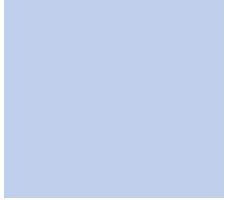




## Séance 4

- Rappel des conventions
- Coques sous efforts de membranes : méthode de Wood Armer et méthode EC2
- Coques sous moments seuls : méthode de Wood
- Coques sous efforts quelconques : méthode de Capra-Maury
- Coques sous efforts quelconques : méthode sandwich



# Objectifs et conventions

01.

## Conventions

On reprend les conventions usuelles des résultats donnés par les éléments finis :

Efforts de membrane :

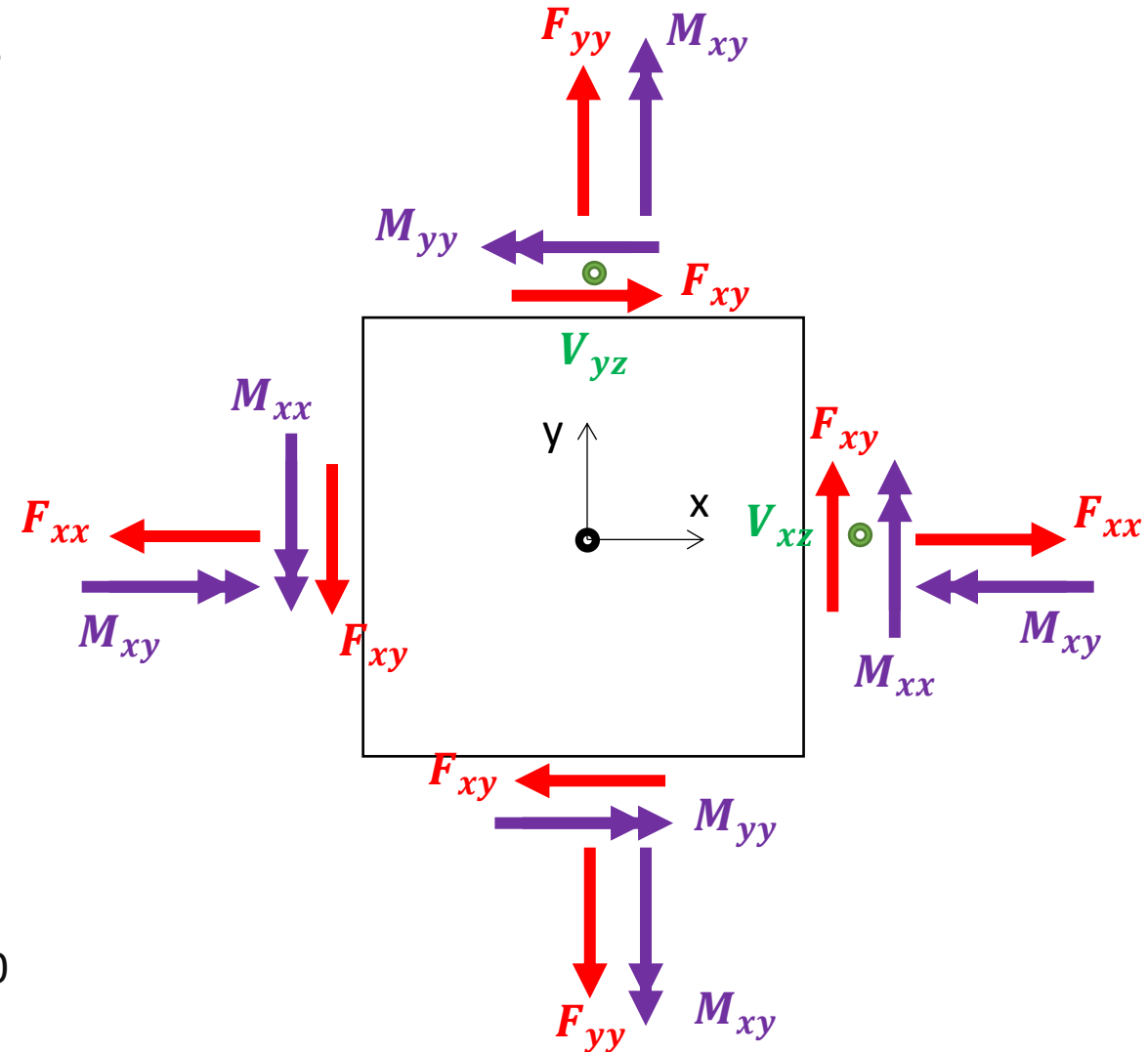
- $F_{xx} > 0$  en traction
- $F_{yy} > 0$  en traction
- $F_{xy} > 0$  par rotation de  $+\pi/2$  par rapport à  $F_{xx}$

Moments de flexion et torsion:

- $M_{xx} > 0$  s'il demande des aciers suivant x en face sup ( $z > 0$ )
- $M_{yy} > 0$  s'il demande des aciers suivant y en face sup ( $z > 0$ )
- $M_{xy} > 0$  s'il crée un cisaillement  $\sigma_{xy} > 0$  en face sup

Efforts tranchants :

- $V_{xz}; V_{yz} > 0$  si orientés dans les  $z > 0$  sur les facettes  $x > 0$  et  $y > 0$
- => Non considérés ici



## Matériaux

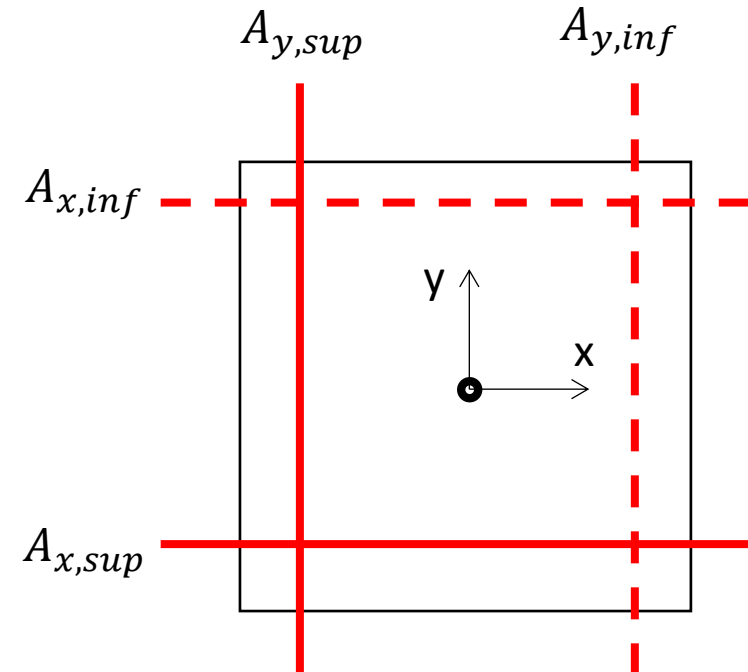
- Béton non résistant en traction
- Armatures plastifiées

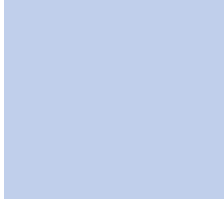
Remarque importante :

On ne s'intéresse pas forcément à assurer la compatibilité des déformations dans les directions x et y

## Unités

- Efforts en KN/m ou MN/m
- Moments en kN.m/m ou MN.m/m
- Sections d'armatures en  $\text{cm}^2/\text{ml}$





# Efforts de membrane

Méthode de Wood

Méthode EC2

02.

# Méthode de Wood – efforts de membrane

## Données :

- Efforts :  $F_{xx}$  ;  $F_{yy}$  ;  $F_{xy}$
- Armatures :  $A_x$  ;  $A_y$
- Contraintes dans les armatures :  $f_{yd}$

## Principe de calcul des armatures :

On étudie l'équilibre de différentes facettes  $F(\theta)$  tournant autour du point étudié.

Projection des efforts de membranes  $(F_{xx} ; F_{yy} ; F_{xy}) \Rightarrow N(\theta)$

Projection de la résistance des armatures :  $(A_x f_{yd} ; A_y f_{yd}) \Rightarrow R(\theta)$

Condition de résistance :  $R(\theta) \geq N(\theta)$

Condition d'économie :  $(A_x ; A_y)_{opt} = \min(A_x + A_y)$

## Méthode de Wood – efforts de membrane

### Projection des efforts sur $F(\theta)$

Effort de membrane dans  $(O,x,y)$  :  $[F] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$

Matrice de passage :  $[P] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Vecteur force sur  $F(\theta)$ :

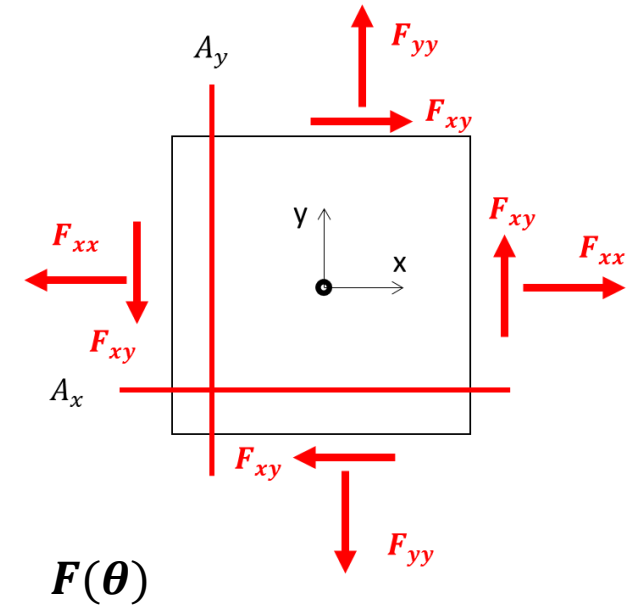
$$[F(\theta)] = {}^t[P][F][P]$$

Effort perpendiculaire à la facette :

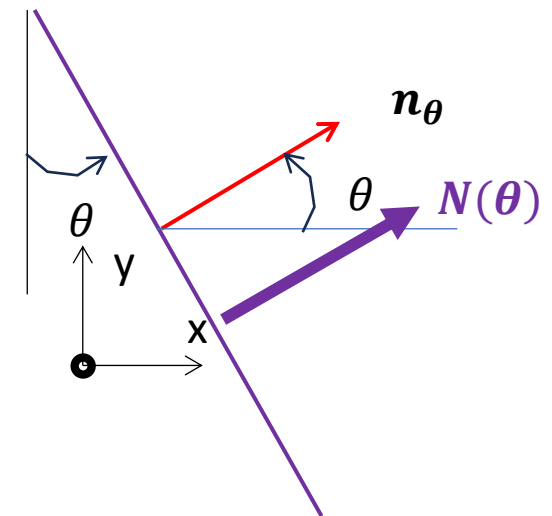
$$N(\theta) = F_{xx} \cos^2 \theta + F_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

Effort dans le plan de la facette (cisaillement) :

$$T(\theta) = (F_{yy} - F_{xx}) \cos \theta \sin \theta + F_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



$F(\theta)$



## Méthode de Wood – efforts de membrane

### Résistance des armatures selon $F(\theta)$

Les aciers ne développent un effort résistant que parallèlement à leur direction

Résistance dans  $(O,x,y)$  :  $[R] = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{bmatrix}$

Matrice de passage :  $[P] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

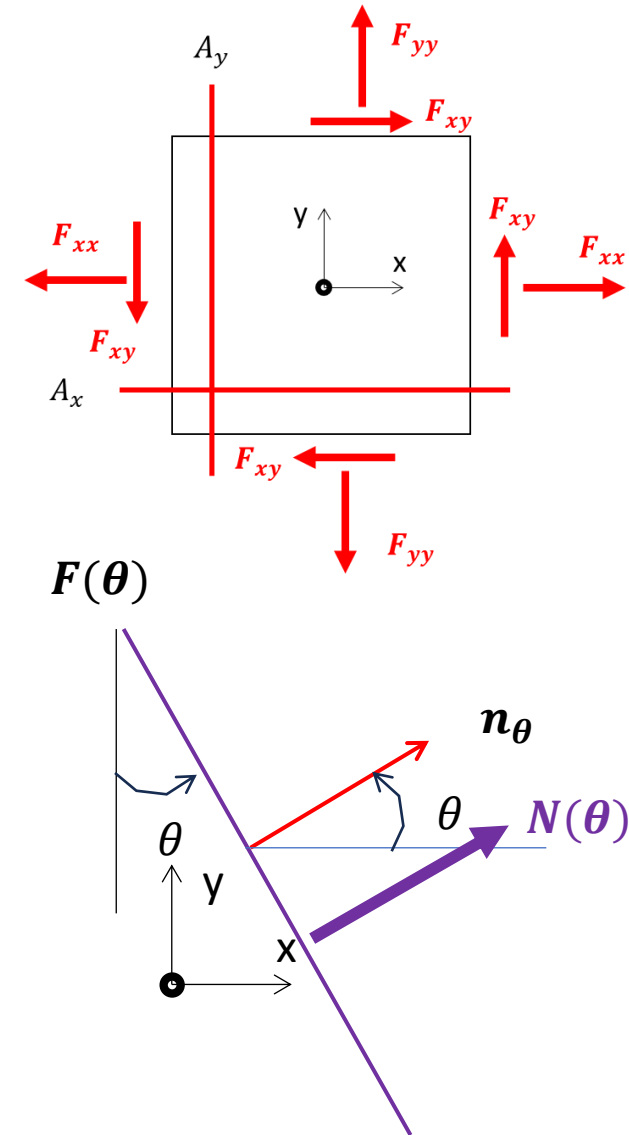
Résistance dans la direction  $n_\theta$ :

$$R(\theta) = R_x \cos^2 \theta + R_y \sin^2 \theta$$

$$R(\theta) = A_x \cos^2 \theta f_{yd} + A_y \sin^2 \theta f_{yd} = A_\theta f_{yd}$$

Section résistante dans la direction  $n_\theta$ :

$$A_\theta = A_x \cos^2 \theta + A_y \sin^2 \theta$$



# Méthode de Wood – efforts de membrane

## Condition de résistance pour les efforts de membrane

La résistance est assurée si,  $\forall \theta$  :

$$R(\theta) > F(\theta)$$

Soit :

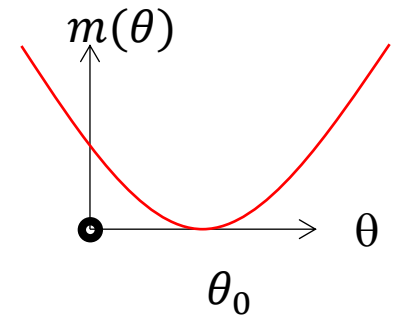
$$m(\theta) = (R_x - F_{xx})\cos^2\theta + (R_y - F_{yy})\sin^2\theta - 2F_{xy}\sin\theta\cos\theta \geq 0$$

$m(\theta)$  est la marge de résistance.

On obtient un optimum lorsqu'il existe au moins une direction  $\theta_0$  pour laquelle:

- $m(\theta_0) = 0$  (marge nulle)
- $m'(\theta_0) = 0$  (extrémum)
- $m''(\theta_0) \geq 0$  (minimum)

C'est la condition de résistance minimale (marge minimale nulle).

