 – Plafond isolant.

Les figures 9.17 et 9.18 montre quelques solutions envisageable pour lutter contre le bruit engendré par des conduits et des machines vibrantes.

#### 9.4.2 Mesure avec une machine à choc

Cette machine est utilisée pour estimer l'efficacité d'un plancher vis à vis de la réduction du bruit transmis. Le principe de l'expérience est indiqué sur la figure 9.19. La machine est placée dans une pièce et le son est mesuré à l'étage inférieur. Elle consiste en cinq marteaux de 500g chacun qui frappent de sol depuis une hauteur de 40mm à une fréquence globale de 10Hz entre deux impacts, voir figure 9.20. Le son engendré est mesuré par un microphone. Ce niveau sonore permet d'estimer la qualité du plancher.

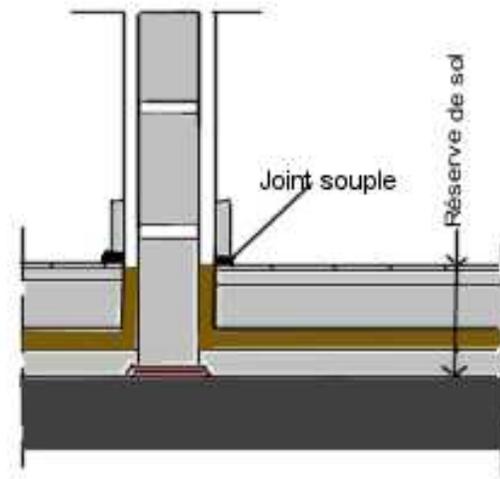
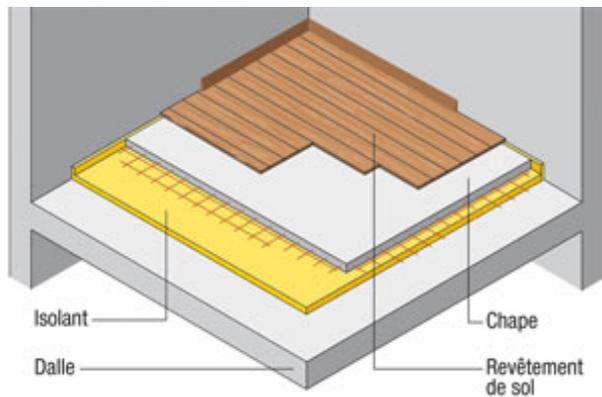


FIGURE 9.14 – Plancher flottant et joint.

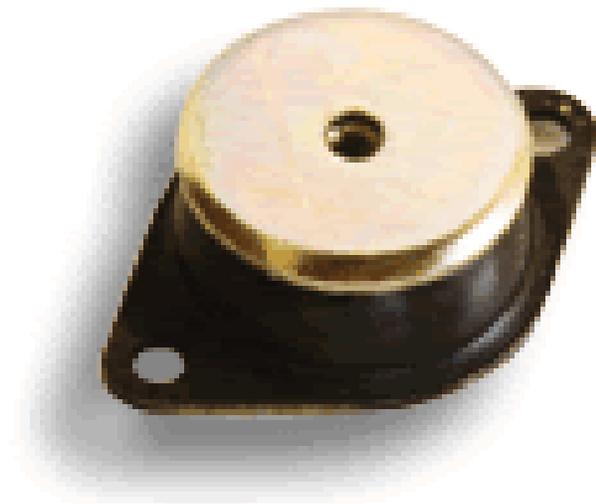


FIGURE 9.15 – Climatiseur monté sur plot.

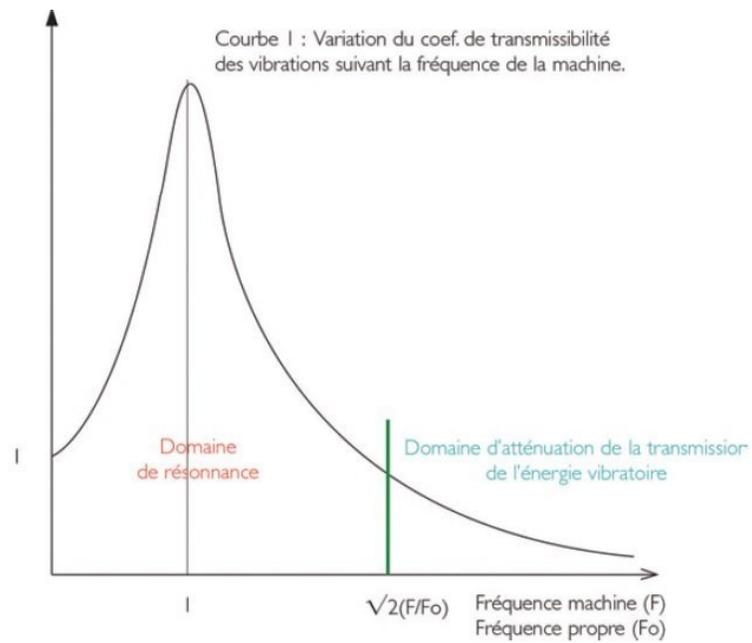


FIGURE 9.16 – Courbe de transmission du plot.

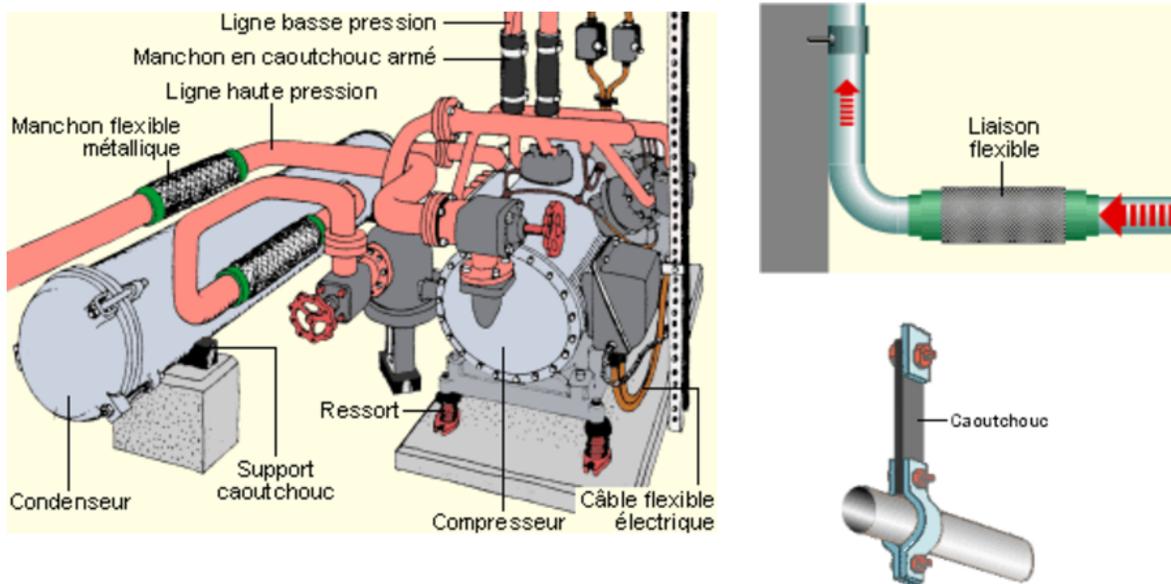


FIGURE 9.17 – Isolation de conduits.

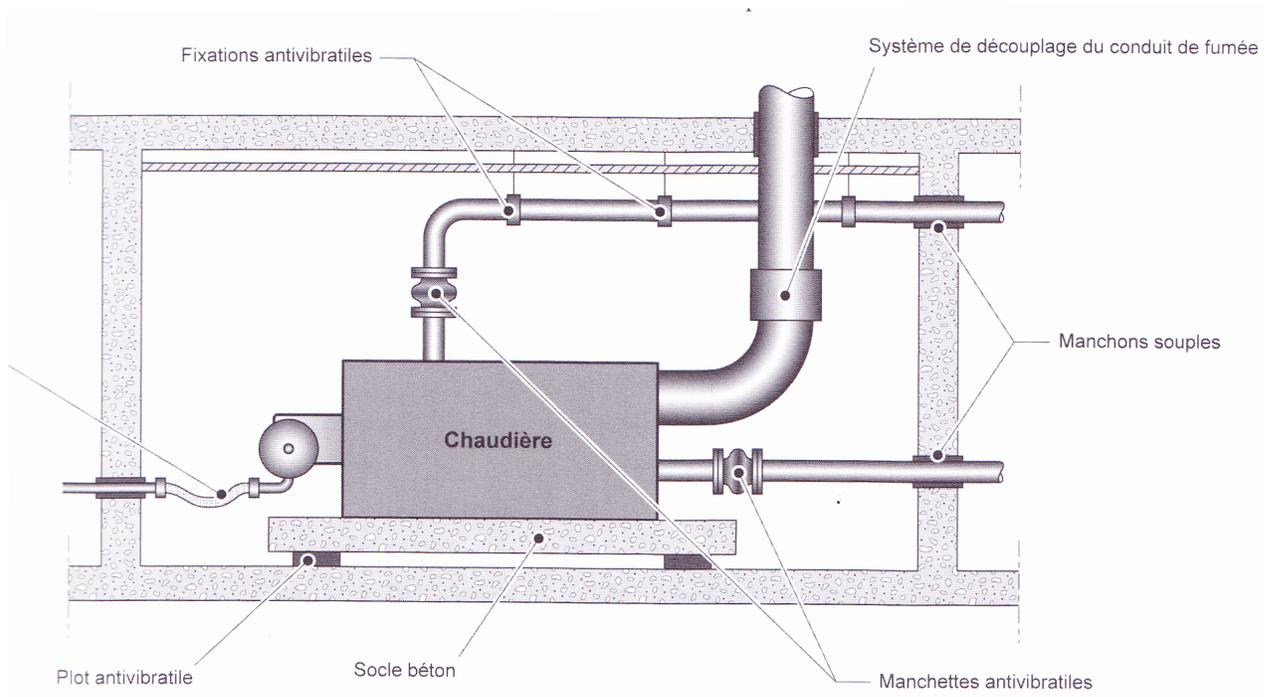


FIGURE 9.18 – Chaudière.

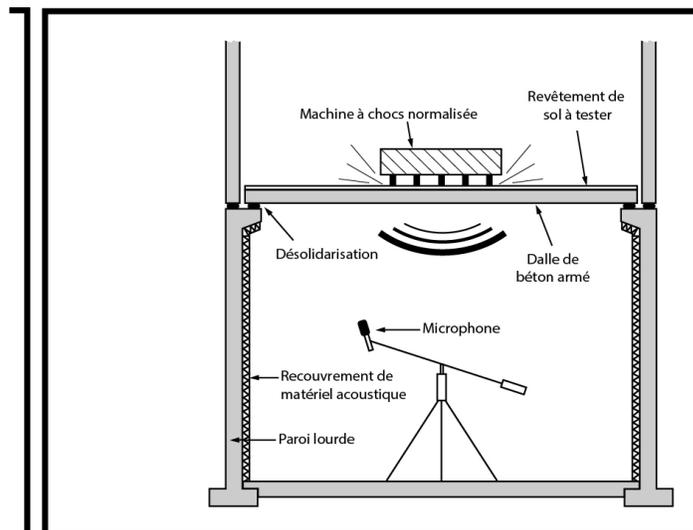


FIGURE 9.19 – Principe d'une mesure avec une machine à chocs.

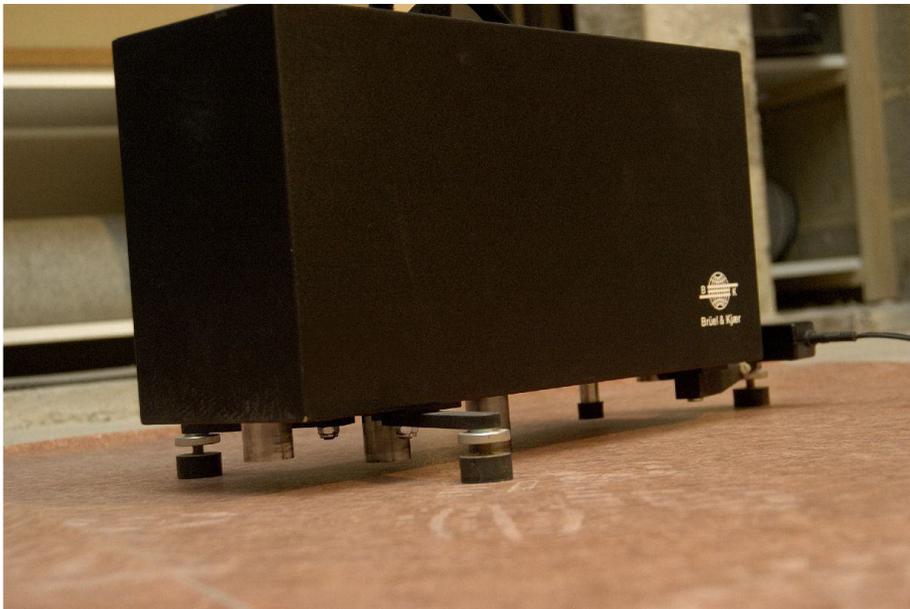


FIGURE 9.20 – Machine à chocs.



# Chapitre 10

## Le rayonnement acoustique

Lorsqu'une structure est plongée dans un fluide, ses vibrations sont transmises au fluide environnant et engendre une onde acoustique. Ce processus de conversion de vibrations mécaniques en onde acoustique permet d'expliquer le fonctionnement d'une grande partie des sources sonores. On trouvera dans cette catégorie des instruments de musique, voir la figure 10.1, des moyens de transports sur la figure 10.2 ou des machines sur la figure 10.3.

### 10.1 Cas unidimensionnel

Considérons le piston présenté sur la figure 10.4 et animé d'une vitesse  $v(t) = V \cos \omega t$ . On suppose que le piston est très long et que par conséquent, il n'y a pas de réflexion à droite et d'onde retour. Sur la paroi du piston, nous avons l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui donne

$$-V \rho_0 \omega \sin \omega t + \frac{dp}{dx}|_{x=0} = 0 \quad (10.1)$$

Le champ de pression est une onde plane  $p(x, t) = \text{Re}(P e^{-i(\omega t - kx)})$  et par conséquent

$$\frac{dp}{dx}(x, t) = \text{Re}(ikP e^{-i(\omega t - kx)}) \quad (10.2)$$

$$\frac{dp}{dx}(0, t) = \text{Re}(ikP e^{-i\omega t}) \quad (10.3)$$

$$= \rho_0 \omega V \sin \omega t \quad (10.4)$$

d'où  $kP = \rho_0 \omega V$ ,  $P = \rho_0 c V$  et finalement

$$p(x, t) = \rho_0 c V \cos(\omega t - kx) \quad (10.5)$$

La puissance rayonnée par unité de surface du piston est

$$Puis = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c V \cos(\omega t) V \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2 \quad (10.6)$$

Elle varie comme  $V^2$  et est proportionnelle à l'impédance  $Z = \rho_0 c$ . Le déplacement du piston est donné par  $x = -v/(i\omega)$ . Donc pour avoir une puissance constante, il faut un déplacement du piston inversement proportionnel à  $\omega$ , donc un grand déplacement dans les basses fréquences et un petit déplacement dans les grandes fréquences.



FIGURE 10.1 – Instruments de musique.

## 10.2 Cas d'une sphère

A titre d'exemple, nous étudions le rayonnement acoustique d'une sphère vibrant uniformément sur sa surface. Notant  $a$  le rayon de la sphère, le champ de pression est

$$p(r) = p(a)e^{ik(r-a)}\frac{a}{r} \quad (10.7)$$

La vitesse des points de la surface de la sphère est donnée par

$$-i\rho_0\omega v + \frac{dp}{dr} = 0 \quad (10.8)$$

$$v(r) = \frac{ap(a)}{i\rho_0\omega r^2}(ikr - 1)e^{ik(r-a)} \quad (10.9)$$

Sur la surface de rayon  $a$ , nous avons

$$p(a) = \frac{i\rho_0\omega a}{ika - 1}v(a) \quad (10.10)$$

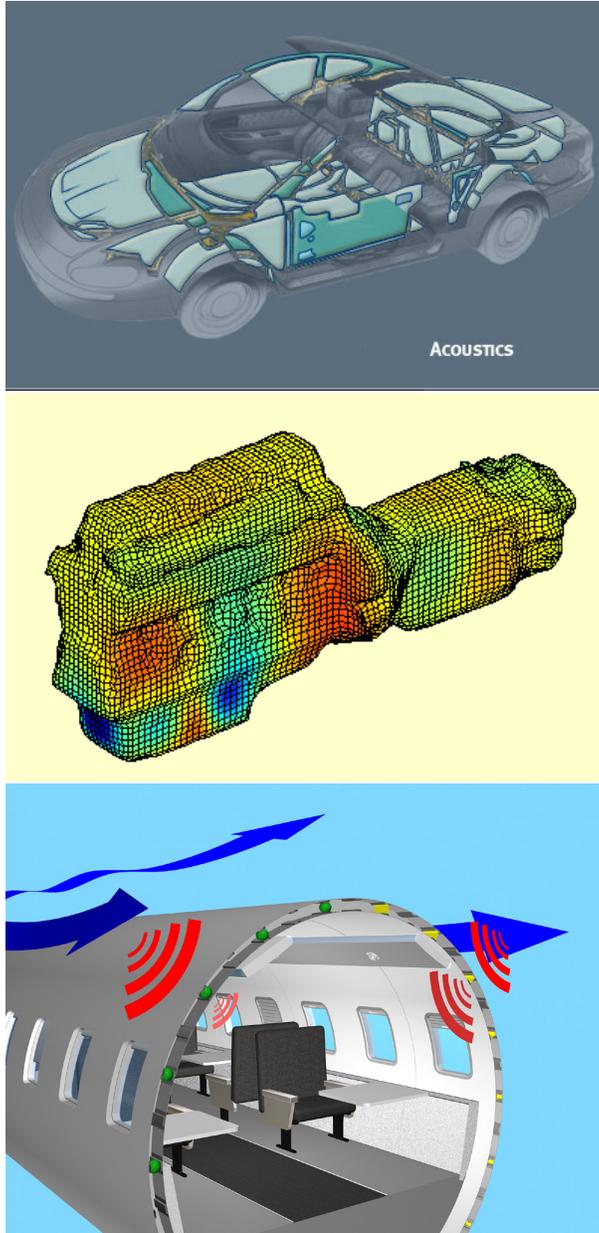


FIGURE 10.2 – Rayonnement de moyens de transport.



FIGURE 10.3 – Machines.



FIGURE 10.4 – Piston.

La puissance rayonnée par la sphère de surface  $S = 4\pi a^2$  est donc

$$W = \frac{1}{2} S \operatorname{Re}(p^* v) \quad (10.11)$$

$$= \frac{1}{2} S \operatorname{Re}\left(\frac{-i\rho_0\omega a}{-ika - 1} |v|^2\right) \quad (10.12)$$

$$= \frac{1}{2} S |v|^2 \operatorname{Re}\left(i\rho_0\omega a \frac{1 - ika}{1 + (ka)^2}\right) \quad (10.13)$$

$$= \frac{1}{2} S |v|^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \quad (10.14)$$

Le rayonnement est faible quand  $ka < 1$  soit  $a < \frac{\lambda}{2\pi}$ . Ce résultat est en fait bien plus général. Les objets de tailles petites par rapport à la longueur d'onde rayonnent mal le son. Par conséquent, pour des objets de même taille ou plus grand que la longueur d'onde, on peut s'attendre à des problèmes de bruit alors que cela est moins probable pour des objets de plus petites dimensions. Il est aussi difficile d'avoir une source rayonnant efficacement à toutes les fréquences.

