

Effets du second ordre

Table des matières

1.	Objectif.....	2
2.	Rappels théoriques du phénomène	2
2.1	Cas du poteau libre en tête avec chargement latéral	2
2.1.1	Méthode RDM	2
2.1.2	Méthode simplifiée à courbure sinusoïdale	4
2.1.3	Méthode basée sur la courbure	5
2.2	Cas des poteaux d'ossatures	6
3.	Principe de la méthode générale de vérification des effets P-Δ	8
3.1	Méthodologie	8
3.2	Loi moment-courbure pour les efforts extérieurs.....	8
3.3	Loi moment courbure de la section résistante.....	9
3.4	Point de fonctionnement.....	10
4.	dispositions réglementaires.....	10
4.1	Etablissement de la loi contrainte-déformation.....	10
4.2	Prise en compte des effets du fluage	11
4.3	Prise en compte des imperfections géométriques.....	12
4.4	Calcul de la longueur efficace des éléments isolés	12
5.	Illustration	14
5.1	Données.....	14
5.2	Détermination de la longueur de flambement l_0	14
5.3	Imperfections géométriques et calcul du moment du premier ordre	16
5.4	Lois contraintes-déformations.....	16
5.5	Loi moment courbure extérieure	16
5.6	Loi moment courbure intérieure	17
5.7	Point de fonctionnement.....	17
5.8	Pistes d'amélioration	18

1. OBJECTIF

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les effets du second ordre dans le dimensionnement des structures. Ces effets peuvent être très significatifs dans le cas des pièces élancées et chargées axialement : des défauts de forme, de réalisation, ou des chargements latéraux ont pour effet de créer un excentrement de la charge axiale, donc un moment de flexion qui doit être pris en compte.

Dans le cadre du module BAP1, les effets du second ont été abordés par deux méthodes (méthode de la rigidité nominale, méthode de la courbure nominale) qui sont itérative, assez approximatives et conservatives. Il est renvoyé vers ce module pour l'examen de ces méthodes. Dans ce chapitre est abordée la méthode basée sur la loi moment-courbure des sections. Les conditions de cette méthode, appelée « méthode générale », sont présentées dans l'EN 1992-1-1 au § 5.8.6.

2. RAPPELS THEORIQUES DU PHENOMENE

2.1 Cas du poteau libre en tête avec chargement latéral

2.1.1 Méthode RDM

Pour illustrer, considérons un poteau parfaitement vertical, encastré en pied, libre en tête et soumis en tête à :

- Un effort axial N de compression,
- Un effort horizontal H

Le moment en pied de poteau vaut :

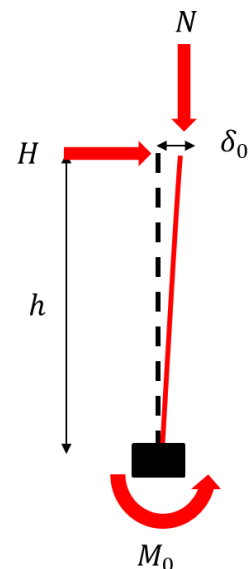
$$M_0 = H \times h$$

Où h est la hauteur du poteau.

Sous l'effet du chargement latéral, la tête du poteau subit une translation :

$$\delta_0 = \frac{Hh^3}{3EI}$$

Où E est le module d'Young du matériau constitutif du poteau et I est l'inertie de la section transversale mobilisée par le mouvement latéral.



Ce déplacement entraîne la force de compression en tête du poteau. L'effort normal se trouve ainsi excentré, par rapport à la base du poteau, ce qui crée un moment complémentaire qui vient s'ajouter au moment induit par l'effort transversal H ; à la base du poteau, ce moment vaut, au premier ordre :

$$\Delta M_1 = N \times \delta_0$$

On constate ainsi que le moment à la base du poteau est amplifié. Le moment M_0 est appelé moment du premier ordre, le moment total tenant compte des effets du second ordre est appelé moment du second ordre.

Pour déterminer la déformée et le moment du second ordre, établissons l'équation différentielle de la déformée. On note $v(x)$ la déformée latérale du poteau et δ_2 le déplacement latéral de la tête du poteau sous l'effet de $(H+N)$.

$$M(x) = H(h - x) + N(\delta_2 - v(x)) = EIv''(x)$$

Soit :

$$v''(x) + k^2v(x) = \frac{H}{EI}(h - x) + k^2\delta_2$$

Où $k^2 = N/EI$.

La solution de l'équation homogène est de la forme : $v_h(x) = A \cos kx + B \sin kx$

Une solution particulière est : $v_p(x) = \delta_2 + \frac{H}{N}(h - x)$

La solution générale est de la forme :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx + \delta_2 + \frac{H}{N}(h - x)$$

Les conditions aux limites en pied de poteau sont :

$$v(0) = 0 \Rightarrow A = -\left(\delta_2 + \frac{Hh}{N}\right)$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{H}{kN}$$

Il vient ainsi :

$$v(h) = \delta_2 - \left(\delta_2 + \frac{Hh}{N}\right) \cos kh + \frac{H}{kN} \sin kh + \delta_2$$

Soit :

$$\delta_2 = \frac{H}{N} \left(\frac{\tan kh}{kh} - 1 \right) h$$

Le moment complémentaire provoqué par N vaut donc :

$$M_N = N \delta_2 = Hh \left(\frac{\tan kh}{kh} - 1 \right)$$

Le moment total en pied de poteau, en tenant compte des effets de second ordre vaut alors :

$$M_2 = M_0 + M_N = Hh \times \frac{\tan kh}{kh}$$

On obtient une divergence du moment en pied lorsque $kh = \pi/2$, soit :

$$N = N_E = \frac{\pi^2 EI}{4h^2}$$

On peut réécrire le coefficient d'amplification du moment de premier ordre vaut :

$$\gamma = \frac{\tan kh}{kh} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{N/N_E}\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{N/N_E}}$$

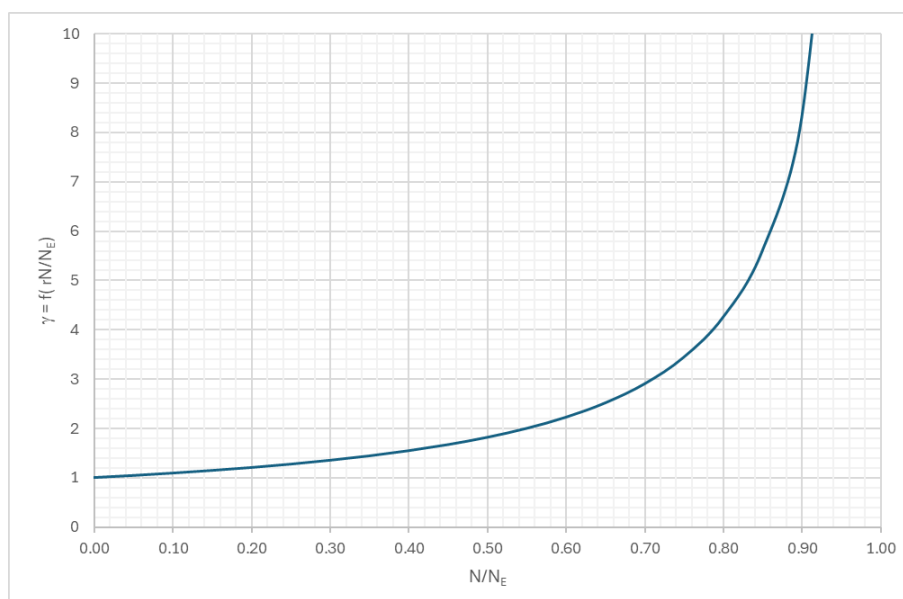


Figure 1 : évolution du coefficient d'amplification RDM

La figure montre bien la divergence du facteur d'amplification avant l'atteinte de N_E .

L'EN 1992-1-1 indique que les effets de second ordre doivent être pris en compte lorsqu'ils représentent plus de 10% du moment total. Ici, $\gamma = 1,1$ pour $N = 0,108N_E$.

2.1.2 Méthode simplifiée à courbure sinusoïdale

Cette méthode consiste à se donner a priori une déformée sinusoïdale qui respecte les conditions aux limites. Cette forme de solution est justifiée par les solutions de l'équation différentielle classique du flambement d'Euler.

Dans notre cas, l'expression est la suivante :

$$v_0(x) = \delta_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right)$$

Cette forme de solution vérifie bien : $v_0(0) = 0$; $v_0(h) = \delta_0$ et $v_0'(0) = 0$.

Notons $v_N(x)$ la déformée additionnelle provoquée par l'effort normal, avec la même forme :

$$v_N(x) = \delta_N \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right)$$

A la courbure $v_0''(x)$ s'ajoute la courbure $v_N''(x)$ provoquée par l'effort normal qui subit la translation $v_0(x) + v_N(x)$. Cette courbure additionnelle est reliée au moment provoqué par la charge N excentrée par la relation :

$$EIv_N''(x) = N[\delta_0 - v_0(x) + v_N - v_N(x)] = N\left[\delta_0 \cos \frac{\pi x}{2h} + \delta_N \cos \frac{2\pi x}{2h}\right]$$

Or

$$EIv_N''(x) = \delta_N \frac{\pi^2}{4h^2} \cos \frac{2\pi x}{h}$$

On déduit alors :

$$\delta_N N_E = N(\delta_0 + \delta_N)$$

Où :

$$N_E = \frac{EI\pi^2}{4h^2}$$

On déduit alors :

$$\delta_N = \frac{N}{N_E - N} \delta_0$$

La flèche totale a alors pour expression :

$$v_2(x) = \delta_0 \left(1 + \frac{N}{N_E - N}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right) = \frac{N_E}{N_E - N} v_0(x)$$

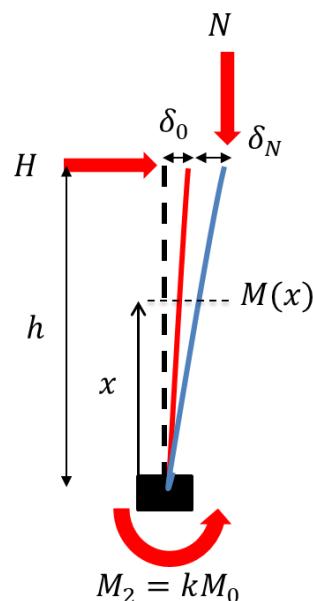


Figure 2 : Amplification de la déformée

Le moment additionnel provoqué par l'effort normal vaut :

$$M_N = \frac{N_E}{N_E - N} N \delta_0$$

Le moment à la base du poteau en tenant compte des effets du second ordre devient alors :

$$M_2 = Hh + \frac{N_E}{N_E - N} N \delta_0$$

Or $\delta_0 = Hh^3/3EI$ et $N_E = EI\pi^2/4h^2$

En factorisant par Hh , le moment total avec effets du second ordre vaut :

$$M_2 = Hh \left(1 + \frac{NN_E}{N_E - N} \frac{h^2}{3EI} \right) = Hh \left(1 + \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_E - N} \right) = Hh \left(1 + \frac{c}{\frac{N_E}{N} - 1} \right)$$

Soit :

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{c}{\frac{N_E}{N} - 1} \right)$$

Avec $c = \pi^2/12$.