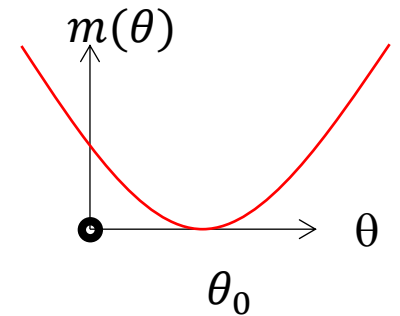


# Méthode de Wood – efforts de membrane

## Condition de résistance pour les efforts de membrane

On obtient un optimum lorsqu'il existe au moins une direction  $\theta_0$  pour laquelle:

- $m(\theta_0) = 0$  (marge nulle)
- $m'(\theta_0) = 0$  (extrémum)
- $m''(\theta_0) \geq 0$  (minimum)



Ces 3 conditions amènent aux conditions :

$$(2) \Rightarrow R_y = F_{yy} + \frac{F_{xy}}{\tan\theta_0}$$

$$(2) \text{ et } (1) \Rightarrow R_x = F_{xx} + F_{xy}\tan\theta_0$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{F_{xy}}{\tan\theta_0} > 0 \text{ (} \tan\theta_0 \text{ et } F_{xy} \text{ de même signe)}$$

Trois inconnues  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $\tan\theta_0$  pour 2 équations. On doit se donner une équation complémentaire  $\Rightarrow$  principe d'économie qui minimise la quantité d'armature en fonction du paramètre  $k = \tan\theta_0$

## Méthode de Wood – efforts de membrane

La quantité d'armatures est comme  $S(k) = R_x + R_y = F_{xx} + F_{yy} + F_{xy} \left( \frac{1}{k} + k \right)$

Elle est minimale si :  $\frac{\partial S(k)}{\partial k} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 0$  et  $\frac{\partial^2 S(k)}{\partial k^2} > 0 \Rightarrow \frac{F_{xy}}{k^3} > 0$

Soit :  $k = \pm 1$  et  $\text{signe}(k) = \text{signe}(F_{xy})$

$$R_x = A_x f_{yd} = F_{xx} + |F_{xy}|$$

$$R_y = A_y f_{yd} = F_{yy} + |F_{xy}|$$

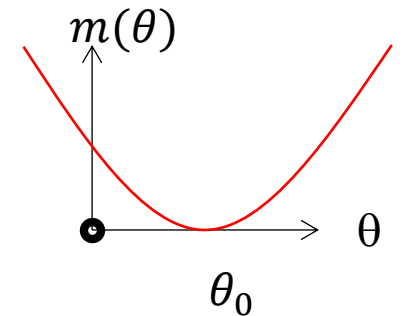
Cela n'a de sens que si  $R_x$  et  $R_y$  sont positifs.

- Si  $R_x = F_{xx} + F_{xy} \tan \theta_0 < 0 \Rightarrow$  on considère  $A_x = 0$  et  $\tan \theta_0 = -\frac{F_{xx}}{F_{xy}}$

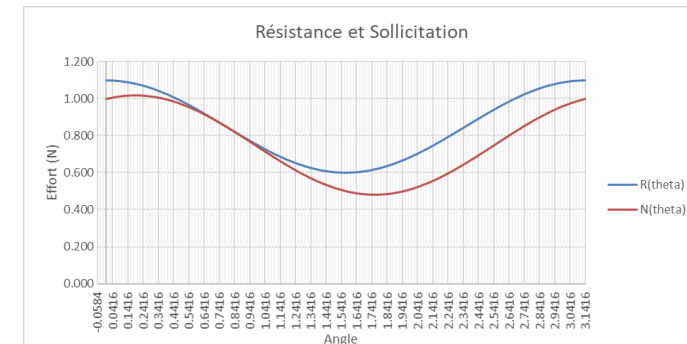
On en déduit :  $R_y = F_{yy} + \frac{F_{xy}}{\tan \theta_0} = F_{yy} - \frac{F_{xy}^2}{F_{xx}}$ . Si  $F_{yy} - \frac{F_{xy}^2}{F_{xx}} < 0 \Rightarrow$  pas d'armatures  $A_y$  nécessaires.

- De même, si  $R_y = F_{yy} + \frac{F_{xy}}{\tan \theta_0} < 0 \Rightarrow$  on considère  $A_y = 0$  et  $\tan \theta_0 = -\frac{F_{xy}}{F_{yy}}$

On en déduit  $R_x = F_{xx} + F_{xy} \tan \theta_0 = F_{xx} - \frac{F_{xy}^2}{F_{yy}}$



Wood Method					
Mx	0	kN.m/m	Nxx	1000	kN/m
My	0	kN.m/m	Nyy	500	kN/m
Mxy	0	kN.m/m	Nxy	100	kN/m
Z	0.935	m			
f <sub>yd</sub>	500	MPa			
A <sub>x_inf</sub>	11.0	cm <sup>2</sup> /ml	A <sub>y_inf</sub>	6.0	cm <sup>2</sup> /ml
A <sub>x_sup</sub>	11.0	cm <sup>2</sup> /ml	A <sub>y_sup</sub>	6.0	cm <sup>2</sup> /ml
A <sub>total</sub>	34.0	cm <sup>2</sup> /ml			



La marge est nulle sur la facette  $\theta = 45^\circ$

## Wood: principe de dimensionnement du ferrailage

(1) : on place des aciers apportant des résistances supérieures aux efforts :

- Dans la direction x :  $R_x = A_x f_{yd} > F_{xx} + |F_{xy}|$
- Dans la direction y :  $R_y = A_y f_{yd} > F_{yy} + |F_{xy}|$

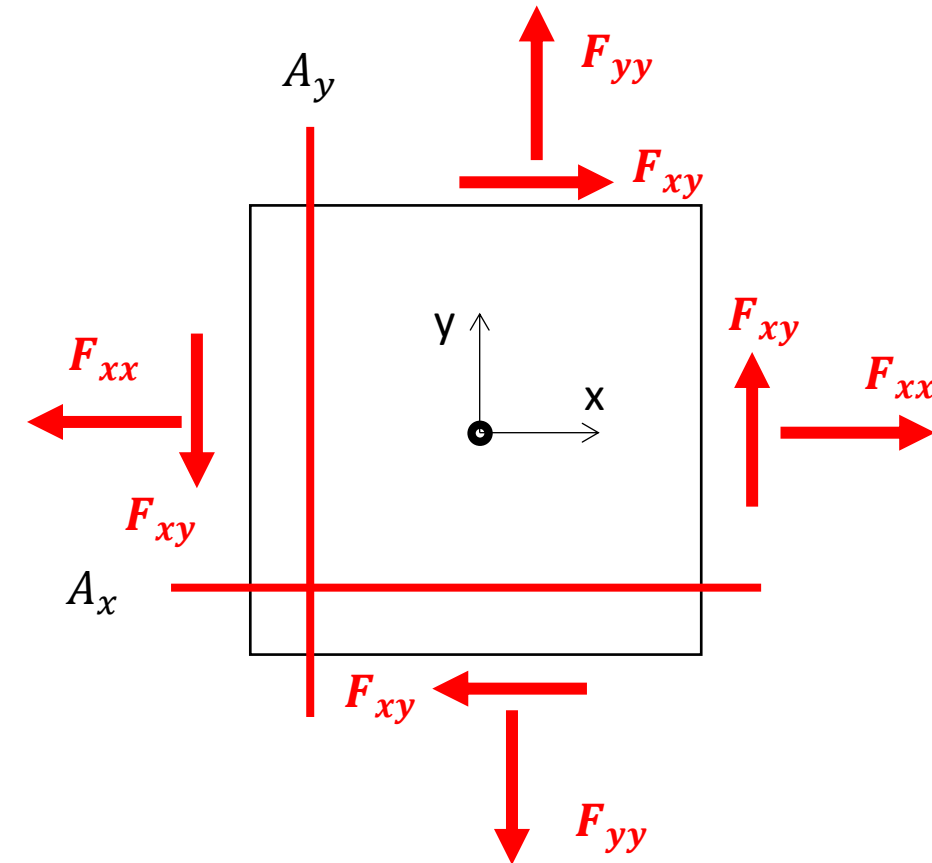
(2) Si l'une de ces quantités est négative, les formules deviennent :

- Cas  $F_{xx} + |F_{xy}| < 0$  :  
=> alors  $A_x = 0$  et  $R_y = A_y f_{yd} = F_{yy} - F_{xy}^2 / |F_{xx}|$
- Cas  $F_{yy} + |F_{xy}| < 0$  :  
=> alors  $A_y = 0$  et  $R_x = A_x f_{yd} = F_{xx} - F_{xy}^2 / |F_{yy}|$

(3) Si les 2 quantités sont négatives, alors  $A_x = 0$  et  $A_y = 0$

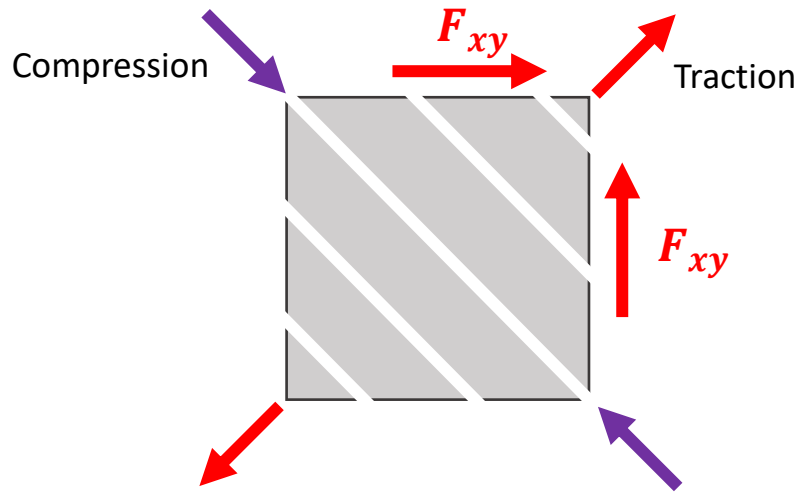
Rem :

- Si  $A_x = 0$  ou  $A_y = 0$ , on mettra en place  $A_{x,min}$  et  $A_{y,min}$ , procurant des résistances  $R_{x,min}$  et  $R_{y,min}$  et permettant d'optimiser les quantités d'armatures dans la direction perpendiculaire (hors champ de ce cours).

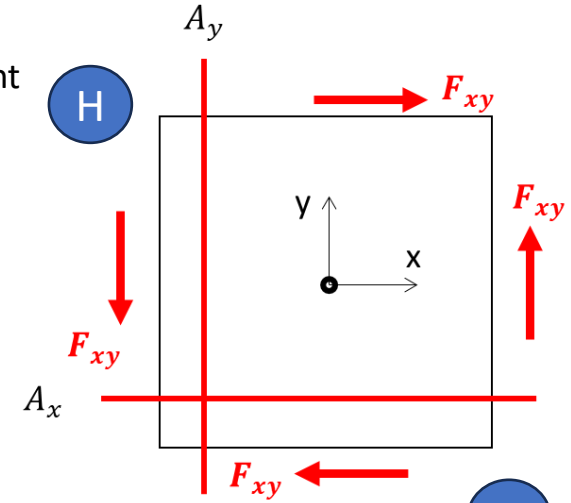


## Wood : justification dans le cas particulier du cisaillement pur

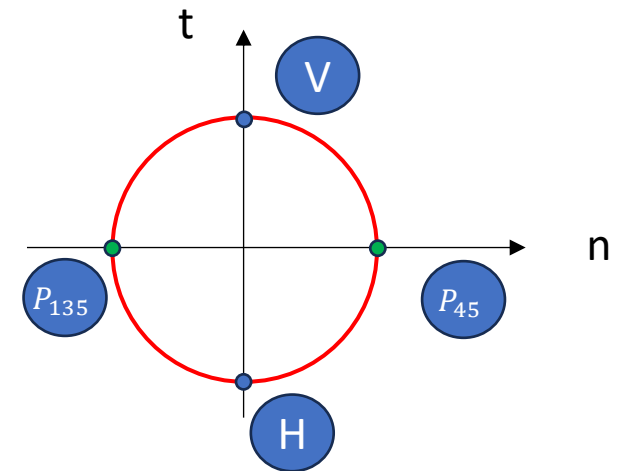
- Directions principales de traction :  $\theta = 45^\circ$
- Directions principales de compression :  $\theta = 135^\circ$



De normale suivant  
y :  $\theta = 90^\circ$



De normale  
suivant x :  $\theta = 0$



Equilibre suivant x :  $R_x \cdot ds > F_{xy} \cdot ds \Rightarrow R_x = A_x f_{yd} = F_{xy}$

Equilibre suivant y :  $R_y \cdot ds > F_{xy} \cdot ds \Rightarrow R_y = A_y f_{yd} = F_{xy}$

Rem : si  $F_{xy}$  est appliqué dans le sens opposé (donc  $F_{xy} < 0$ ), les bielles comprimées sont à  $45^\circ$ , mais on obtient les mêmes quantités d'armatures, soit :  $R_x = R_y = |F_{xy}|$

Rappel : efforts en kN/ml

## Wood: justification dans le cas général avec 3 efforts $F_{xx}$ ; $F_{yy}$ ; $F_{xy}$

- Sous l'effet de  $F_{xx}$  seul :

$$R_x = A_x f_{yd} > F_{xx}$$

- Sous l'effet de  $F_{yy}$  seul :

$$R_y = A_y f_{yd} > F_{yy}$$

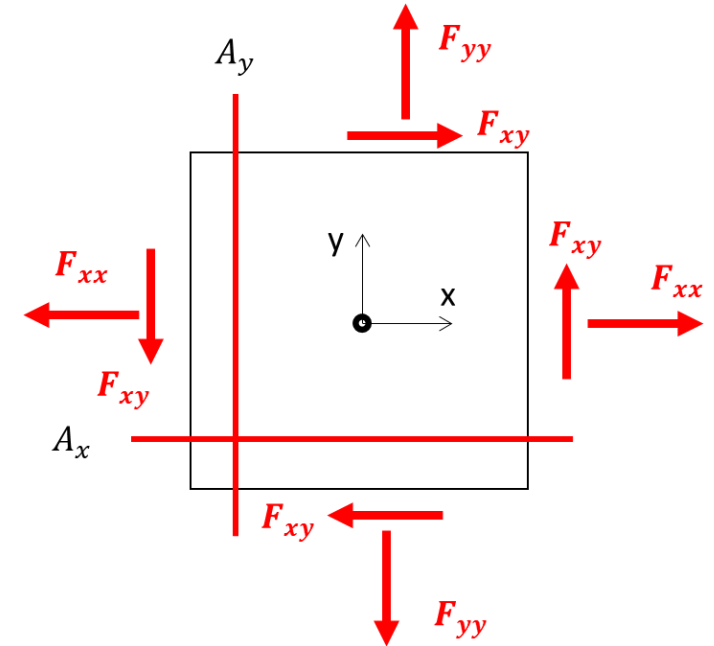
- Sous l'effet de  $F_{xy}$  seul :

$$R_x = R_y = |F_{xy}|$$

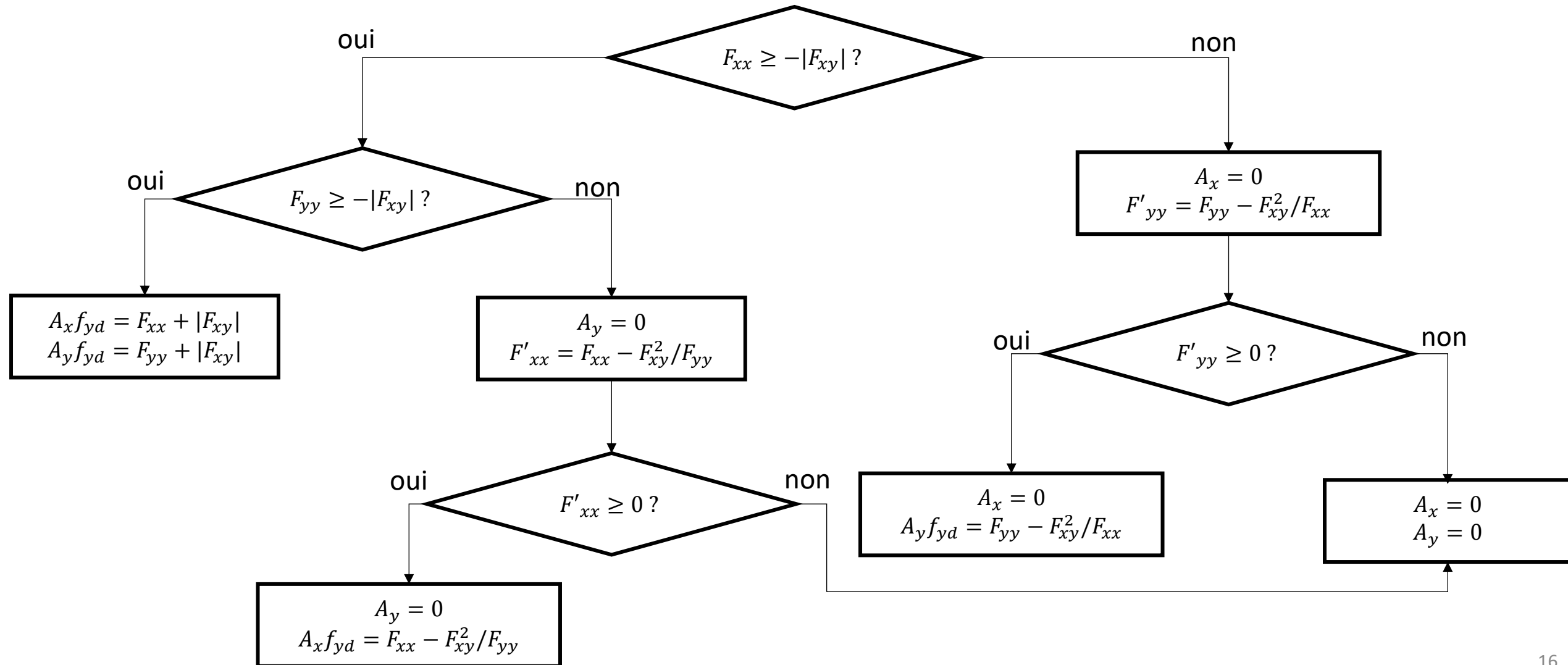
- Principe de superposition :

$$R_x = A_x f_{yd} = F_{xx} + |F_{xy}|$$

$$R_y = A_y f_{yd} = F_{yy} + |F_{xy}|$$



## Wood : organigramme



## Méthode EC2-1-1 : Annexe F

L'annexe F propose une formulation qui revient à la méthode de Wood.