### 10.3 Rayonnement d'une structure

Les mouvements de la structure sont décrits par les équations de l'élastodynamique, par exemple pour le cas d'un milieu continu élastique,

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (10.15)$$

ou en fréquence

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = -\rho\omega^2 \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (10.16)$$

Dans le milieu fluide, il faut résoudre

$$\begin{aligned} \Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} &= o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (10.17)$$

ou en fréquence

$$\begin{aligned} \Delta p + k^2 p &= 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial r} - ikp &= o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Le couplage entre le fluide et la structure se traduit par la continuité de la vitesse normale et de

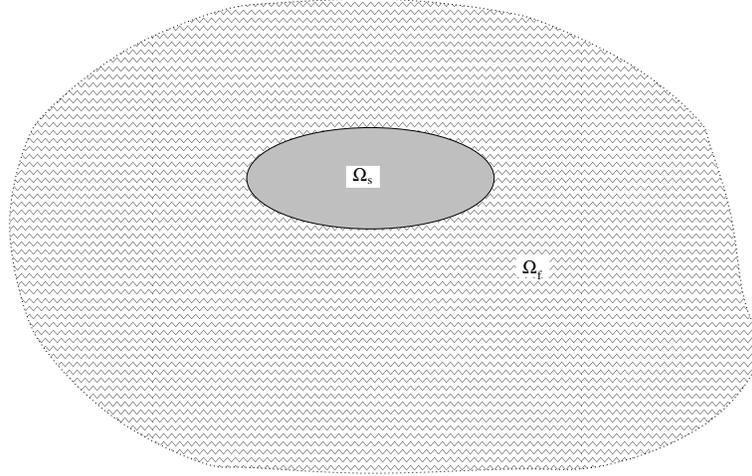


FIGURE 10.5 – Couplage fluide structure.

la pression, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \\ -p\mathbf{n} &= \sigma \mathbf{n} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Pour résoudre le problème couplé, il faut résoudre l'ensemble des équations précédentes soit en temps, soit en fréquence. Deux situations sont possibles

- Cas d'un fluide lourd (l'eau par exemple) : il faut résoudre toutes les équations couplées
- Cas d'un fluide léger (l'air par exemple) : on peut simplifier la résolution en suivant les étapes ci-dessous :
  1. Calculer le mouvement de la structure dans le vide
  2. Déterminer la vitesse normale sur la surface du solide
  3. Résoudre les équations de propagation dans le fluide avec comme condition aux limites la vitesse normale calculée à l'étape précédente

## 10.4 Solution dans le domaine fluide

Lorsqu'une structure plongée dans un fluide vibre, il est possible d'écrire une relation intégrale portant sur la pression et sa dérivée normale sur la surface de la structure. L'équation intégrale est une relation implicite qui lie la pression en tout point à la pression sur la surface. Elle est déduite du second théorème de Green. La pression au point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$  vérifie l'équation de Helmholtz

$$\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \quad (10.20)$$

où  $s(\mathbf{x})$  sont les termes de source. On multiplie cette égalité précédente par la fonction de Green  $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  et on intègre sur le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} (\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x})) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (10.21)$$

L'intégrale de droite est égale à la pression incidente  $p_{inc}(\mathbf{y})$ . C'est la pression qui existerait sans la présence de la structure. L'intégrale de gauche s'intègre deux fois par partie. Elle se simplifie à l'aide des considérations suivantes :

— La fonction de Green vérifie

$$\Delta G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + k^2 G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.22)$$

- La fonction de Green  $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  en 3D s'écrit  $\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ . Elle se comporte au voisinage de l'origine comme  $\frac{1}{4\pi r}$  avec  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$
- On construit une boule de rayon  $\varepsilon$  autour du point  $\mathbf{y}$ . On considère que la surface  $\Sigma_{ext}$  est une sphère de rayon  $R$ , voir la figure 10.6. On fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow \infty$
- La condition de Sommerfeld (condition de radiation) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{x}) = ikp(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (10.23)$$

Cette condition garantit que la solution est constituée d'ondes rayonnantes uniquement. D'après les résultats précédents et après simplification, les seuls termes qui restent conduisent à une relation implicite (l'équation intégrale) donnant la valeur de la pression en un point  $\mathbf{y}$  :

1. Sur le bord de la structure

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (10.24)$$

$\partial\Omega$  représente le bord de la structure

2. En un point à l'extérieur de la surface

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (10.25)$$

Démontrer les formules (10.24) et (10.25) en exercice.

Pour calculer le rayonnement acoustique, il faut résoudre l'équation (10.24) sur la surface vibrante en utilisant une condition aux limites sur cette surface, par exemple

$$\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = 0 \quad (10.26)$$

Dans ce cas, la surface est rigide et les sources acoustiques viennent du terme  $p_{inc}(\mathbf{y})$ . Il s'agit alors d'un problème de diffraction du son par un solide avec des sources sonores qui sont dans le fluide.

Le second cas est celui d'une surface vibrante avec

$$\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x}) = i\rho\omega\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \quad (10.27)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de vibration de la paroi. Dans l'équation (10.24), les termes connus sont  $\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})$  et  $p_{inc}(\mathbf{y})$ . La résolution de l'équation (10.24) doit permettre de trouver le champ de pression sur la surface  $p(\mathbf{x})$  puis le champ de pression dans tout le milieu fluide en utilisant la relation (10.25).

Ces problèmes de rayonnement ou de diffraction sont complexes à résoudre dès que la forme de l'objet s'écarte de formes très simples comme la sphère ou le plan. Dans ce cas, il faut considérer des méthodes numériques pour obtenir une solution du problème.

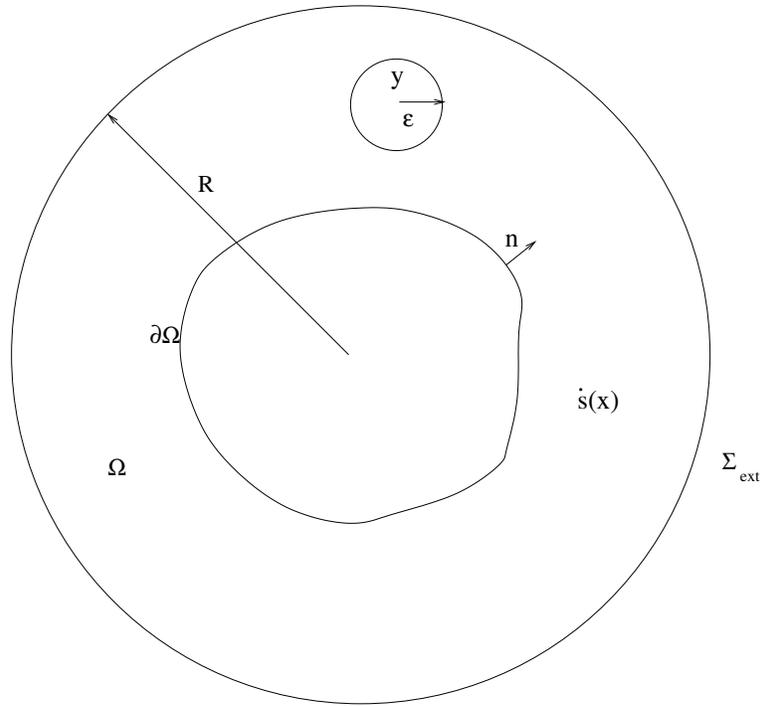


FIGURE 10.6 – Méthode intégrale

## 10.5 Intégrale de Rayleigh

Dans le cas où le rayonnement a lieu dans un demi-espace au lieu de l'espace entier, l'approche de la section précédente peut être reproduite avec une nouvelle fonction de Green. Dans le cas où le demi-espace a une frontière rigide la fonction de Green est

$$G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} \quad (10.28)$$

où  $r'$  est la distance entre la source image et le point de calcul du champ de pression, voir la figure 10.7. L'équation intégrale est de nouveau donnée par

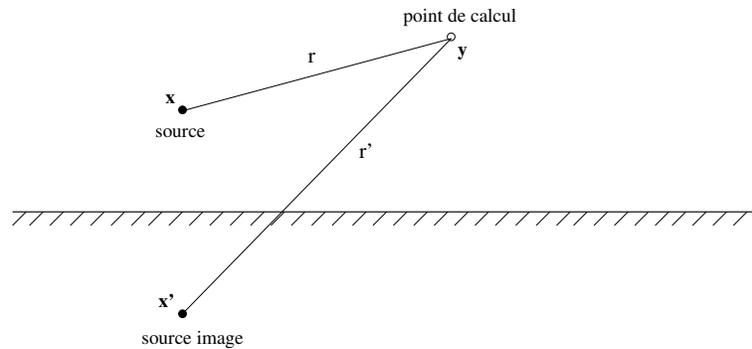


FIGURE 10.7 – Distance entre le point de calcul et la source image.

$$c(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x})p(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (10.29)$$

avec

$$\begin{aligned} c(\mathbf{y}) &= 1 && \text{dans le fluide ou sur le plan} \\ c(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2} && \text{sur } \partial\Omega \text{ excepté sur le plan} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Dans le cas où la surface de l'objet rayonnant est dans le plan, voir la figure 10.8, sur le plan la fonction de Green est telle que  $\frac{\partial G}{\partial n_x}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$ . Ainsi l'équation intégrale se réduit à

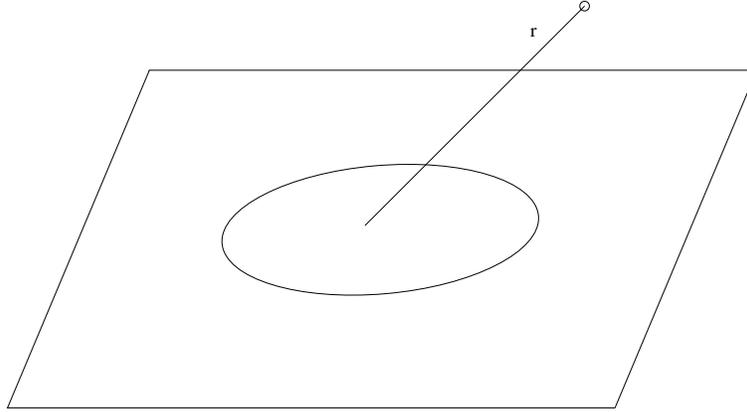


FIGURE 10.8 – Distance entre le point de calcul et la source image.

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})G(\mathbf{y} - \mathbf{x})ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial p}{\partial n_x}(\mathbf{x})\frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}}{2\pi|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}ds_x + p_{inc}(\mathbf{y}) \quad (10.31)$$

Le champ de pression est directement donné par le calcul de cette intégrale, dite intégrale de Rayleigh, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation.

## 10.6 Couplage fluide-structure

Nous allons maintenant considérer le cas de structures finies de formes complexes immergées dans un fluide. On se propose de déterminer la réponse du système, c'est à dire les mouvements de la structure et du fluide face à une excitation donnée. Les vibrations de la structure et les champs acoustiques sont engendrés par deux causes principales. La structure peut d'abord rayonner de l'énergie à cause de sources d'excitation internes qui induisent des vibrations. Ces vibrations mettent en mouvement la surface de séparation entre le fluide et le solide pour donner naissance à des ondes de pression dans le fluide. La structure peut aussi être soumise à un champ acoustique incident du à des sources ou à des ondes planes se propageant dans le fluide. Sa présence se traduit par la création d'un champ diffusé qui s'ajoute au champ incident. Nous centrerons notre étude sur la détermination du champ de pression acoustique dans le fluide environnant. Ces problèmes seront étudiés en régime harmonique.

Le milieu fluide est en contact avec une structure occupant un domaine  $\Omega_s$  suivant le schéma de la figure 10.9. Les structures que nous étudierons seront constituées de corps élastiques ou

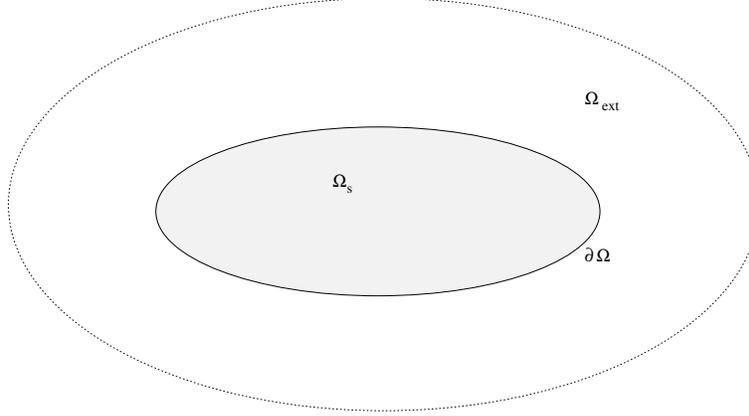


FIGURE 10.9 – Problème couplé

viscoélastiques qui vérifient les équations dynamiques suivantes dans le domaine  $\Omega_s$  occupé par le solide.

$$div\sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (10.32)$$

$\mathbf{f}$  est le vecteur des efforts volumiques s'exerçant sur la structure,  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement et  $\sigma$  le champ de contrainte. Pour des mouvements harmoniques nous avons

$$div\sigma + \mathbf{f} = -\rho\omega^2 \mathbf{u} \quad (10.33)$$

Le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par une loi de comportement viscoélastique qui s'écrit en stationnaire

$$\sigma_{ij}(\omega) = C_{ijkl}(\omega)\epsilon_{kl}(\omega) \quad (10.34)$$

### Mouvement du fluide.

Les champs de pression et de dérivée normale de la pression sont donnés sur un élément par les formules discrètes.

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i N_i(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial n} N_i(\mathbf{x})$$

Les  $N_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme habituelles. Les  $p_i$  et  $\frac{\partial p_i}{\partial n}$  sont respectivement les valeurs des pressions et des dérivées normales de la pression aux nœuds du maillage. Ce sont les inconnues du problème.

La discrétisation de l'équation intégrale (10.24) conduit finalement à un système matriciel reliant les valeurs aux nœuds de la pression et de sa dérivée normale ce que l'on peut exprimer par

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{tot} = \mathbf{P}_{inc}$$

où  $\mathbf{P}_{tot}$  et  $\mathbf{P}_{inc}$  désignent les vecteurs des pressions totales et des pressions incidentes aux nœuds et  $\mathbf{Q}_{tot}$  est le vecteur des dérivées normales.

**Mouvement de la structure.**

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (10.35)$$

$\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse de la structure.  $\mathbf{F}_{int}$  est le vecteur des efforts imposés autres que la pression du fluide.  $\mathbf{S}$  est une matrice transformant la pression du fluide en des efforts aux nœuds de la structure. Sous forme vectorielle les composantes de  $\mathbf{S}$  se calculent par

$$\mathbf{f}_i = \int_{\partial\Omega} -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})N_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^{N_f} \left( \int_{\partial\Omega} N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) p_j = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{S}_{ij}p_j \quad (10.36)$$

$N_f$  est le nombre de nœuds sur l'interface fluide-structure.

**Continuité de la vitesse normale au contact fluide-structure.**

$$\rho_f \omega^2 \mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{Q}_{tot} \quad (10.37)$$

$\mathbf{N}$  est une matrice diagonale formée par les composantes des normales aux nœuds de l'interface et par zéro aux nœuds intérieurs à la structure.

**Equations du système couplé.**

En posant  $\mathbf{Z} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$  nous pouvons obtenir les déplacements de la structure à partir de (10.35)

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}_{tot} \quad (10.38)$$

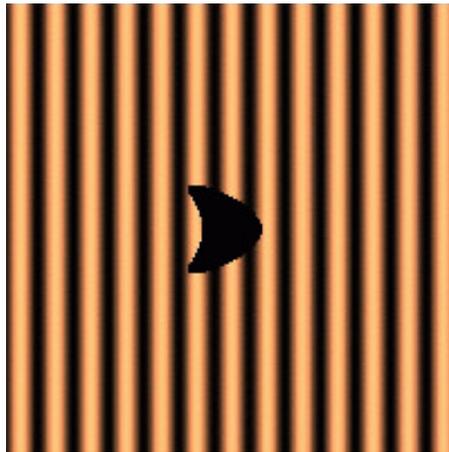
Nous portons cette relation dans l'équation intégrale en tenant compte de la condition de continuité de la vitesse

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{tot} + \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{P}_{inc} \quad (10.39)$$

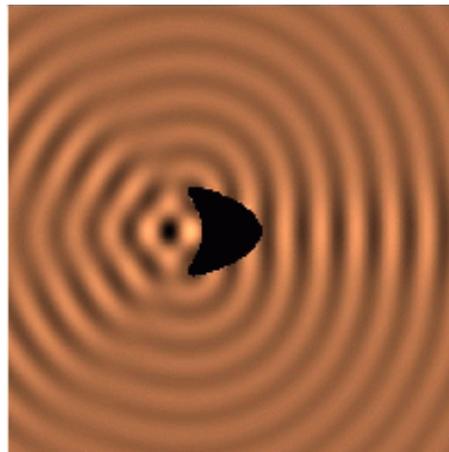
$$(\mathbf{A} - \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S})\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{P}_{inc} - \rho_f \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}_{int} \quad (10.40)$$

D'où la pression  $\mathbf{P}_{tot}$  par résolution du système linéaire. Les matrices sont pleines et non symétriques. On peut alors calculer les autres grandeurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Q}_{tot}$  par les relations précédentes. Les figures 10.10 et 10.11 montrent des exemples de champs diffractés.

Champ incident



Champ diffracté



Champ total

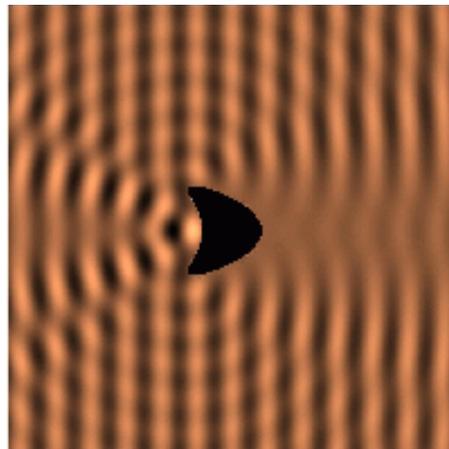


FIGURE 10.10 – Diffraction par un objet.

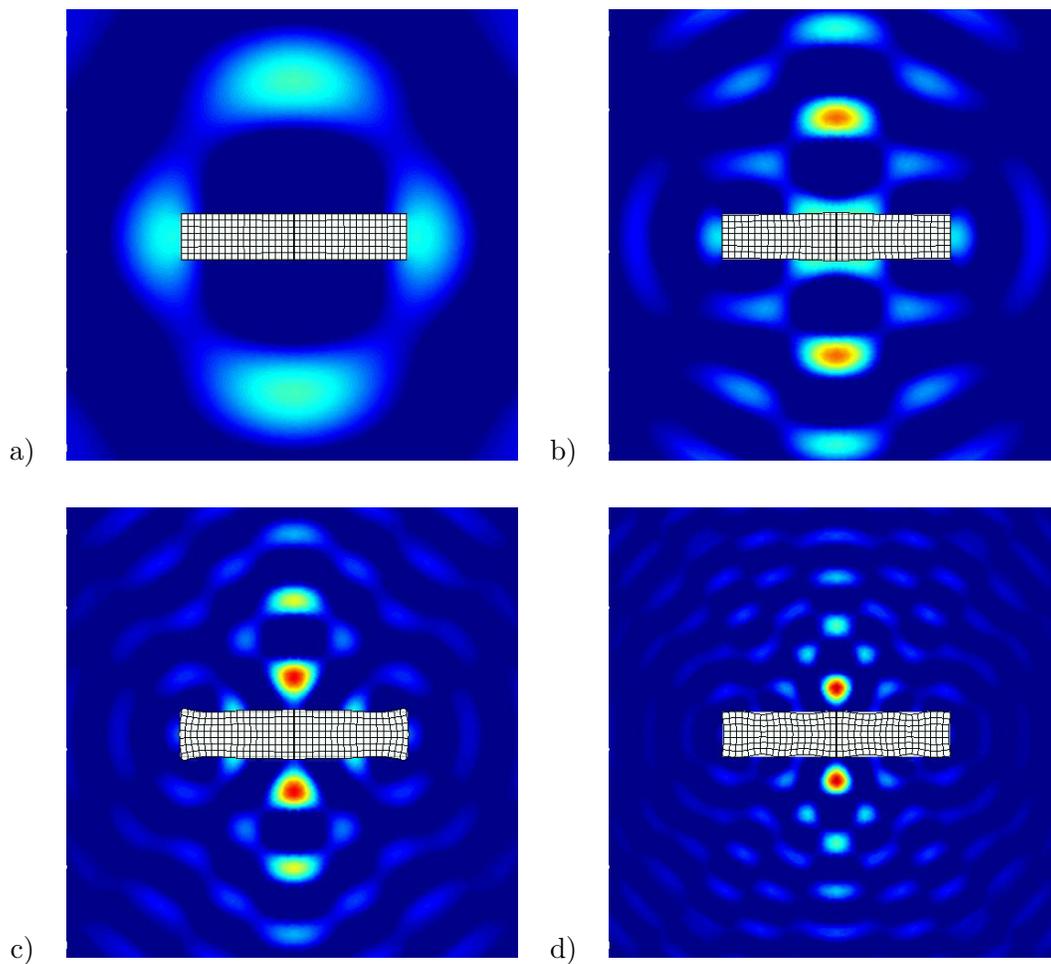


FIGURE 10.11 – Diffraction par un objet à des fréquences croissantes.