On retrouve l'expression donnée par l'EN 1992-1-1 dans le cadre de la méthode de la rigidité nominale.

La figure suivante compare le coefficient d'amplification donnée par la méthode EC2 avec la méthode exacte. Les écarts sont très faibles pour cette configuration de chargement : la méthode EC2 est toujours conservatrice, avec un écart de 0,1% pour de faibles rapports N/N_E jusqu'à 1% pour de fortes valeurs.

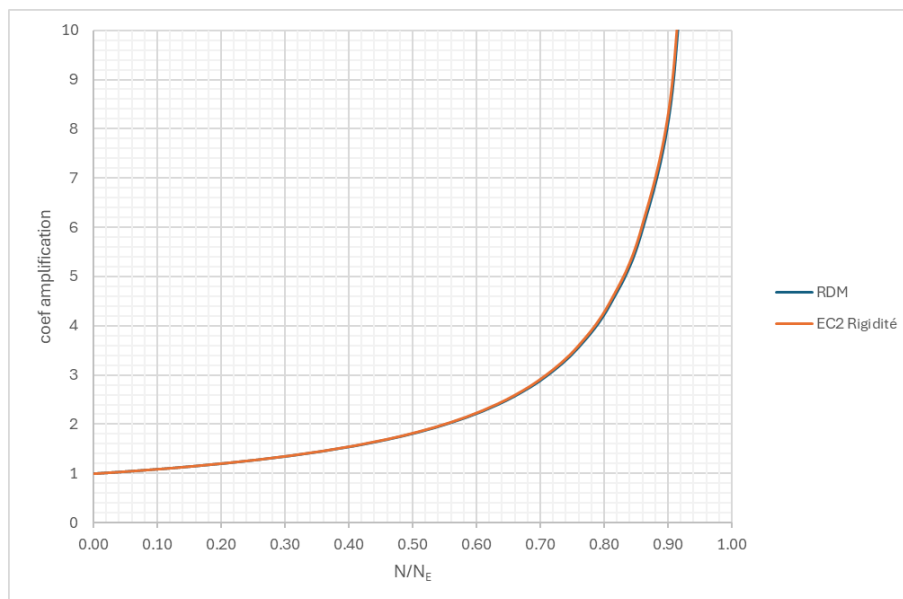


Figure 3 : comparaison méthode RDM et méthode EC2

2.1.3 Méthode basée sur la courbure

Une autre approche consiste à évaluer le moment total comme la somme du moment du premier ordre et du moment de second ordre, où le déplacement total de l'effort axial N est exprimé en fonction de la courbure dans la section critique, ici la courbure en pied de poteau :

$$M_2 = M_0 + N \delta_2$$

Dans cette méthode on se choisit une déformée $\psi(x)\delta_2$ cinématiquement admissible, en général la courbe du premier mode de flambement ($\psi(0) = 0$ et $\psi(h) = 1$). Le moment maximal, et donc la courbure maximale, se produisent ici en pied de poteau et :

$$EI v''_{max} = M_{max} = M_0 + N \delta_2$$

Or

$$v''_{max} = \psi''(0)\delta_2$$

Il vient alors :

$$EI v''_{max} = M_{max} = M_0 + N \frac{v''_{max}}{\psi''(0)}$$

Soit :

$$v''_{max} = \frac{M_0}{EI - \frac{N}{\psi''(0)}}$$

Le moment maximal en pied est donné par :

$$M_{max} = EI v''_{max} = \frac{M_0}{1 - \frac{N}{EI \psi''(0)}}$$

Dans le cas où l'on choisit une déformée, et donc une courbure, sinusoïdale, comme au § 2.1.2, il vient :

$$\delta_2 = \delta_0 + \delta_N = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}} \delta_0$$

Et

$$v_2(x) = \delta_2 \psi(x) = \delta_2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2h}\right)$$

Alors

$$v''_{max} = \psi''(0) \delta_2 = \frac{\pi^2}{4h^2} \delta_2$$

$$M_2 = EI v''_{max} = \frac{M_0}{1 - \frac{4h^2 N}{EI \pi^2}} = \frac{M_0}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

On retrouve bien le phénomène d'amplification du moment du premier ordre. L'EN 1992-1-1 reste sur la présentation :

$$M_2 = M_0 + N \delta_2$$

$$\text{Où } \delta_2 = \frac{4h^2}{\pi^2} v''_{max} = \frac{l_0^2}{\pi^2} v''_{max}$$

Le moment maximal en pied vaut donc :

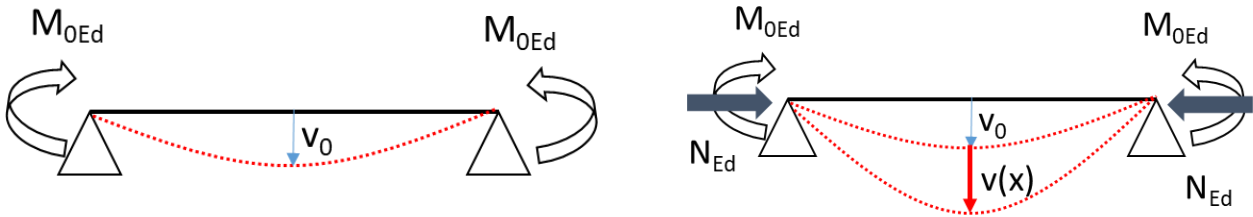
$$M_2 = M_0 + N v''_{max} \frac{l_0^2}{\pi^2}$$

La courbure maximale est alors pilotée par la capacité de la section en béton armé et elle est prise égale à $1/r_0 = \varepsilon_y/0.45d$

2.2 Cas des poteaux d'ossatures

On considère cette fois-ci un poteau articulé en pied et en tête pouvant être soumis à différentes formes de chargement latéral (moments aux extrémités, chargement réparti, force ponctuelle à mi-hauteur).

Pour commencer, on considère une poutre sur 2 appuis simples chargée par un moment M_{0Ed} à ses extrémités. La flèche maximale à mi-travée vaut $v_0 = -\frac{M_{0Ed} L^2}{8EI}$, obtenue par les équations de Bresse ou des méthodes énergétiques.



On applique maintenant un effort normal aux extrémités de la poutre. Cet effort amplifie la déformée initiale $v_0(x)$ et on note $v(x)$ la flèche additionnelle provoquée par N_{Ed} . Le moment additionnel provoquée par N_{Ed} vaut :

$$M_{add} = -N_{Ed}(v_0(x) + v(x)) = EIv''(x)$$

On suppose que les déformées $v_0(x)$ et $v(x)$ ont une forme sinusoïdale :

$$v_0(x) = v_0 \sin \pi x/L \text{ et } v(x) = v_{add} \sin \pi x/L$$

Il vient alors :

$$v_{add} \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2} - N_{Ed} \right) = N_{Ed} v_0$$

Soit :

$$v_{add} = \frac{N_{Ed}}{\frac{\pi^2 EI}{L^2} - N_{Ed}} v_0 = \frac{N_{Ed}}{N_B - N_{Ed}} v_0$$

Où $N_B = \pi^2 EI/L^2$ est la force critique d'Euler.

La flèche totale à mi-travée vaut donc :

$$v_2 = v_0 + v_{add} = v_0 \left(1 + \frac{N_{Ed}}{N_B - N_{Ed}} \right) = v_0 \frac{N_B}{N_B - N_{Ed}} = v_0 \frac{1}{1 - N_{Ed}/N_B} = \frac{M_{0Ed} L^2}{8EI} \frac{1}{1 - N_{Ed}/N_B}$$

Le moment maximal à mi-travée vaut :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = M_{0Ed} + N_{Ed} v_2 = M_{0Ed} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{N_{Ed}}{N_B - N_{Ed}} \right) = M_{0Ed} \left(1 + \frac{\beta}{N_B/N_{Ed} - 1} \right)$$

$$\text{Où } \beta = \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{c_0}$$

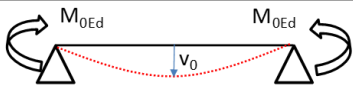
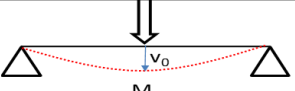
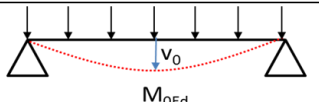
Pour d'autres types de chargement transversal de la poutre, le même raisonnement peut être appliqué. Si on note M_{0Ed} le moment maximal à mi-travée, on peut noter la flèche maximale sous la forme :

$$v_0 = \frac{M_{0Ed} L^2}{c_0 EI}$$

Le moment à mi-travée sous l'effet de M_{0Ed} et N_{Ed} vaut alors

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} v_2 = M_{0Ed} \left(1 + \frac{\beta}{N_B/N_{Ed} - 1} \right)$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de c_0 et β en fonction du type de chargement.

Chargement	c_0	$\beta = \frac{\pi^2}{c_0}$
	8	1,234
	12	0,822
	48/5=9,6	1,028

3. PRINCIPE DE LA METHODE GENERALE DE VERIFICATION DES EFFETS P-Δ

3.1 Méthodologie

La méthode générale repose sur un comportement non linéaire des matériaux. Il n'est pas question de procéder à une telle analyse sur l'ensemble de l'élément de structure, que seuls des logiciels aux éléments finis peuvent aborder : dans le cadre d'une analyse d'ingénieur et de calculs manuels, on se focalisera sur la section critique de l'élément de structure, à savoir la section soumise au moment (et à la courbure) maximal.

Dans cette section critique, on vérifiera qu'il existe un état de déformations des matériaux, donc une courbure χ de la section, capable de résister au moment sollicitant maximal, lui-même dépendant de χ , comme montré au § 2.1.3. La résistance est assurée si la condition suivante est respectée :

$$M_{Rd}(\chi) > M_{ed}(\chi)$$

Où :

$M_{rd}(\chi)$ est la résistance de la section ;

$M_{ed}(\chi)$ est le moment sollicitant tenant compte des effets du second ordre.

Le principe consiste alors à établir des lois « moments-courbure » d'une part pour les efforts extérieurs, d'autre part pour la section critique.