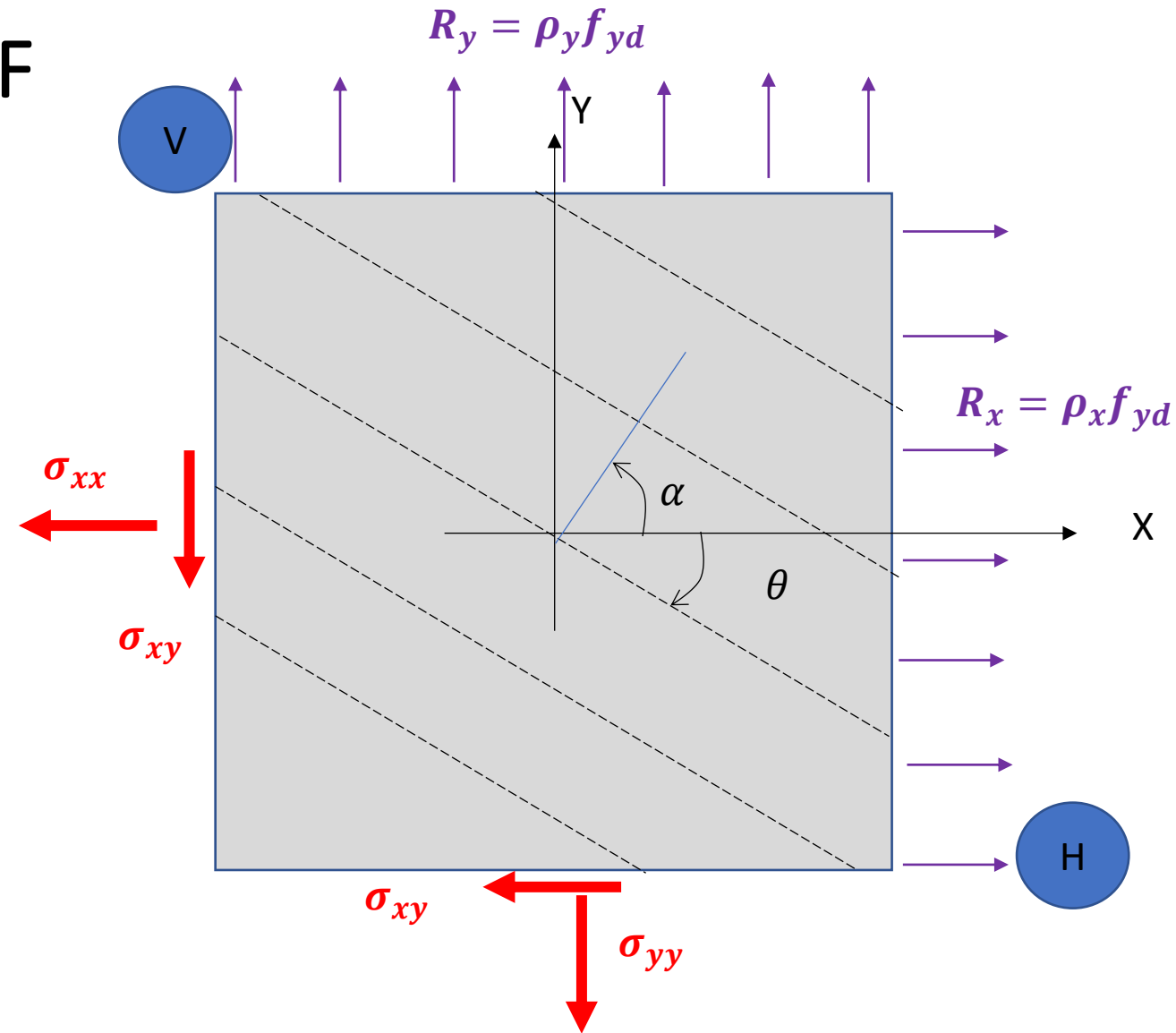
Elle est plus « physique » car elle tient compte du comportement du béton armé :

- Schéma de bielles comprimées
- Schéma de plans fissurés

On étudie l'équilibre de coins élémentaires sous l'effet:

- Des efforts de membranes,
- Des efforts dans les armatures

On note  $\theta$  l'angle des fissures par rapport à X,  $\alpha$  est la direction de la traction (perpendiculaire aux bielles de béton).



$$\rho_x = A_x / 1. h \text{ ratio d'armature dans la direction X}$$

$$\rho_y = A_y / 1. h \text{ ratio d'armature dans la direction Y}$$

## Méthode EC2-1-1 : Annexe F

L'annexe F propose une formulation qui revient à la méthode de Wood.

Equilibre d'un coin de longueur 1 sur la facette V :

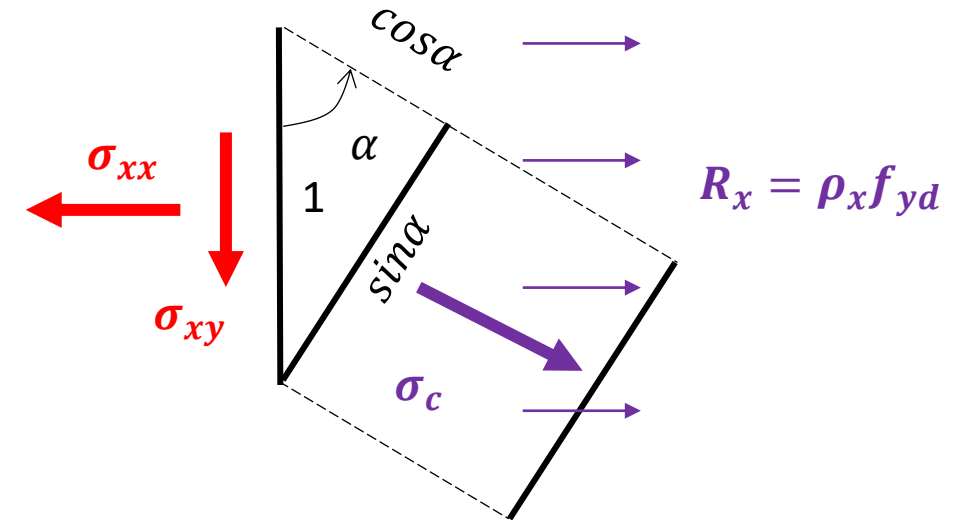
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_{xx} + R_x + \sigma_c \sin\alpha \sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} + \sigma_c \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

Soit :

$$\sigma_c = -\frac{\sigma_{xy}}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

$$R_x = \rho_x f_{yd} = \sigma_{xx} - \sigma_c \sin\alpha \sin\alpha = \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \tan\alpha$$



$\rho_x = A_x / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction X

$\rho_y = A_y / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction Y

## Méthode EC2-1-1 : Annexe F

L'annexe F propose une formulation qui revient à la méthode de Wood.

Equilibre d'un coin de longueur 1 sur la facette H :

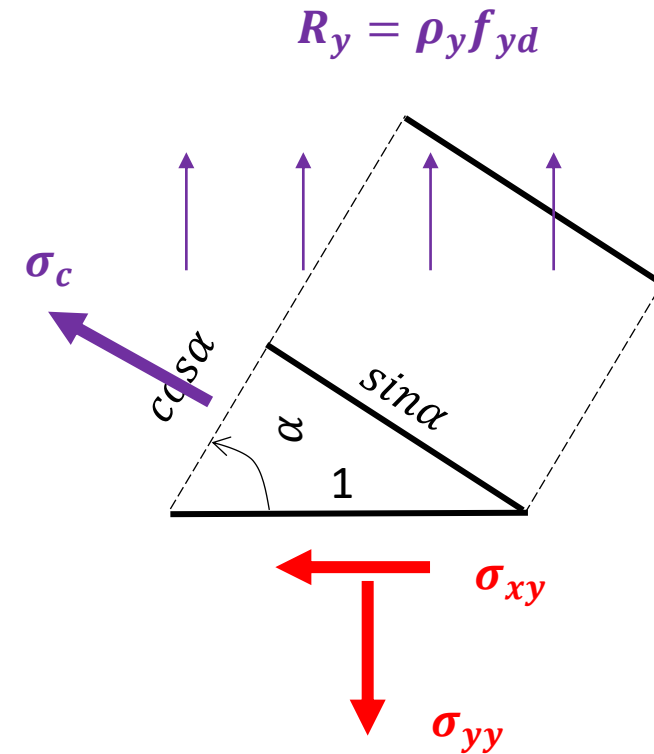
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_{xy} - \sigma_c \cos\alpha \sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\sigma_{yy} + R_y + \sigma_c \cos\alpha \cos\alpha = 0$$

Soit :

$$\sigma_c = -\frac{\sigma_{xy}}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

$$R_y = \rho_y f_{yd} = \sigma_{yy} - \sigma_c \cos\alpha \cos\alpha = \sigma_{yy} + \frac{\sigma_{xy}}{\tan\alpha}$$



$\rho_x = A_x / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction X  
 $\rho_y = A_y / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction Y

## Méthode EC2-1-1 : Annexe F

Cas  $R_x > 0$  et  $R_y > 0$  :

(ie on a besoin d'armatures dans les deux directions)

Angle optimal de la fissure : celui qui optimise la quantité d'armatures :

$$R_x = \rho_x f_{yd} = \sigma_{xx} + \sigma_c \sin\alpha \sin\alpha = \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \tan\alpha$$

$$R_y = \rho_y f_{yd} = \sigma_{yy} - \sigma_c \cos\alpha \cos\alpha = \sigma_{yy} + \frac{\sigma_{xy}}{\tan\alpha}$$

$$R_x + R_y = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{xy} \left( \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} \right)$$

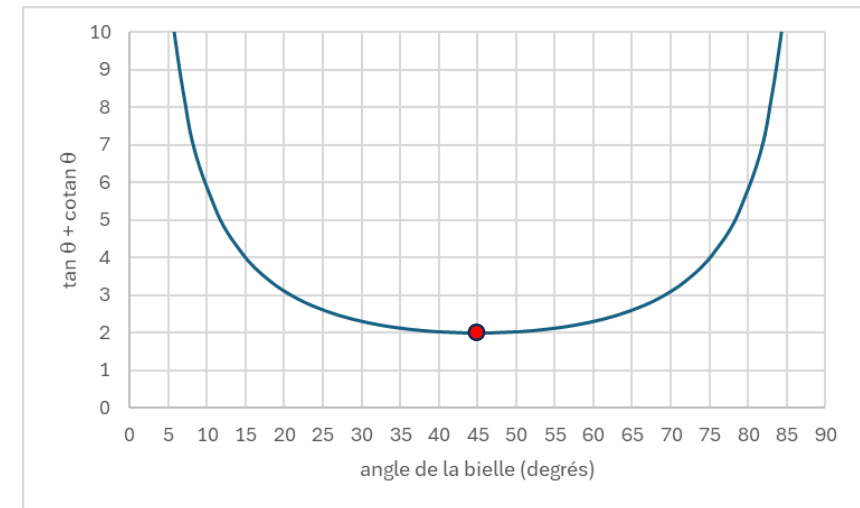
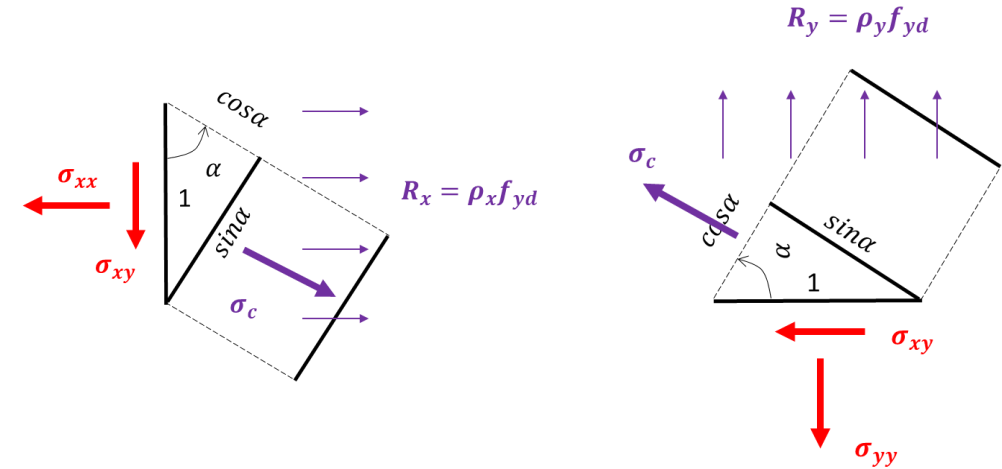
⇒ Angle optimal :  $\alpha = 45^\circ$

Alors :

$$R_x = \rho_x f_{yd} = \sigma_{xx} + |\sigma_{xy}|$$

$$R_y = \rho_y f_{yd} = \sigma_{yy} + |\sigma_{xy}|$$

$$\sigma_c = -2|\sigma_{xy}|$$



Rappel :  $\sigma > 0 \Rightarrow$  traction

## Méthode EC2-1-1 : Annexe F

Cas  $R_x < 0$  et  $R_y > 0$  :

=> Pas besoin d'armatures selon X : on choisit  $\rho_x = 0$

$$R_x = \rho_x f_{yd} = 0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$$

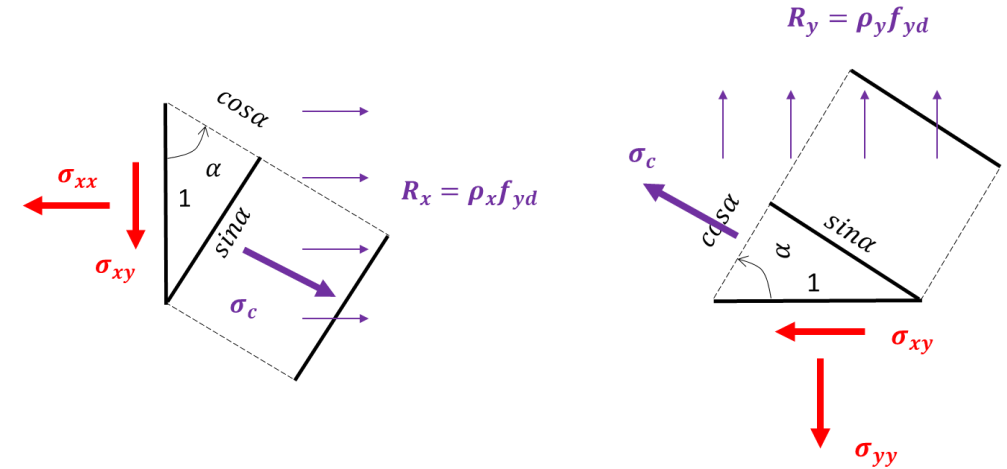
$$R_y = \sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}}$$

$$\sigma_c = \sigma_{xx} \left( 1 + \left( \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right)^2 \right)$$

Avantage de l'approche :

⇒ Plus physique

⇒ calcul explicite de la compression dans les bielles de béton, à comparer aux contraintes admissibles.