# Chapitre 11

## Acoustique des salles

Les salles devant faire l'objet d'une étude acoustique sont celles dans lesquelles on souhaite transmettre un message (parole, musique), comme celle de la figure 11.1. Pour les problèmes liés à la parole, on recherchera l'intelligibilité du message alors que dans le cas de la musique, il faudra, en plus, que la salle apporte une profondeur harmonique.

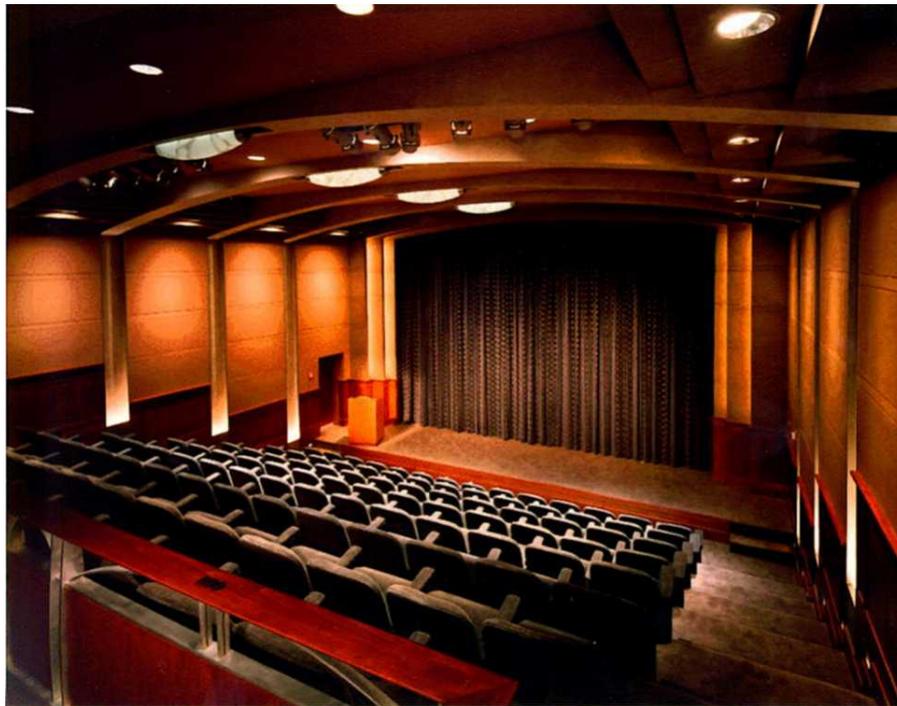


FIGURE 11.1 – Salle de spectacle

Dans les très basses fréquences, la réponse de la salle est surtout pilotée par les modes acoustiques de la salle qui seront décrits dans la première section de ce chapitre. Dans ce cas, le champ de pression présente des variations importantes selon la position dans la salle. Pour les autres fréquences, le champ de pression est plus uniforme et la théorie de la réverbération présentée dans les autres sections permet de décrire le comportement acoustique de la salle.

## 11.1 Modes dans une salle

### 11.1.1 Salle rectangulaire

On considère, dans un premier temps, le calcul des modes dans une salle rectangulaire à parois rigides. On suppose que la salle a pour dimensions  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  suivant les trois directions. Les modes propres de la salle sont solutions de

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (11.1)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables et en cherchant la solution sous la forme  $p(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ , on doit avoir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{h''(z)}{h(z)} + k^2 = 0 \quad (11.2)$$

L'analyse du premier terme montre qu'il y a une constante  $k_x$  telle que

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + k_x^2 = 0 \quad (11.3)$$

soit en incluant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos k_x x + b \sin k_x x \\ f'(0) &= 0 \\ f'(L_x) &= 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

Les solutions de ce système sont les fonctions

$$f_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L_x} \quad (11.5)$$

Les modes propres sont donc donnés par les fonctions

$$P_{nml}(x, y, z) = \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{l\pi z}{L_z} \quad (11.6)$$

avec la valeur propre

$$k_{nml}^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 \quad (11.7)$$

La figure 11.2 présente le mode obtenu avec  $n = 4, m = 2, l = 0$ . On observe une variation importante du niveau sonore en fonction de la position selon que l'on est proche d'un ventre ou d'un nœud du mode.

### 11.1.2 Densité modale

On se propose d'évaluer le nombre de modes dans la salle dont la pulsation propre est inférieure à une valeur  $\omega$  donnée. On doit donc avoir

$$\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \quad (11.8)$$

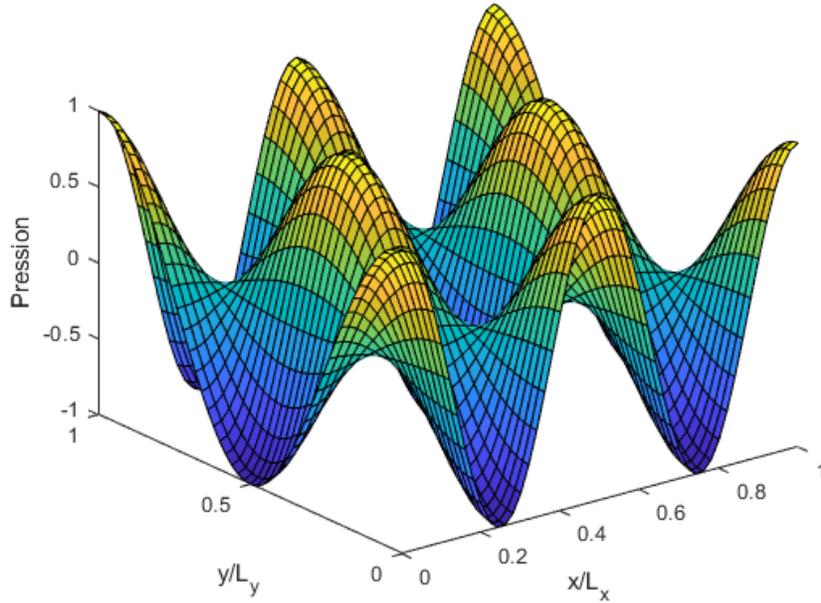


FIGURE 11.2 – Exemple de mode dans une salle.

Le nombre de triplets entiers  $(n, m, l)$  qui satisfont cette condition est obtenu en divisant le volume du huitième de sphère de rayon  $\frac{\omega}{c}$  par le volume élémentaire associé à un triplet qui est  $\frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$  d'où

$$\begin{aligned}
 N(\omega) &= \frac{\frac{4\pi\omega^3}{24c^3}}{\frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}} \\
 &= \frac{V\omega^3}{6\pi^2 c^3}
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

avec  $V = L_x L_y L_z$  le volume de la salle. Cette formule est en fait valable pour des salles de forme quelconque et non plus seulement rectangulaire (connue en mathématique sous le nom de formule de Weyl). La densité modale est la dérivée du nombre de modes par rapport à la fréquence, soit

$$D(f) = \frac{4\pi V f^2}{c^3} \tag{11.10}$$

Cette densité devient importante quand la fréquence croît, de telle sorte qu'il ne devient plus possible de distinguer les modes et la réponse en fréquence devient plus régulière. On se retrouve dans le cas d'un champ diffus décrit dans la suite du chapitre.

### 11.1.3 Cavité de faible volume

On suppose dans ce cas que les dimensions de la cavité sont faibles par rapport à la longueur d'onde. La conséquence est que la pression est sensiblement uniforme dans le volume. Si une source

d'amplitude  $q(t)$  rayonne au point  $\mathbf{x}_0$ , la conservation de la masse donne,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \rho_0 q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (11.11)$$

Considérant un mouvement harmonique et intégrant sur le volume  $V$ , nous obtenons :

$$\int_V \left( \frac{-i\omega}{c^2} p + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = \rho_0 q \quad (11.12)$$

et

$$\left( \frac{-i\omega}{c^2} p V + \rho_0 S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) = \rho_0 q \quad (11.13)$$

soit pour une frontière d'impédance  $Z$ ,

$$p \left( -i\omega + \frac{\rho_0 S c^2}{Z V} \right) = \rho_0 c^2 q / V \quad (11.14)$$

On en déduit la pression en fonction de l'impédance de paroi

$$p = \frac{\rho_0 q c^2 / V}{-i\omega + \rho_0 c^2 S / (V Z)} \quad (11.15)$$

Dans le cas d'une paroi relativement rigide, nous avons  $Z \rightarrow \infty$  et

$$|p| \approx \frac{\rho_0 c^2 q}{\omega V} \quad (11.16)$$

Dans le cas contraire d'une paroi souple

$$|p| \approx \frac{|Z| q}{S} \quad (11.17)$$

L'impédance de paroi est ainsi un facteur essentiel pour contrôler le niveau sonore dans la cavité.

## 11.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  qui est la réponse en pression à une excitation par une impulsion unité se définit par rapport à une position de source et un point de réception. Un exemple est présenté sur la figure 11.3. Elle permet ensuite de déterminer le son entendu  $p(t)$  pour une source arbitraire  $s(t)$  par la formule de convolution.

$$p(t) = (h * s)(t) \quad (11.18)$$

Pour mesurer cette réponse impulsionnelle, on peut émettre un son très bref à la position de la source, par exemple avec un pistolet d'alarme, et mesurer le signal au point de réception. Actuellement on utilise plutôt une séquence sonore particulière  $s(t)$  puis la mesure de  $p(t)$  et un traitement du signal permet de trouver  $h(t)$ . On peut aussi simuler par le calcul la réponse impulsionnelle d'une salle  $h(t)$ . La mesure en studio du signal d'un instrument de musique  $s(t)$  permet par la formule (11.18) de reproduire le signal  $p(t)$  de l'instrument tel qu'il serait entendu dans la salle.

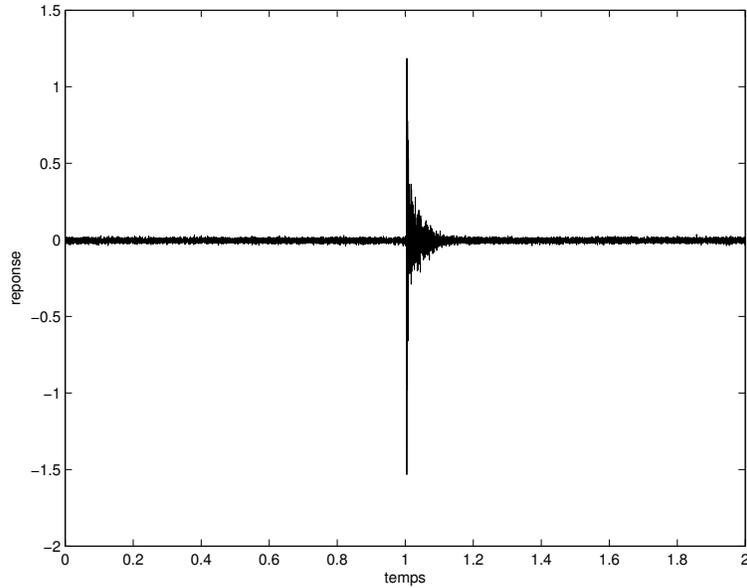


FIGURE 11.3 – Exemple de réponse impulsionnelle.

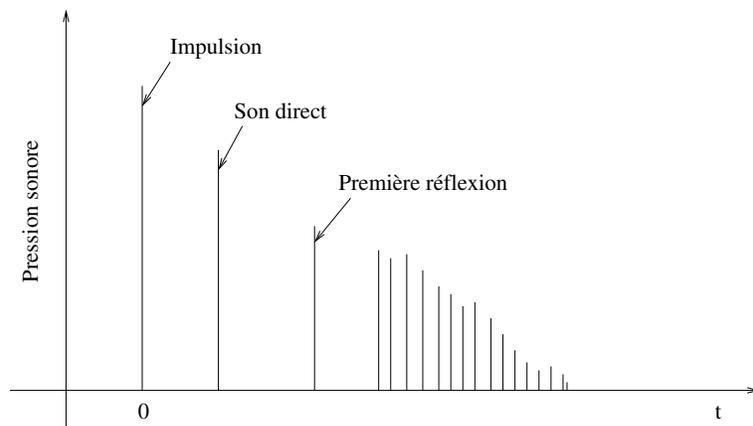


FIGURE 11.4 – Décomposition de la réponse impulsionnelle.

Une étude plus détaillée permet de décomposer la réponse en trois phases. Ces trois phases sont illustrées sur la figure 11.4. La première phase est la réception du son direct qui est le même que s'il n'y avait pas de salle (voir figure 11.5). Il se calcule donc par la formule

$$p(t) = \frac{s(t - r/c)}{4\pi r} \quad (11.19)$$

où  $r$  est la distance source récepteur et  $s(t)$  le signal envoyé par la source. La seconde phase est constituée par les premières réflexions sur les parois qui parviennent durant les 80 à 100 premières millisecondes. La dernière phase est le champ réverbéré produit par les réflexions multiples sur les parois de la salle (voir figure 11.5). Il a quelques caractéristiques particulières. Il décroît de façon exponentielle et le temps de réverbération est le temps mis pour décroître de 60dB. Le champ diffus se présente sous la forme d'un signal aléatoire et est statistiquement homogène dans la salle.

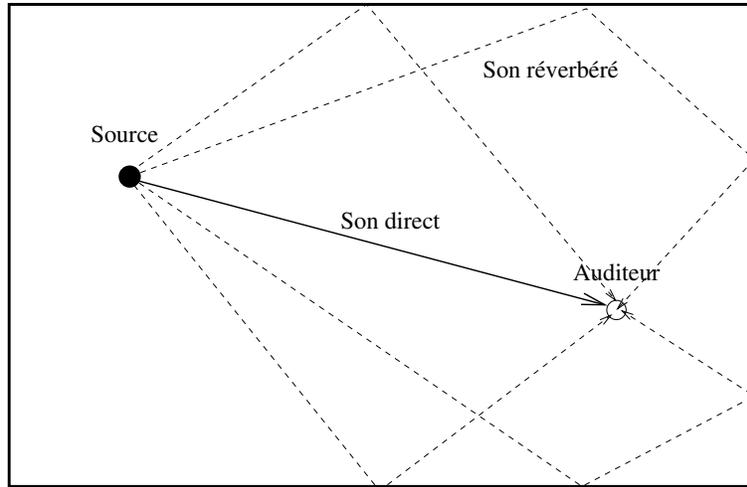


FIGURE 11.5 – Sons direct et réverbéré.

La pression en un point résulte d'ondes planes décorréées, provenant de toutes les directions de l'espace et ayant la même amplitude. Cette hypothèse est raisonnable dans un volume fermé dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde.

La densité moyenne de réflexions augmente avec le temps. Dès que la densité de réflexion est supérieure à 2 par  $ms$  (pouvoir séparateur de l'oreille), on peut admettre que la réverbération est parfaite. La figure 11.6 illustre les réflexions multiples d'un rayon sonore entre une source et un récepteur.

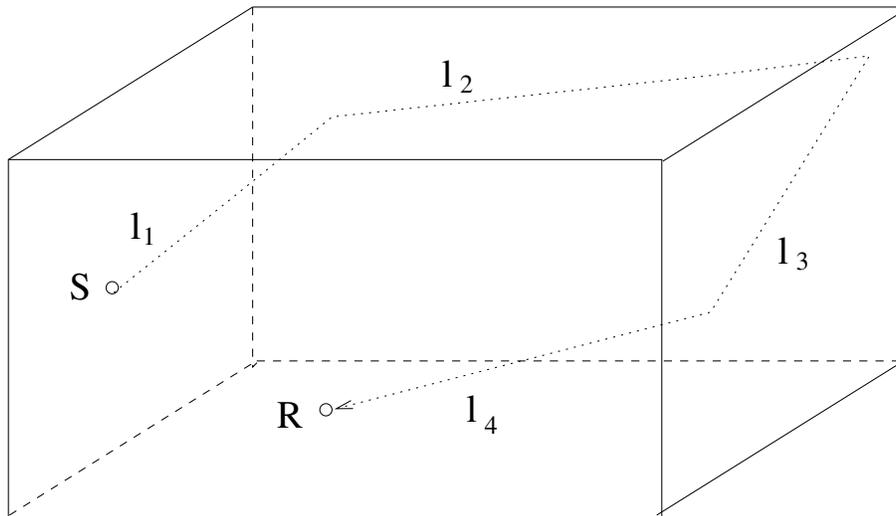


FIGURE 11.6 – Réflexions multiples.

### 11.3 Théorie de la réverbération

Lorsque les dimensions de la salle sont grandes devant la longueur d'onde, on peut faire l'approximation que le champ de pression est diffus, ce qui signifie qu'à chaque position l'énergie provient de toutes les directions avec une intensité égale et que la densité d'énergie est indépendante de la position. Ces hypothèses sont raisonnables quand la densité modale est élevée et qu'il n'est plus possible de distinguer les modes individuellement. Si les ondes planes dans une direction donnée ont pour amplitude moyenne  $p_0$ , la valeur moyenne du carré de la pression en un point de l'espace vérifie

$$|p|^2 = 4\pi|p_0|^2 \quad (11.20)$$

car on peut sommer les énergies des différentes directions puisque les ondes sont décorréliées. La densité d'énergie associée est alors

$$w = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c^2} \quad (11.21)$$

et l'énergie totale contenue dans le volume  $V$  est

$$W = \frac{V|p|^2}{2\rho_0 c^2} \quad (11.22)$$

L'intensité acoustique dans un champ diffus est nulle car les ondes de directions opposées se compensent. Pour un demi espace, l'intensité incidente sur une paroi est donnée par

$$\mathbf{I} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_0 \mathbf{n}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.23)$$

où  $\mathbf{n}(\theta, \phi)$  est la normale à la sphère unité dans la direction  $(\theta, \phi)$  et  $I_0 = \frac{|p_0|^2}{2\rho_0 c}$  est l'intensité d'une onde plane. On trouve

$$\mathbf{I} = \pi I_0 \mathbf{n}_p = \frac{|p|^2}{8\rho_0 c} \mathbf{n}_p = \frac{Wc}{4V} \mathbf{n}_p \quad (11.24)$$

en notant  $\mathbf{n}_p$  la normale à la paroi.

Lorsqu'une onde frappe une paroi comme sur la figure 11.7, l'énergie incidente est divisée en une énergie réfléchie, une énergie transmise et une énergie absorbée par la paroi. La conservation de l'énergie impose que

$$E_i = E_a + E_r + E_t \quad (11.25)$$

Ecrivant l'équilibre entre la puissance émise par la source et la puissance absorbée par les parois, nous avons aussi

$$P = IS\bar{\alpha} \quad (11.26)$$

avec

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i S_i \quad (11.27)$$

qui est la moyenne des absorptions des différents éléments de parois de coefficients d'absorption respectifs  $\alpha_i$  et de surfaces  $S_i$ .