3.2 Loi moment-courbure pour les efforts extérieurs

Pour illustrer le problème, considérons un poteau biarticulé soumis à un effort normal N_{ed} et un chargement latéral uniformément réparti w . La section critique se situe à mi-hauteur. Le moment de second ordre, vaut :

$$M_2 = M_0 + N_{ed} \delta_2$$

Où : $M_0 = wh^2/8$

Si on suppose une déformée sinusoïdale du poteau, la déformée a pour expression :

$$v_2 = \delta_2 \sin \frac{\pi x}{h}$$

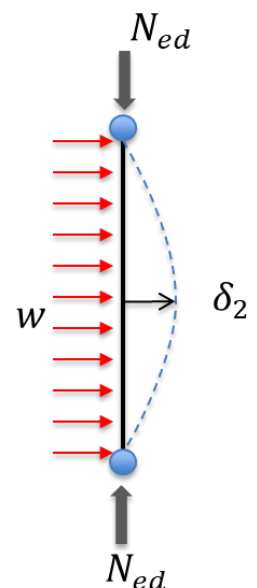
La courbure maximale, dans la section critique vaut :

$$\chi_{cr} = \frac{\pi^2}{h^2} \delta_2$$

Le moment extérieur maximal peut donc s'écrire :

$$M_2 = M_0 + N_{ed} \frac{h^2}{\pi^2} \chi_{cr} = A + B \chi_{cr}$$

On constate ainsi que le moment de second ordre dans la section critique est une fonction affine de la courbure : elle est représentée par une droite qui démarre au moment du premier ordre et a une pente dépendant de l'effort normal.



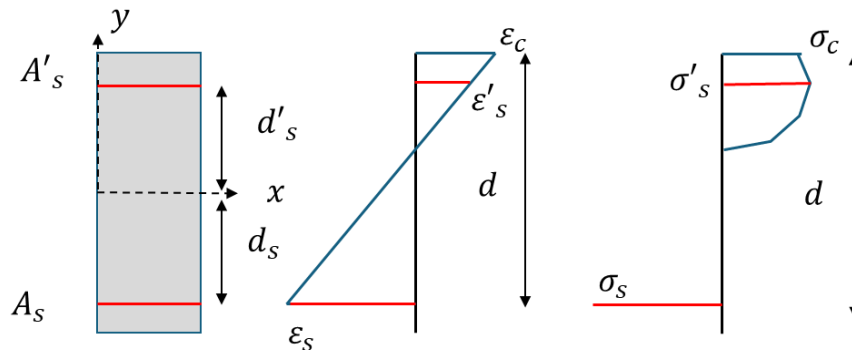
3.3 Loi moment courbure de la section résistante

Ce type de loi a déjà été établi dans le cadre du module BAP1.

On se donne une section, une quantité d'armatures tendue et éventuellement comprimée. Si l'on se fixe les déformations des fibres extrêmes ε_c pour le béton et ε_s pour les armatures tendues, on obtient alors l'effort normal résistant et le moment fléchissant résistant de la section, ainsi que la courbure associée :

$$\chi = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \quad (1)$$

Rem : les valeurs de raccourcissement pour le béton et d'allongement pour l'acier tendu sont prises ici toutes les deux positives car il n'y a pas d'ambiguïté.



Les efforts internes résultant de l'état de déformation interne de la section valent :

$$N_{int}(\chi) = \int_{-0,5h}^{0,5h} b\sigma_c(y)dy + A_s\sigma_s + A'_s\sigma'_s \quad (2)$$

$$M_{int}(\chi) = \int_{-0,5h}^{0,5h} b\sigma_c(y) \cdot y \cdot dy + A_s\sigma_s d_s + A'_s\sigma'_s d'_s$$

Où les contraintes dans les aciers et le béton sont données par leur loi de comportement contrainte-déformation : loi parabole rectangle, loi de Sargin, etc pour le béton et loi élasto-plastique pour l'acier, avec palier horizontal ou incliné.

Pour établir la loi moment-courbure de la section, on peut procéder ainsi :

- On se fixe une valeur de ε_c tel que $0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2}$,
- On cherche une valeur de ε_s telle que $N_{int}(\varepsilon_c, \varepsilon_s) = N_{ed}$,
- On calcule le moment M_{int} correspondant,
- On enregistre alors le point de fonctionnement : (χ, M_{int}) .

L'algorithme est illustré ci-dessous :

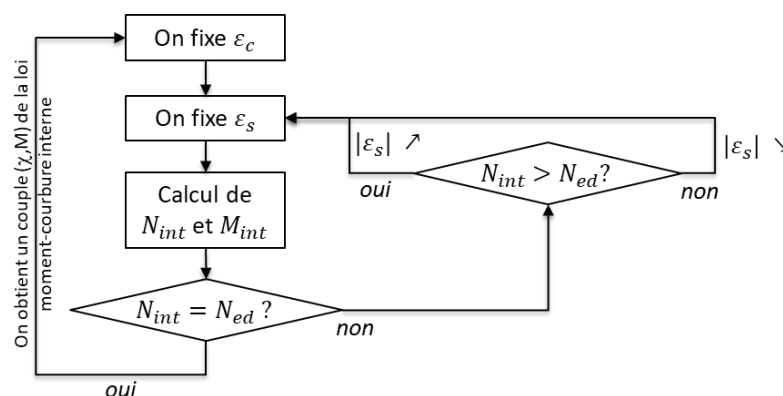


Figure 4 : algorithme d'établissement de la loi moment-courbure

L'itération peut commencer avec $\varepsilon_c = \varepsilon_s = N_{ed}/A_c E_c$, puis on augmente progressivement ε_c ; on devra également augmenter l'allongement des aciers ε_s pour assurer l'équivalence $N_{ed} = N_{int}$.

Le calcul des efforts internes de l'équation (2) s'obtient par discrétisation de la section : pour chaque « tranche » on connaît l'élongation dans le matériau (hypothèse de Navier), il est dès lors possible de calculer l'effort se développant dans la tranche et le moment élémentaire par rapport au centre de gravité de la section. On somme ensuite la contribution de chaque tranche (méthode des rectangles ou des trapèzes).

3.4 Point de fonctionnement

Lorsque les deux courbes $M_{rd}(\chi)$ et $M_{ed}(\chi)$ se croisent, on obtient alors un point de fonctionnement assurant la résistance de la section. On peut, en alternative, établir les courbes d'excentricité M/N_{ed} comme ci-dessous. Il convient en outre de s'assurer que le point de fonctionnement est stable : si la courbure augmente au-delà du point de fonctionnement, il convient de s'assurer que le moment résistant est supérieur au moment sollicitant. La figure ci-dessous montrent les deux cas.

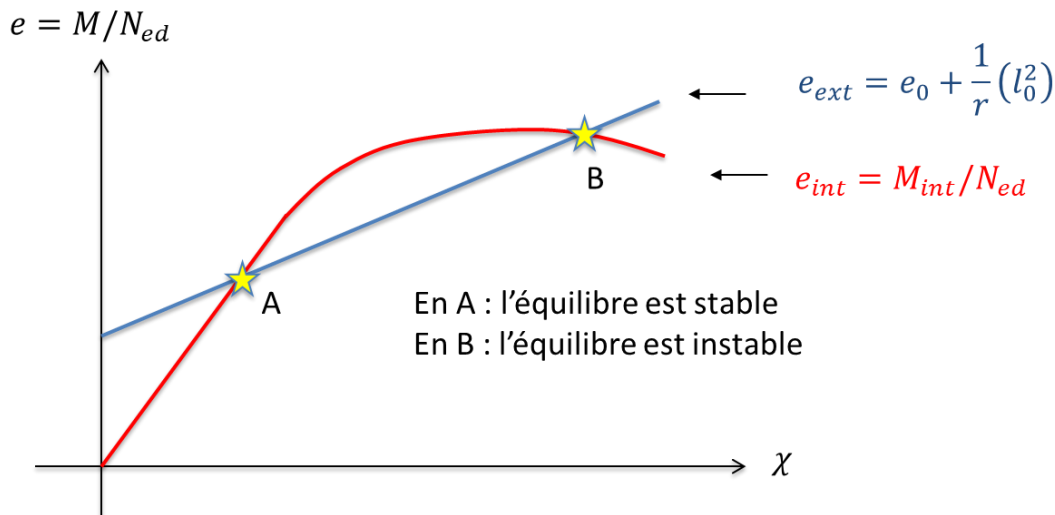


Figure 5 : Point de fonctionnement stable et instable

4. DISPOSITIONS RÉGLEMENTAIRES

Les dispositions réglementaires de l'EN 1992-1-1 sont données au § 5.8.6 et sont rappelées ci-après :

- (1) : la justification des effets de second ordre est menée à l'ELU ;
- (2) : les lois courbures déformations du béton et des armatures données au §3 de l'EN 1992-1-1 sont prises en compte en tenant compte des coefficients partiels sur les matériaux $\gamma_c, \gamma_{CE}, \gamma_s$;
- (3) : les effets du fluage doivent être pris en compte ;
- (4) : les imperfections de construction, représentables par une excentricité e_i , doivent être pris en compte et intégrés dans les moments de premier ordre ;
- (5) : l'effet favorable de la résistance à la traction du béton peut éventuellement être valorisé dans l'établissement de la loi moment-courbure $M_{Rd}(\chi)$

4.1 Etablissement de la loi contrainte-déformation

La loi de Sargin explicitée au § 3.1.5 de l'EN 1992-1-1 sert comme fondement pour l'établissement de la loi contrainte-déformation du béton. Celle-ci est complétée pour intégrer les coefficients de sécurité sur la résistance du béton. Ainsi, la loi utilisée s'exprime :

$$\frac{\sigma_c}{f_{cd}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta}$$

Où :

$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ où ε_{c1} est la déformation au pic de contrainte, égale à 0,2% pour des bétons courants.

$k = 1,05 |\varepsilon_{c1}| E_{cd} / f_{cd}$ avec $E_{cd} = E_{cm} / \gamma_{CE} = E_{cm} / 1,2$.

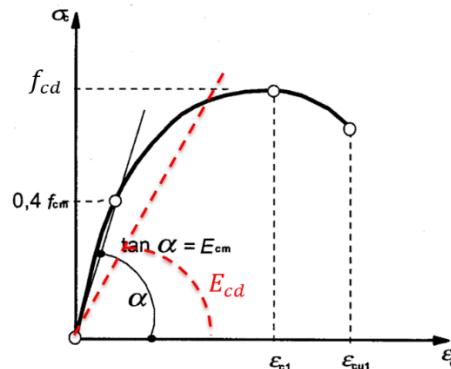


Figure 6 : Loi de Sargin modifiée pour la justification de la résistance de la section

4.2 Prise en compte des effets du fluage

Le fluage est le phénomène selon lequel les déformations dans le matériau augmentent sous contrainte constante. La prise en compte du fluage peut ainsi être intégrée dans la loi contrainte-déformation du béton décrit ci-dessus, en procédant à une affinité des déformations d'un facteur $1 + \varphi_{eff}$, φ_{eff} étant le coefficient de fluage effectif donné par :

$$\varphi_{eff} = \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \varphi(\infty, t_0)$$

Où :

$\varphi(\infty, t_0)$ est le coefficient de fluage du béton,

M_{0Eqp} est le moment fléchissant du premier ordre agissant dans la section critique à l'ELS quasi-permanent, en y intégrant les imperfections géométriques (voir infra),

M_{0Ed} est le moment du premier ordre agissant dans la section critique à l'ELU, en y intégrant les imperfections géométriques.