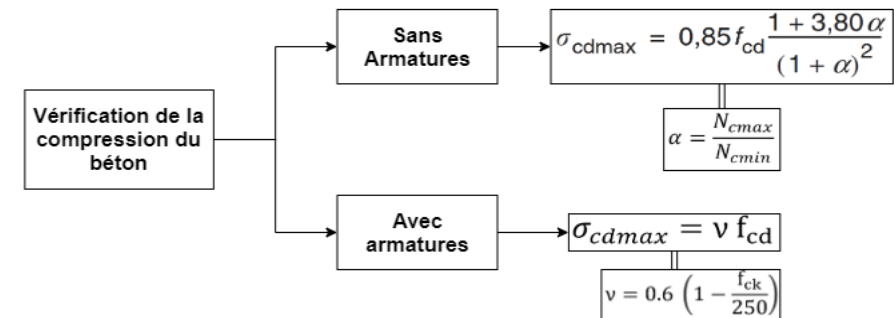
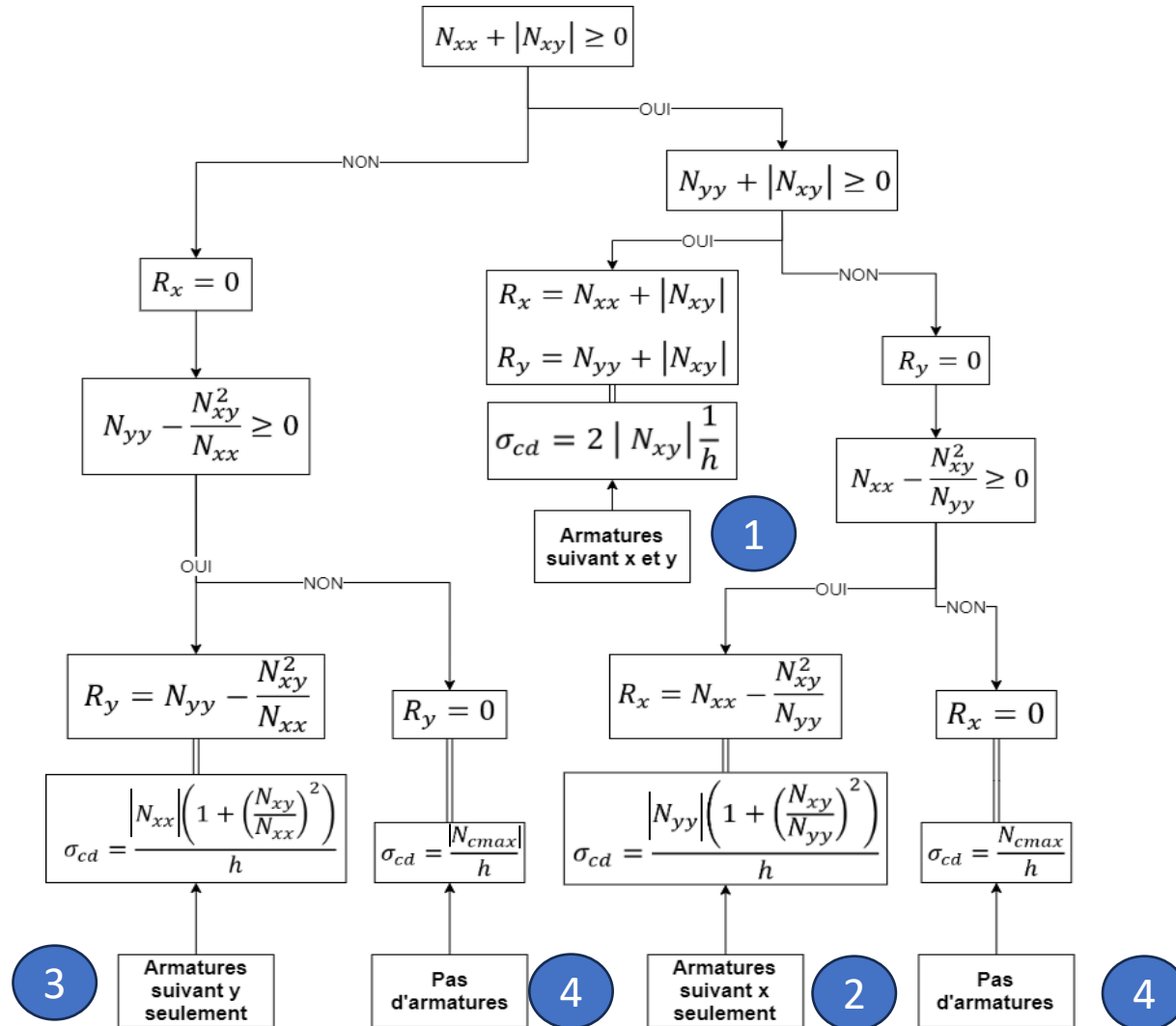
$$R_x = \rho_x f_{yd} = \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \tan \alpha$$

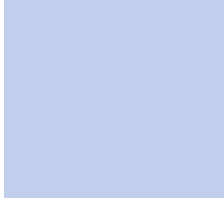
$$R_y = \rho_y f_{yd} = \sigma_{yy} + \frac{\sigma_{xy}}{\tan \alpha}$$

$$\sigma_c = -\frac{\sigma_{xy}}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\sigma_{xy} \frac{(1 + \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha}$$

$\rho_x = A_x / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction X  
 $\rho_y = A_y / 1 \cdot h$  ratio d'armature dans la direction Y

## Méthode EC2-1-1 : Logigramme





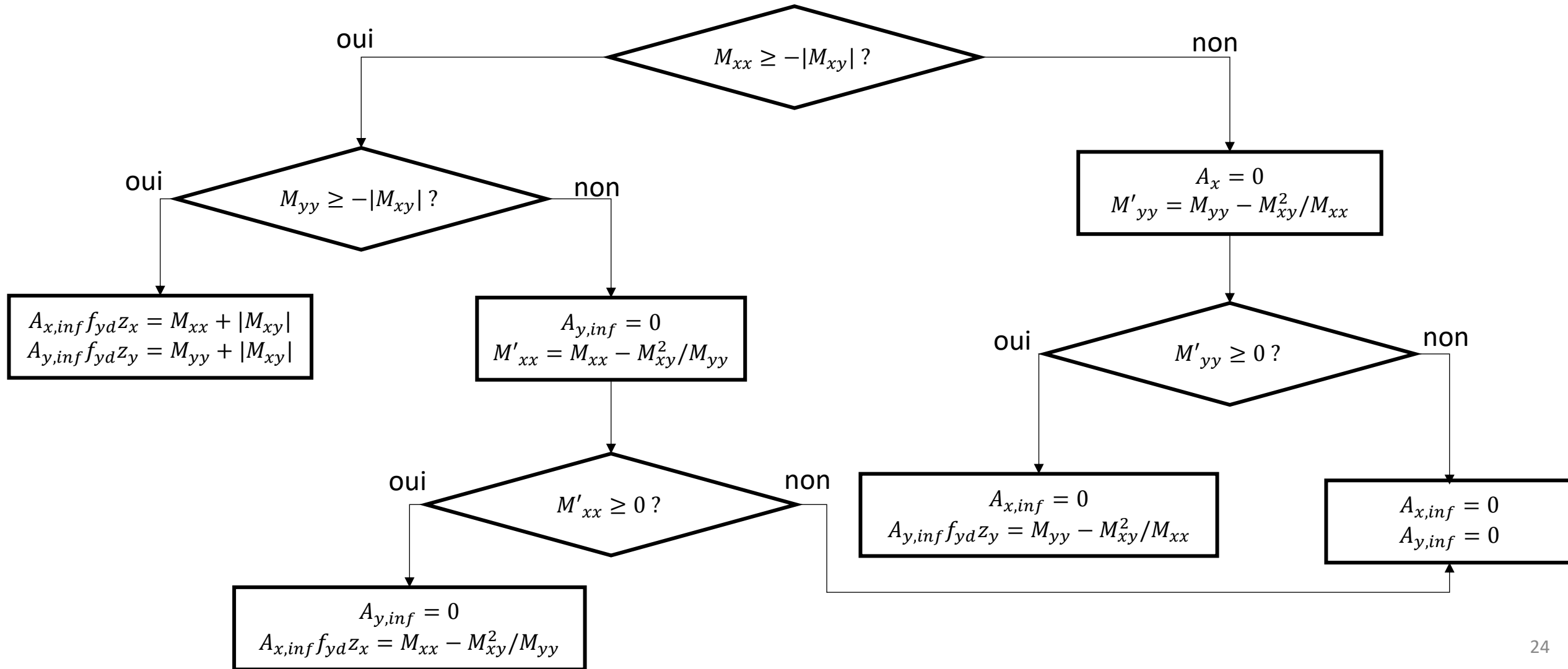
# Moments fléchissants seuls

Méthode de Wood

03.

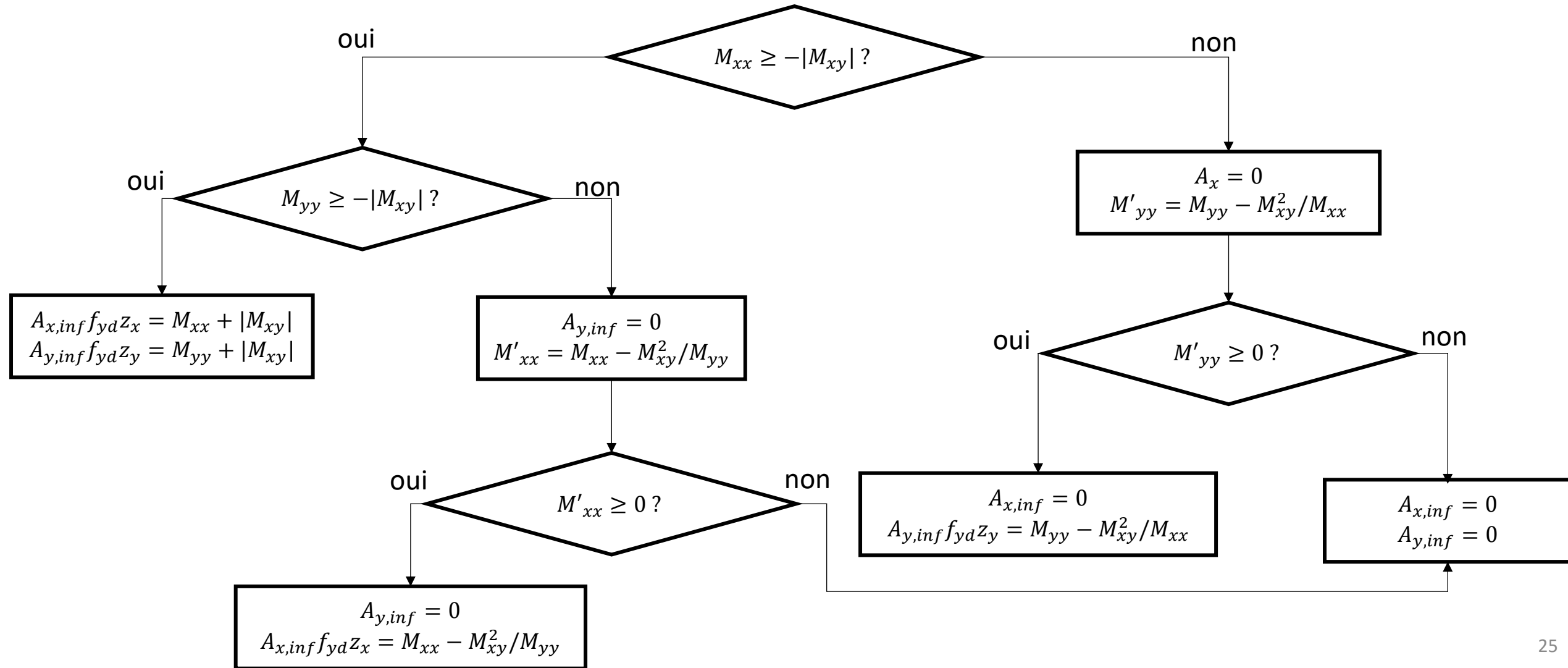
## Méthode de Wood pour les moments

Organigramme pour les moments positifs



## Méthode de Wood pour les moments

Organigramme pour les moments négatifs :

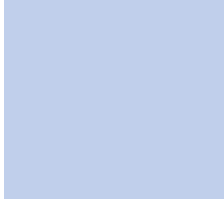


# Méthode de Wood : limites

- ⇒ Permet de traiter les efforts de membranes seuls
- ⇒ Permet de traiter les moments seuls
  
- ⇒ N'est pas optimal pour le cumul efforts de membrane + moment

Il faut trouver d'autres méthodes :

- Méthode Capra-Maury
- Méthode Sandwich



# Coques sous efforts quelconques

Méthode Capra-Maury

04.

## Méthode de Capra-Maury

- Développée en France en 1977-1978 pour les calculs automatiques de ferrailage de coques (premiers calculs aux Eléments Finis).
- Développée pour les besoins du parc nucléaire français
- Méthode implémentée dans de nombreux logiciels (code aster , Robot, Hercule, Pythagore)

## Idée fondamentale

- Réduction de la complexité du ferrailage de 6 à 2 paramètres:

$$N_{xx}; N_{yy}; N_{xy}; M_{xx}; M_{yy}; M_{xy} \Rightarrow N(\theta); M(\theta)$$

- Le calcul du ferrailage se ramène à un calcul en flexion composée

<b>ANNALES</b> DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS	SERIE : INFORMATIQUE APPLIQUEE
	ISSN 0020-2568
N° 367 DECEMBRE 1978	N° 36

## CALCUL AUTOMATIQUE DU FERRAILLAGE OPTIMAL DES PLAQUES OU COQUES EN BÉTON ARMÉ

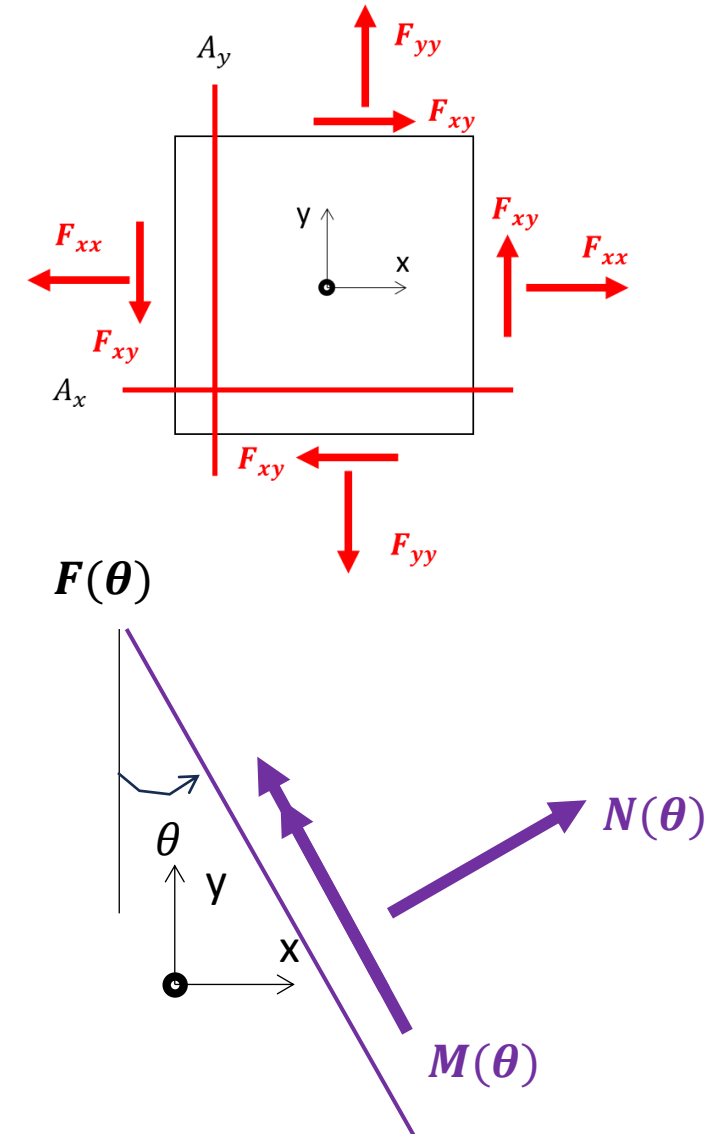
par

Alain **CAPRA** et Jean-François **MAURY**  
Ingénieurs à la Direction Technique  
de la SOCOTEC