La propagation du son dans ce type d'espace clos se fait par de multiples réflexions sur les parois du local. Les propriétés acoustiques de ces parois sont par conséquent très importantes pour

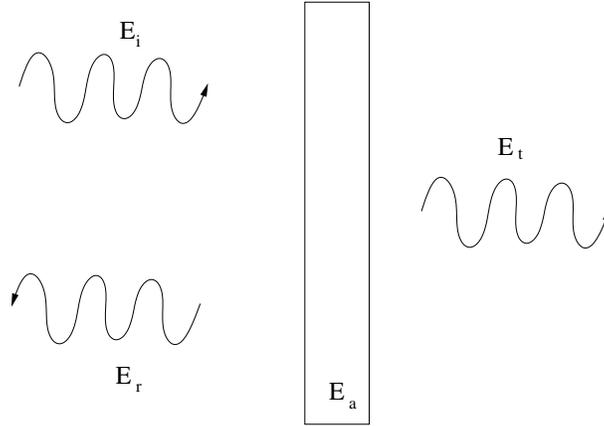


FIGURE 11.7 – Energies incidente, réfléchie, absorbée et transmise par une paroi.

estimer le niveau sonore dans l'espace. Lorsque l'on arrête une source sonore, le son ne cesse pas brusquement mais le niveau sonore décroît régulièrement avec le temps. En écrivant que la variation d'énergie dans la cavité est égale à l'énergie absorbée par les parois, nous avons :

$$dW = -IS\bar{\alpha}dt \quad (11.28)$$

ce que l'on peut écrire aussi

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}I \quad (11.29)$$

soit

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}t} \quad (11.30)$$

Par définition, le temps de réverbération  $T_R$  est le temps nécessaire pour réduire le niveau sonore de 60dB, voir par exemple la figure 11.8 montrant la décroissance du niveau sonore en fonction du temps. On a donc

$$e^{-\frac{S\bar{\alpha}c}{4V}T_R} = 10^{-6} \quad (11.31)$$

On peut en déduire la formule de Sabine qui relie le temps de réverbération au facteur d'absorption moyen des parois du local :

$$T_R = 0.16 \frac{V}{\bar{\alpha}S} \quad (11.32)$$

Cette théorie est valable quand l'absorption par les parois reste modérée. En pratique, il est préférable que le coefficient d'absorption moyen ne dépasse pas 0,2. Sinon il faut utiliser des théories plus précises. En agissant sur les surfaces  $S_i$  et les coefficients d'amortissement  $\alpha_i$  des matériaux, il est possible de modifier  $\bar{\alpha}$  et donc de contrôler le temps de réverbération dans la pièce. Dans le cas de grandes salles, il peut être nécessaire de tenir compte de l'absorption de l'air. Elle peut s'introduire à l'aide d'une surface d'absorption équivalente supplémentaire donnée par

$$A_a = 4bV \quad (11.33)$$

avec

$$b = 5.5 \cdot 10^{-4} \frac{50}{h} \left( \frac{f}{1000} \right)^{1.7} \quad (11.34)$$



FIGURE 11.8 – Mesure du temps de réverbération.

où  $h$  est le degré d'humidité en %.

On peut montrer que le libre parcours moyen, qui est la distance moyenne parcourue entre deux réflexions sur les parois, est donné par

$$l = \frac{4V}{S} \quad (11.35)$$

où  $V$  est le volume de la salle et  $S$  la surface des parois. En effet, s'il y a  $n$  réflexions par seconde sur les parois, il y aura une perte relative d'énergie égale à  $n\bar{\alpha}$  qui vaut aussi selon la formule (11.29)

$$n\bar{\alpha} = \frac{S\bar{\alpha}c}{4V} \quad (11.36)$$

et le nombre moyen de réflexions par seconde est

$$n = \frac{cS}{4V} \quad (11.37)$$

Le temps entre deux réflexions successives est

$$dt = \frac{1}{n} = \frac{l}{c} = \frac{4V}{cS} \quad (11.38)$$

Une autre formule répandue pour le calcul du temps de réverbération est la formule d'Eyring. Pendant un temps  $dt$ , l'énergie associée à un parcours quelconque décroît de  $E$  à  $E(1 - \alpha)$ . La différence de niveau dans l'intervalle  $dt$  est donc  $10 \log(1 - \alpha)$ . La pente moyenne de la décroissance est liée au  $T_R$

$$dt/(-10 \log_{10}(1 - \alpha)) = T_R/60 \quad (11.39)$$

La formule de Eyring s'écrit sous la forme

$$T_R = 60dt/(-10 \log_{10}(1 - \alpha)) = -0.16V/(S \log(1 - \alpha)) \quad (11.40)$$

Le dernier log est le log népérien. La valeur de  $dt$  est obtenue par la formule (11.38). La formule de Eyring donne en général des résultats plus faibles que la formule de Sabine. Elle permet de mieux prévoir le temps de réverbération lorsque l'absorption est répartie uniformément. Dans le cas d'une absorption concentrée sur une seule surface, le temps de réverbération de Eyring sous-estime le vrai  $T_R$ .

La figure 11.9 montre un exemple de salle réverbérante, construite avec des parois très peu absorbantes, et qui conduit à une valeur élevée du temps de réverbération. La figure 11.10 montre



FIGURE 11.9 – Salle réverbérante.

au contraire une salle anéchoïque avec une très forte absorption des parois. Elle se rapproche d'une situation en champ libre sans parois.



FIGURE 11.10 – Salle anéchoïque.

### 11.3.1 Fréquence de Schroeder

La fréquence de coupure (aussi appelée fréquence de Schroeder) d'une salle est donnée par

$$f_c = 2000 \sqrt{\frac{T_R}{V}} \quad (11.41)$$

C'est la fréquence au delà de laquelle la densité de modes devient suffisamment importante pour ne plus pouvoir distinguer les modes individuellement. L'approximation de champs diffus devient acceptable au delà de cette fréquence. Pour expliquer l'origine de cette formule, notons que selon la théorie précédente, les modes sont supposés avoir tous le même taux d'amortissement avec une constante de temps donnée par (voir formule (11.30))

$$\tau = \frac{8V}{cS\bar{\alpha}} \quad (11.42)$$

Le facteur 2 par rapport à la formule (11.30) s'explique par le fait qu'elle concerne une valeur énergétique alors que le  $\tau$  de la formule précédente concerne l'amplitude du mode. La largeur de bande d'un mode (largeur du pic à -3dB) est égale à

$$\Delta f = \frac{1}{\pi\tau} \quad (11.43)$$

On estime que les modes deviennent indistinguables lorsque cette largeur de bande contient plus de trois modes. La largeur de bande de chaque mode est l'inverse de la densité modale et donc donnée par (voir relation (11.10))

$$\Delta f = \frac{c^3}{4\pi V f^2} = \frac{1}{3\pi\tau} \quad (11.44)$$

Studio d'enregistrement	0.3s
Salle de cours	0.4s-0.6s
Bureau	0.5s-1.1s
Pièce meublée	0.6s
Pièce vide	2 à 5 s
Salle de concert	1.8 à 2.2s
Grand hall ou salle réverbérante	8 à 12s

TABLE 11.1 – Temps de réverbération de quelques locaux.

La fréquence de Schroeder est donc

$$f_c = c\sqrt{\frac{6}{S\bar{\alpha}}} \quad (11.45)$$

qui est équivalente à (11.41). A titre d'exemple, pour un volume de  $10m \times 4m \times 3m$  et un temps de réverbération  $T_R = 1s$ , la fréquence de Schroeder vaut  $f_c = 182Hz$ .

## 11.4 Caractérisation de l'acoustique d'une salle

La caractérisation d'une salle consiste à essayer de traduire en des termes objectifs des appréciations subjectives de sa qualité. On peut ainsi définir différents critères qui permettent d'affiner la caractérisation du temps de réverbération donnée par le  $T_R$ .

### 11.4.1 $T_R$ optimal

Le temps de réverbération doit être adapté à l'usage de la salle. Des temps de réverbération courants sont donnés dans le tableau 11.1. La sensation de réverbération dépend aussi du niveau sonore en plus de la vitesse de décroissance du son. L'intensité réverbérée pour une source de puissance  $P$  est donnée par

$$I = \frac{P}{\alpha S} \quad (11.46)$$

Par exemple, pour deux salles de volumes  $V_1$  et  $V_2$  différents mais de même temps de réverbération dans lesquelles une même source de puissance  $P$  est introduite, les intensités seront

$$I_1 = \frac{P}{\alpha_1 S_1} \quad (11.47)$$

$$I_2 = \frac{P}{\alpha_2 S_2} \quad (11.48)$$

avec

$$\alpha_1 S_1 = \frac{0.16V_1}{T_R} \quad (11.49)$$

$$\alpha_2 S_2 = \frac{0.16V_2}{T_R} \quad (11.50)$$

Si  $V_2 > V_1$ , alors  $\alpha_2 S_2 > \alpha_1 S_1$  et  $I_2 < I_1$ . La seconde salle semblera moins réverbérée et pour compenser, on pourra augmenter son temps de réverbération pour avoir une sensation équivalente à celle de la première salle.

### 11.4.2 Early Decay Time (EDT)

La durée de décroissance à 10dB est appelée EDT (Early Decay Time). Elle caractérise le début de la réverbération qui est la partie utile à la compréhension d'un message. En effet la décroissance du son de 60dB qui permet de définir de  $T_R$  n'est pas uniforme sur la durée du  $T_R$  mais peut être plus rapide ou plus lente au début de la décroissance du son. De plus l'EDT n'est pas uniforme dans la salle mais varie bien plus en fonction de la position que le  $T_R$ .

### 11.4.3 Clarté

Une autre famille de critères caractérise la netteté du signal reçu. Ces critères comparent l'énergie utile (avant 50 – 100ms) à celle qui ne l'est pas. L'oreille humaine en effet ajoute les signaux distants de moins de 80ms et font que les premières réflexions sur les parois sont perçues comme faisant partie du signal initial. Au contraire les contributions distantes (> 100ms) sont perçues comme un signal différent et perturbent le signal initial. Dans la parole la durée d'une syllabe est de l'ordre de 200ms et les contributions au signal qui vont au delà de 200ms se superposent à la syllabe suivante ce qui nuit à la compréhension du message. Pour la musique, ce phénomène est moins gênant car il produit un effet harmonique qui peut au contraire être recherché. La clarté 80 est ainsi définie par

$$C_{80} = 10 \log_{10} \frac{\int_0^{80ms} |p|^2 dt}{\int_{80ms}^{\infty} |p|^2 dt} \quad (11.51)$$

La clarté est surtout utile en musique et une clarté de 0dB est correcte. L'augmentation de ce critère se fait au dépend du  $T_R$ , il faut donc trouver un compromis acceptable entre ces valeurs. Une salle satisfaisante doit avoir une clarté comprise entre -6dB et +6dB sinon la salle est soit trop confuse ( $C_{80} < -6dB$ ) soit trop sèche ( $C_{80} > 6dB$ ). La clarté dépend de la fréquence.

Pour la voix, on utilise plutôt le  $C_{50}$  défini de la même façon en prenant 50ms au lieu de 80ms. Cela est dû au fait que la variation temporelle de la voix est généralement plus rapide que celle de la musique.

### 11.4.4 RASTI

Le RASTI (RApid Speech Transmission Index) sert à caractériser l'intelligibilité de la parole. La parole est en effet un signal modulé dans lequel les pics doivent bien ressortir pour bien percevoir la modulation du signal. Le RASTI est un nombre compris entre 0 et 1. Pour le mesurer, on émet un signal modulé en niveau pour quelques fréquences et on mesure la réduction de la modulation entre le signal au point de réception et le signal émis. On calcule ensuite le RASTI en prenant des moyennes sur les différentes fréquences émises. L'intelligibilité est bonne si le RASTI est entre 0.6 et 1.

### 11.4.5 Différences interaurales

Ce critère sert à décrire le caractère enveloppant du son. Il est défini à partir des sons perçus aux oreilles droites et gauches  $p_d(t)$  et  $p_g(t)$  selon la formule

$$IACC = \max_{-1ms \leq \delta \leq 1ms} \left| \frac{\int_0^{80ms} p_g(t) p_d(t + \delta) dt}{\sqrt{\int_0^{80ms} p_g^2(t) dt \int_0^{80ms} p_d^2(t) dt}} \right| \quad (11.52)$$

Ce critère est compris entre 0 et 1. S'il est proche de 0, les deux oreilles perçoivent des sons très différents alors que s'il est proche de un, les deux oreilles perçoivent des sons semblables.

#### 11.4.6 Coefficient d'efficacité latérale

Ce coefficient mesure la sensation de baigner ou non dans le son. Une forte impression spatiale est obtenue si l'énergie réverbérée provient des côtés de la salle. On peut l'obtenir par

$$LE(\%) = \frac{\text{Energie réverbérée latérale de 25 à 80ms}}{\text{Energie réverbérée totale de 0 à 80ms}} \quad (11.53)$$

L'énergie réverbérée latérale est mesurée avec un microphone bidirectionnel alors que l'énergie réverbérée totale est mesurée avec un microphone omnidirectionnel.

## Chapitre 12

# Propagation en milieu extérieur

### 12.1 Facteurs influençant la propagation en milieu extérieur

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes surtout intéressés à la propagation dans des milieux clos. Néanmoins, la propagation du son dans des milieux extérieurs, qui ont la particularité d'être non bornés, est fondamentale dans de nombreuses applications, par exemple pour l'étude du bruit des transports. Le but est ici de déterminer le niveau sonore dû à une source de bruit en différents points de l'environnement. Ce niveau sonore peut être obtenu en estimant l'atténuation du son au niveau du récepteur. L'atténuation globale peut être évaluée par

$$A_{tot} = A_{div} + A_{air} + A_{sol} + A_{spe} \quad (12.1)$$

où les mécanismes engendrant l'atténuation totale sont la divergence géométrique, l'absorption de l'air, l'influence du sol et des mécanismes complémentaires qui apparaissent en fonction de situations spécifiques. Parmi ceux-ci, on notera la propagation dans un milieu non homogène (à cause du vent et de la température) et l'effet des obstacles géométriques. Cette estimation doit être faite pour chaque bande d'octave ou de tiers d'octave car les mécanismes d'atténuation sont variables avec la fréquence. Dans la suite, nous allons détailler les différents mécanismes influençant la propagation du son.

#### 12.1.1 Divergence géométrique

La situation est représentée sur la figure 12.1. Il s'agit ici d'étudier l'influence de la distance à la source sur l'atténuation du son. La puissance sonore engendrée par la source est

$$L_w = 10 \log_{10} \frac{W}{W_0} \quad (12.2)$$

où  $W$  est la puissance de la source et  $W_0 = 10^{-12} \text{ watt}$ . La pression engendrée par une source omnidirectionnelle de cette puissance est donnée par

$$p^2 = \frac{\rho_0 c W}{4\pi r^2} \quad (12.3)$$

Le niveau sonore est alors

$$L_p = L_w - 20 \log_{10} r - 10 \log_{10} \frac{\rho_0 c W_0}{4\pi p_0^2} \quad (12.4)$$

L'atténuation pour une source ponctuelle à une distance  $r$  en mètre peut alors être décrite par

$$A_{div} = 20 \log_{10} r + 10.9 \quad (12.5)$$

Dans le cas d'une ligne de sources incohérentes, l'atténuation varie plus lentement selon la formule

$$A_{div} = 10 \log_{10} \frac{r}{r_{ref}} \quad (12.6)$$

où  $r_{ref}$  est une distance de référence.

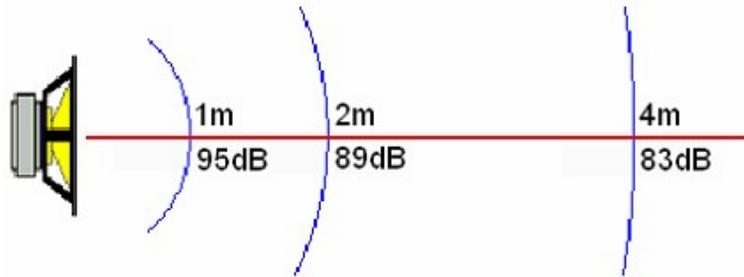


FIGURE 12.1 – Exemple d'influence de la distance à la source.

### 12.1.2 Absorption atmosphérique

Lors de la propagation dans l'air sur de longues distances, l'énergie acoustique est progressivement transformée en chaleur. L'énergie sonore est dissipée dans l'air par deux mécanismes principaux. D'une part, des pertes visqueuses sont dues au frottement entre les molécules d'air, ce qui entraîne une génération de chaleur. D'autre part, un processus de relaxation fait que l'énergie sonore est momentanément absorbée dans les molécules d'air et fait vibrer et tourner les molécules. Ces molécules peuvent alors rayonner à nouveau le son à un instant plus tard et ce nouveau son peut partiellement interférer avec le premier signal. Ces mécanismes dépendent de la fréquence et du taux d'humidité de l'air et plus faiblement de la température. Les valeurs d'atténuation sont données sur la figure 12.2.

L'absorption peut être estimée par les formules suivantes

$$A_{abs} = \alpha r / 100 \text{ (dB)} \quad (12.7)$$

avec  $r$  la distance en mètre et  $\alpha$  l'absorption en  $\text{dB}/100\text{m}$  donnée par

$$\begin{aligned} \alpha &= 869 f^2 \left\{ 1.84 \times 10^{-11} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/2} + \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-5/2} \left[ 0.01275 \frac{e^{-2239.1/T}}{F_O + f^2/F_O} + 0.1068 \frac{e^{-3352/T}}{F_N + f^2/F_N} \right] \right\} \\ F_O &= 24 + 4.04 \times 10^4 h \frac{0.02 + h}{0.391 + h} \text{ (fréquence de relaxation de l'oxygène)} \\ F_N &= \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-1/2} \left( 9 + 280 h e^{-4.17 \left[ \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-1/3} - 1 \right]} \right) \text{ (fréquence de relaxation de l'azote)} \\ T_0 &= 293.15 \text{ K} \end{aligned} \quad (12.8)$$

avec  $f$  la fréquence en Hz,  $T$  la température en Kelvin et  $h$  le taux d'humidité en %.

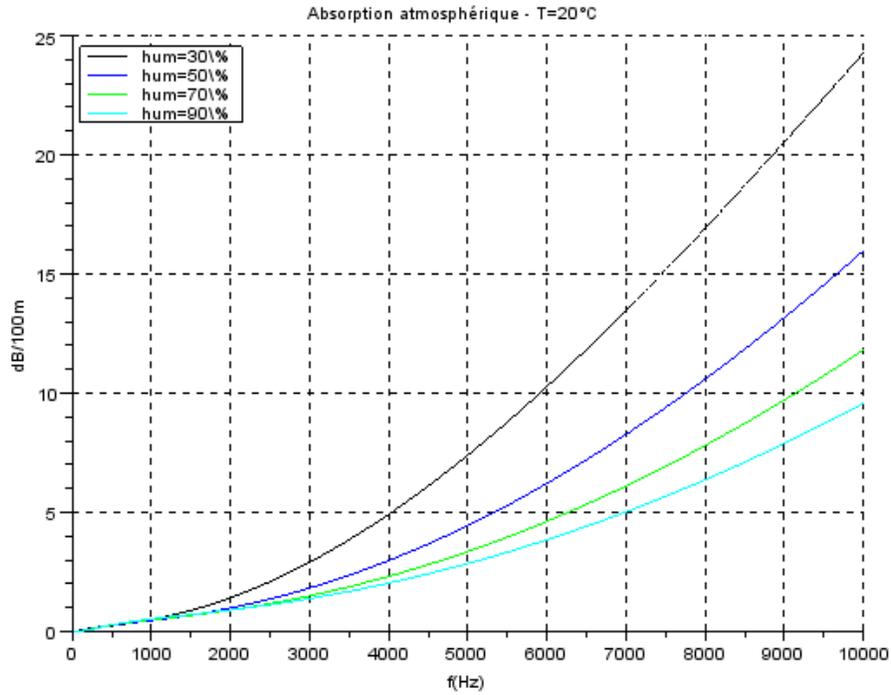
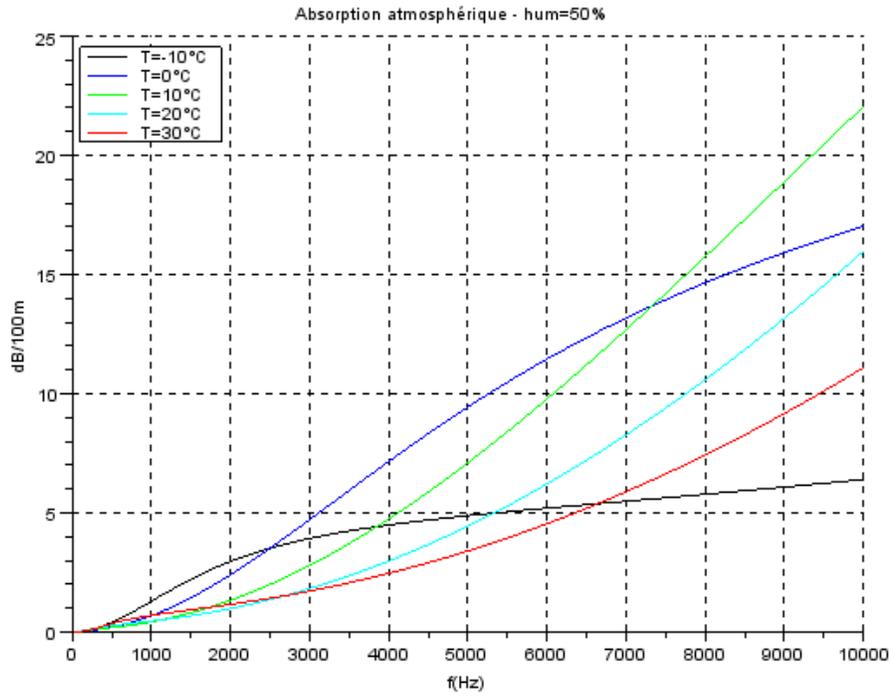


FIGURE 12.2 – Absorption atmosphérique en fonction de la fréquence pour différentes températures et taux d’humidité.