Ainsi, la loi contrainte-déformation peut s'exprimer sous la forme :

$$\sigma_c = f(\varepsilon_c)$$

Où :

f est la loi de Sargin $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$ exprimée plus haut

$\varepsilon_{c,eff} = (1 + \varphi_{eff}) \varepsilon_c$

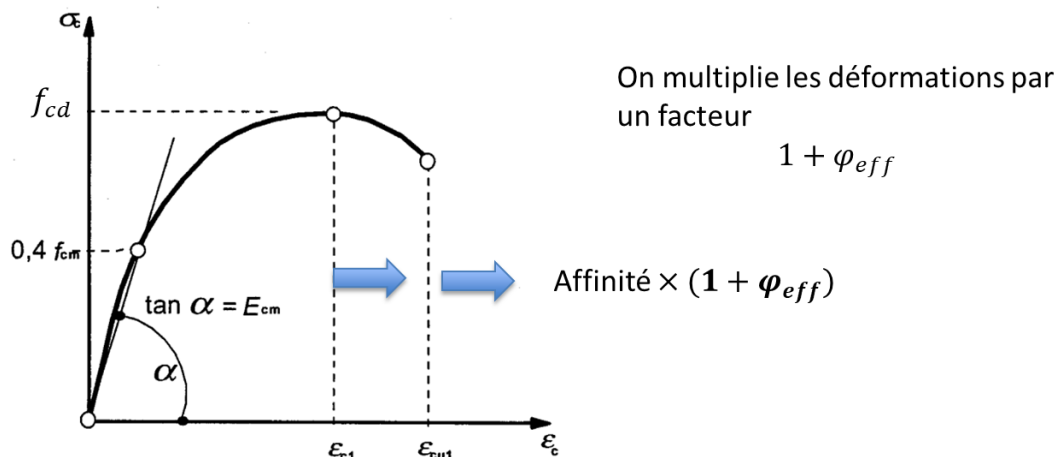


Figure 7 : Loi de Sargin modifiée tenant compte des effets du fluage

4.3 Prise en compte des imperfections géométriques

Les constructions sont entachées de défauts de forme et d'alignement qu'il convient de prendre en compte dans l'analyse des effets du second ordre. Les effets de ces défauts sont par principe intégrés aux moments du premier ordre agissant dans les sections.

Ces imperfections géométriques sont représentées par une inclinaison θ_i aboutissant à une d'excentricité de la charge axiale ou bien à une force horizontale située à mi-hauteur :

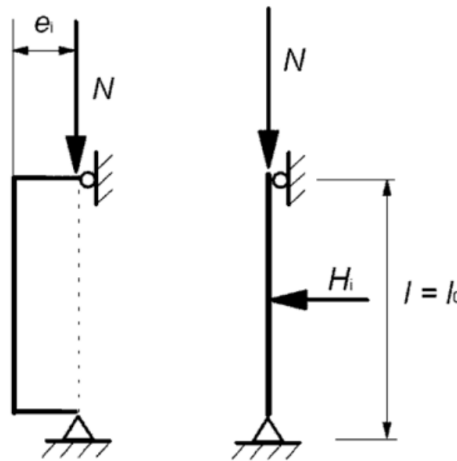


Figure 8 : prise en compte des imperfections géométriques

$$e_i = \theta_i \frac{l_0}{2} = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \frac{l_0}{2}$$

Où :

$\theta_0 = 1/200$ pour des structures de classe 1 au sens de l'EN 13670,

$\alpha_h = 2/\sqrt{l}$, l étant la hauteur du poteau, avec $2/3 \leq \alpha_h \leq 1$,

$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + 1/m)}$ où m est le nombre d'éléments verticaux. Si l'on s'intéresse à un poteau isolé ne participant au système de contreventement (présence d'un noyau par exemple) : $m=1$.

Par ailleurs, dans la mesure où l'on vérifie une section particulière, la section critique, une excentricité minimale de l'effort axial $e_0 = \max(l/30 ; 2 \text{ cm})$ est à considérer. On retiendra donc une excentricité effective de calcul :

$$e_{i,d} = \max(e_i ; e_0)$$

Dans l'établissement de la courbe moment-courbure de l'effort sollicitant, on tiendra compte de cette excentricité dans le moment de premier ordre. Elle est également incluse dans le calcul du coefficient de fluage effectif.

4.4 Calcul de la longueur efficace des éléments isolés

La longueur effective, nommée longueur de flambement en RDM, est définie dans la clause 5.8.3.2 de l'EN 1992-1-1 :

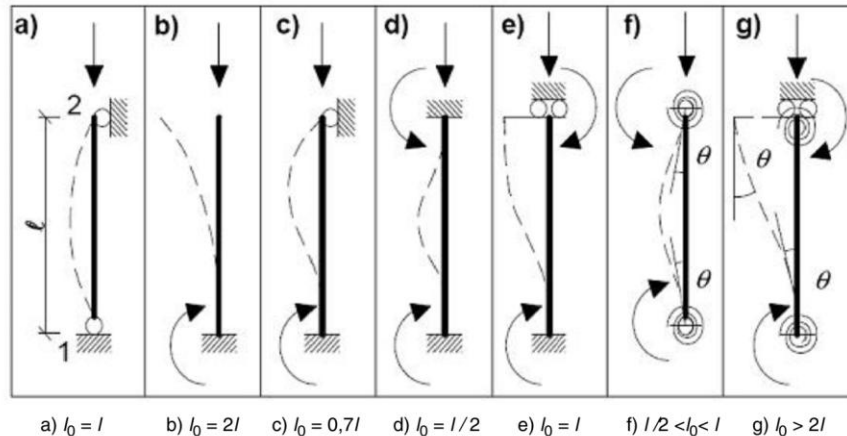


Figure 9 : exemples de modes de flambement et longueur efficace correspondantes dans le cas d'éléments isolés

De manière générale, pour des poteaux appartenant à des éléments de portiques contreventés (nœuds non déplaçables), la longueur efficace peut être évaluée par :

$$l_0 = 0,5l_0 \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$$

Où k_1, k_2 sont les souplesses relatives des encastremets partiel aux extrémités 1 (base du poteau) et 2 respectivement :

$$k = \frac{\theta EI}{M l}$$

Où :

θ est la rotation des éléments s'opposant à la rotation du nœud pour un moment M appliqué à ce nœud,

EI est la rigidité en flexion de l'élément comprimé, supposé non fissuré,

l est la hauteur libre de l'élément comprimé entre liaison (donc inférieure à la distance entre fibres moyennes des étages).

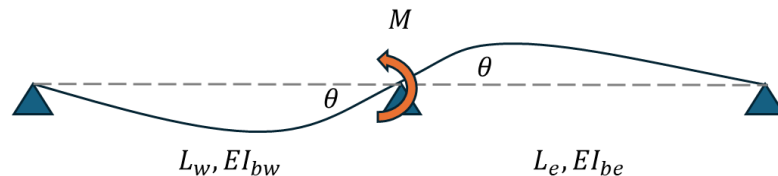
Le rapport θ/M des éléments s'opposant à la rotation, en générale les poutres, doit être considérée avec l'inertie fissurée des éléments.

Rappel de RDM :

Lorsqu'on applique un moment M au nœud de jonction du poteau avec les poutres adjacentes, il provoque une rotation θ . Chaque poutre réagit par un couple de signe opposé égal à :

$C_w = -3\theta EI_{bw}/L_w$ pour la poutre située à gauche (« west ») du poteau,

$C_e = -3\theta EI_{be}/L_e$ pour la poutre située à droite (« east ») du poteau.



L'équilibre du nœud impose $M + C_1 + C_2 = 0$, on en déduit :

$$M = \left(\frac{3EI_{bw}}{L_w} + \frac{3\theta EI_{be}}{L_e}\right) \theta$$

Ainsi,

$$\frac{\theta}{M} = \left(\frac{3EI_{bw}}{L_w} + \frac{3\theta EI_{be}}{L_e}\right)^{-1}$$

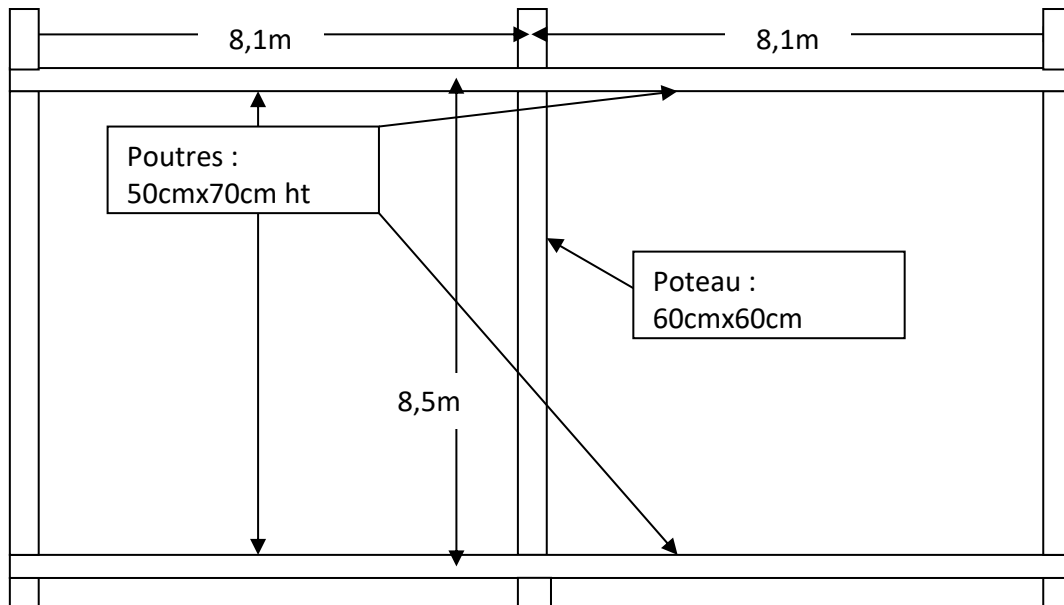
Remarque : si l'extrémité opposée de la poutre est encastree, la raideur $3EI/L$ et à remplacer par $4EI/L$.

Dans le cas où le poteau est connecté à un autre poteau dans la continuité d'une de ses extrémités 1 ou 2 et susceptible de contribuer à la rotation du nœud, il convient de tenir compte de leur présence en remplaçant la rigidité EI/l du poteau isolé par $[(EI/l)_a + (EI/l)_b]$, a et b représentant les poteaux situés en dessous et au-dessus du nœud considéré.

5. ILLUSTRATION

5.1 Données

Pour illustrer la méthode, il est proposé de reprendre l'exemple du poteau traité en TD du module BAP1 :



Section carré : $0,6 \times 0,6 \text{ m}^2$ - hauteur libre $l = 7,80 \text{ m}$. On considère que le poteau du niveau supérieur peut flamber, que celui-ci a une hauteur totale de $3,9 \text{ m}$ et une section carrée de 50 cm de côté. On considère qu'il n'y a pas de niveau sous celui étudié.