## Méthode de Capra-Maury

### Méthodologie :

- Projection des efforts sur différentes facettes  $F(\theta)$  inclinées de  $\theta$  par rapport à la verticale  $\Rightarrow N(\theta); M(\theta)$
- Calcul des besoins en armatures selon chaque direction en flexion composée :  $A_{inf}(\theta); A_{sup}(\theta)$
- Principe d'économie pour le choix des armatures suivant x et y :
  - $A_{x,inf} + A_{y,inf}$  est minimale
  - $A_{x,sup} + A_{y,sup}$  est minimale



## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Projection des efforts sur $F(\theta)$

Effort de membrane dans  $(O,x,y)$  :  $[F] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$

Matrice de passage :  $[P] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Vecteur force sur  $F(\theta)$ :

$$[F(\theta)] = {}^t[P][F][P]$$

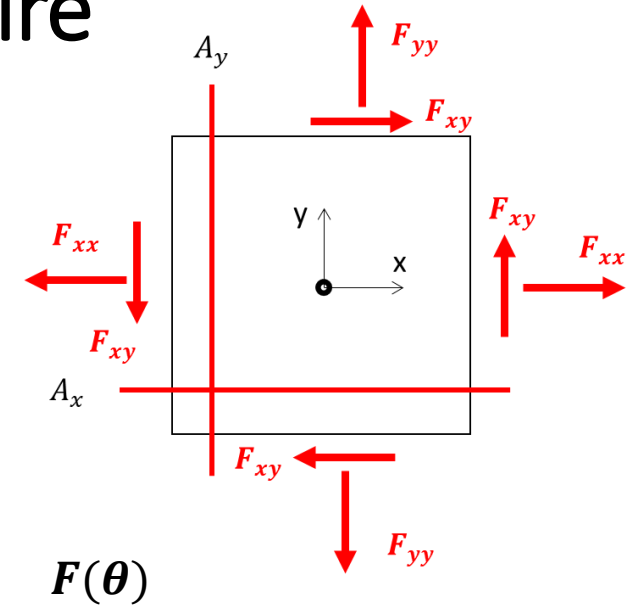
Effort perpendiculaire à la facette :

$$N(\theta) = F_{xx} \cos^2 \theta + F_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

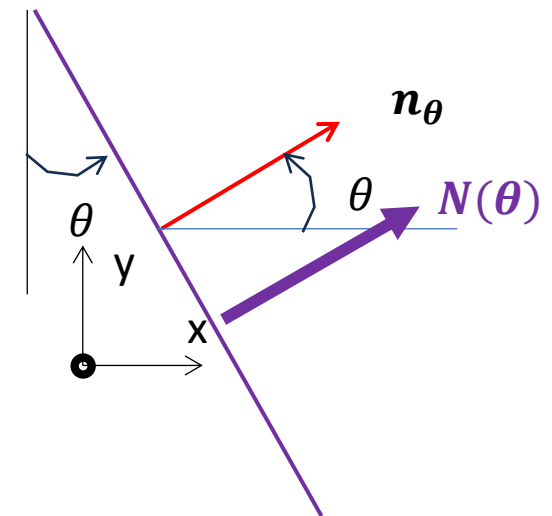
Effort dans le plan de la facette (cisaillement) :

$$T(\theta) = (F_{yy} - F_{xx}) \cos \theta \sin \theta + F_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Tapez une équation ici.



$F(\theta)$



## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Résistance des armatures selon $F(\theta)$

Les aciers ne développent un effort résistant que parallèlement à leur direction

Résistance dans  $(O,x,y)$  :  $[R] = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{bmatrix}$

Matrice de passage :  $[P] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

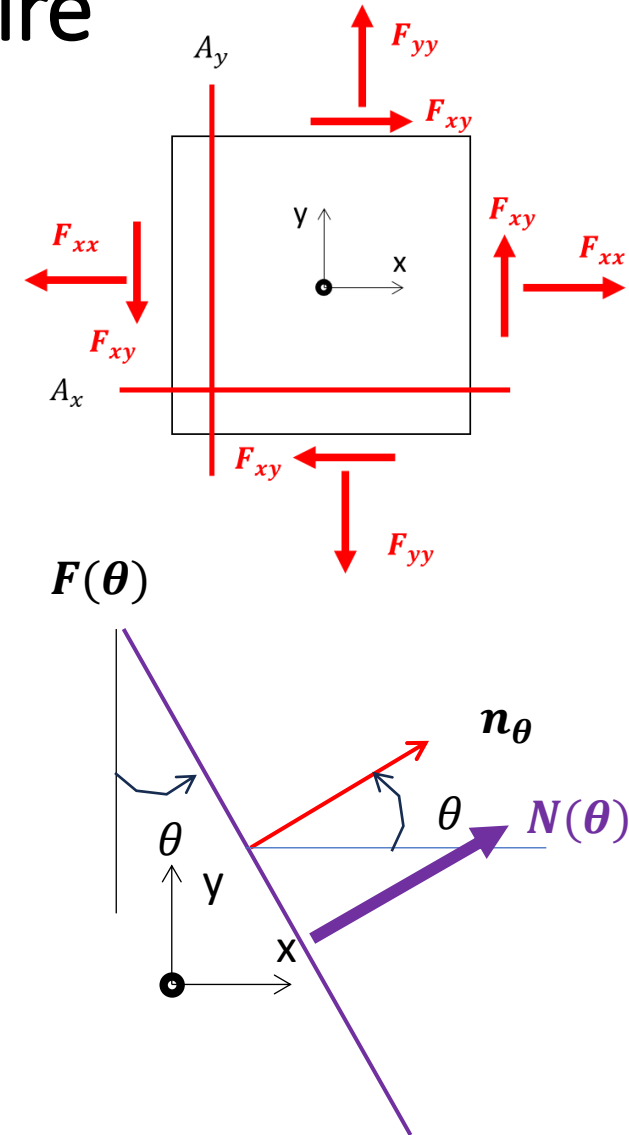
Résistance dans la direction  $n_\theta$ :

$$R(\theta) = R_x \cos^2 \theta + R_y \sin^2 \theta$$

$$R(\theta) = A_x \cos^2 \theta f_{yd} + A_y \sin^2 \theta f_{yd} = A_\theta f_{yd}$$

Section résistante dans la direction  $n_\theta$ :

$$A_\theta = A_x \cos^2 \theta + A_y \sin^2 \theta$$



## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Condition de résistance pour les efforts de membrane

La résistance est assurée si,  $\forall \theta$  :

$$R(\theta) > F(\theta)$$

Soit :

$$R(\theta) = R_x \cos^2 \theta + R_y \sin^2 \theta > F_{xx} \cos^2 \theta + F_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

=>

$$(R_x - F_{xx}) \cos^2 \theta + (R_y - F_{yy}) \sin^2 \theta > 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

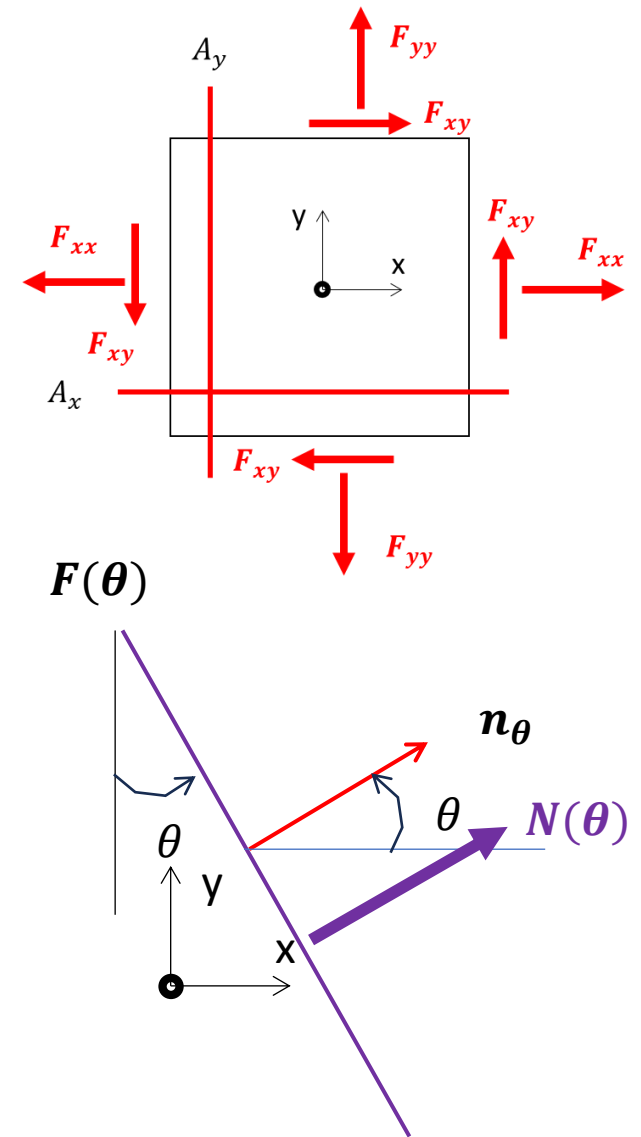
On pose :

$$D_x = R_x - F_{xx} \text{ (supplément de résistance à placer en X par rapport à } F_{xx}\text{)}$$

$$D_y = R_y - F_{yy} \text{ (supplément de résistance à placer en Y par rapport à } F_{yy}\text{)}$$

Ccl : résistance assurée si,  $\forall \theta$  :

$$D_x \cos^2 \theta + D_y \sin^2 \theta \geq 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$



## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Condition de résistance pour les efforts de membrane

Ccl : résistance assurée si,  $\forall \theta$  :

$$D_x \cos^2 \theta + D_y \sin^2 \theta \geq 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

Constat 1 : Pour  $F_{xx} = F_{yy} = 0$  (cisaillement pur), on a montré qu'il faut mettre en place :  $R_x = R_y = |F_{xy}| \Rightarrow D_x = D_y = |F_{xy}|$   
 $D_x = D_y = |F_{xy}|$  est une solution.

Est-ce la solution optimale, ie celle optimisant la quantité  $D_x + D_y$  ?

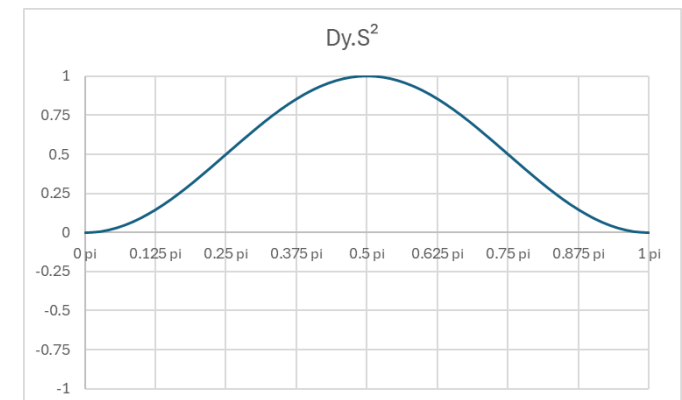
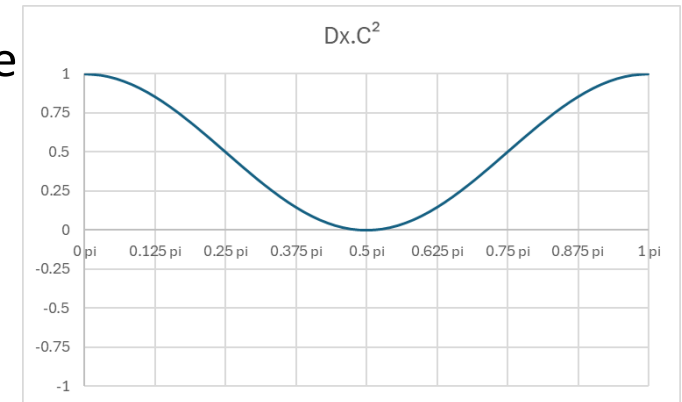
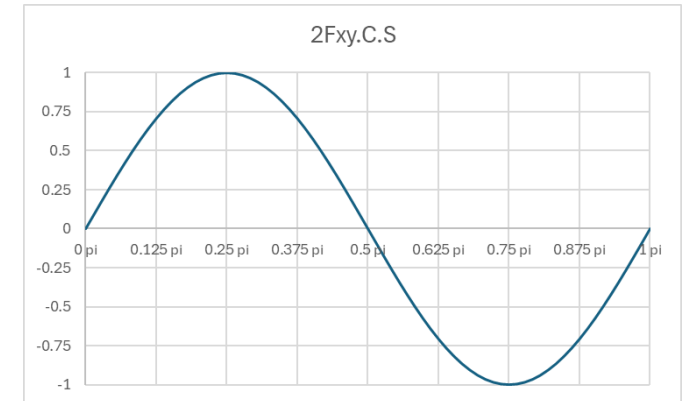
Pour  $\theta = 45^\circ$ , la condition de résistance est :

$$0,5D_x + 0,5D_y \geq F_{xy}$$

Soit :

$$D_x + D_y \geq 2F_{xy}$$

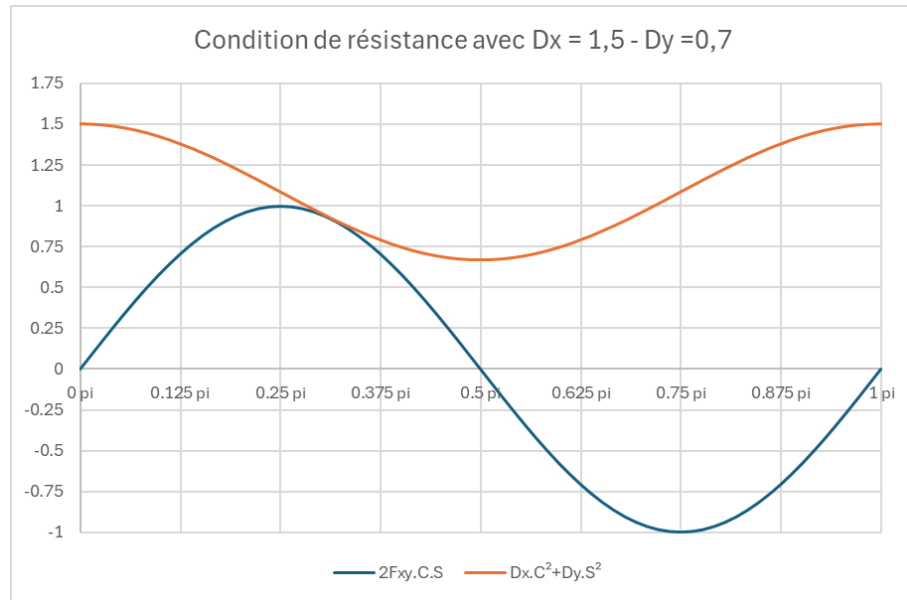
La solution optimale est donc  $D_x = D_y = |F_{xy}|$