### 12.1.3 Effet de la température

Un gradient de température rend le milieu de propagation non homogène et induit le phénomène de réfraction. Les fronts d'onde sont incurvés dans la direction où la température est la plus faible, voir figures 12.3, 12.4 et 12.5. Par exemple, par une nuit claire, le sol est généralement froid et l'onde sonore est réfractée en direction du sol. C'est le cas d'une inversion de température. Nous

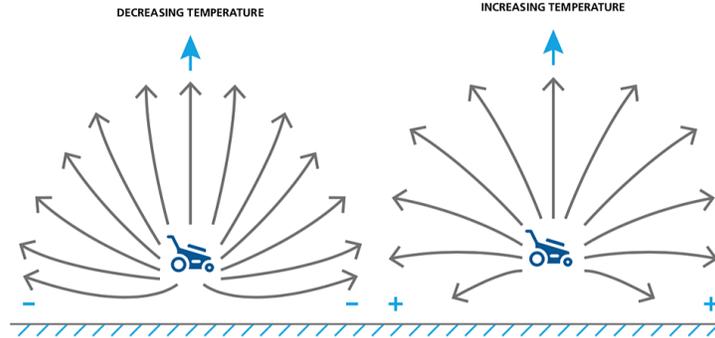


FIGURE 12.3 – Effet de la température sur la propagation du son.

avons  $\frac{\partial c(z)}{\partial z} < 0$  dans le premier cas d'une température décroissante et  $\frac{\partial c(z)}{\partial z} > 0$  dans le second cas d'une température croissante.

Un exemple de profil de vitesse du son en fonction de la température est donné par la formule.

$$T(z) = T_0 + \frac{T_*}{k} \left[ \log \frac{z + z_H}{z_H} + \Phi_H \frac{z}{L} + \Gamma_z \right] \quad (12.9)$$

où  $k = 0.14$  est la constante de Von Karman,  $T_0 = 283K$  est la température du sol,  $T_* = 283K$  une référence de température,  $z_H$  une longueur de rugosité,  $L$  une longueur qui vaut  $L = \pm \frac{u_*^2}{kgT_*} (T_{av} + 273.15)$  avec  $T_{av}$  la température moyenne et  $u_*$  une vitesse de frottement qui dépend de la rugosité de surface.

Une autre possibilité plus simple est de prendre un profil de vitesse linéaire en fonction de l'altitude comme

$$\begin{aligned} c(z) &= c_0(1 + az) \\ c(z) &= c_0(1 - az) \end{aligned} \quad (12.10)$$

On peut montrer qu'on peut en déduire le champ de pression par l'expression

$$p(r, z) = \frac{i\pi}{l} \sum_n \frac{H_0^1(k_n r) Ai(\tau_n + z_s/l) Ai(\tau_n + z/l)}{\tau_n [Ai(\tau_n)]^2 - [Ai'(\tau_n)]^2} \quad (12.11)$$

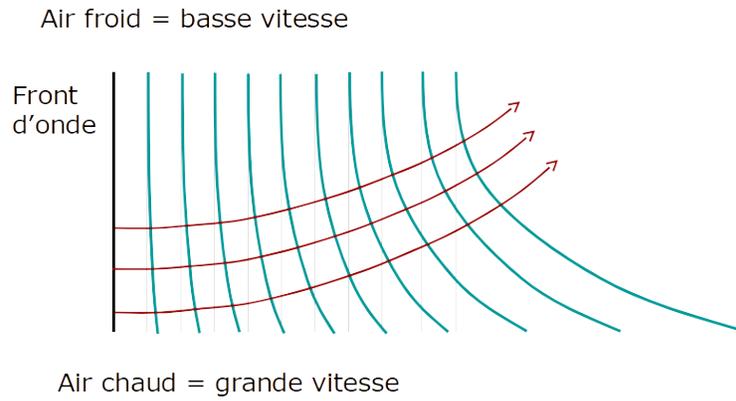


FIGURE 12.4 – Courbure des rayons due à un gradient de température avec un sol chaud.

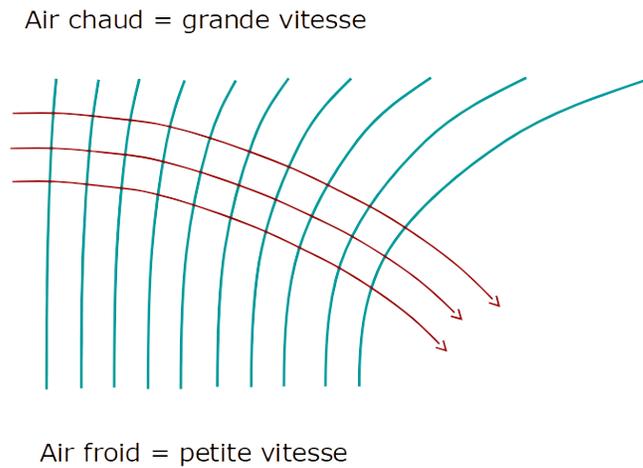


FIGURE 12.5 – Courbure des rayons due à un gradient de température avec un sol froid.

avec

$$\begin{aligned}
 k_0 &= \frac{2\pi f}{c_0} \\
 q &= ik_0 l \rho c / Z \\
 l &= \left( \frac{R_c}{2k_0^2} \right)^{1/3} \\
 R_c &= \frac{c}{dc/dz} \\
 \tau_n &= (k_n^2 - k_0^2) l^2 \\
 Ai'(\tau_n) + q Ai(\tau_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{12.12}$$

où  $Ai$  est la fonction d'Airy.

### 12.1.4 Effet du vent

Le son se propage plus vite dans la direction du vent et moins vite dans la direction opposée, voir figure 12.6. Les effets du vent et de la température sont perceptibles sur des distances supérieures à 100m. Les effets du vent et de la température peuvent se traduire par des variations de niveaux

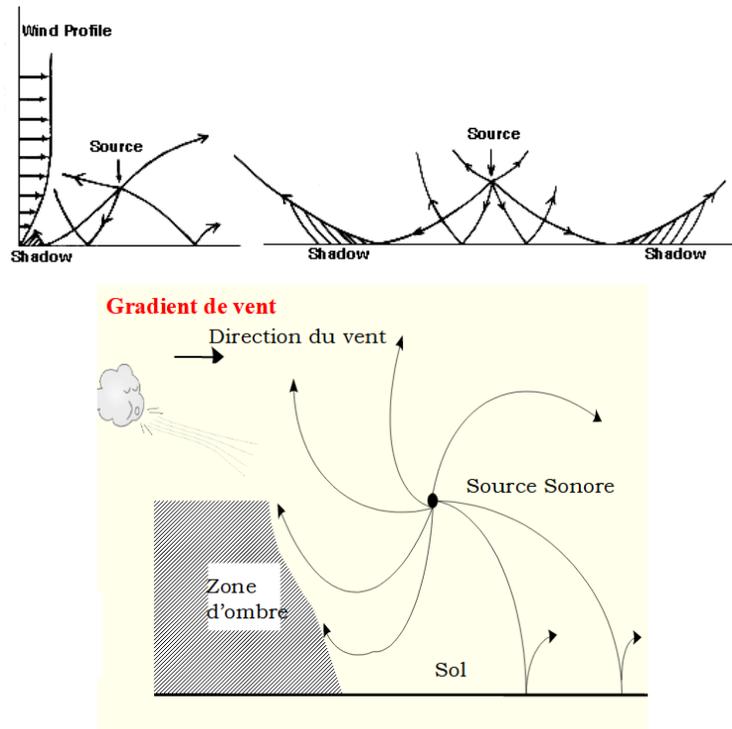


FIGURE 12.6 – Effet du vent sur la propagation du son.

sonores de plus ou moins 20dB. La vitesse effective du son peut être estimée par

$$c_{eff} = \sqrt{\gamma RT(z)} + \|\mathbf{v}\| \cos \theta
 \tag{12.13}$$

où  $c_{eff}$  est la vitesse effective du son,  $\theta$  l'angle de la vitesse du vent par rapport à l'horizontale et  $z$  l'altitude, (dans l'hypothèse d'un milieu stratifié).

Pour le profil de vitesse du vent, on prend généralement un profil logarithmique selon l'expression

$$v(z) = a_v \log \left( \frac{z - d}{z_0} \right) \quad (12.14)$$

où  $d$  est distance,  $z_0$  un paramètre de rugosité et  $a_v$  un paramètre de réfraction lié à la vitesse du vent.

La figure 12.7 compare le son mesuré en un point proche de la source (25m) et un point lointain (75m) avec le son calculé en tenant compte ou pas du vent. On voit que l'effet du vent est important pour le point lointain.

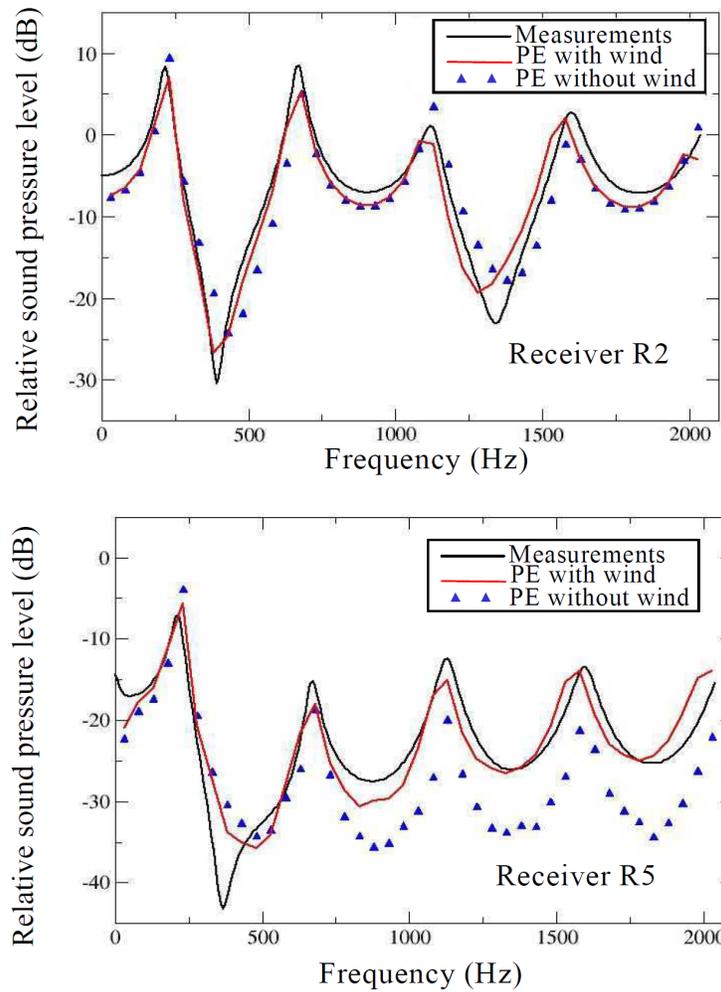


FIGURE 12.7 – Effet du vent sur la propagation du son (voir référence [13]) pour un point proche de la source (figure supérieure) et un point loin de la source (figure inférieure).

### 12.1.5 Effet du sol

La propagation du son sur un sol absorbant (voir figure 12.8) conduit à des niveaux sonores très différents de la propagation sur une surface rigide. Par exemple les forêts ont une très faible efficacité due à la présence des arbres mais leur sol souvent poreux peut par contre atténuer le son lors de sa propagation.



FIGURE 12.8 – Quelques types de sol en bordure de route.

Le coefficient de réflexion en onde plane est défini par

$$R_p = \frac{Z \cos \theta - \rho c}{Z \cos \theta + \rho c} \quad (12.15)$$

où  $Z$  est l'impédance du sol,  $\rho c$  l'impédance spécifique de l'air et  $\theta$  l'angle avec la normale, voir figure 12.9. La valeur de l'impédance du sol  $Z$  peut être mesurée ou obtenue par un des modèles présentés dans le chapitre sur les matériaux poreux. Dans le cas d'un modèle de Delany-Bazley les valeurs des résistances à l'écoulement de l'air pour différents types de sol sont données dans le tableau 12.1

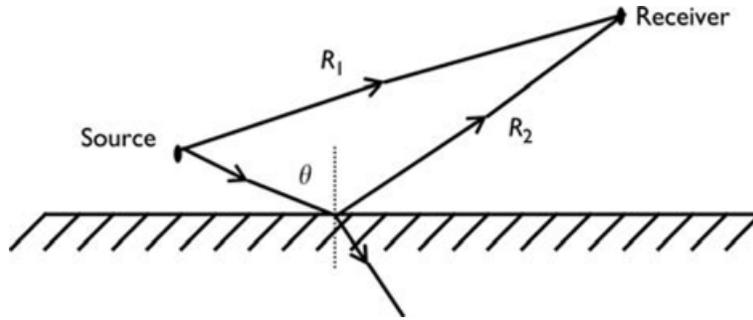


FIGURE 12.9 – Propagation du son et réflexion sur un sol.

Type de surface	Résistance à l'écoulement de l'air en kPa.s/m <sup>2</sup>
Neige tombée récemment	10-30
Sol de forêt à feuilles persistantes	20-80
Herbe	150-300
Limon sableux et compact	800-2500
Terre compacte	4000-8000
Asphalt non poreux	5000-20000

TABLE 12.1 – Résistance à l'écoulement de l'air de quelques sols.

Le champ de pression produit par une source ponctuelle d'amplitude  $a$  peut se calculer par

$$p = a \left( \frac{e^{ikr_d}}{4\pi r_d} + (R_p + (1 - R_p)F) \frac{e^{ikr_r}}{4\pi r_r} \right) \quad (12.16)$$

où  $r_d$  et  $r_r$  sont les distances des chemins direct et réfléchi. La valeur de la fonction  $F$  sera décrite dans la suite.

### 12.1.6 Effet des écrans antibruit

Son effet est mesuré par sa perte par insertion (IL) qui est la différence entre les niveaux sonores avant mise en place de l'écran et après sa mise en place.

$$IL = L_p(\text{avant}) - L_p(\text{après}) \quad (12.17)$$

Cette grandeur dépend beaucoup de la fréquence. Une estimation de cette perte par insertion peut être donnée en fonction du nombre de Fresnel défini par

$$N = \frac{2}{\lambda}(d_1 + d_2 - d) \quad (12.18)$$

où  $d_1 + d_2$  est la longueur du chemin acoustique passant par le sommet de l'écran et  $d$  est le chemin direct traversant l'écran, voir figure 12.10. On peut alors estimer l'atténuation due à la présence de l'écran par

$$IL \approx 10 \log_{10}(3 + 10N) \quad (12.19)$$

ou par

$$IL \approx 20 \log_{10} \frac{\sqrt{2\pi N}}{\tanh \sqrt{2\pi N}} + 5 \text{ (dB) pour } N \geq -0.2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (12.20)$$

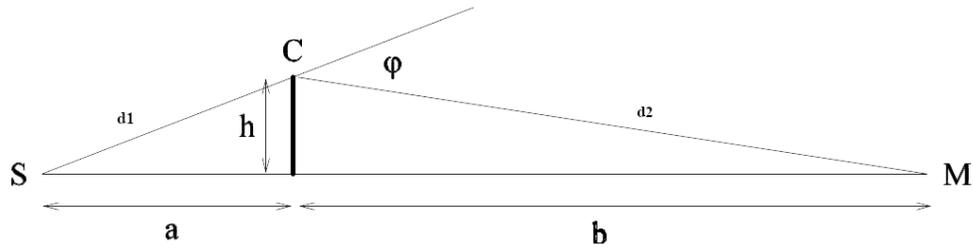


FIGURE 12.10 – Exemple d'écran antibruit.

Un exemple de tel écran est montré sur la figure 12.11.



FIGURE 12.11 – Exemple d'écran antibruit.

### 12.1.7 Topographie du sol

Lorsque le sol présente une topographie marquée comme sur la figure 12.12, nous retrouvons l'effet d'écran acoustique vu précédemment. Il faut en plus tenir compte de l'absorption par la surface de l'obstacle qui n'est généralement pas rigide.

### 12.1.8 Turbulence atmosphérique

Des fluctuations aléatoires locales du vent et de la température engendrent des fluctuations de phase et d'amplitude des ondes acoustiques de telle sorte que la pression en un point peut varier de 10dB ou plus sur des périodes de quelques minutes. Les fluctuations de l'indice de réfraction  $\langle \mu^2 \rangle$  sont données dans le tableau 12.2. La vitesse du son est donnée par  $c = c_0(1 + \mu)$ . La turbulence engendre la diffusion du son et dépend de l'amplitude du son.

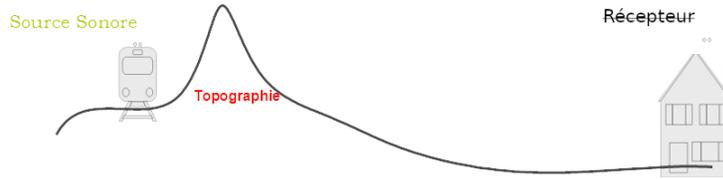


FIGURE 12.12 – Propagation sur sol non plan.

Condition atmosphérique	Valeur de $\langle \mu^2 \rangle$
Ensoleillé, peu de vent	$5 \times 10^{-6}$
Ensoleillé, vent fort	$15 \times 10^{-6}$ à $25 \times 10^{-6}$
Couvert, peu de vent	$3 \times 10^{-6}$
Couvert, vent fort	$15 \times 10^{-6}$ à $25 \times 10^{-6}$

TABLE 12.2 – Fluctuation de l'indice de réfraction en fonction des conditions météorologiques.

## 12.2 Sources sonores

Les sources sonores en milieu extérieur sont multiples. Parmi elles, les moyens de transports occupent une place très importante. Cela peut engendrer des sources dont le comportement diffère nettement du cas d'une source ponctuelle comme la ligne de source de la figure 12.13. On peut modéliser cette file de voitures comme un ensemble de sources ponctuelles décorréelées. Il faut surtout noter que dans ce cas le son diminue en fonction de la distance comme  $1/\sqrt{r}$  et donc bien plus lentement que pour une source ponctuelle.

L'étude du niveau sonore produit par le trafic routier est complexe. De nombreux paramètres sont à prendre en compte comme la nature du revêtement de chaussée comme indiqué sur la figure 12.14. Ce trafic est également très variable en fonction du moment dans la journée comme montré sur la figure 12.15.