Béton : C50/60 – coefficient de fluage $\varphi = 2$

Chargement ELSqp : $N_{qp} = 2,14 \text{ MN}$; $M_{qp} = 0,67 \text{ MN.m}$ constant sur toute la hauteur

Chargement ELU : $N_{ed} = 3,2 \text{ MN}$; $M_{ed} = 1 \text{ MN.m}$ constant sur toute la hauteur

5.2 Détermination de la longueur de flambement l_0

Suivant l'équation 5.15 de l'Eurocode 2, la longueur de flambement, dans le cas d'une structure contreventée vaut :

$$l_0 = 0,5 \cdot L \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$$

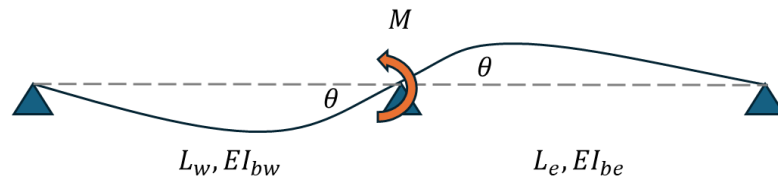
avec $k = \left(\frac{\theta}{M}\right)_{\text{poutres}} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{\text{poteaux}}$ (l'indice 1 désigne le pied du poteau et l'indice 2 désigne la tête).

Pour le calcul de k , on considère les éléments adjacents au poteau qui s'opposent à la rotation du poteau. En partie basse du poteau seules les poutres adjacentes s'y opposent ; en partie supérieure, le poteau adjacent situé au-dessus n'intervient pas ici d'après l'énoncé car on considère qu'il est susceptible de flamber en même temps que le poteau étudié.

Lorsqu'on applique un moment M au nœud de jonction du poteau avec les poutres adjacentes, il provoque une rotation θ . Chaque poutre réagit par un couple de signe opposé égal à :

$C_w = -3\theta EI_{bw}/L_w$ pour la poutre située à gauche (« west ») du poteau,

$C_e = -3\theta EI_{be}/L_e$ pour la poutre située à droite (« east ») du poteau.



L'équilibre du nœud impose $M + C_1 + C_2 = 0$, on en déduit :

$$M = \left(\frac{3EI_{bw}}{L_w} + \frac{3\theta EI_{be}}{L_e} \right) \theta$$

Ainsi,

$$\frac{\theta}{M} = \left(\frac{3EI_{bw}}{L_w} + \frac{3\theta EI_{be}}{L_e} \right)^{-1}$$

Remarque : si l'extrémité opposée de la poutre est encastree, la raideur $3EI/L$ et à remplacer par $4EI/L$.

Pour les poutres :

$$\left(\frac{\theta}{M} \right)_{poutres,1} = \left(\frac{\theta}{M} \right)_{poutres,2} = \left(\sum \alpha_i \frac{E_i \cdot I_i}{L_i} \right)^{-1} = \left[\left(\frac{3 \cdot E \cdot I}{L} \right)_{poutre\ gauche} + \left(\frac{3 \cdot E \cdot I}{L} \right)_{poutre\ droite} \right]^{-1}$$

Les poutres sont en béton C30/37 $\Rightarrow E = E_{cm} = 33\,000$ MPa

On tient compte de l'inertie fissurée des poutres pour ne pas surestimer la raideur en rotation du nœud. On peut utiliser l'approximation suivante $I = I_{fissurée} = I_{brute}/1,5 = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$.

$L = 8,1\text{m}$

$$\text{On en déduit : } \left(\frac{\theta}{M} \right)_{poutres,1} = \left(\frac{\theta}{M} \right)_{poutres,2} = 0,00431 \text{ rad}/(\text{MN} \cdot \text{m})$$

Pour les poteaux :

- En pied, on ne considère que la contribution du poteau du niveau considéré car on a fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de niveau inférieur. On obtient donc :

$$\left(\frac{EI}{L} \right)_{poteaux,1} = \left(\frac{EI}{L} \right)_{poteau\ N}$$

Avec :

$E = E_{cm} = 37\,000$ MPa (béton C50/60)

$I = I_{brute} = 0,0108\text{m}^4$

$L = 7,8\text{m}$

$$\text{On en déduit : } \left(\frac{EI}{L} \right)_{poteaux,1} = 51,23 \text{ MN} \cdot \text{m} \text{ et donc } k_1 = 0,221.$$

- En tête, on considère la contribution du poteau du niveau considéré et du poteau du niveau supérieur :

$$\left(\frac{EI}{L} \right)_{poteaux,2} = \left(\frac{EI}{L} \right)_{poteau\ N} + \left(\frac{EI}{L} \right)_{poteau\ N+1}$$

Le poteau du niveau supérieur peut flamber. Il est en C50/60, sa section est carrée de 50cm de côté, on a donc $I_{poteau\ sup} = 0,0052\text{m}^4$, sa hauteur libre est de 3,9m.

$$\text{On a donc } \left(\frac{EI}{L} \right)_{poteaux,2} = 51,23 + 49,33 = 100,56 \text{ MN} \cdot \text{m}.$$

On en déduit $k_2 = 0,433$

On en déduit $l_0 = 5,49\text{m}$, soit $l_0 = 0,704 \cdot L$

5.3 Imperfections géométriques et calcul du moment du premier ordre

Le moment de premier ordre est noté M_{0Ed} . Il vaut : $M_{0Ed} = M_{Ed} + N \cdot e_i$

où e_i est l'excentricité liée aux imperfections géométriques : $e_i = \max(\theta_i \cdot l_0 / 2 ; 0,02m)$.

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$$

θ_0 = valeur de base = $1/200$

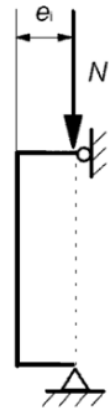
α_h facteur de réduction lié à la hauteur : $\alpha_h = 2/\sqrt{l}$ et $2/3 \leq \alpha_h \leq 1 \Rightarrow \alpha_h = 0,716$.

α_m facteur de réduction lié au nombre de barres. On considère ici $m = 1$ et donc :

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

On en déduit $\theta_i = 0,00358$ rad et donc :

$$e_i = \max(0,0098 ; 0,02) = 0,02 \text{ m}$$



On obtient alors le moment du premier ordre $M_{0Ed} = 1,064 \text{ MN} \cdot \text{m}$ à l'ELU et $M_{0qp} = 0,713 \text{ MN} \cdot \text{m}$ à l'ELSp.

5.4 Lois contraintes-déformations

Le coefficient de fluage effectif est donné par :

$$\varphi_{eff} = \varphi \times \frac{M_{0qp}}{M_{0Ed}} = \frac{0,713}{1,064} \times 2 = 1,34$$

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{1,2} = 31\,062 \text{ MPa}$$

La loi de Sargin modifiée est illustrée ci-dessous :

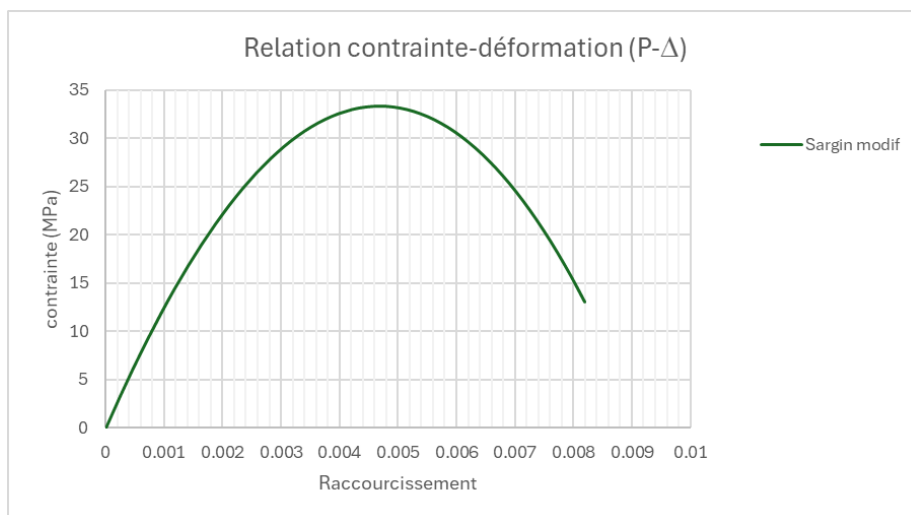


Figure 10 : loi de Sargin modifiée

En ce qui concerne les aciers, on choisit un diagramme élastoplastique à branche horizontale.

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \text{ si } \varepsilon_s < \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$\sigma_s = f_{yd} \text{ si } \varepsilon_s \geq \frac{f_{yd}}{E_s}$$

5.5 Loi moment courbure extérieure

On choisit une courbe de flambement de la forme $v(x) = \delta_2 \sin \frac{\pi x}{l}$. La courbure maximale est atteinte à mi-hauteur du poteau et

$$\chi_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2} \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \frac{7,8^2}{\pi^2} \chi_{cr} = 0.101 \chi_{cr} L^2$$

(*) : cela est en toute rigueur faux et on peut l'améliorer : voir §5.8

Le moment de second ordre a donc pour expression :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} \delta_2 = 1,064 + 3,2 \times \frac{7,8^2}{\pi^2} \chi_{cr} = 1,064 + 19.726 \chi_{cr}$$

5.6 Loi moment courbure intérieure

On reprendra à profit les résultats du TD de BAP1 consacré au flambement avec cet exemple. Une section de 4 HA 32 cm² par face et mise en place avec une position du centre de gravité à 6 cm du parement.