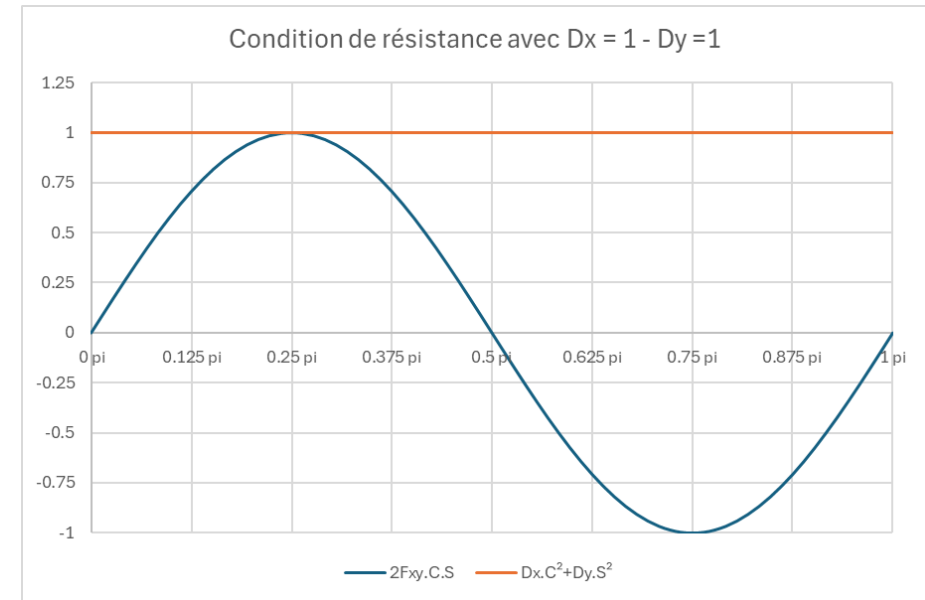
## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Condition de résistance pour les efforts de membrane

La solution optimale est donc  $D_x = D_y = |F_{xy}|$



$$D_x + D_y = 2,2|F_{xy}|$$



$$D_x + D_y = 2|F_{xy}|$$

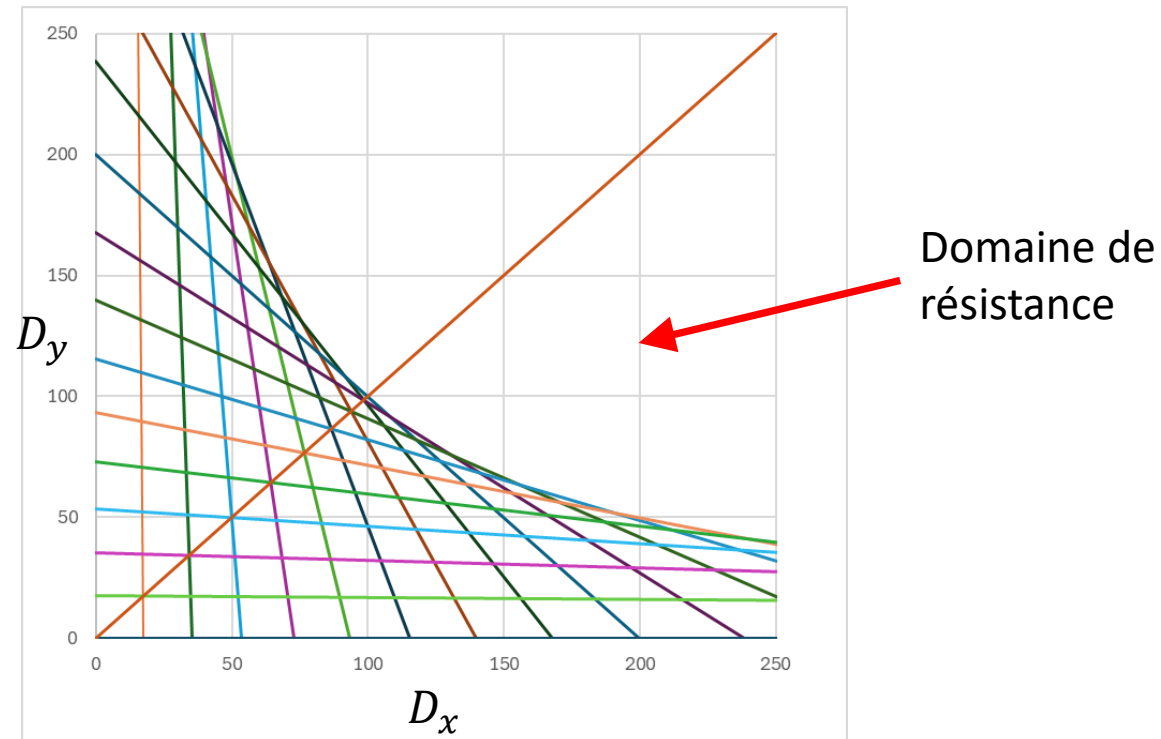
## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Vision géométrique

On se met dans le plan  $(D_x; D_y)$  : la condition de résistance pour  $\theta$  donné est le demi-plan délimité par la droite d'équation :

$$d_\theta : D_x \cos^2 \theta + D_y \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy} = 0$$

Le domaine de résistance est l'intersection des demi-plans.



## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Vision géométrique

Recherche de l'optimum  $(D_x + D_y)_{min}$  :

Soit  $P(D_x; D_y)$  un point du domaine de résistance  $D_r$ .

Soit H sa projection sur la bissectrice :

$$x_H = y_H = \frac{D_x + D_y}{2}$$

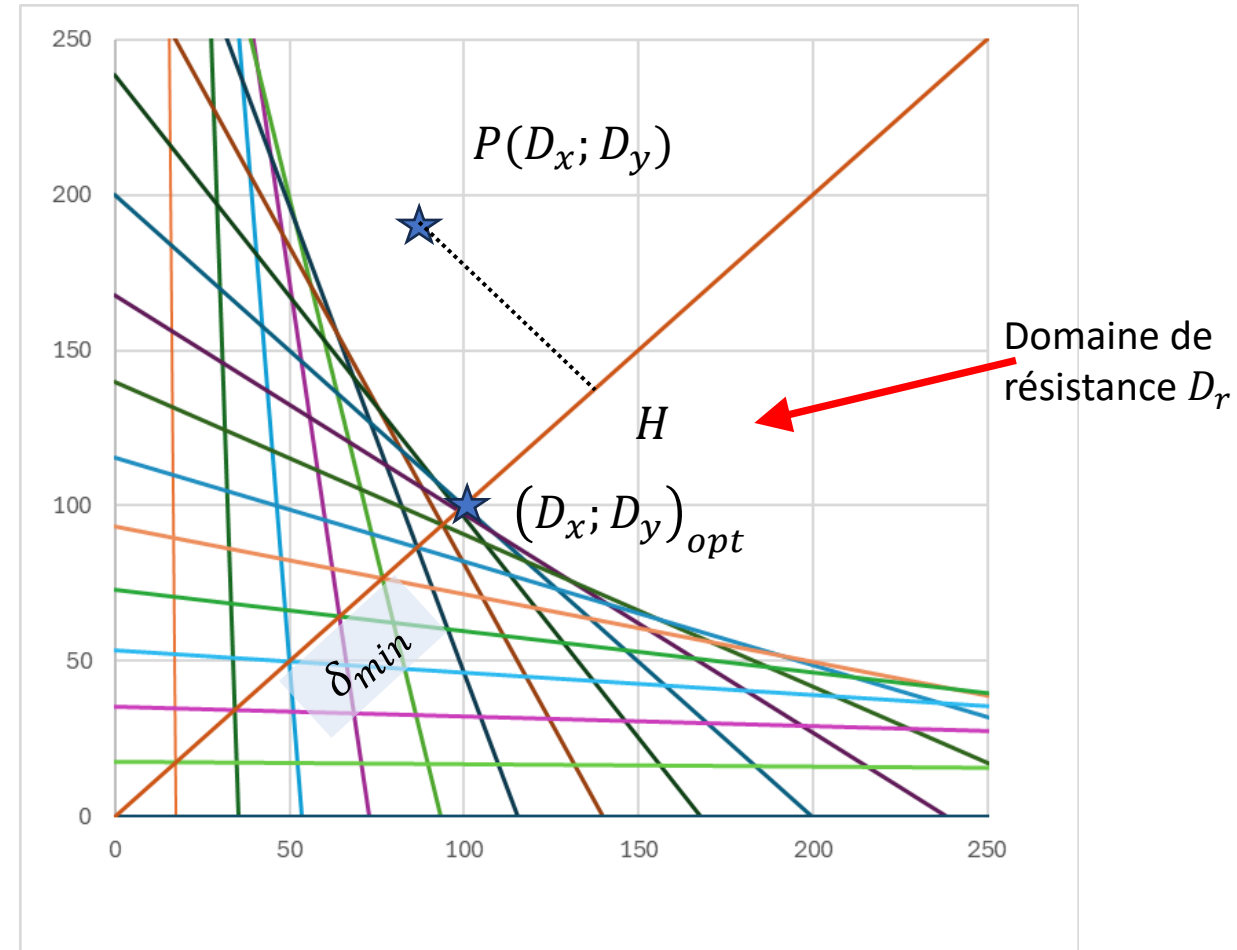
Distance de H à l'origine :

$$\delta = OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2} = \sqrt{2}x_H = \frac{D_x + D_y}{\sqrt{2}}$$

$\delta$  est ainsi une indication de la quantité d'armatures  $(D_x + D_y)$  à mettre en œuvre.

$$(D_x, D_y)_{opt} = \delta_{min}$$

C'est l'intersection de la frontière de  $D_r$  avec la bissectrice.



$$F_{xx} = 100 ; F_{yy} = 250 ; F_{xy} = 100 \text{ kN/m}$$

## Méthode de Capra-Maury – cas membranaire

### Vision géométrique

Recherche de l'optimum  $(D_x + D_y)_{min}$  :

$$(D_x, D_y)_{opt} = \delta_{min}$$

C'est l'intersection de la frontière de  $D_r$  avec la bissectrice.

Rappel :

$$d_{\theta} : D_x \cos^2 \theta + D_y \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy} = 0$$

$$d_{\frac{\pi}{2}-\theta} : D_x \sin^2 \theta + D_y \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy} = 0$$

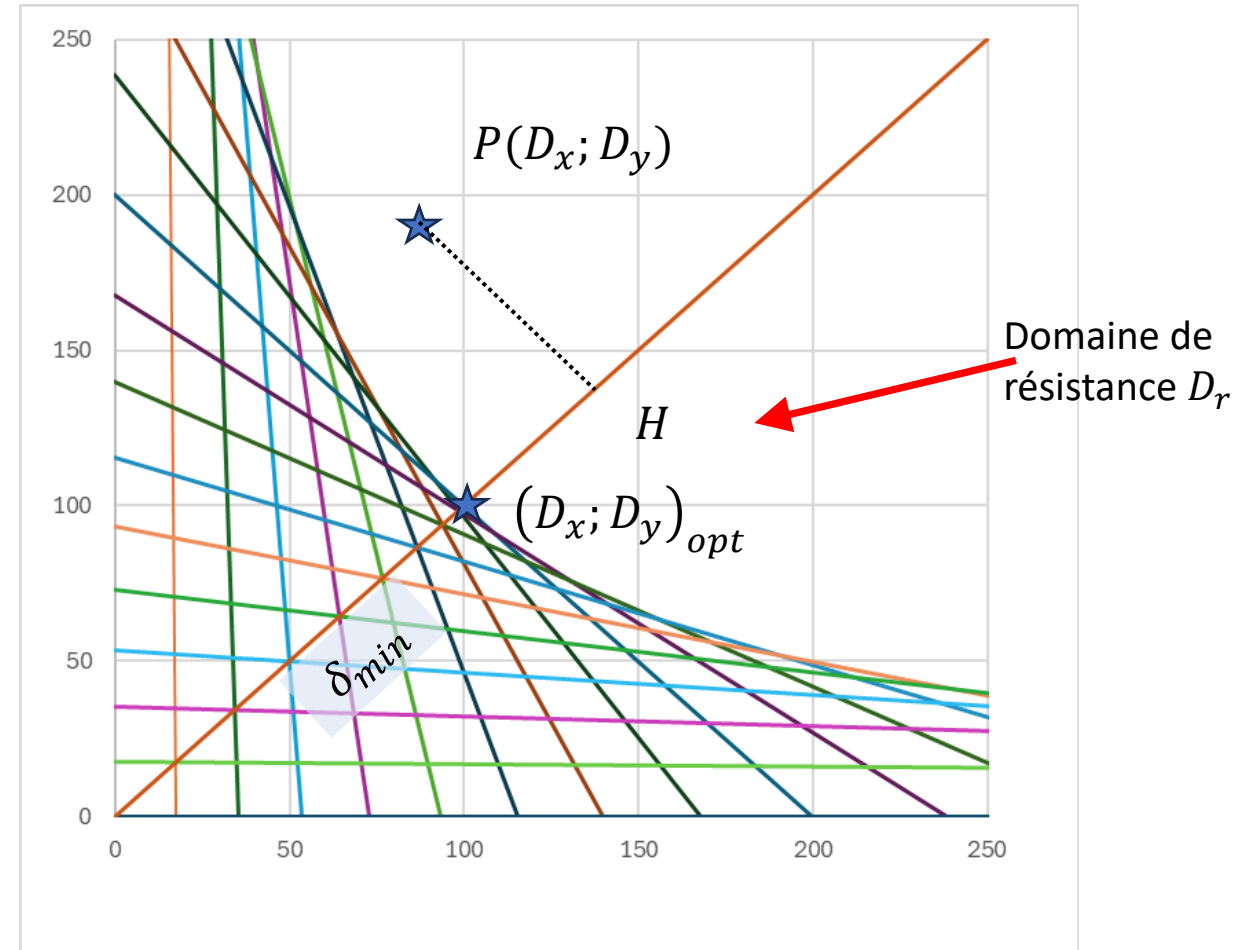
Les 2 droites ont des pentes inverses et coupent la bissectrice au même point  $D_x = D_y = 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$ .

