***ENPC - Cours de Géomécanique et Géotechnique Avancée***
*Récapitulatif des formules essentielles*
R3

## Elasticité Anisotrope

● Tenseur d'élasticité

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbb{C}$ *tenseur d'élasticité* d'ordre 4, avec les symétries : $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$

$\mathbb{S}$ tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$, $\quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}$

$\mathbb{S} : \mathbb{C} = \mathbb{S} : \mathbb{C} = \mathbb{I}$, $\quad$ $\mathbb{I}$ : tenseur d'identité d'ordre 4 symétrique, $\quad I_{ijkl} = ½\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

$C_{ijmn}\, S_{mnkl} = I_{ijkl}$ , $\qquad S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{klij}$

$\mathbb{C}$ et $\mathbb{S}$ sont des tenseurs défini-positifs : $\forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} > 0$

● Notation de Voigt

Les couples symétriques d'indices $(ij)$ prennent 6 valeurs différentes qu'on numérote par $1 \le \alpha \le 6$ de la manière suivante :

$(ij) \rightarrow \alpha$ : $\qquad 11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6$

Représentation matricielle du tenseur $\mathbb{C}$ par une matrice $c_{\alpha\beta}$ avec $1 \le \alpha \le 6$ et $1 \le \beta \le 6$ :

$$c_{\alpha\beta} = C_{ijkl}, \quad (ij) \rightarrow \alpha, \quad (kl) \rightarrow \beta$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{11} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ S & y & m. & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Représentation matricielle du tenseur $\mathbb{S}$ par une matrice $s_{\alpha\beta}$ avec $1 \le \alpha \le 6$ et $1 \le \beta \le 6$ :

$s_{\alpha\beta} = S_{ijkl}$ si $\alpha \le 3$ et , $\beta \le 3$
$s_{\alpha\beta} = 2S_{ijkl}$ si $\alpha > 3$ et $\beta \le 3$ ou $\alpha \le 3$ et $\beta > 3$
$s_{\alpha\beta} = 4S_{ijkl}$ si $\alpha > 3$ et $\beta > 3$

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{11} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ S & y & m. & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}
$$

$$
\sum_{\gamma=1}^{6} c_{\alpha\gamma} s_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}
$$

● Familles de symétrie élastique du matériau

Matériaux orthotropes : 3 plans de symétries perpendiculaires

Nombres de paramètres indépendants : 9 + 3

9 paramètres indépendants *intrinsèques* : $E_1$, $E_2$, $E_3$, $\nu_{12}$, $\nu_{13}$, $\nu_{23}$, $\mu_{12}$, $\mu_{13}$, $\mu_{23}$

3 paramètres d'angles du repère d'orthotropie dans l'espace

$$
\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & & & \\ s_{12} & s_{11} & s_{23} & & & \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & & & \\ & & & s_{44} & & \\ & & & & s_{55} & \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & & & \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & & & \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{\mu_{23}} & & \\ & & & & \frac{1}{\mu_{13}} & \\ & & & & & \frac{1}{\mu_{12}} \end{bmatrix} , \quad \begin{matrix} \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \\ \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \\ \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \end{matrix}
$$

$$
\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{23} & & & \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & & \\ & & & & c_{55} & \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}^{-1} , \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}} , \quad c_{55} = \frac{1}{s_{55}} , \quad c_{66} = \frac{1}{s_{66}}
$$

Matériaux isotropes transverse : un axe de symétrie de révolution

Nombres de paramètres indépendants : 5 + 2

5 paramètres indépendants *intrinsèques* (pour axe de symétrie $x_3$) : $E_1$, $E_3$, $\nu_{12}$, $\nu_{13}$, $\mu_{13}$
2 paramètres d'angles de l'axe de symétrie dans l'espace

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & & & \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & & & \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{\mu_{13}} & & \\ & & & & \frac{1}{\mu_{13}} & \\ & & & & & \frac{1}{\mu^*_{12}} \end{bmatrix}, \qquad \nu_{21} = \nu_{12}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \mu^*_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$$

Matériaux isotropes:

Nombres de paramètres indépendants : 2 $(E, \nu)$ ou $(\lambda, \mu)$ avec :

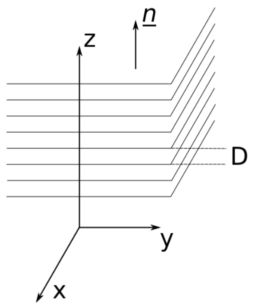
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk})$$

$$S_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2E}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

Milieux fracturés

Fractures parallèles et infinies d'espacement $D$ et de raideurs normale et tangente respectivement $k_n$ et $k_t$ dans un massif de paramètres intacts E et $\nu$.




$$s_{11} = \frac{1}{E}, \quad s_{12} = s_{13} = \frac{-\nu}{E}, \quad s_{33} = \frac{1}{E} + \frac{1}{k_n D}, \quad s_{44} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{k_t D}, \quad s^*_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$$