La figure ci-dessous illustre les lois moments-courbures intérieure et extérieure :

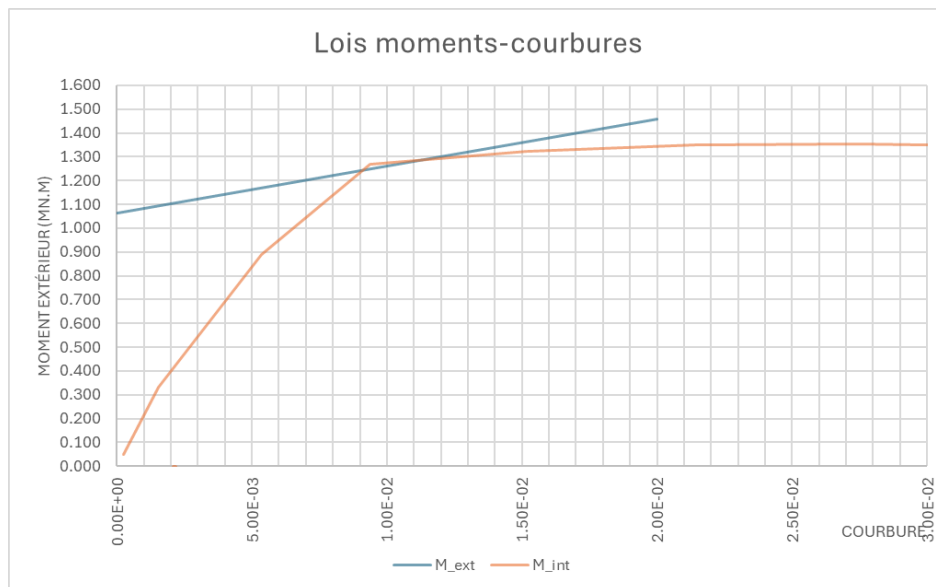


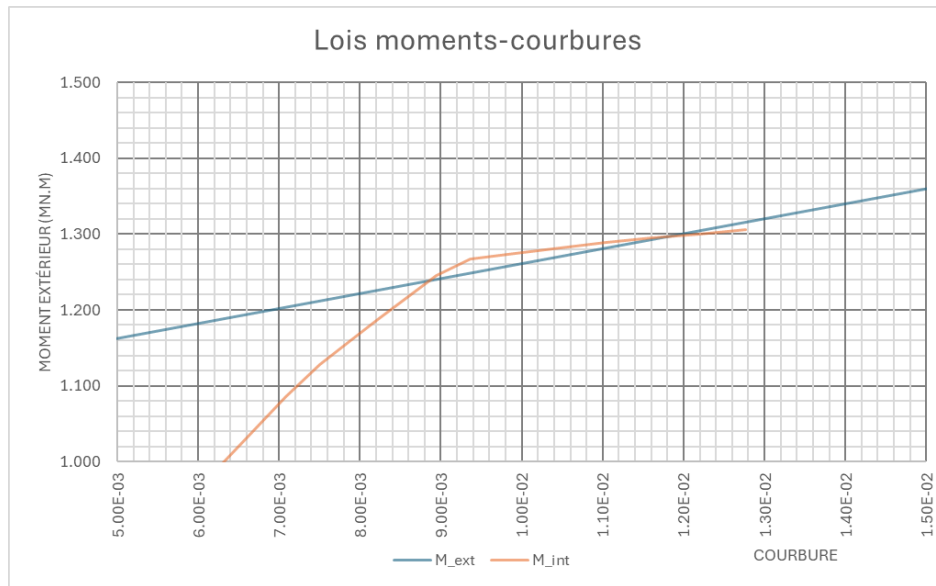
Figure 11 : lois moment courbure intérieure et extérieure

5.7 Point de fonctionnement

La Figure 11 montre qu'il existe deux intersections entre les courbes. La première intersection constitue le point de fonctionnement et il est stable : si la courbure augmente le moment résistant de la section critique est supérieur au moment extérieur.

Un zoom est présenté ci-dessous, le point de fonctionnement est rencontré pour :

$$\chi_{crit} \approx 0,0088 \text{ m}^{-1} ; M_{Ed} = 1,24 \text{ MN.m}$$



5.8 Pistes d'amélioration

5.8.1 Flambement d'Euler

La déformée choisie pour établir le lien entre la courbure maximale et la flèche maximale n'est pas représentative des véritables conditions aux limites, à savoir des encastrements partiels. La forme en sinus implique que la longueur de flambement, égale à la distance entre points d'inflexion de la déformée, soit égale à la longueur libre :

$$l_0 = L$$

Dans notre cas, le poteau est encasté élastiquement, sa longueur de flambement est plus faible, par ailleurs, la déformée n'est pas symétrique puisque les raideurs en pied et en tête ne sont pas identiques. Pour avoir une approche plus rigoureuse, il faut revenir aux équations différentielles qui régissent la déformation du poteau et l'on peut établir que la flèche d'un poteau élastiquement encasté soumis à un effort normal N est de la forme :

$$v(x) = A + Bx + C \sin kx + D \cos kx$$

Où $k^2 = N/EI$.

Les dérivées sont :

$$\begin{aligned} v'(x) &= B + kC \cos kx - kD \sin kx \\ v''(x) &= -k^2C \sin kx - k^2D \cos kx \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont :

Déplacements nuls aux extrémités :

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Rightarrow A + D = 0 \Rightarrow A = -D \\ v(L) = 0 &\Rightarrow BL + C \sin kL + D(\cos kL - 1) = 0 \end{aligned}$$

Rotation en pied :

$$k_1 \theta_1 = M_1 \Rightarrow k_1 v'(0) - EI v''(0) = 0$$

Soit :

$$k_1 B + k_1 k C + EI k^2 D = 0$$

Rem : le signe « + » devant le moment provient de la convention de signe : l'origine des x étant prise à la base, une rotation positive est associée à un couple de rappel orienté dans le sens horaire, donc le sens du moment positif lorsqu'il vient de la gauche.

Rotation en tête :

$$k_2 \theta_2 = -M_2 \Rightarrow k_2 v'(L) + EI v''(L) = 0$$

Soit :

$$k_2 B + k_2 k C \cos kL - k_2 k D \sin kL - EIk^2 C \sin kL - EIk^2 D \cos kL = 0$$

Rem : le signe « - » devant le moment provient de la convention de signe : l'origine des x étant prise à la base, une rotation positive est associée à un couple de rappel orienté dans le sens horaire, donc le sens du moment négatif lorsqu'il vient de la droite.

Le système peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} L & \sin kL & \cos kL - 1 \\ k_1 & k_1 k & EIk^2 \\ k_2 & k_2 k \cos kL - EIk^2 \sin kL & -k_2 k \sin kL - EIk^2 \cos kL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$[M(k)] \cdot \{q\} = \{0\}$$

Une déformée non nulle est obtenue si le déterminant de la matrice est nul, ce qui détermine la valeur de k et donc de l'effort critique de flambement.

$$N_{cr} = k^2 EI \text{ avec } \det(M(k)) = 0$$

On peut résoudre de manière numérique par Excel (valeur cible) ou code Python : la valeur de k est comprise entre π/L (poteau biarticulé) et $2\pi/L$ (poteau bi-encasté).

Après détermination de $k_{cr} = N_{cr}/EI$, il est possible de déterminer les coefficients B, C, D qui sont définis à une constante arbitraire près. Si l'on choisit $D = 1$, il vient, en notant $\lambda = k_{cr}L$ et $r_1 = EI/k_1L$:

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -k_{cr}C - N_{cr}/k_1 \\ C &= \frac{r_1 \lambda^2 + 1 - \cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda} \end{aligned}$$

Il est alors possible de tracer la déformée ainsi que la courbure. Il est loisible de normer la déformée sur la flèche maximale :

$$v_{norm}(x) = \|v(x)/v_{max}\|$$

Où $v_{max} = \max(|v(x)|)$

La courbure maximale normalisée est obtenue par :

$$\chi_{crit} = v''_{max}/v_{max}$$

La flèche maximale et la courbure maximale sont reliées par la relation :

$$\delta_2 = \alpha \chi_{crit} L^2$$

Avec $\alpha \in [0,05 - 0,1]$.

La longueur de flambement du poteau est donnée par :

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} = \frac{\pi}{k_{cr}}$$

Le tableau ci-dessous illustre le calcul sur Excel mené avec une valeur cible, ainsi que les résultats.

Calcul de la longueur de flambement et Déformée - Euler				
l	7.8	m	Ncr	97.7 MN
E	37000	MPa	l ₀	6.35 m
I	0.0108	m ⁴	soit	0.815 x L
k ₁	51.23	MN.m/rad	v'' crit	0.1817 m ⁻¹
k ₂	100.56	MN.m/rad	α	0.0905 d = α * v'' * L ²
			α'	0.1363 d = α' * v'' * L ₀ ²
EI	399.6 MN.m ²			
r ₁ = k ₁ .L/EI	1.00			
r ₂ = k ₂ .L/EI	1.96			
			Domaine de définition de k	
k = (N/EI) ^{0.5}	0.494477905		articulé	biencasté
EI*k ²	97.70555606	MN	0.4028	0.8055
kL	3.856927659			
sin(kL)	-0.65587034			
cos(kL)	-0.75487356			
Système linéaire				
	7.80	-0.66	-1.75	
	51.23	25.33	97.71	
	100.56	26.55	106.37	
Déter	0.001630826	Valeur cible = 0 avec k comme variable		

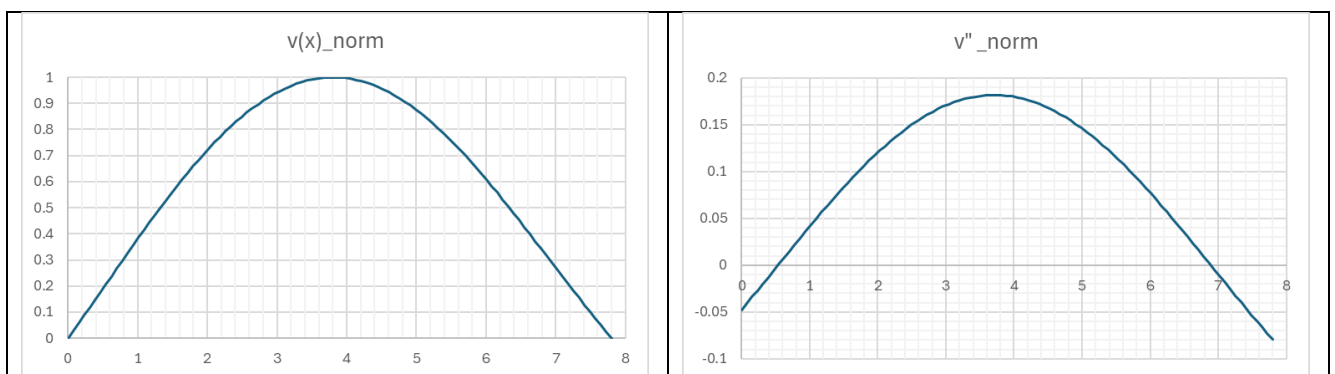
 Tableau 1 : résolution de N_{cr}, l₀ par Euler


Figure 12 : déformée et courbure du poteau

La longueur de flambement est égale à 0.815L, ce qui est légèrement supérieur à la longueur donnée par l'EN 1992-1-1. On retrouve bien visuellement la longueur de flambement, égale à la distance entre les deux points de courbure nulle.

La déformée maximale et la courbure maximale sont reliées par :

$$\delta_2 = \alpha \chi_{crit} L^2 = \alpha' \chi_{crit} l_0^2$$

Ici, pour $\delta_2 = 1$, $\alpha = 0.0905L^2$; $\alpha' = 0,136$.

Dans le cadre d'une déformée sinusoïdale, nous avons établi au § 5.5 :

$$\chi_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2} \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \frac{7,8^2}{\pi^2} \chi_{cr}$$

Soit $\alpha = 1/\pi^2 \approx 0,101$. L'approche était donc légèrement conservative.