Sur la bissectrice la condition de résistance est :

$$D_x = D_y > 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

Valeur maxi obtenue pour  $\theta = 45^\circ$  et

$$D_x = D_y = |F_{xy}|$$



$$F_{xx} = 100 ; F_{yy} = 250 ; F_{xy} = 100 \text{ kN/m}$$

## Méthode de Capra-Maury – cas général

### Projection des efforts sur $F(\theta)$

La facette  $F(\theta)$  est soumise aux efforts de flexion composée :

$$N(\theta) = {}^t\{n_\theta\}[F]\{n_\theta\}$$

$$M(\theta) = {}^t\{n_\theta\}[M]\{n_\theta\}$$

Où

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{yx} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$N(\theta) = F_{xx} \cos^2 \theta + F_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta F_{xy}$$

$$M(\theta) = M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta M_{xy}$$

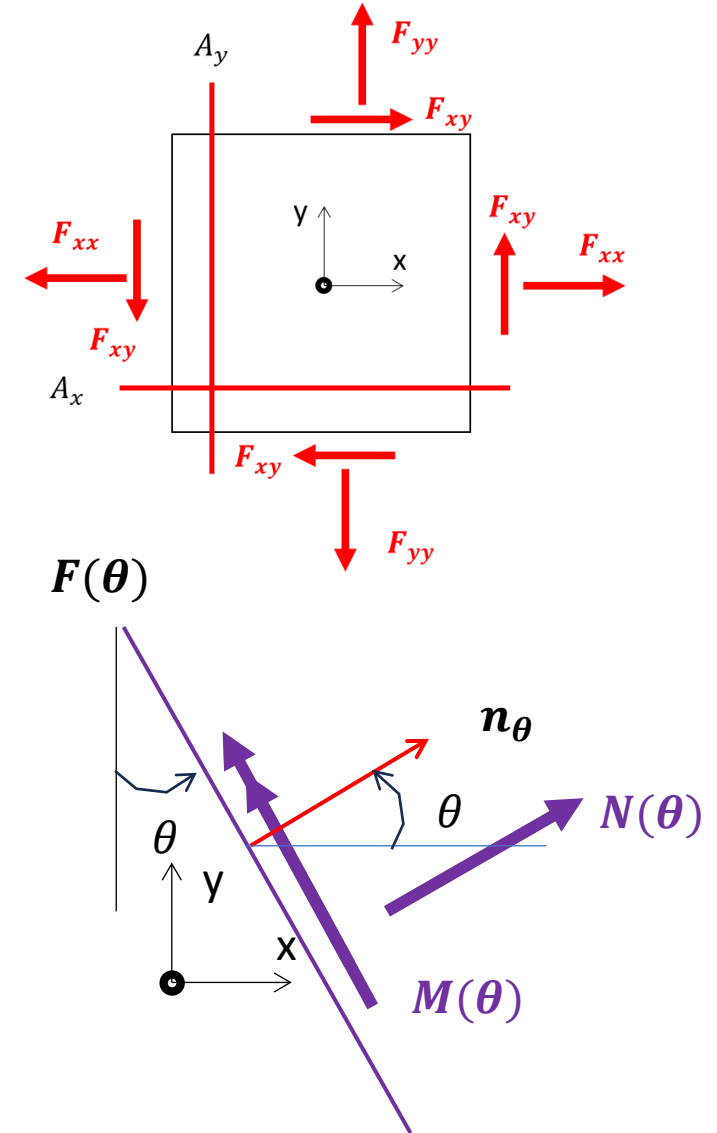
### Résistance dans la direction $n_\theta$ :

$$R(\theta) = R_x \cos^2 \theta + R_y \sin^2 \theta$$

$$R(\theta) = A_x \cos^2 \theta f_{yd} + R_y \sin^2 \theta f_{yd} = A_\theta f_{yd}$$

Section résistante dans la direction  $n_\theta$  :

$$A_\theta = A_x \cos^2 \theta + A_y \sin^2 \theta$$



# Méthode de Capra-Maury – cas général

## Calcul des armatures nécessaires pour $F(\theta)$

Calcul en flexion composée pour une section rectangulaire  $b=1\text{m}$  et hauteur  $h$   
 $(N(\theta); M(\theta)) \Rightarrow A_{inf}(\theta); A_{sup}(\theta)$

Résistance apportée par les aciers inf et sup dans les directions X et Y :

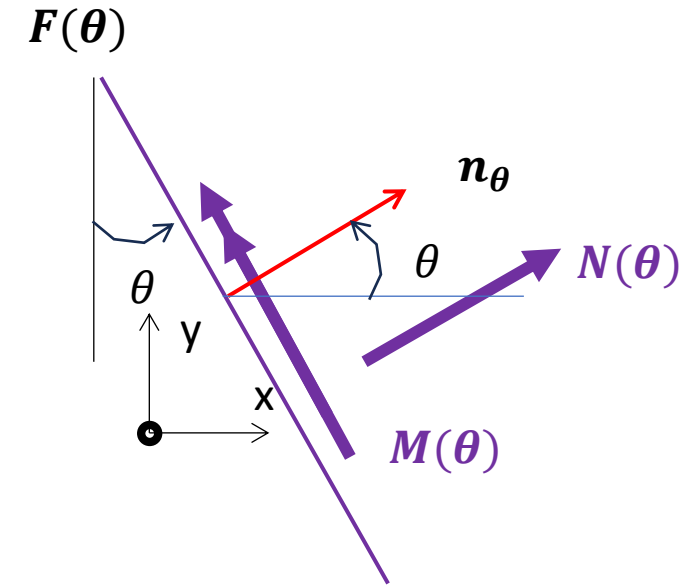
$$R_{inf}(\theta) = A_{inf,x} \cos^2 \theta \cdot f_{yd} + A_{inf,y} \sin^2 \theta \cdot f_{yd} > A_{inf}(\theta) \cdot f_{yd}$$

$$R_{sup}(\theta) = A_{sup,x} \cos^2 \theta \cdot f_{yd} + A_{sup,y} \sin^2 \theta \cdot f_{yd} > A_{sup}(\theta) \cdot f_{yd}$$

Principe d'économie :

$$A_{inf,x} + A_{inf,y} \text{ est minimale}$$

$$A_{sup,x} + A_{sup,y} \text{ est minimale}$$



## Méthode de Capra-Maury – cas général

### Mise en application

$$R_{inf}(\theta) = A_{inf,x} \cos^2 \theta \cdot f_{yd} + A_{inf,y} \sin^2 \theta \cdot f_{yd} > A_{inf}(\theta) \cdot f_{yd}$$

Dans le plan  $(A_{inf,x}; A_{inf,y})$  :  $D_{i,\theta}$  domaine de résistance =  $\frac{1}{2}$  plan délimité par la droite d'équation :

$$d_i(\theta) : A_{inf,y} > \frac{A_{inf}(\theta)}{\sin^2 \theta} - A_{inf,x} \cot^2 \theta$$

Quantité optimale :

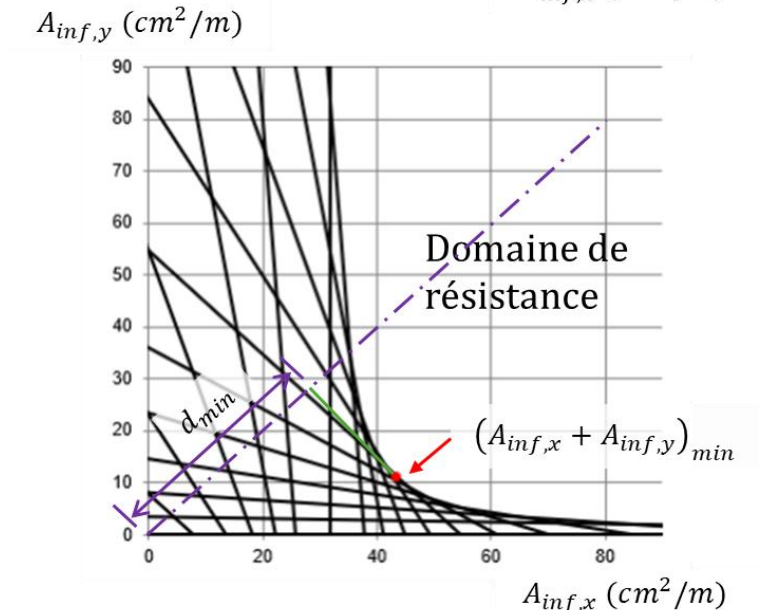
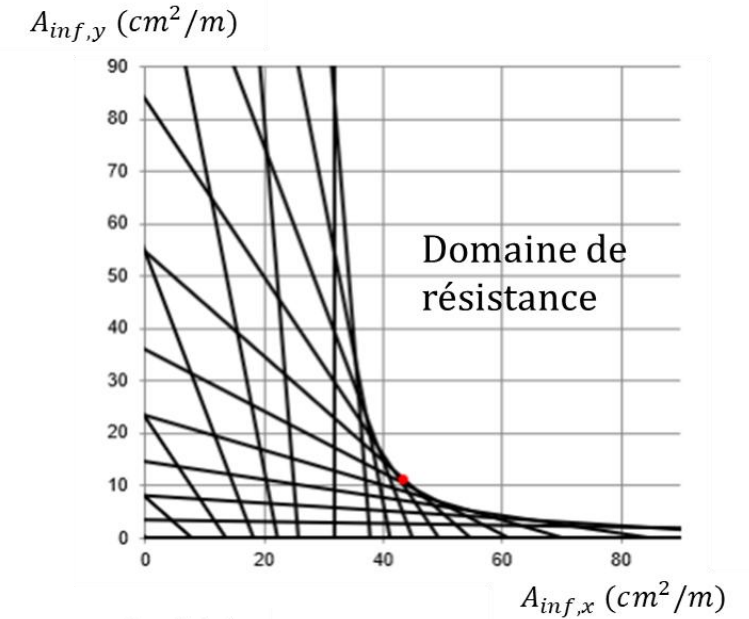
Point de  $D_i = \cap D_{i,\theta}$  dont la projection sur la bissectrice est la plus proche de l'origine.

Même principe pour les armatures supérieures

$$R_{sup}(\theta) = A_{sup,x} \cos^2 \theta \cdot f_{yd} + A_{sup,y} \sin^2 \theta \cdot f_{yd} > A_{sup}(\theta) \cdot f_{yd}$$

Dans le plan  $(A_{sup,x}; A_{sup,y})$  :  $D_{s,\theta}$  domaine de résistance =  $\frac{1}{2}$  plan délimité par la droite d'équation :

$$d_s(\theta) : A_{sup,y} > \frac{A_{sup}(\theta)}{\sin^2 \theta} - A_{sup,x} \cot^2 \theta$$



## Méthode de Capra-Maury – exemple

### Exemple pour un état de sollicitations demandant des A,inf

<b>Géométrie</b>		
h	0.60	m
d_inf	0.54	m
d_sup	0.54	m
<b>Matériaux</b>		
fck	30.00	MPa
gc	1.50	
fyk	500.00	MPa
gs	1.15	
<b>Efforts</b>		
Fxx	500.00	kN/m
Fyy	-200.00	kN/m
Fxy	150.00	kN/m
Mxx	800.00	kN.m/m
Myy	400.00	kN.m/m
Mxy	200.00	kN.m/m

Rappel du calcul en flexion composée :

$$M_{at} = N(d_{inf} - 0,5h) + M$$

$$\mu = M / 1. d^2 f_{cd}$$

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

$$\beta = 1 - 0,4\alpha = 0,5(1 + \sqrt{1 - 2\mu})$$

$$A = \frac{1}{f_{yd}} \left( \frac{M_{at}}{\beta d} - N \right)$$

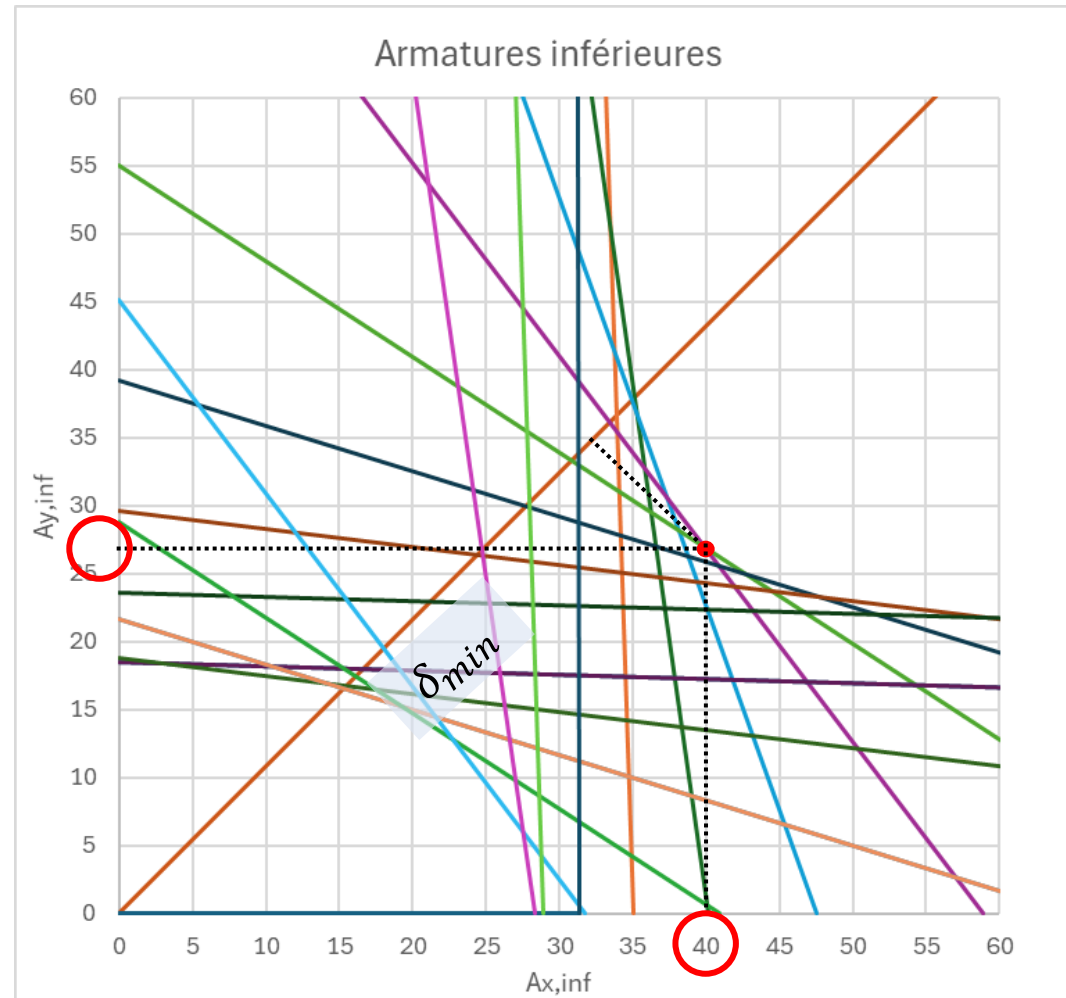
## Méthode de Capra-Maury – exemple

### Exemple pour un état de sollicitations demandant des $A_{inf}$

$\theta$ (deg)	C	S	F( $\theta$ ) (kN/m)	M( $\theta$ ) (kN.m/m)	Partie inférieure						Droites : aciers inférieurs				
					Mat (kN.m/m)	M cal (kN.m/m)	mu	x (m)	béta	Z (m)	A tendu (cm <sup>2</sup> /ml)	Ax (cm <sup>2</sup> /ml)	Ax (cm <sup>2</sup> /ml)	Ay (cm <sup>2</sup> /ml)	Ay (cm <sup>2</sup> /ml)
0	1.000	0.000	500.000	800.00	920.00	920.00	0.1578	0.117	0.914	0.493	31.39	0	31.39	#DIV/0!	0
10	0.985	0.174	530.195	856.34	983.59	983.59	0.1687	0.126	0.907	0.490	33.99	0	35.05	1127.33	0
20	0.940	0.342	514.534	881.77	1005.25	1005.25	0.1724	0.129	0.905	0.489	35.49	0	40.19	303.39	0
30	0.866	0.500	454.904	873.21	982.38	982.38	0.1684	0.125	0.907	0.490	35.66	0	47.55	142.65	0
40	0.766	0.643	358.498	831.69	917.73	917.73	0.1574	0.116	0.914	0.494	34.53	0	58.83	83.56	0
50	0.643	0.766	236.944	762.23	819.10	819.10	0.1404	0.103	0.924	0.499	32.31	0	78.19	55.05	0
60	0.500	0.866	104.904	673.21	698.38	698.38	0.1197	0.086	0.936	0.505	29.37	0	117.46	39.15	0
70	0.342	0.940	-21.697	575.35	570.14	570.14	0.0978	0.070	0.948	0.512	26.10	0	223.14	29.56	0
80	0.174	0.985	-127.589	480.47	449.84	449.84	0.0771	0.054	0.960	0.518	22.90	0	759.33	23.61	0
90	0.000	1.000	-200.000	400.00	352.00	352.00	0.0604	0.042	0.969	0.523	20.07	0	#####	20.07	0
100	-0.174	0.985	-230.195	343.66	288.41	288.41	0.0495	0.034	0.975	0.526	17.90	0	593.57	18.45	0
110	-0.342	0.940	-214.534	318.23	266.75	266.75	0.0457	0.032	0.977	0.527	16.57	0	141.63	18.76	0
120	-0.500	0.866	-154.904	326.79	289.62	289.62	0.0497	0.034	0.975	0.526	16.22	0	64.88	21.63	0
130	-0.643	0.766	-58.498	368.31	354.27	354.27	0.0607	0.042	0.969	0.523	16.92	0	40.96	28.84	0
140	-0.766	0.643	63.056	437.77	452.90	452.90	0.0777	0.055	0.960	0.518	18.65	0	31.79	45.15	0
150	-0.866	0.500	195.096	526.79	573.62	573.62	0.0984	0.070	0.948	0.512	21.28	0	28.37	85.12	0
160	-0.940	0.342	321.697	624.65	701.86	701.86	0.1203	0.087	0.936	0.505	24.55	0	27.80	209.86	0
170	-0.985	0.174	427.589	719.53	822.16	822.16	0.1410	0.103	0.924	0.499	28.08	0	28.95	931.10	0
180	-1.000	0.000	500.000	800.00	920.00	920.00	0.1578	0.117	0.914	0.493	31.39	0	31.39	2.0911E+33	0

## Méthode de Capra-Maury – exemple

Exemple pour un état de sollicitations demandant des  $A_{x,inf}$



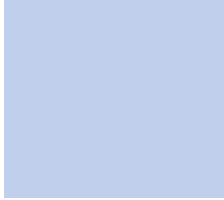
$$A_x = 40 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_y = 27 \text{ cm}^2/\text{m}$$

# Limites de la méthode Capra-Maury

- Approche valable pour la détermination des armatures
- En revanche :
  - Le calcul est fondé sur une résistance du béton égale à  $f_{cd}$ ,  $\forall$  l'orientation de la facette
  - Or les états de contraintes sont plus complexes dans une coque que dans une poutre
  - Il peut exister des états de compression dans une direction et de traction dans la direction perpendiculaire
  - Dans un état de (compression-traction) la résistance du béton est limitée à  $\nu f_{cd}$ ; or le calcul des armatures est fait a priori avec  $f_{cd}$

La méthode sandwich permet de répondre à ces lacunes.



