

(II)

FLUAGE DES TUBES ET DES SPHERES CREUSES DANS DES MILIEUX NON LINEAIRES

Introduction

Dans différents problèmes d'ingénieur, on est amené à étudier le fluage des tubes circulaires ou des sphères creuses sous l'effet d'une différence de pression intérieur-extérieur.

Si l'on impose cette différence de pression de manière instantanée, le champ des contraintes est au départ élastique, puis commence à évoluer et, quand t tend vers l'infini, tend vers un état limite que l'on sait en général calculer. Mais le problème d'évolution de ce champ entre les états initial et final est généralement difficile à étudier.

Pour quelques modèles de comportement classiques (Maxwell, Kelvin, Bingham) ce problème peut être étudié analytiquement (voir Berest & Nguyen Minh 1983, Berest 1989, 1990). La particularité de ces modèles est de faire intervenir la contrainte avec un exposant égal à un.

Pour les autres matériaux, on doit, par contre, recourir au calcul numérique.

Le cas d'un tube circulaire épais dans un milieu de N.H. (Norton-Hoff) a été étudié par Besseling (1962) et celui d'une cavité sphérique dans le même milieu ou dans un matériau de L.M.S. (Lemaitre-Menzel-Shreiner), par Nguyen-Minh (1987).

Dans ce chapitre nous allons reprendre les équations de ces deux problèmes et montrer que sous certaines conditions elles se ramènent à une équation unique pour les deux géométries (Nguyen Minh & Pouya 1991).

Quelques propriétés de ces équations seront ensuite étudiées dans les chapitres suivants et une solution approchée sera donnée pour le cas du matériau de N.H. .

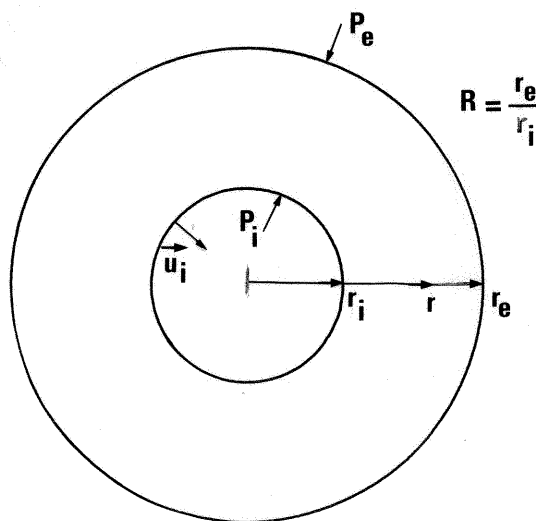


Figure 2.1 : Géométrie circulaire

1) Convergence d'une sphère creuse

On étudie les contraintes et les déformations d'une sphère creuse de rayon intérieur r_i , de rayon extérieur r_e et soumise aux pressions interne et externe P_i et P_e . Ce corps est supposé se trouver initialement sous une pression homogène ($P_i = P_e$). Une différence de pression est imposée de manière instantanée à l'instant zéro. Pour simplifier le problème, on suppose que la pression extérieure P_e reste constante et que l'on fait varier la pression intérieure P_i . Le champ des contraintes établi immédiatement après la mise en charge est le champ élastique; il évolue ensuite dans le temps. L'objectif est d'étudier cette évolution. On se contentera dans ce chapitre d'établir les équations d'évolution.

On fait l'hypothèse des petites déformations. Les déplacements sont comptés à partir de l'état initial noté 0, caractérisé par une pression constante $\sigma_0 = -P_e \mathbf{1}$, et sont associés au champ $\sigma - \sigma_0$.

Le loi de comportement du corps est celle de N.H. ou de L.M.S. décrites au chapitre précédent. Le matériau N.H. est *sans écrouissage* et celui de L.M.S. est à *écrouissage positif*.

Les données du problème sont de symétrie sphérique. En admettant l'unicité de la solution (qui a été démontrée au chapitre précédent pour le matériau sans écrouissage), la solution du problème est également de symétrie sphérique:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \sigma_\theta \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{u}{r} & \\ & & \frac{u}{r} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = -P_e \mathbf{1} \quad \epsilon^{vp} = \begin{bmatrix} \epsilon^{vp} & & \\ & -\frac{\epsilon^{vp}}{2} & \\ & & -\frac{\epsilon^{vp}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} \quad \epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \bar{\sigma}) \mathbf{1} \quad \bar{\sigma} = \sigma - \sigma_0$$

Soient les équations de comportement:

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{2\nu}{E} (\sigma_\theta + P_e) + \frac{\sigma_r + P_e}{E} + \epsilon^{vp} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{u}{r} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + P_e) + \frac{1-\nu}{E} (\sigma_\theta + P_e) - \frac{\epsilon^{vp}}{2} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

A ces équations il faut ajouter celle de l'équilibre:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2(\sigma_\theta - \sigma_r)}{r} \quad (3)$$