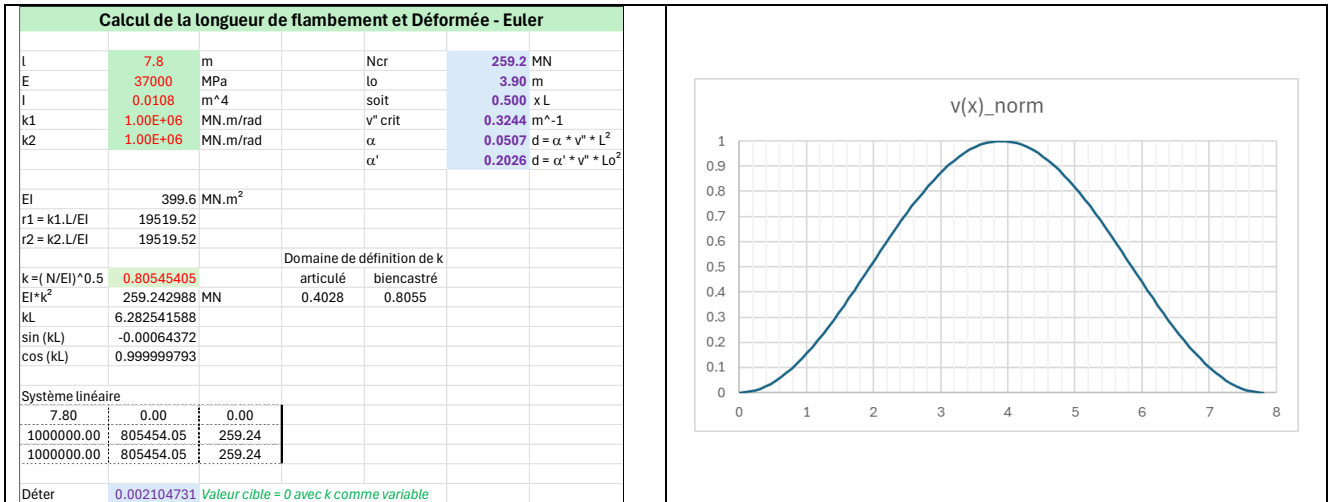
Il est également parfois rencontré la relation

$$\chi_{cr} = \frac{\pi^2}{l_0^2} \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \frac{l_0^2}{\pi^2} \chi_{cr}$$

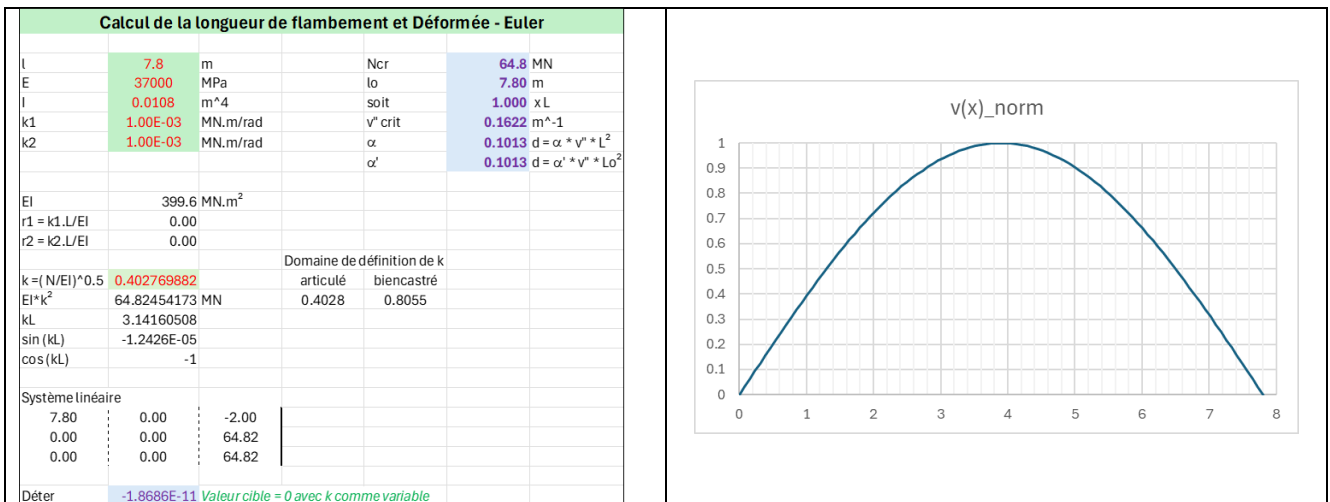
Même lorsque les conditions aux limites ne permettent pas de considérer la poutre comme bi-articulée. Cette licence peut être questionnée.

Les tableaux et figures suivantes donnent les résultats pour un poteau articulé et pour un poteau bi-encasté, ce qui permet de déterminer le domaine de variation de α :

- Poteau bi-encasté



- Poteau biarticulé



5.8.2 Méthode alternative : méthode de Ritz

Cette méthode devient lourde à implémenter manuellement. Aussi en première approche on peut définir une déformée du type (méthode de Ritz) :

$$v(x) = A\phi_1(x) + B\phi_2(x) + C\phi_3(x)$$

Où :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x^4 - L^2x^2 \\ \phi_2 &= x^3 - Lx^2 \\ \phi_3(x) &= x - \frac{x^2}{L} \end{aligned}$$

Ces fonctions respectent les conditions aux limites $v(0) = V(L) = 0$

Cette forme générale permet :

- D'avoir des déplacements nuls aux extrémités
- Des rotations non nulles et distinctes aux extrémités

- Des points d'inflexion qui ne sont pas situés aux extrémités, mais dans la hauteur du poteau.

Où k_{θ_1} et k_{θ_2} sont les raideurs en rotation de nœuds.

Il existe ainsi 3 coefficients A, B, C à déterminer selon les méthodes énergétiques (méthode variationnelle, de Ritz).

L'énergie potentielle du poteau a pour expression :

$$\Pi(A, B, C) = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^L N v'^2(x) dx + \frac{1}{2} k_{\theta_1} v'^2(0) + \frac{1}{2} k_{\theta_2} v'^2(L)$$

Les coefficients A, B, C sont déterminés par la minimisation de l'énergie potentielle aboutissant à un système de 3 équations à 3 inconnues

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C} = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_1'(x) &= 4x^3 - 2L^2x; & \phi_2'(x) &= 3x^2 - 2Lx; & \phi_3'(x) &= 1 - \frac{2x}{L} \\ \phi_1''(x) &= 12x^2 - 2L^2; & \phi_2''(x) &= 6x - 2L; & \phi_3''(x) &= -\frac{2}{L} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle la résolution du système s'écrit :

$$EI \begin{bmatrix} \frac{84}{5}L^5 & 8L^4 & -4L^2 \\ 8L^4 & 4L^3 & -2L \\ -4L^2 & -2L & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} - N \begin{bmatrix} \frac{44}{105}L^7 & \frac{7}{30}L^6 & -\frac{4}{15}L^4 \\ \frac{7}{30}L^6 & \frac{2}{15}L^5 & -\frac{1}{6}L^3 \\ -\frac{4}{15}L^4 & -\frac{1}{6}L^3 & \frac{1}{3}L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} + k_{\theta_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} + k_{\theta_2} \begin{bmatrix} 4L^6 & 2L^5 & -2L^3 \\ 2L^5 & L^4 & -L^2 \\ -2L^3 & -L^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme générale :

$$[K_f - NK_g + K_\theta]\{q\} = \{0\}$$

Où :

$$K_f = EI \begin{bmatrix} \frac{64}{5}L^5 & 8L^4 & -\frac{8}{3}L^3 \\ 8L^4 & \frac{4}{3}L^3 & -2L^2 \\ -\frac{8}{3}L^3 & -2L^2 & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \text{ est la matrice de flexion, les termes de la matrice sont donnés par}$$

$$K_{f,ij} = \int_0^L \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx$$

$$K_g = \begin{bmatrix} \frac{8}{63}L^7 & \frac{2}{21}L^6 & -\frac{2}{15}L^5 \\ \frac{2}{21}L^6 & \frac{2}{15}L^5 & -\frac{1}{6}L^4 \\ -\frac{2}{15}L^5 & -\frac{1}{6}L^4 & \frac{1}{3}L^3 \end{bmatrix} \text{ est la matrice géométrique, les termes de la matrice sont donnés par :}$$

$$K_{g,ij} = \int_0^L \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx$$

K_θ est la matrice des raideurs en rotation des extrémités, les termes sont donnés par :

$$K_{\theta,ij} = k_{\theta_1} \phi_i'(0) \phi_j'(0) + k_{\theta_2} \phi_i'(L) \phi_j'(L)$$

$\{q\} = \{A, B, C\}^T$ est le vecteur inconnu.

Une solution triviale $\{q\} = \{0\}$ correspond à une poutre non déformée, qui ne flambe pas : ce n'est pas le mode recherché. Une déformée non nulle existe si le déterminant du système est nul. La nullité du déterminant permet de déterminer la valeur de l'effort normal critique N_{cr} .

La recherche de la solution est une recherche aux valeurs propres et vecteurs propres, qui se résout par des méthodes numériques (Python, Excel, etc).

Un calcul de la première valeur propre de la matrice $[K_f - NK_g + K_\theta]$ obtenue par valeur cible donne $N_{cr} = 97,94 MN$, correspondant à une longueur de flambement $l_0 = 0,814L$, ce qui est très proche du résultat obtenu par la méthode d'Euler. Pour cette valeur, la matrice $[K_f - NK_g + K_\theta]$ a pour expression :

2.123E+08	1.249E+07	-9.602E+04
1.249E+07	7.537E+05	-4.606E+03
-9.602E+04	-4.606E+03	1.021E+02

Le 1^{er} mode de flambement est donné par le vecteur propre associé à la valeur $N_{cr} = 97,94 MN$, il vérifie :

$$[K_f + K_\theta] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = N_{crit} [K_g] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$K_f = \begin{bmatrix} 1.938E+08 & 1.183E+07 & -9.725E+04 \\ 1.183E+07 & 7.585E+05 & -6.234E+03 \\ -9.725E+04 & -6.234E+03 & 2.049E+02 \end{bmatrix}$$

$$K_\theta = \begin{bmatrix} 9.058E+07 & 5.807E+06 & -9.544E+04 \\ 5.807E+06 & 3.722E+05 & -6.118E+03 \\ -9.544E+04 & -6.118E+03 & 1.518E+02 \end{bmatrix}$$

$$N \times K_g = \begin{bmatrix} 7.209E+07 & 5.146E+06 & -9.667E+04 \\ 5.146E+06 & 3.770E+05 & -7.746E+03 \\ -9.667E+04 & -7.746E+03 & 2.546E+02 \end{bmatrix}$$

On peut choisir arbitrairement un terme à 1, les autres s'en déduisent par 2 des 3 équations.

Si l'on choisit $A = 1$, le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} K_{22} - K_{g,22} & K_{23} - K_{g,23} \\ K_{32} - K_{g,32} & K_{33} - K_{g,33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{g,21} - K_{21} \\ K_{g,31} - K_{31} \end{Bmatrix}$$

Où $K_{ij} = K_{f,ij} + K_{\theta,ij}$

On obtient alors :

$$A = 1 ; B = -14.95 ; C = -266.12$$

La figure suivante illustre la déformée lors du premier mode de flambement, en normant la déformée maximale à $\delta_2 = v_{max} = 1$. Les rotations valent $v'(0) = 0.374 rad$ et $v'(L) = -0,318 rad$.

