3)Comportement du matériau

Le critère d'écoulement adopté est celui de Misès. Le matériau de L.M.S est défini par le potentiel viscoplastique :

$$\Omega(\sigma,\zeta) = \frac{m\ a^{\frac{1}{m}}\ \sigma_0}{(n/m)+1}\ \zeta^{m-1} \left[\sqrt{3J_2}\ /\sigma_0\right]^{\frac{n}{m}+1} \tag{15}$$

avec:

$$\dot{\zeta} = a^{\frac{1}{m}} \left[\sqrt{3J_2}\ /\sigma_0\right]^{n/m} \tag{16}$$

$\sqrt{3J_2}$ est la contrainte équivalente de Misès :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \qquad J_2 = \frac{1}{2}\, s_{ij}\ s_{ij} \qquad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\ \mathbf{1} \tag{17}$$

Il vérifie:

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\,\frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} \tag{18}$$

σ_0 est une contrainte positive arbitraire et fixe, et "a" une constante dépendant en général de la température, possédant la dimension d'une vitesse de déformation. n et m sont deux constantes positives: $1 \leq n$ et $0 < m \leq 1$. Ces constantes s'identifient pour le matériau par un essai de fluage uniaxial qui conduit à l'expression suivante:

$$\epsilon^{vp}(t) = a \left[\frac{\sigma}{\sigma_0}\right]^n t^m \tag{19}$$

Et le paramètre ζ est alors égal à $(\epsilon^{vp})^{1/m}$.

Le matériau de N.H. correspond au cas $m = 1$. Le paramètre d'écrouissage ζ disparaît dans ce cas et on trouve:

$$\Omega(\sigma) = \frac{a\ \sigma_0}{n+1} \left[\sqrt{3J_2}\ /\sigma_0\right]^{n+1} \tag{20}$$

Cette loi donne, pour un fluage uniaxial, une vitesse de déformation constante selon l'expression suivante:

$$\dot{\epsilon} = a \left[\frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n \tag{21}$$

Etant donné que le matériau N.H. est un cas particulier de celui de L.M.S. , on pourrait, éventuellement, n'étudier que les équations correspondant à ce dernier modèle et poser, à la fin, $m = 1$ dans les résultats pour trouver ceux du modèle N.H. .

Mais le matériau N.H. constitue un cas "limite" de celui de L.M.S. et possède des particularités physiques et mathématiques qui le distinguent bien du cas général.

Sur le plan physique, c'est un matériau sans écrouissage contrairement à celui de L.M.S. (avec $m \neq 1$).

Sur le plan mathématique, qui nous préoccupe plus ici, l'équation d'évolution des contraintes dans le cas de N.H., se découple, comme on le verra plus loin, de celle portant sur les déformations viscoplastiques. On trouve ainsi une équation plus simple portant uniquement sur le déviateur, et qui sera l'objet principal des chapitres suivants.

Pour ces raisons, le cas N.H. sera présenté dans la suite séparément du cas général.

4)Relation entre la vitesse de déformation et les contraintes

Nous allons relier la vitesse de la variable scalaire ϵ^{vp} qui apparait dans les équations du paragraphe 2) à $s(r,t) = \sigma_r - \sigma_\theta$.

4.1)Géométrie sphérique

Dans le cas de cette géométrie et de la symétrie sphérique on a:

$$s = \frac{2}{3} (\sigma_r - \sigma_\theta) \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1/2 & \\ & & -1/2 \end{bmatrix}$$

et:

$$3J_2 = (\sigma_r - \sigma_\theta)^2$$

En supposant que $h = \pm 1$ représente le signe de $(\sigma_r - \sigma_\theta)$, on trouve pour le matériau de L.M.S. :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} \quad => \quad \dot{\epsilon}^{vp} = m\, a^{\frac{1}{m}}\, h\, \zeta^{m-1} \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{n/m} \tag{22}$$

avec:

$$\dot{\zeta} = a^{\frac{1}{m}} \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{n/m} \tag{23}$$

On voit donc que $\dot{\epsilon}^{vp} = h \frac{d}{dt}(\zeta^m)$, et donc si en $t = 0$ on a $\epsilon^{vp} = \zeta = 0$ et si h reste constant, on peut écrire:

$$\boxed{\epsilon^{vp} = h\, \zeta^m} \tag{24}$$

Pour le matériau de N.H. on trouve:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} \quad => \quad \dot{\epsilon}^{vp} = a\, h \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{n} \tag{25}$$