## 12.3 Méthodes de prédiction du niveau sonore en extérieur

### 12.3.1 Méthodes analytiques

Le champ de pression produit par une source ponctuelle d'amplitude  $a$  au dessus d'un plan avec une impédance uniforme peut se calculer par

$$p = a \left( \frac{e^{ikr_d}}{4\pi r_d} + (R_p + (1 - R_p)F) \frac{e^{ikr_r}}{4\pi r_r} \right) \quad (12.21)$$

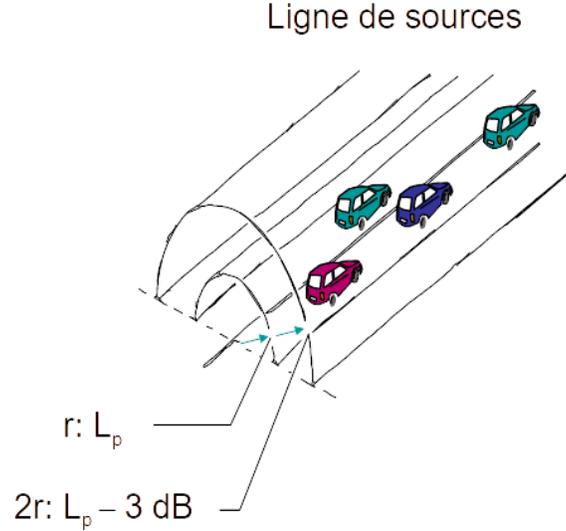


FIGURE 12.13 – Source sonore linéique.

où  $r_d$  et  $r_r$  sont les distances des chemins direct et réfléchi.

$$R_p = \frac{Z \cos \theta - 1}{Z \cos \theta + 1} \quad (12.22)$$

est le coefficient de réflexion en onde plane.  $Z$  est l'impédance normalisée du sol (divisée par  $\rho c$  de l'air). La fonction  $F$  est donnée par

$$F(w) = 1 + i\sqrt{\pi}w \exp(-w^2) \operatorname{erfc}(-iw) \quad (12.23)$$

avec

$$w^2 = 2ikr_r \Xi^2 \frac{1}{Z(1 - R_p)^2} \quad (12.24)$$

et

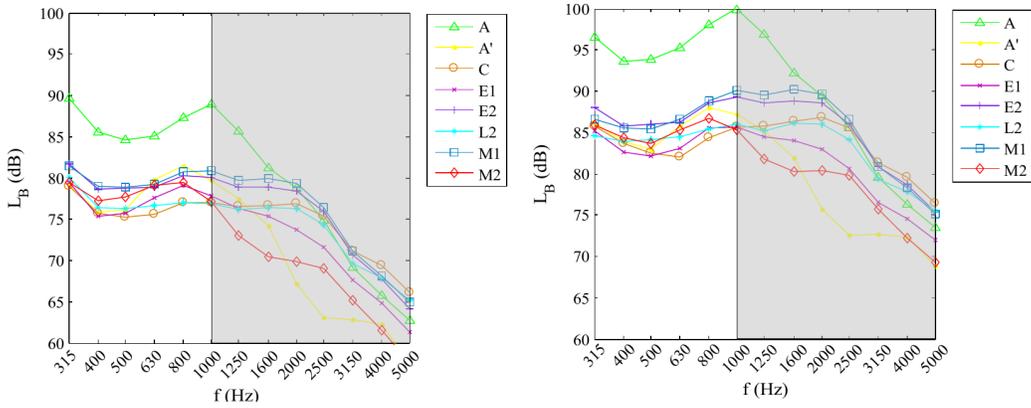
$$\Xi = \sqrt{1 - \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2 \sin^2 \theta} \quad (12.25)$$

$\kappa$  est le nombre d'onde complexe dans la structure poreuse du sol,  $k$  celui dans l'air et  $\operatorname{erfc}$  une fonction spéciale (error function).

Une version plus complexe de ces formules peut permettre de calculer la pression sonore pour un sol présentant une discontinuité, c'est à dire un sol constitué de deux demi-plans infinis avec chacun leur impédance de surface. Cela peut être utile par exemple pour estimer le son produit par un véhicule sur une route et se propageant ensuite dans un champ.

### 12.3.2 L'équation parabolique

Dans des cas plus complexes, des méthodes numériques sont nécessaires. Parmi celles-ci, la méthode parabolique est un bon compromis entre le coût en temps de calcul et la précision des résultats obtenus. Pour donner une idée de la mise en oeuvre de cette méthode, on considère le cas



Spectres de bruit à 50 km/h (à gauche) et à 90 km/h (à droite)

FIGURE 12.14 – Spectre du bruit routier pour différents revêtements de chaussée.

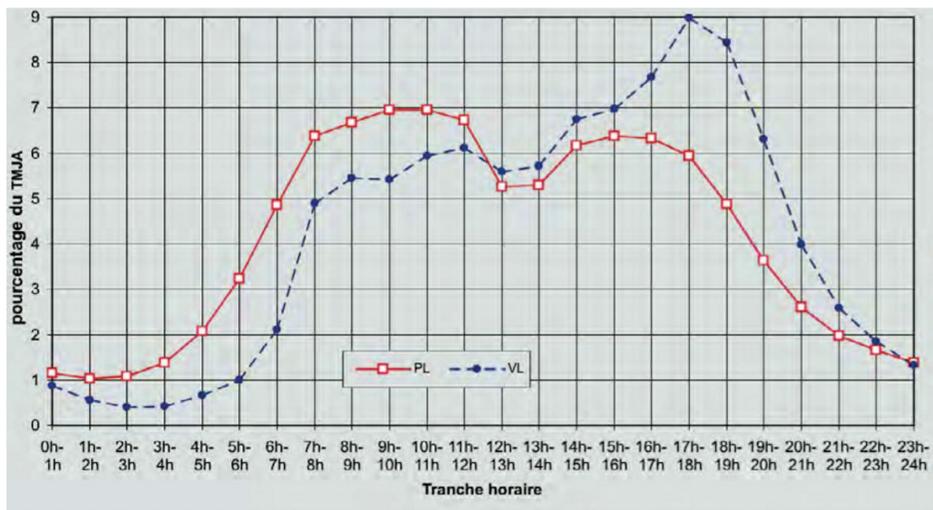


FIGURE 12.15 – Répartition du trafic routier en fonction de l'horaire (PL : poids lourds, VL : véhicules légers).

d'une propagation d'onde bidimensionnelle dans l'atmosphère. Le champ de pression est solution de

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) p = 0 \quad (12.26)$$

où  $y$  est la direction verticale et  $k(x, y) = k_0 n(x, y)$  dans lequel  $n$  est l'indice de réfraction qui varie avec la position alors que  $k_0 = \omega/c$  est le nombre d'onde pour la vitesse du son  $c$  de référence. On décompose ensuite le champ de pression en deux composantes

$$p(x, y) = u(x, y)e^{ik_0 x} \quad (12.27)$$

où  $u(x, y)$  est une fonction lentement variable. On a alors

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2(x, y) - k_0^2 \right) u(x, y) = 0 \quad (12.28)$$

En faisant l'hypothèse que  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll k_0 u$ , soit que cette fonction est lentement variable, on peut alors résoudre l'équation

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \left( k^2(x, y) - k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) \quad (12.29)$$

Cette résolution s'effectue de gauche à droite suivant les  $x$  croissants en calculant  $u((n+1)\Delta x, y)$  à partir de  $u(n\Delta x, y)$ , ce qui est beaucoup plus simple que de résoudre le problème aux limites initial. Les figures 12.16 et 12.17 donnent des résultats de calcul dans les cas respectivement d'une célérité du son croissante et décroissante avec l'altitude.

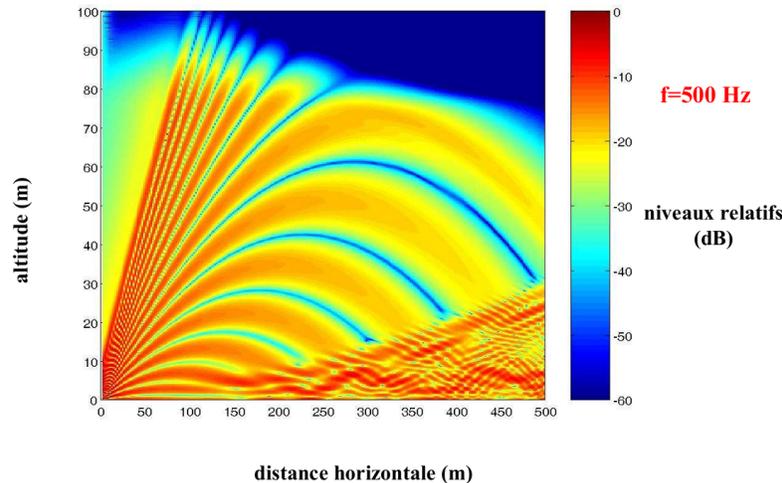


FIGURE 12.16 – Calcul par équation parabolique pour une célérité du son croissante.

### 12.3.3 Méthode des rayons

Cette méthode est similaire à l'optique géométrique et consiste à suivre des rayons depuis la source sonore jusqu'aux points de réception. Elle a été décrite dans le chapitre sur les méthodes numériques. Elle est particulièrement utile dans le cas de milieux extérieurs qui ne peuvent pas être

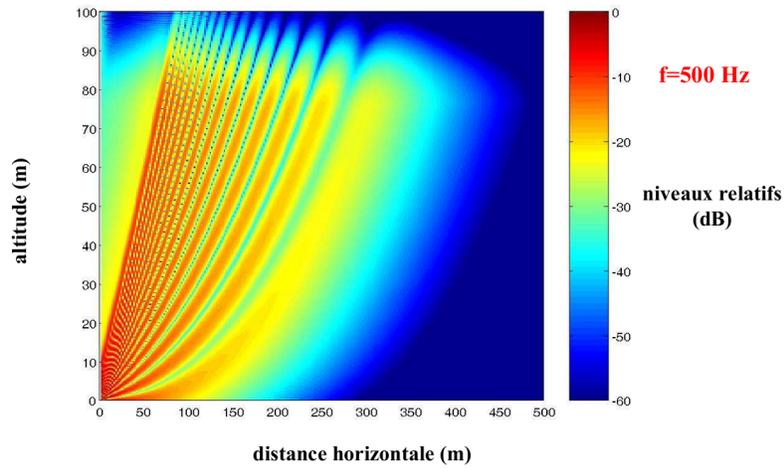


FIGURE 12.17 – Calcul par équation parabolique pour une célérité du son décroissante.

traités efficacement pour des méthodes d'éléments finis, par exemple, à cause de la grande taille du milieu à étudier. De plus, la méthode des rayons peut exploiter le fait que la propagation du son de la source au récepteur est plus explicite dans ce cas que pour les milieux clos.



# Chapitre 13

## Les méthodes numériques

### 13.1 Méthode des éléments finis

Dans la méthode des éléments finis, on doit résoudre l'équation des ondes ou l'équation de Helmholtz sur un domaine  $\Omega$  comme sur la figure 13.1. Considérons le cas de l'équation de Helmholtz, il faut donc résoudre

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (13.1)$$

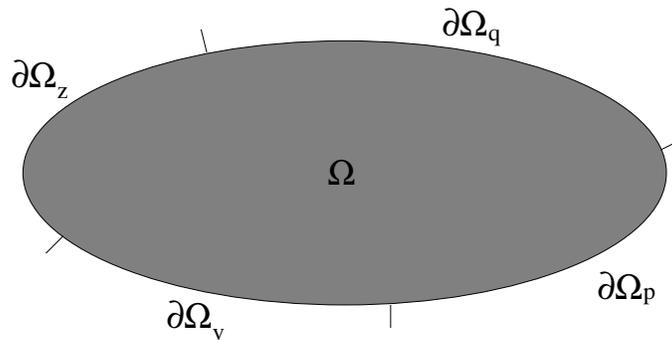


FIGURE 13.1 – Domaine de calcul.

Pour résoudre le problème de propagation acoustique, il faut imposer des conditions aux limites sur la frontière du domaine. Les conditions aux limites possibles sont de quatre natures. La frontière du domaine  $\partial\Omega$  peut être divisée en quatre parties  $\partial\Omega_p$ ,  $\partial\Omega_q$ ,  $\partial\Omega_z$  et  $\partial\Omega_v$  où respectivement la pression, la dérivée normale de la pression, l'impédance et la vitesse peuvent être imposées de telle sorte que

1.  $p = p_0$  sur  $\partial\Omega_p$
2.  $\frac{\partial p}{\partial n} = q_0$  sur  $\partial\Omega_q$
3.  $p = Zv$  sur  $\partial\Omega_z$
4.  $v = v_0$  sur  $\partial\Omega_v$

Les fonctions  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $Z$  et  $v_0$  sont des données du problème sur les parties de la frontière où elles sont définies. Dans le cas où le milieu de propagation serait infini, il faudrait ajouter des conditions de radiation.

Le problème est résolu par une formulation variationnelle. Considérons pour simplifier le cas où  $\partial\Omega_q = \partial\Omega$ . Soit  $v^*$  une fonction test, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) v^* dx &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} v^* ds + \int_{\Omega} (-\nabla v^* \nabla p + k^2 p v^*) dx &= 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 p v^*) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 v^* ds \end{aligned} \quad (13.2)$$

La discrétisation consiste à écrire les approximations

$$\begin{aligned} p(x) &\approx \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \\ v(x) &\approx \sum_{j=1}^{j=N} v_j N_j(x) \end{aligned} \quad (13.3)$$

dans lesquelles les  $N_j(x)$  sont les fonctions d'approximation définies sur les éléments montrés sur la figure 13.2.

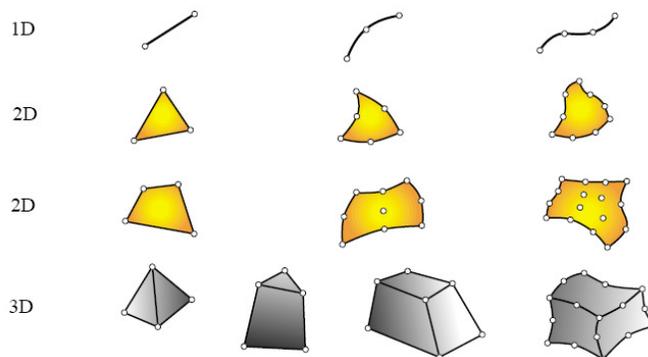


FIGURE 13.2 – Types d'éléments.

Dans le cas unidimensionnel, le maillage est une subdivision de l'intervalle étudié, soit

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N \quad (13.4)$$

Chaque intervalle  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1 : N$  est un élément fini. Les fonctions d'interpolation sont données par

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1} < x < x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de cette fonction est donnée sur la figure 13.3.

A partir de ces fonctions d'interpolation, on peut construire une approximation de la fonction inconnue par la formule 13.3. Une représentation de l'interpolation est montrée sur la figure 13.4. Des exemples de maillages dans des cas plus complexes sont donnés sur la figure 13.5.

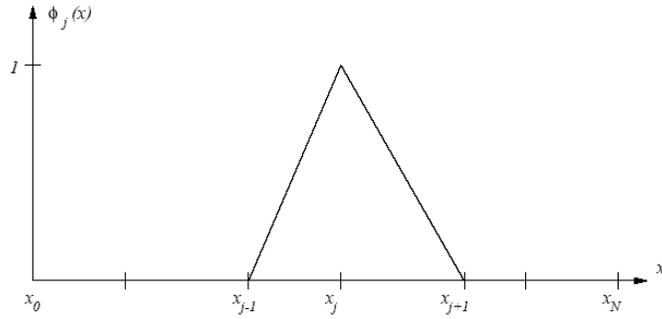


FIGURE 13.3 – Fonction d’interpolation en 1D

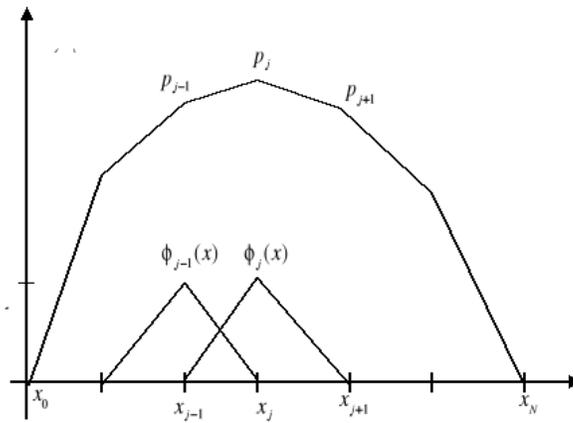


FIGURE 13.4 – Interpolation de la fonction inconnue

Il faut un minimum de nœuds par longueur d’onde. Le critère de Shannon imposerait 2 nœuds par longueur d’onde. En pratique, on prend plutôt entre 5 et 10 nœuds par longueur d’onde. La figure 13.6 illustre ce point. Dans un volume  $V$ , il faut ainsi environ

$$N = \frac{V}{(\lambda/5)^3} \quad (13.5)$$

nœuds pour effectuer un maillage correct du domaine. Le nombre de nœuds nécessaire est ainsi indiqué dans le tableau 13.1. On comprend facilement que ces calculs sont limités au cas des basses fréquences.

	Volume	f=100 Hz	f=1000 Hz	f=10000 Hz
Intérieur de voiture	$8 \text{ m}^3$	25	$25 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^6$
Petite pièce	$50 \text{ m}^3$	160	$16 \cdot 10^4$	$16 \cdot 10^7$
Grand hall	$5000 \text{ m}^3$	16000	$16 \cdot 10^6$	$16 \cdot 10^9$

TABLE 13.1 – Nombre de nœuds pour le maillage.

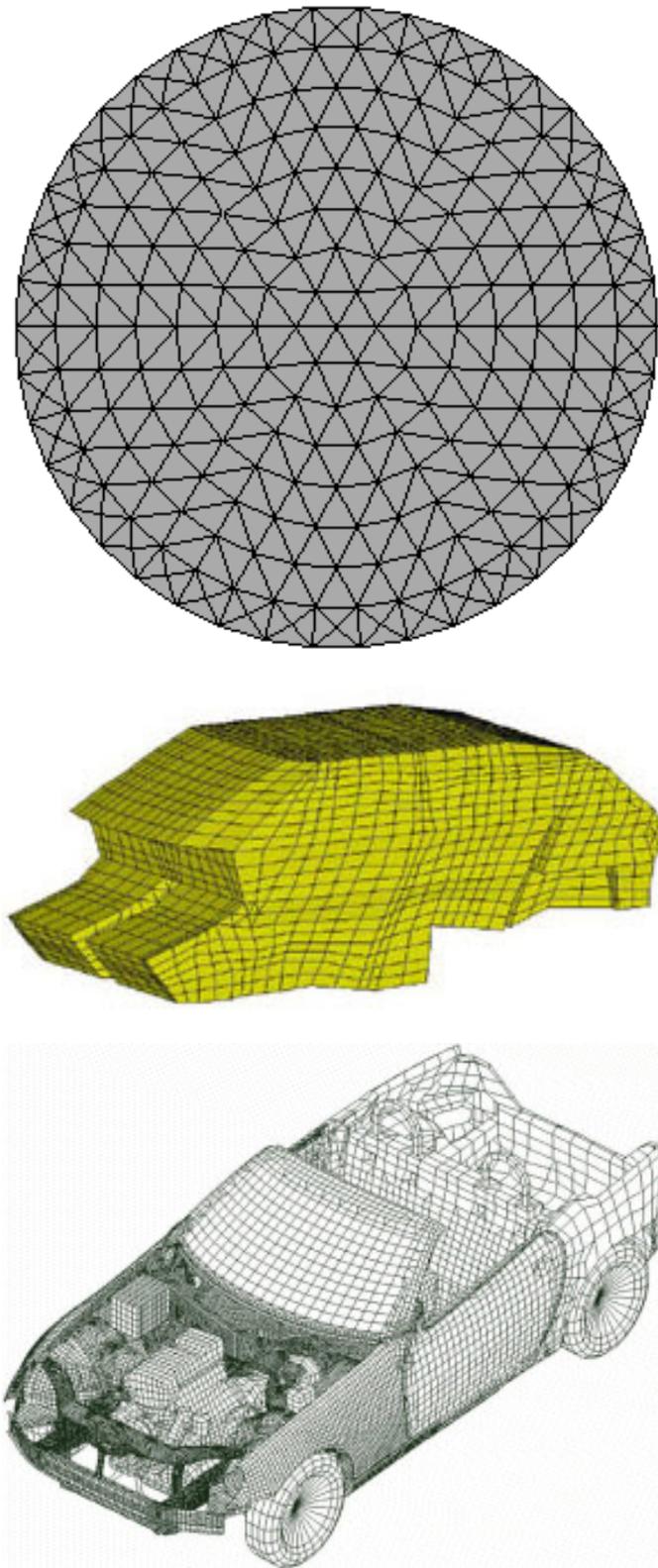
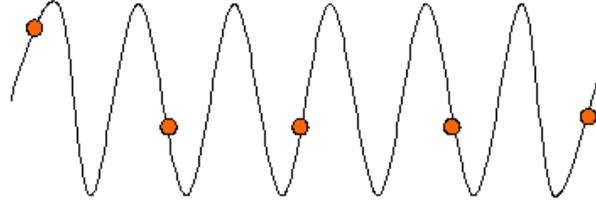


FIGURE 13.5 – Exemples de maillages.