En éliminant $\epsilon^v p$ entre (1) et (2) et en y reportant σ_θ tiré de (3) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 u - \frac{1-2\nu}{E} r^3 (\sigma_r + P_e) \right] = 0$$

Ce qui, intégré entre le rayon intérieur r_i et un rayon quelconque r , conduit à:

$$\frac{u}{r} = \frac{r_i^2 u_i}{r^3} + \frac{1-2\nu}{E} \left[(\sigma_r + P_e) - r_i^3 \frac{P_e - P_i}{r^3} \right] \quad (4)$$

En éliminant $\frac{u}{r}$ entre (4) et (2) on trouve:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{\epsilon^v p}{2} + \frac{1}{r^3} \left[r_i^2 u_i - \frac{1-2\nu}{E} r_i^3 (P_e - P_i) \right] \right] \quad (5)$$

On divise les deux membres de (5) par r et on intègre entre r_i et r_e . En notant $R = r_e / r_i$, on trouve:

$$\frac{u_i}{r_i} = \frac{u_i^e}{r_i} - \frac{3 R^3}{2(R^3 - 1)} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\epsilon^v p}{r} dr \quad (6)$$

où, par définition:

$$\frac{u_i^e}{r_i} = \left[(1-2\nu) - (1-\nu) \frac{3R^3}{2(R^3 - 1)} \right] \frac{P_e - P_i}{E} \quad (7)$$

Et finalement, en remplaçant dans (5), $\frac{u_i}{r_i}$ par (6), et en notant $s(r,t)$ le déviateur :

$$\boxed{s(r,t) \equiv \sigma_r - \sigma_\theta} \quad (8)$$

on trouve l'équation suivante:

$$s(r,t) = s^e(r) - \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{\epsilon^{\nu p}}{2} - \frac{r_i^3}{r^3} \frac{3R^3}{2(R^3-1)} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\epsilon^{\nu p}}{r} dr \right] \quad (9)$$

Dans cette équation $s^e(r)$ représente le déviateur élastique initial :

$$s^e(r) = \frac{r_i^3}{r^3} \frac{3R^3}{2(R^3-1)} (P_e - P_i) \quad (10)$$

2) Convergence d'un tube épais

Nous faisons les mêmes hypothèses que dans le cas précédent en y ajoutant celles des déformations planes et de l'incompressibilité élastique ($\nu = 1/2$). En dehors de ces hypothèses les équations des cas cylindrique et sphérique ne se ramènent pas à une forme unique et les deux cas doivent être traités séparément.

Nous allons écrire ici les équations en utilisant la variable ν , mais les formes proposées pour σ et $\epsilon^{\nu p}$ ne sont valables que si $\nu = 1/2$. D'une manière générale, dans la suite, chaque fois que le cas cylindrique est considéré, on supposera bien $\nu = 1/2$.

Les tenseurs de contraintes et de déformations sont les suivants:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & & \\ & \sigma_\theta & \\ & & \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \end{bmatrix} \quad \sigma_0 = \begin{bmatrix} -P_e & & \\ & -P_e & \\ & & -P_e \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & & \\ & \frac{u}{r} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon^{\nu p} = \begin{bmatrix} \epsilon^{\nu p} & & \\ & -\epsilon^{\nu p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Les relations de comportement sont les mêmes que dans le cas précédent:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{\nu p} \quad \epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \bar{\sigma}) \mathbf{1} \quad \bar{\sigma} = \sigma - \sigma_0$$

Soit:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_r + P_e) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + 2 P_e) + \epsilon^{\nu p} \\ \frac{u}{r} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_\theta + P_e) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + 2 P_e) - \epsilon^{\nu p} \end{cases}$$

L'équation d'équilibre s'écrit cette fois:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}$$

Avec une méthode identique au cas précédent on obtient successivement les équations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r u - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} r^2 (\sigma_r + P_e) \right] = 0$$

$$\frac{u}{r} = \frac{r_i}{r^2} u_i + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left[\sigma_r + P_e - r_i^2 \frac{P_e - P_i}{r^2} \right]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\epsilon^{\nu p} + \frac{1}{r^2} \left[r_i u_i - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} r_i^2 (P_e - P_i) \right] \right]$$

$$\frac{u_i}{r_i} = \frac{u_i^e}{r_i} - \frac{2 R^2}{R^2 - 1} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\epsilon^{\nu p}}{r} dr \quad (11)$$

$$\frac{u_i^e}{r_i} = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) - \frac{2 R^2}{R^2 - 1} (1-\nu) \right] (P_e - P_i) \quad (12)$$

$$s(r,t) = s^e(r) - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\epsilon^{\nu p} - \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{2 R^2}{R^2 - 1} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\epsilon^{\nu p}}{r} dr \right] \quad (13)$$

$$s^e(r) = \frac{r_i^2}{r^2} \frac{2 R^2}{R^2 - 1} (P_e - P_i) \quad (14)$$