4.2)Géométrie cylindrique

Dans le cas de cette géométrie et en déformations planes, et uniquement si $\nu = 1/2$, on trouve que le déviateur est proportionnel à $\sigma_r - \sigma_\theta$ et vaut:

$$s = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

soit:

$$3J_2 = \frac{3}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2$$

On trouve pour le matériau de L.M.S. :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} \quad => \dot{\epsilon}^{vp} = \left[\sqrt{3/2}\right]^{(\frac{n}{m}+1)} m\, a^{\frac{1}{m}}\, h\, \zeta^{m-1} \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{(n/m)} \tag{26}$$

avec:

$$\dot{\zeta} = \left[\sqrt{3/2}\right]^{n/m} a^{\frac{1}{m}} \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{(n/m)} \tag{27}$$

et pour celui de N.H. :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} \quad => \quad \dot{\epsilon}^{vp} = \left[\sqrt{3/2}\right]^{n+1} a\, h \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{h\sigma_0}\right]^{n} \tag{28}$$

5)Equations d'évolution dans le temps

A l'instant $t=0$, la pression interne varie brusquement de la valeur initiale P_e à la valeur P_i . A l'instant 0^+ les champs de contraintes et de déformations sont élastiques, et le déplacement à la paroi intérieure $u_i\,(0^+)$ et le déviateur $s(r,0^+)$ coïncident avec les valeurs élastiques u_i^e et $s^e\,(r)$ données en **1)** et **2)** :

Conditions initiales:

$$\underline{t=0}: \quad \left| \begin{array}{l} \epsilon^{vp} = 0 \quad , \quad \zeta = 0 \\ u_i\,(0) = u_i^e \\ s(r,0) = s^e\,(r) \end{array} \right. \tag{29}$$

Pour étudier l'évolution de ces quantités, il faut dériver les équations (9) ou (13) par rapport au temps et y remplacer $\dot{\epsilon}^{vp}$ par les formules données en **4)** . On trouvera des équations différentielles portant sur ζ ou s .

Pour faciliter l'étude de ces équations, nous ferons quelques changements de variables. Les nouvelles variables seront adimensionnelles.

5.1)Géométrie sphérique

5.1.1)Matériau L.M.S.

Nous choisissons:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_0 = s^e\,(r_i) = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{R^3}{R^3-1}\,(P_e - P_i) \\ \tau = \left[\dfrac{2\,(1-\nu)}{a}\,\dfrac{\sigma_0}{E} \left[\dfrac{\sigma_0}{hs_0} \right]^{(n-1)} \right]^{1/m} \end{array}} \tag{30}$$

$h = \pm 1$ représente le signe de s_0 . Nous noterons:

$$\left| \begin{array}{l} t^* = t/\tau \\ r^* = r/r_i \\ s^* = s(r,t)/s_0 \\ u^* = -\dfrac{E}{(1-\nu)s_0}\,\dfrac{u_i - u_i^e}{r_i} \\ \zeta^* = \dfrac{\zeta}{\zeta_0} \qquad \text{avec } \zeta_0 = \left[2(1-\nu)\,\dfrac{hs_0}{E} \right]^{1/m} \end{array} \right.$$

Nous admettons que le déviateur $(\sigma_r - \sigma_\theta)$ garde un signe constant dans le temps et donc dans l'espace, car à l'instant $t = 0$ il a le même signe partout. Cela revient à admettre que s^* est positif; mais ceci sera démontré, au moins pour le cas du modèle N.H. , dans les chapitres suivants.

Avec ces notations, les équations (6) et (9) deviennent:

$$s^* = \frac{1}{(r^*)^3} - (\zeta^*)^m + \frac{1}{(r^*)^3}\frac{3R^3}{R^3-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*} \tag{31}$$

et:

$$u^* = \frac{3R^3}{R^3-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*} \tag{32}$$

La loi de comportement devient:

$$\frac{d\zeta^*}{dt^*} = (s^*)^{\frac{n}{m}} \tag{33}$$

En remplaçant dans le second membre de (33) s^* par (31), on trouve l'équation suivante qui porte uniquement sur ζ^* :

$$\frac{d\zeta^*}{dt^*} = \left[\frac{1}{(r^*)^3} - (\zeta^*)^m + \frac{1}{(r^*)^3}\frac{3R^3}{R^3-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*}\right]^{(\frac{n}{m})}$$

avec:

$$\zeta^*(r^*, 0) = 0$$

On résoud cette équation et en reportant le résultat dans (32) et (33) on calcule u^* et s .