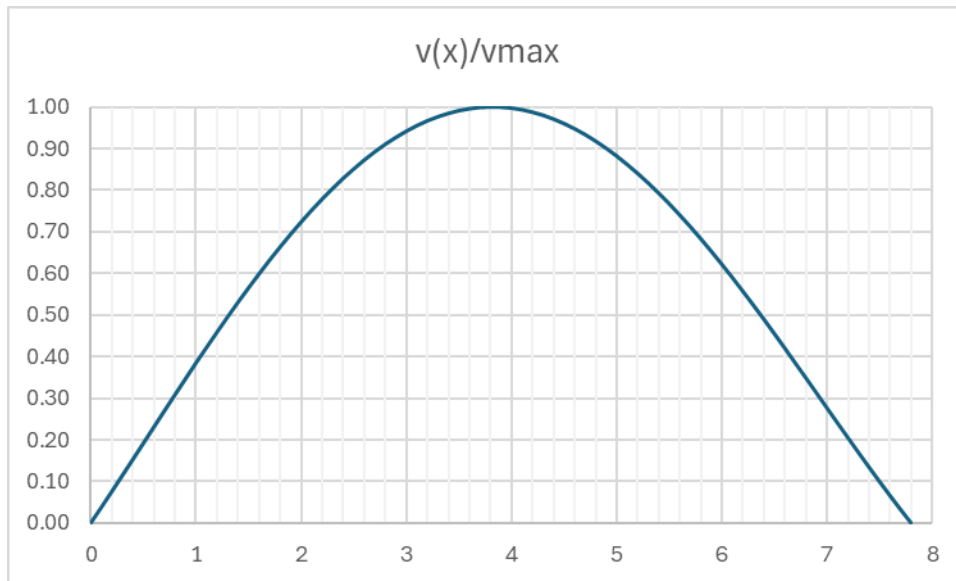


Figure 13 : déformée normalisée du premier mode de flambement

Cette déformée montre bien que la raideur au sommet ($x=7,8m$) est plus importante qu'à la base, puisque la pente de la déformée y est plus faible. On notera également que la déformée maximale a lieu dans la moitié inférieure du poteau, ce qui s'explique encore par le fait que la raideur y est plus faible en bas. Le faible contraste entre les raideurs rend néanmoins la lecture moins probante que les résultats numériques.

La figure suivante donne l'allure de la courbure, obtenue par dérivation :

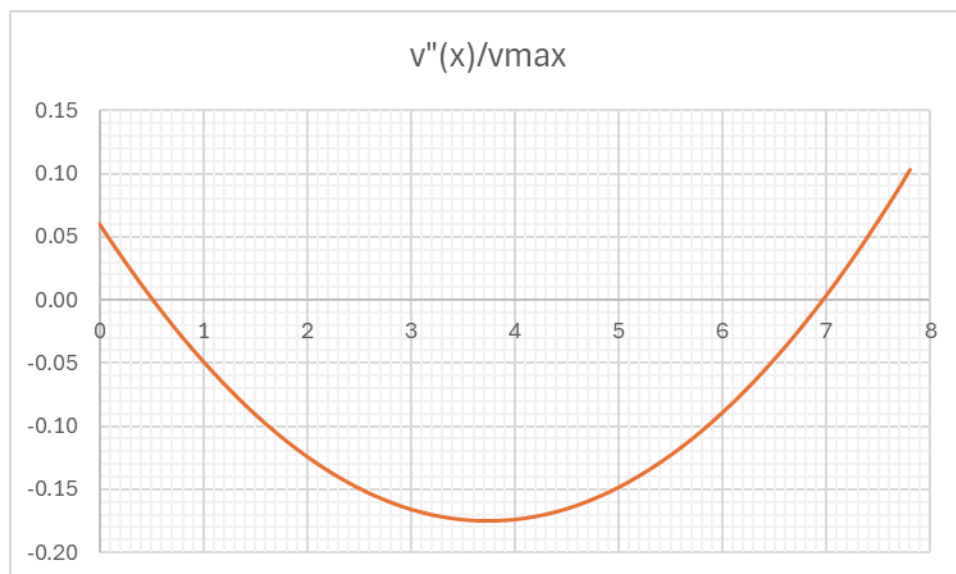


Figure 14 : allure de la courbure.

Elle permet de corroborer la longueur de flambement, égale à la distance entre les 2 points de courbure nulle, soit environ 6,5m.

Les figures suivantes donnent l'allure de la déformée et de la courbure dans le cas d'une poutre bi-encastée :

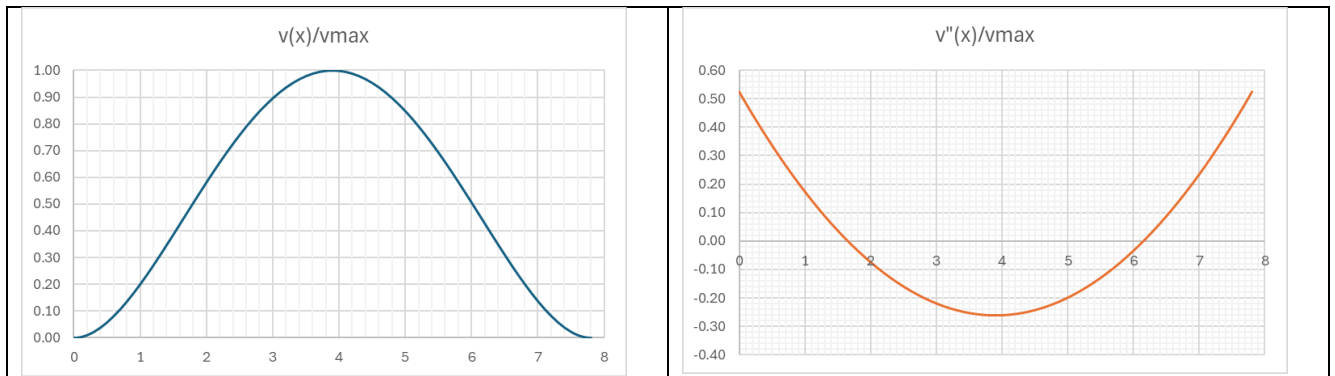


Figure 15 : Déformée et courbures d'une poutre bi-encastree par la méthode de Ritz

La méthode donne les résultats suivants :

$$N_{crit} = 275,2 \text{ MN} ; l_0 = 0,49L ; \alpha = 0.031$$

On constate qu'ici les courbures critiques se situent aux extrémités et non au milieu de la poutre.

Les figures suivantes donnent l'allure de la déformée et de la courbure dans le cas d'une poutre encastree en pied et articulée en tête :

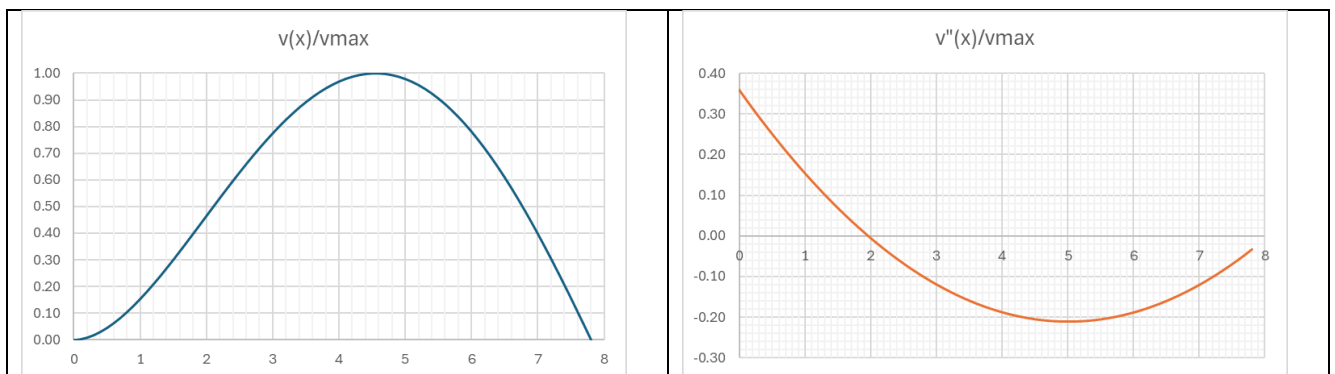


Figure 16 : Déformée et courbures d'une poutre bi-encastree par la méthode de Ritz

La méthode donne les résultats suivants :

$$N_{crit} = 135,8 \text{ MN} ; l_0 = 0,69L ; \alpha = 0.046$$

Les figures suivantes donnent l'allure de la déformée et de la courbure dans le cas d'une poutre articulée en pied et en tête :

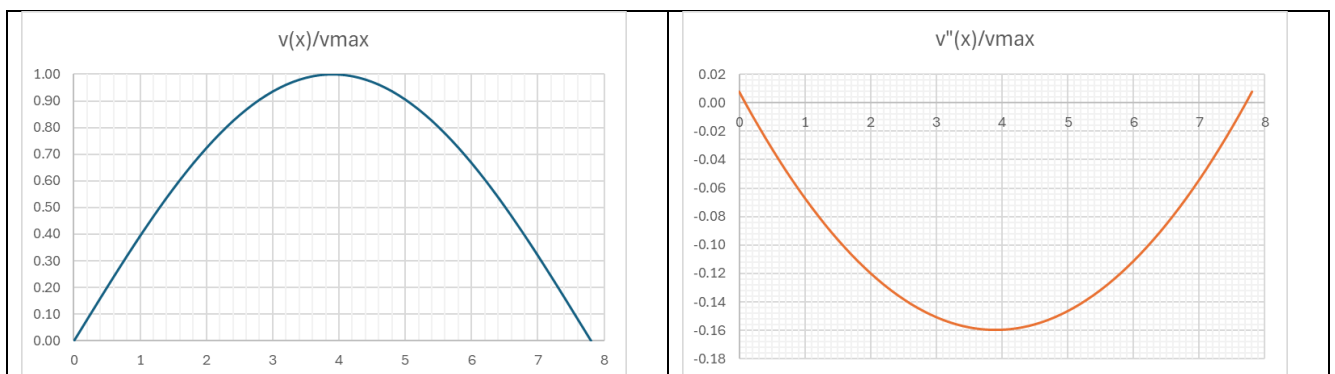


Figure 17 : Déformée et courbures d'une poutre bi-encastree par la méthode de Ritz

La méthode donne les résultats suivants :

$$N_{crit} = 64,86 \text{ MN} ; l_0 = L ; \alpha = 0.103$$

On retrouve une bonne concordance de la méthode de Ritz avec les cas classiques déjà établis, ce qui permet de traiter une grande variété de configurations.