Pas assez dense



Assez dense

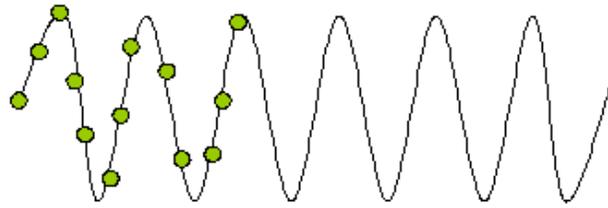


FIGURE 13.6 – Finesse du maillage

Le système discret est ensuite obtenu par

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 v^* p) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 v^* ds \\
 \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* \nabla N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j \nabla N_j(x) - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \right) dx &= \int_{\partial\Omega} q_0 \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(s) ds \\
 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} v_i^* p_j - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} v_i^* p_j &= \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* Q_i \\
 K_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla N_i(x) \nabla N_j(x) dx \\
 M_{ij} &= \int_{\Omega} N_i(x) N_j(x) dx \\
 Q_i &= \int_{\partial\Omega} q_0 N_i(s) ds \quad (13.6)
 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le système

$$\sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} p_j - k^2 \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} p_j = Q_i$$

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (13.7)$$

avec  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  les vecteurs des valeurs nodales de la pression et du second membre donnés par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

Dans le système

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (13.9)$$

les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont creuses, ce qui diminue l'effort de calcul pour la résolution du système. La résolution peut être directe ou obtenue dans un premier temps par le calcul des modes propres du domaine puis par projection de la solution sur les modes. On obtient une solution approchée

$$p(x) = \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \quad (13.10)$$

Un exemple de résultat de calcul est donné sur la figure 13.7.

## 13.2 Méthode des équations intégrales.

Cette méthode présente quelques avantages par rapport à la méthode des éléments finis qui peut la rendre préférable dans certains cas. Elle conduit à un problème posé sur la frontière du domaine uniquement alors que la méthode des éléments finis est posée sur le domaine entier. L'effort de maillage et le nombre de degrés de liberté est donc fortement réduit dans ce cas. De plus, elle permet de traiter de façon exacte les conditions aux limites de radiation (ou de Sommerfeld) ce qui la rend particulièrement intéressante dans le cas de milieux infinis.

Le problème à résoudre est le même que pour la méthode des éléments finis. En régime harmonique le champ de pression est solution de

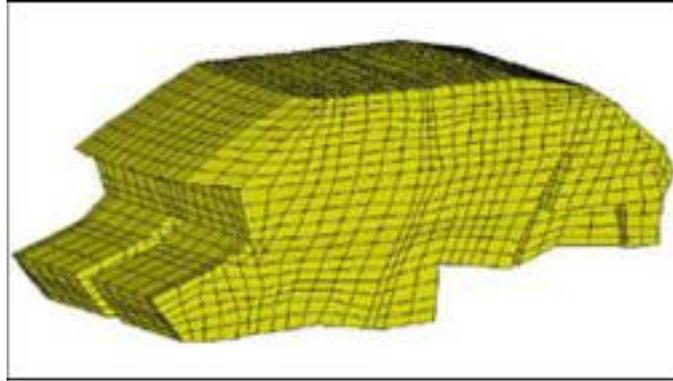
$$\Delta p + k^2 p = s(\mathbf{r}) \quad (13.11)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde et  $c$  la vitesse du son dans l'air. Le terme  $s(\mathbf{r})$  décrit les sources éventuelles dans l'air. A l'infini, il faut que la condition de Sommerfeld soit satisfaite, c'est à dire

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = o\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\right) \quad (13.12)$$

où  $n$  est la dimension de l'espace. Cette condition exprime que l'énergie va de la source vers l'infini et non l'inverse. Pour un problème posé sur l'extérieur d'un domaine borné, l'équation intégrale donne

Maillage



Solution

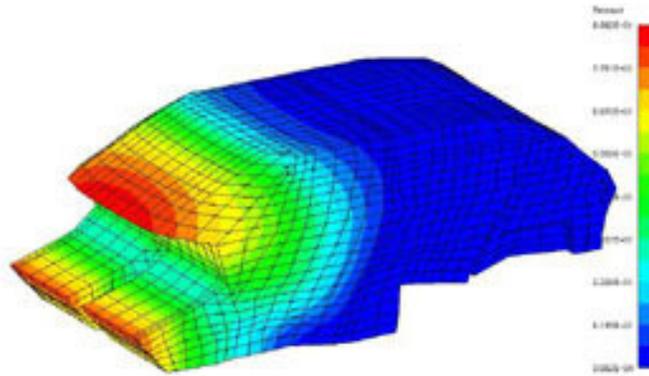


FIGURE 13.7 – Exemple de résultat de calcul

$$c_e(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + p_{inc}(\mathbf{x}) \quad (13.13)$$

où  $p_{inc}(\mathbf{x})$  est le champ de pression incident et  $c_e(\mathbf{x})$  un coefficient égal à  $1/2$  si la surface est régulière au point  $\mathbf{x}$ . Sinon il vaut

$$c_e(\mathbf{x}) = 1 + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_0}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (13.14)$$

où  $G_0$  est la fonction de Green statique du problème.

La formule peut aussi être appliquée pour un point  $\mathbf{x}$  dans l'air et dans ce cas  $c_e(\mathbf{x}) = 1$ . Cela donne la formule de Kirchoff permettant de calculer la pression dans l'air à partir de la pression et de sa dérivée sur la surface.

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + p_{inc}(\mathbf{x}) \quad (13.15)$$

### 13.2.1 Cas tridimensionnel

Sous la forme standard l'équation intégrale peut avoir plusieurs solutions pour un ensemble discret de fréquences appelées les fréquences singulières. Pour éviter cela nous utilisons en fait la

formulation de Burton et Miller qui consiste à ajouter à la forme habituelle (13.13), la dérivée de l'équation multipliée par une constante complexe. Pour le cas tridimensionnel, on peut montrer que cela conduit finalement à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{i}{2k} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_x} d\mathbf{x} = \\
& \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
& \frac{i}{k} \left\{ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k^2 \tilde{p}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_x \wedge \nabla_x \tilde{p}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{n}_y \wedge \nabla_y p(\mathbf{y})) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right. \\
& \left. - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right\} + \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) p_{inc}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{i}{k} \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.16)
\end{aligned}$$

pour toute fonction test  $\tilde{p}$  définie sur  $\Gamma$ .

### 13.2.2 Discrétisation

La discrétisation est obtenue à partir d'un maillage sur la surface du domaine comme pour un calcul par éléments finis. Un système linéaire est formé dont la solution donne une approximation de la solution sur la surface. Le maillage est défini par un ensemble de  $N$  nœuds et  $M$  éléments. La pression et sa dérivée normale (notée  $q$ ) sont approchées par

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{i=N} p_i N_i(\mathbf{x}) \\
q(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{i=N} q_i N_i(\mathbf{x}) \quad (13.17)
\end{aligned}$$

où les  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation sur la surface. Les valeurs discrètes sur la surface définissent les vecteurs

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

et finalement le système à résoudre est de la forme

$$\mathbf{KX} = \mathbf{F} \quad (13.19)$$

Le vecteur  $\mathbf{X}$  contient les degrés de liberté inconnus parmi ceux de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  alors que  $\mathbf{F}$  contient les degrés de liberté connus. C'est un système avec une matrice  $\mathbf{K}$  pleine et généralement non symétrique. La résolution est effectuée par des solveurs classiques traitant ce type de matrices.

### 13.2.3 Fonctions de Green

La fonction de Green est le champ de pression au point  $\mathbf{x}$  produit par une source au point  $\mathbf{y}$ . Dans la suite nous noterons  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  le vecteur entre les points  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{x}$  et la distance est donnée par  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ . Nous rappelons dans la suite les fonctions de Green utiles pour le type de problème que nous avons à traiter.

## Dynamique à deux dimensions

Dans le cas d'un problème bidimensionnel, la fonction de Green en champ libre est solution de

$$\Delta_x G(\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (13.20)$$

Elle est donnée par

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{4} H_0(kr) \quad (13.21)$$

où  $H_0 = J_0 + iY_0$  est la fonction de Hankel,  $J_0$  la fonction de Bessel et  $Y_0$  la fonction de Neumann d'ordre zéro. La dérivée normale de la fonction de Green est

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4} \frac{\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r}}{r} H_1(kr) \quad (13.22)$$

## Dynamique à trois dimensions

Dans le cas d'un problème tridimensionnel, la fonction de Green en champ libre est solution de

$$\Delta_x G(\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (13.23)$$

Elle est donnée par

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (13.24)$$

La dérivée normale de la fonction de Green est

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{r}) = -(ikr - 1) \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{r} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^3} \quad (13.25)$$

Des exemples de maillages et de résultats de calculs sont donnés sur les figures 13.8 et 13.9.

## 13.3 Méthode des rayons

Cette méthode est dans l'esprit l'analogue de l'optique géométrique et considère la propagation du son suivant des rayons. En général, c'est une méthode approchée valable à moyenne et haute fréquence.

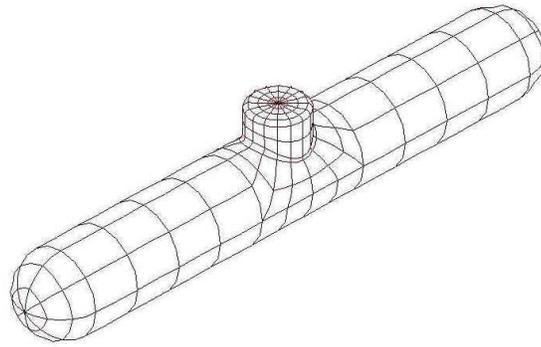
### 13.3.1 Sources images

Considérons le cas de la figure 13.10. Le champ de pression total avec la contribution de la source image est donné par

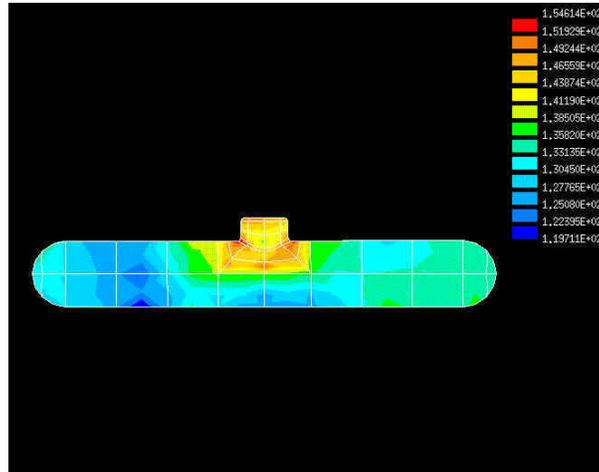
$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r'} f\left(t - \frac{r'}{c}\right) \quad (13.26)$$

La seconde partie du membre de droite est la contribution de la source image. Un exemple de signal est donné sur la figure 13.11. Dans le cas de plusieurs parois, il faut tenir compte des différentes sources images possibles, voir la figure 13.12.

Maillage



Solution



Solution

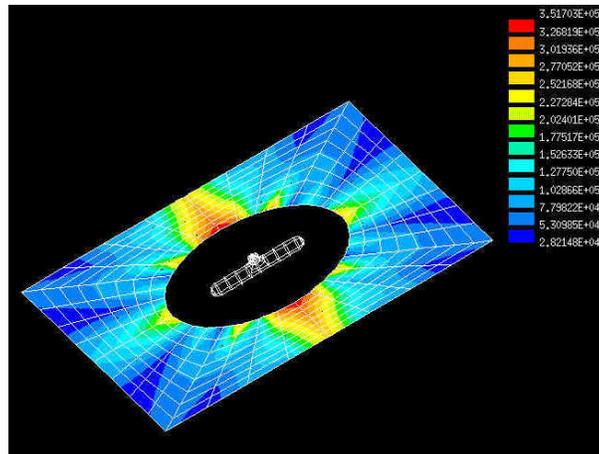


FIGURE 13.8 – Exemple de résultat de calcul par équation intégrale

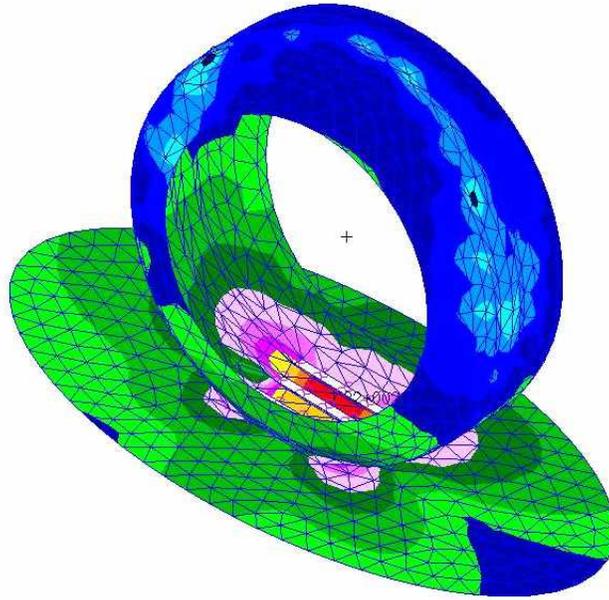


FIGURE 13.9 – Exemple de calcul du rayonnement d'un pneumatique

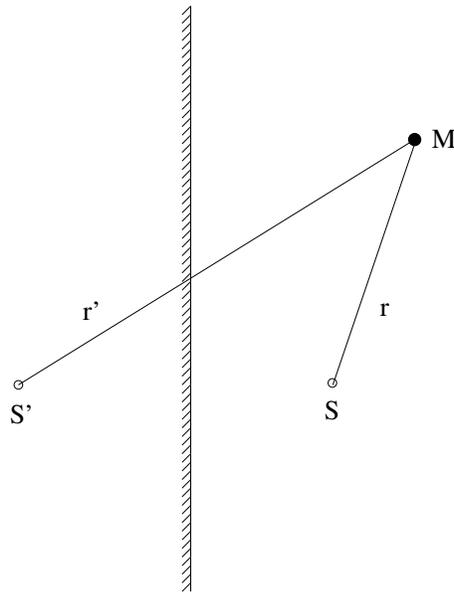


FIGURE 13.10 – Source image par rapport à une paroi rigide.

### 13.3.2 Rayons sonores

Dans le cas où la longueur d'onde est petite devant les dimensions des objets présents dans le milieu, il est possible de traiter le problème comme en optique géométrique à partir de la notion de rayon sonore. Un exemple de rayons issus d'une source est présenté sur la figure 13.13. Les rayons réfléchis semblent issus d'une source image  $S'$ . La réflexion se fait suivant les lois ex-

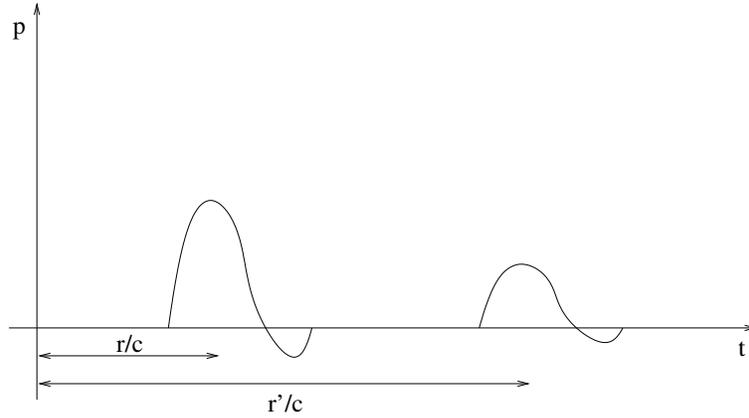


FIGURE 13.11 – Signal temporel au point M.

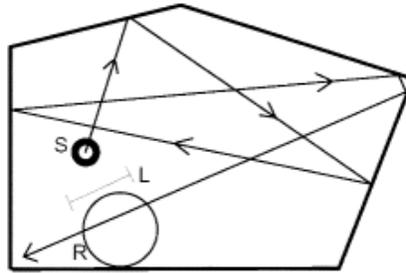


FIGURE 13.12 – Source initiale et ses images.

posées précédemment, en particulier l'angle du rayon réfléchi par rapport à la normale à la surface réfléchissante est égal à l'angle du rayon incident (loi de Descartes). Pour que cela soit vrai, il faut que la surface soit lisse, c'est à dire que les défauts de surface éventuels soient de taille nettement inférieure à la longueur d'onde. Si ce n'est pas le cas des lois de réflexion plus complexes doivent être utilisées.

Dans une situation complexe, la méthode des rayons consiste à faire partir des rayons de la source suivant un tirage aléatoire avec une répartition uniforme suivant les directions de l'espace. Si  $N$  est le nombre total de rayons et  $\Delta\Omega$  l'angle solide élémentaire de chaque rayon, nous avons  $N\Delta\Omega = 4\pi$ . Des exemples sont montrés sur les figures 13.14 et 13.15. Chaque rayon est porteur pendant le temps  $dt$  d'une énergie élémentaire donnée par

$$\Delta E = \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta t} I(\theta, \phi, t) d\Omega dt \quad (13.27)$$

La propagation des rayons se fait en ligne droite dans un milieu homogène. Les réflexions sur les parois se font suivant les lois de Descartes avec prise en compte éventuelle d'une absorption par les parois. Sur de longues distances, il faut aussi tenir compte de l'absorption par l'air.

Pour estimer le niveau acoustique au point de réception, on entoure ce point d'une petite sphère et on compte le nombre de rayons et leur énergie qui arrivent à l'intérieur de la sphère. Des exemples de calculs pour la détermination du bruit aérien autour d'un aéroport sont donnés sur la figure 13.16. La figure 13.17 montre la cartographie du bruit dans un quartier de Paris. Elle a été obtenue par

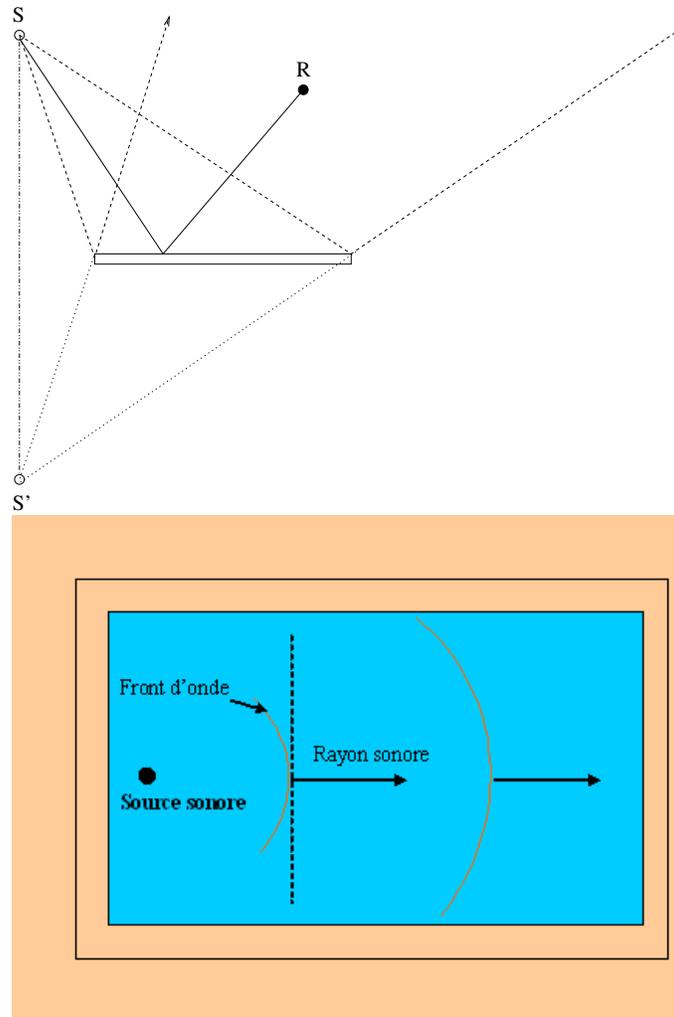


FIGURE 13.13 – Rayons sonores.

une méthode basée sur des calculs de rayons sonores.