5.1.2)Matériau N.H.

On choisit le même s_0 et τ que dans le cas précédent. τ devient :

$$\boxed{\tau = \frac{2\,(1-\nu)}{a}\,\frac{\sigma_0}{E}\left[\frac{\sigma_0}{hs_0}\right]^{(n-1)}} \tag{34}$$

Les autres notations sont également identiques et on peut traiter le problème avec les mêmes équations que ci-dessus, en posant $m = 1$.

Mais on peut aussi écrire, contrairement au cas général, une équation intégro-différentielle portant uniquement sur s^* :

$$\frac{\partial s^*}{\partial t^*} = - (s^*)^n + \frac{1}{(r^*)^3} \frac{3R^3}{R^3-1} \int_1^R (s^*)^n \frac{dr^*}{r^*} \tag{35}$$

avec:

$$s^*(r^*,0) = \frac{1}{(r^*)^3} \tag{36}$$

et:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{3R^3}{R^3-1} \int_1^R (s^*)^n \frac{dr^*}{r^*} \tag{37}$$

avec:

$$u^*(0) = 0 \tag{38}$$

On résoudra (35) et reportera la solution dans (37) pour calculer u .

5.2)Géométrie cylindrique

Seules quelques notations changent par rapport au cas précédent:

5.2.1)Matériau L.M.S.

$$\boxed{\begin{aligned} s_0 &= s^e(r_i) = 2 \frac{R^2}{R^2-1} (P_e - P_i) \\ \tau &= \left[\frac{\sigma_0}{aE} \left[\sqrt{4/3} \frac{\sigma_0}{hs_0} \right]^{(n-1)} \right]^{1/m} \end{aligned}} \tag{39}$$

$$\left| \begin{aligned} t^* &= t/\tau \\ r^* &= r/r_i \\ s^* &= s(r,t)/s_0 \\ u_i{}^* &= - \frac{E}{(1-\nu^2)s_0} \frac{u_i - u_i^e}{r_i} = - \frac{4E}{3s_0} \frac{u_i - u_i^e}{r_i} \\ \zeta^* &= \zeta/\zeta_0 \qquad \text{avec } \zeta_0 = \left[\sqrt{3/2} \frac{hs_0}{E} \right]^{1/m} \end{aligned} \right.$$

$$s^* = \frac{1}{(r^*)^2} - (\zeta^*)^m + \frac{1}{(r^*)^2}\frac{2R^2}{R^2-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*} \tag{40}$$

$$u^* = \frac{2R^2}{R^2-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*} \tag{41}$$

$$\frac{d\zeta^*}{dt^*} = (s^*)^{\frac{n}{m}} \tag{42}$$

$$\frac{d\zeta^*}{dt^*} = \left[\frac{1}{(r^*)^2} - (\zeta^*)^m + \frac{1}{(r^*)^2}\frac{2R^2}{R^2-1}\int_1^R (\zeta^*)^m \frac{dr^*}{r^*}\right]^{\left(\frac{n}{m}\right)} \tag{43}$$

$$\zeta^*(r^*,0) = 0 \tag{44}$$

5.2.2)Matériau N.H.

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma_0}{aE}\left[\sqrt{4/3}\;\frac{\sigma_0}{hs_0}\right]^{(n-1)}} \tag{45}$$

$$\frac{\partial s^*}{\partial t^*} = -(s^*)^n + \frac{1}{(r^*)^2}\frac{2R^2}{R^2-1}\int_1^R (s^*)^n \frac{dr^*}{r^*} \tag{46}$$

$$s^*(r^*,0) = \frac{1}{(r^*)^2} \tag{47}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{2R^2}{R^2-1}\int_1^R (s^*)^n \frac{dr^*}{r^*} \tag{48}$$

$$u^*(0) = 0 \tag{49}$$