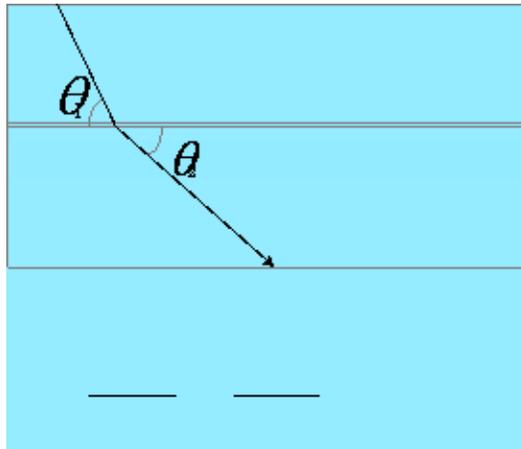
### 13.4 La SEA (Statistical Energy Analysis)

La SEA est une méthode haute fréquence qui s'intéresse à la propagation de l'énergie dans le système et non aux détails du champ de pression. Elle est basée sur les hypothèses que les longueurs d'ondes sont petites devant les dimensions des systèmes, que les champs vibratoires sont diffus et que les différentes parties du système sont faiblement couplées.

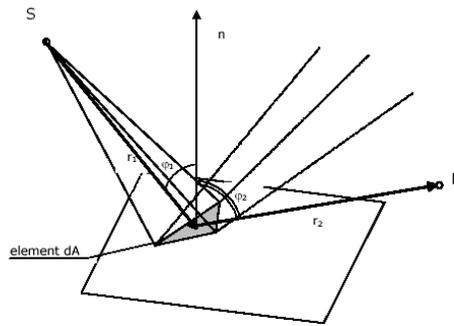
La méthode est basée sur des bilans énergétiques. On suppose la structure décomposée en sous systèmes qui stockent et qui échangent de l'énergie. Pour chaque sous système, en régime stationnaire, la puissance reçue est égale à la puissance dissipée. Si  $\eta$  est le facteur de perte interne dans un sous système,  $E$  l'énergie de ce sous système, la puissance dissipée vaut

$$P_d = \omega \eta E \tag{13.28}$$

a)



b)



c)

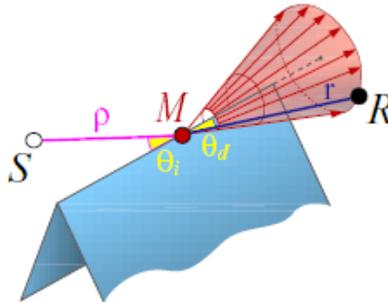


FIGURE 13.14 – Lois de propagation géométriques a), b) et diffraction c).

La puissance échangée entre deux sous systèmes 1 et 2 est (puissance reçue par 1)

$$P_{12} = \omega \eta_{21} E_2 - \omega \eta_{12} E_1 \quad (13.29)$$

où  $\eta_{12}$  et  $\eta_{21}$  sont les facteurs de couplage liés par la relation

$$\eta_{12} n_1 = \eta_{21} n_2 \quad (13.30)$$

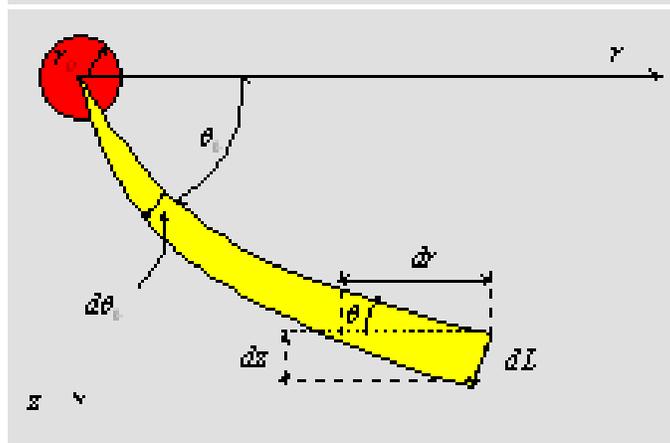
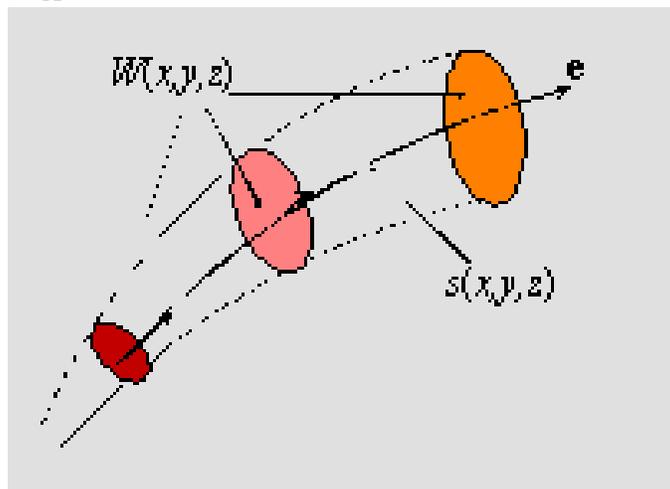
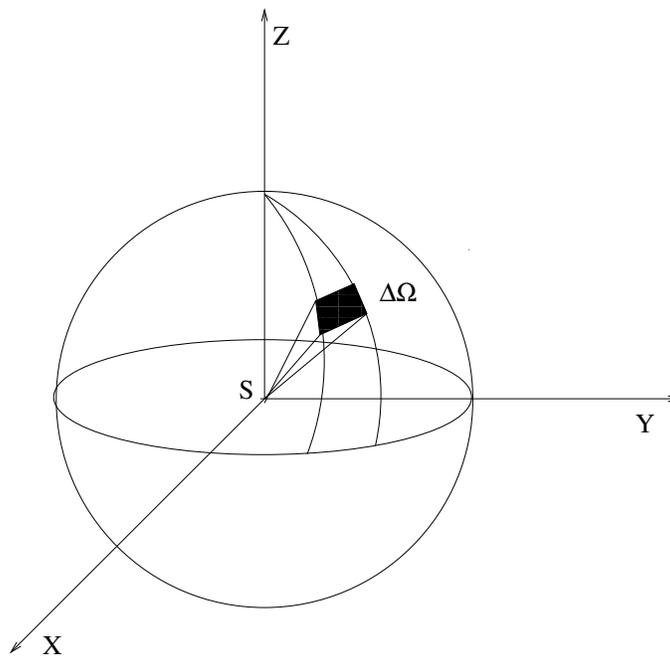


FIGURE 13.15 – Angle solide d'un rayon.

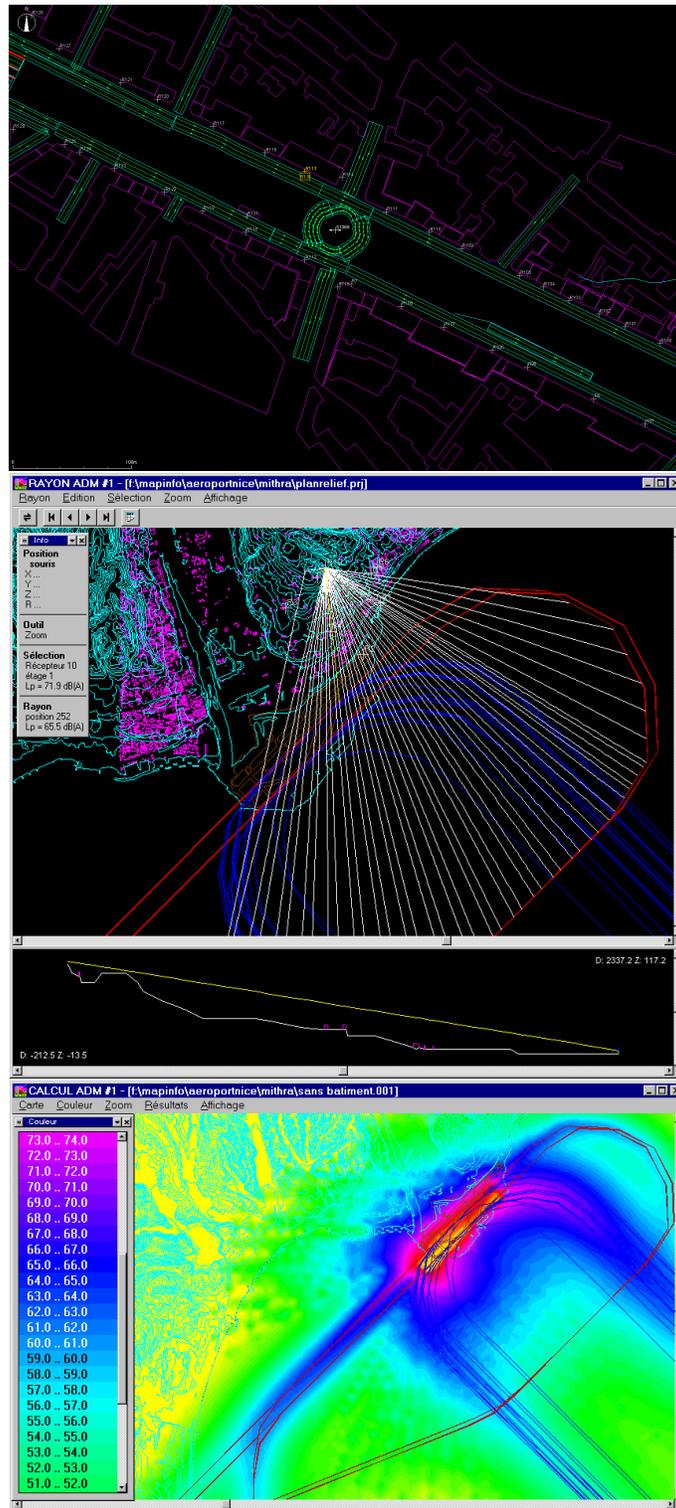


FIGURE 13.16 – Calcul du bruit aérien par rayons

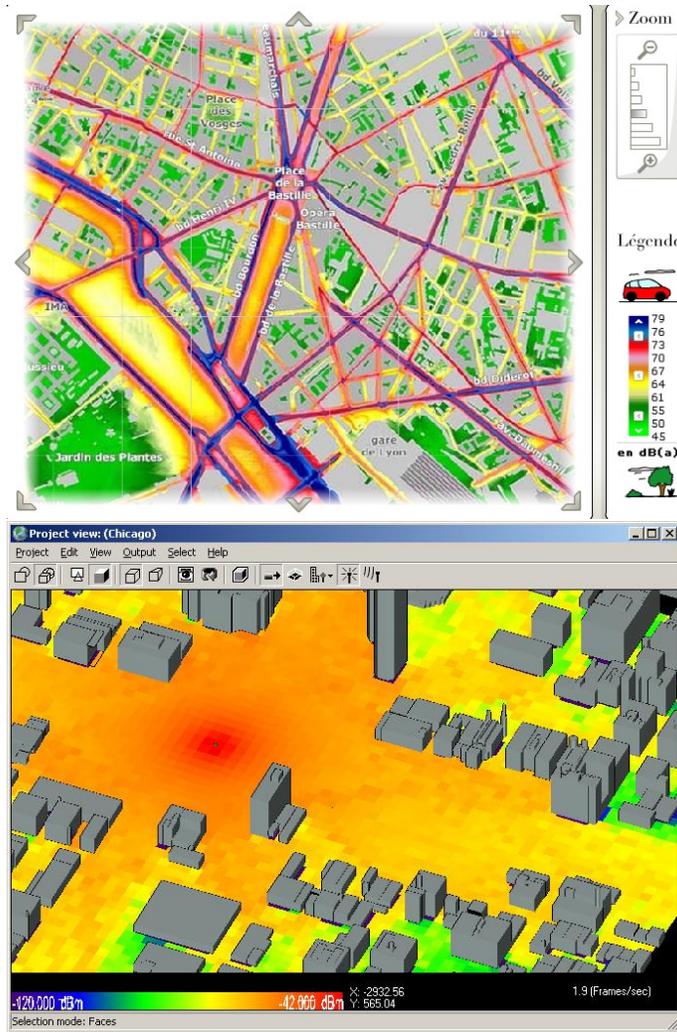


FIGURE 13.17 – Cartographie 2D et 3D du bruit dans Paris

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les densités modales des sous systèmes 1 et 2. Une illustration est donnée sur la figure 13.18.

Le bilan d'énergie pour un système  $i$  consiste à écrire que l'énergie introduite est égale à l'énergie perdue soit :

$$P_i^e = \omega \eta_i E_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} (\omega \eta_{ij} E_i - \omega \eta_{ji} E_j) \quad (13.31)$$

où  $P_i^e$  est la puissance extérieure introduite dans le sous-système  $i$ . On obtient ainsi une relation matricielle qui permet de calculer les énergies de chaque sous-système en fonction des puissances introduites. Un exemple de décomposition pour une voiture est donné sur la figure 13.19. Le résultat du calcul est indiqué sur la figure 13.20.

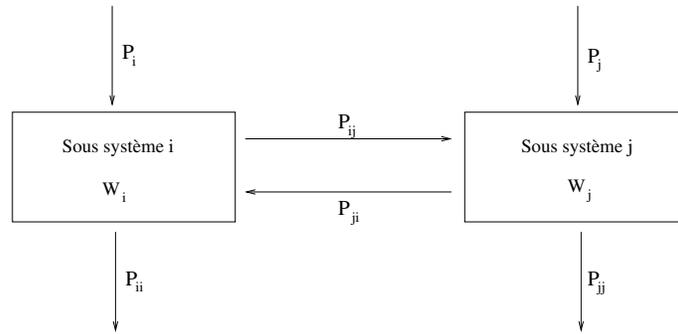


FIGURE 13.18 – Décomposition en sous systèmes

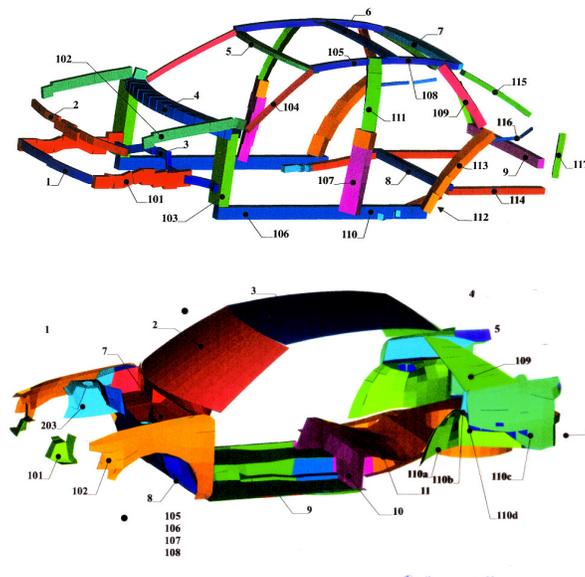


FIGURE 13.19 – Décomposition en sous systèmes pour une voiture

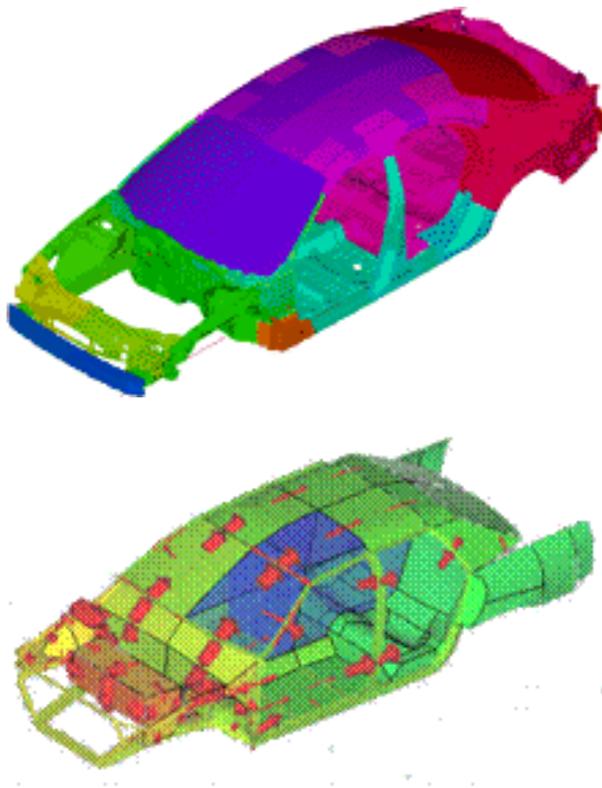


FIGURE 13.20 – Energie vibratoire



# Appendices



# Annexe A

## Formulaire

### A.1 Formules utiles

Vitesse du son	$c = 20\sqrt{T}$
Longueur d'onde	$\lambda = \frac{c}{f} = cT$
Pression	$p = \frac{F}{S}$
Seuil d'audition	$p_0 = 2.10^{-5} Pa$
Puissance	$P = \frac{Energie}{Temps}$
Intensité	$I = \frac{Energie}{Surface \times Temps}$
Niveau de puissance (dB)	$L_w = 10 \log_{10}(\frac{P}{10^{-12}})$
Niveau de pression (dB)	$L_p = 20 \log_{10}(\frac{p}{2.10^{-5}})$
Niveau d'intensité (dB)	$L_I = 10 \log_{10}(\frac{I}{10^{-12}})$
Temps de réverbération	$TR = \frac{0,16V}{A}$

### A.2 Coordonnées polaires

Divergence d'un vecteur

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

Gradient d'une fonction scalaire

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.2})$$

Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.3})$$

### A.3 Coordonnées sphériques

Divergence d'un vecteur

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{v_\theta}{r} \quad (\text{A.4})$$

Gradient d'une fonction scalaire

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A.5})$$

Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.6})$$

# Bibliographie

- [1] A. FISCHETTI, *Initiation à l'acoustique*, Belin, 2003.
- [2] C.M. HARRIS, *Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control*, New York : McGraw-Hill, 1991.
- [3] L. HAMAYON, *Comprendre simplement l'acoustique des bâtiments*, Editions le moniteur, Paris 2008.
- [4] M. BRUNEAU, *Manuel d'Acoustique Fondamentale*, Hermès, Paris 1998.
- [5] R. JOSSE, *Notions d'acoustique*, Eyrolles, Paris, 1977.
- [6] P. LIÉNARD ET P. FRANÇOIS, *Acoustique industrielle et environnement*, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Eyrolles, Paris, 1983.
- [7] A.D. PIERCE, *Acoustics : An introduction to its physical properties and applications*, Mc Graw-Hill, 1981.
- [8] P.M. MORSE AND K.U. INGARD, *Theoretical Acoustics*, Mc Graw-Hill, 1961.
- [9] S.P. SINGAL, *Noise pollution and control*, Narosa Publishing House, 2000.
- [10] L. L. BERANEK AND I. L. VÉR, *Noise and vibration control engineering*, J. Wiley, 1992.
- [11] H. KUTTRUFF, *Room Acoustics*, CRC Press, 2016.
- [12] T. ROSSING, *Springer Handbook of Acoustics*, Springer New York, 2007.
- [13] P. BLANC-BENON, *Outdoor Sound Propagation Modelling in Complex Environments : Recent Developments in the Parabolic Equation Method*, Proceedings of Forum Acusticum 2002, Sevilla, Spain
- [14] M.E. DELANY, E.N. BAZLEY, *Acoustical properties of fibrous absorbent materials*, Applied Acoustics, Volume 3, Issue 2, 1970, Pages 105-116
- [15] J. F. HAMET AND M. BÉRENGIER, *Acoustical characteristics of porous pavements : A new phenomenological model*, Internoise 93, Leuven, Belgium, 1993, Pages 641-646
- [16] D.Y. MAA, *Potential of microperforated panel absorber*, The Journal of the Acoustical Society of America, 104, 2861-2866 (1998)