# Coques sous efforts quelconques

Méthode Sandwich

05.

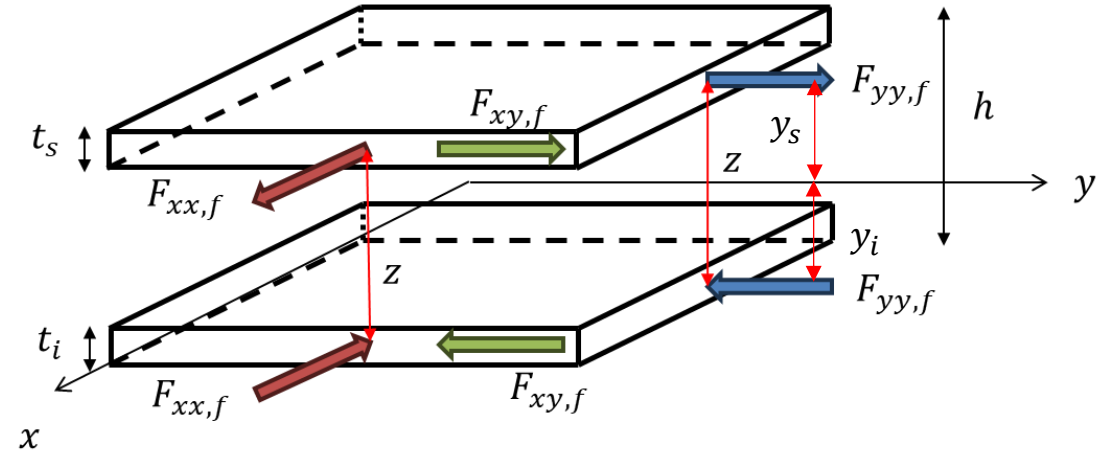
## Principe de la méthode

Transformation des moments en couples d'efforts avec bras de levier (comme pour une section BA en flexion simple).

Discretisation de l'élément en 3 couches.

Les couches extérieures sont justifiées sous efforts membranaires ( $F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}$ )

=> l'épaisseur des couches extérieures est pilotée par la contrainte admissible dans le béton



- Couche supérieure :

$$n_{xx,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xx} + \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{yy} + \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xy} + \frac{M_{xy}}{z}$$

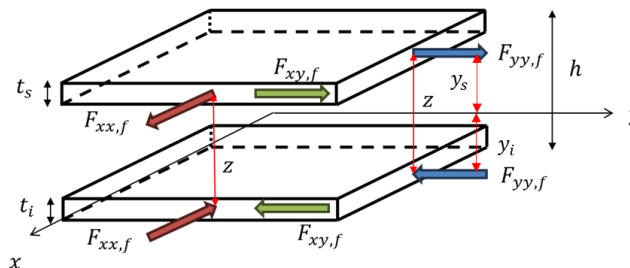
- Couche inférieure :

$$n_{xx,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xx} - \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{yy} - \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xy} - \frac{M_{xy}}{z}$$

## Mise en pratique : transformation des efforts en efforts de membrane



• Couche supérieure :

$$n_{xx,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xx} + \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{yy} + \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xy} + \frac{M_{xy}}{z}$$

• Couche inférieure :

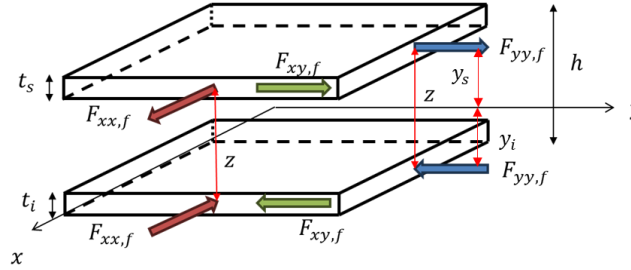
$$n_{xx,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xx} - \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{yy} - \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xy} - \frac{M_{xy}}{z}$$

COQUES BA - VERIFICATION DES CONTRAINTES DANS LE BETON A L'ELU								
Selon la méthode Sandwich - EN 1992-1-1:2023 - Annexe G								
Titre :		Verification des contraintes						
<b>DONNEES</b>				<b>RESULTATS</b>				
<b>&gt; Géométrie</b>				<b>&gt; Couches et Efforts</b>				
Epaiss (m)	Direction	ci (m)	cs (m)	Couche	Epaisseur (m)	Nxx (kN/m)	Nyy (kN/m)	Nxy (kN/m)
0.600	X	0.060	0.060	Inf	0.216	-421.46	-421.46	1142.92
	Y	0.060	0.060	Sup	0.149	543.52	543.52	-787.04
<b>&gt; Matériaux</b>				<b>&gt; Etat du béton</b>				
fck (MPa)	γc	fcd (MPa)	fcd,fiss (MPa)	Couche	Etat		σcd (MPa)	UR (*)
30	1.50	20.0	10.6	Inf	1	tendu - comprimé	10.56	0.72
				Sup	1	tendu - comprimé	10.56	0.50
<b>&gt; Efforts appliqués</b>				<b>Angles :</b>				
Convention de signes ELFI : F>0 en traction M>0 s'il tend la fibre sup								
Fxx (kN/ml)	Fyy (kN/ml)	Fxy (kN/ml)	Mxx (kN.m/ml)	Myy (kN.m/ml)	Mxy (kN.m/ml)	Vxz (kN/ml)	Vyz (kN/ml)	Optimal (°)
200.00	200.00	200.00	200.00	200.00	-400.00			45.00
								RDM (°)
								45.00
								Ecart (°)
								0.00
setec tpi	CI_BA_CapraMarti.xls	MARTI			12/04/2026		v.1	

## Mise en pratique



• Couche supérieure :

$$n_{xx,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xx} + \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{yy} + \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,s} = \frac{z - y_s}{z} N_{xy} + \frac{M_{xy}}{z}$$

• Couche inférieure :

$$n_{xx,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xx} - \frac{M_{xx}}{z}$$

$$n_{yy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{yy} - \frac{M_{yy}}{z}$$

$$n_{xy,i} = \frac{z - y_i}{z} N_{xy} - \frac{M_{xy}}{z}$$

									Etat									
									0	tendu -tendu								
									1	tendu - comprimé								
									2	comprimé - comprimé								

Ep	Torseur ELFI							Enrobage						Résistances			
	Fxx	Fyy	Fxy	Mxx	Myy	Mxy	Vx	Vy	cxs	cys	cxi	cyi	cxys	cxyi	fck	fcd	fcd,fiss
0.600	200	200	200	200	200	-400	0	0	0.060	0.06	0.060	0.060	0.06	0.06	30	20.000	10.56
m	kN/m	kN/m	kN/m	kN/m	kN/m	kN/m	kN/m	kN/m	m	m	m	m	m	m	MPa	MPa	MPa

Analyse couche supérieure																	Angle bielle
Itération	x	ys	yi	z	nxs	nys	nxys	s/2	R	n1	n2	etat	option	s rd	s cd	rapport	Optimal
0	0.0600	0.2700	0.2700	0.5400	470.4	470.4	-640.7	470.4	640.7	1111.1	-170.4	1	1	10.56	21.36	2.02	45.0
1	0.1214	0.2393	0.2393	0.4786	517.8	517.8	-735.7	517.8	735.7	1253.5	-217.8	1	1	10.56	12.12	1.15	45.0
2	0.1393	0.2303	0.2303	0.4607	534.2	534.2	-768.3	534.2	768.3	1302.5	-234.2	1	1	10.56	11.03	1.04	45.0
3	0.1455	0.2272	0.2272	0.4545	540.1	540.1	-780.1	540.1	780.1	1320.2	-240.1	1	1	10.56	10.72	1.02	45.0
4	0.1477	0.2261	0.2261	0.4523	542.2	542.2	-784.5	542.2	784.5	1326.7	-242.2	1	1	10.56	10.62	1.01	45.0
5	0.1486	0.2257	0.2257	0.4514	543.0	543.0	-786.1	543.0	786.1	1329.1	-243.0	1	1	10.56	10.58	1.00	45.0
6	0.1489	0.2256	0.2256	0.4511	543.3	543.3	-786.7	543.3	786.7	1330.0	-243.3	1	1	10.56	10.57	1.00	45.0
7	0.1490	0.2255	0.2255	0.4510	543.5	543.5	-786.9	543.5	786.9	1330.4	-243.5	1	1	10.56	10.56	1.00	45.0
8	0.1490	0.2255	0.2255	0.4510	543.5	543.5	-787.0	543.5	787.0	1330.5	-243.5	1	1	10.56	10.56	1.00	45.0
9	0.1491	0.2255	0.2255	0.4509	543.5	543.5	-787.0	543.5	787.0	1330.5	-243.5	1	1	10.56	10.56	1.00	45.0
10	0.1491	0.2255	0.2255	0.4509	543.5	543.5	-787.0	543.5	787.0	1330.5	-243.5	1	1	10.56	10.56	1.00	45.0

Analyse inférieure																
Itération	x	ys	yi	z	nxi	nyi	nxyi	s/2	R	n1	n2	etat	option	s rd	s cd	rapport
0	0.0600	0.2700	0.2700	0.5400	-270.4	-270.4	840.7	-270.4	840.7	570.4	-1111.1	1	1	10.56	28.02	2.65
1	0.1592	0.2204	0.2204	0.4408	-353.8	-353.8	1007.5	-353.8	1007.5	653.8	-1361.3	1	1	10.56	12.65	1.20
2	0.1908	0.2046	0.2046	0.4092	-388.8	-388.8	1077.6	-388.8	1077.6	688.8	-1466.3	1	1	10.56	11.29	1.07
3	0.2041	0.1980	0.1980	0.3959	-405.2	-405.2	1110.3	-405.2	1110.3	705.2	-1515.5	1	1	10.56	10.88	1.03
4	0.2103	0.1949	0.1949	0.3897	-413.2	-413.2	1126.4	-413.2	1126.4	713.2	-1539.6	1	1	10.56	10.71	1.01
5	0.2133	0.1933	0.1933	0.3867	-417.2	-417.2	1134.5	-417.2	1134.5	717.2	-1551.7	1	1	10.56	10.64	1.01
6	0.2149	0.1926	0.1926	0.3851	-419.3	-419.3	1138.6	-419.3	1138.6	719.3	-1557.9	1	1	10.56	10.60	1.00
7	0.2156	0.1922	0.1922	0.3844	-420.3	-420.3	1140.7	-420.3	1140.7	720.3	-1561.0	1	1	10.56	10.58	1.00
8	0.2160	0.1920	0.1920	0.3840	-420.9	-420.9	1141.8	-420.9	1141.8	720.9	-1562.7	1	1	10.56	10.57	1.00
9	0.2162	0.1919	0.1919	0.3838	-421.2	-421.2	1142.3	-421.2	1142.3	721.2	-1563.5	1	1	10.56	10.57	1.00
10	0.2164	0.1918	0.1918	0.3836	-421.3	-421.3	1142.6	-421.3	1142.6	721.3	-1563.9	1	1	10.56	10.56	1.00

Calcul itératif en augmentant progressivement l'épaisseur :

$$t_{n+1} = r_n \times t_n$$

## Principe de la méthode

### Justification des couches extérieures (futur EC2)

- Chaque couche extérieure est vérifiée sous efforts de membrane
- L'angle des fissures dans la couche dépend :
  - des quantités d'armatures dans les directions et y
  - de l'état de contrainte dans la couche
- Il est possible de définir un angle optimal de la fissure permettant d'optimiser les sections d'armatures : voir EC2 - membranes
- L'épaisseur de la couche est telle que  $\sigma_{cd} < \sigma_{adm}$

$\sigma_{adm} \approx 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd}$  si la coque est fissurée

$$f_{tdx} = \rho_x f_{yd}$$

$$f_{tdy} = \rho_y f_{yd}$$

$$\rho_x = A_x / 1.t ; \rho_y = A_y / 1.t$$



Calcul itératif sur  $t$  pour respecter  $\sigma_{adm}$

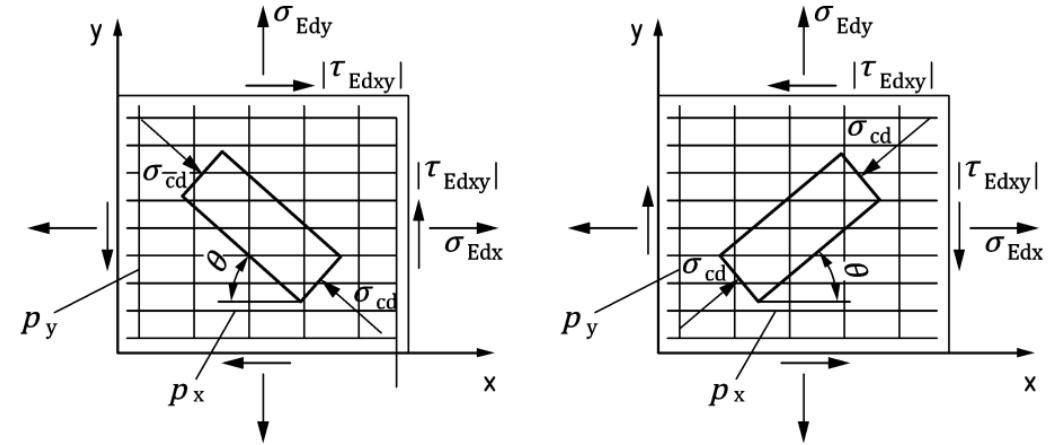


Table G.1 — Optimum reinforcement, concrete stress and strut inclination for membrane elements

Conditions	$\cot \theta^*$	$f_{tdx}^*$	$f_{tdy}^*$	$\sigma_{cd}^*$
$\sigma_{Edx} \geq - \tau_{Edxy} $ $\sigma_{Edy} \geq - \tau_{Edxy} $	1	$\sigma_{Edx} +  \tau_{Edxy} $	$\sigma_{Edy} +  \tau_{Edxy} $	$2 \tau_{Edxy} $
$\sigma_{Edx} \leq \sigma_{Edy}$ $\sigma_{Edx} < - \tau_{Edxy} $ $\sigma_{Edx}\sigma_{Edy} \leq \tau_{Edxy}^2$	$\frac{-\sigma_{Edx}}{ \tau_{Edxy} }$	0	$\sigma_{Edy} + \frac{\tau_{Edxy}^2}{ \sigma_{Edx} }$	$ \sigma_{Edx}  \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edx}}\right)^2\right)$
$\sigma_{Edx} \geq \sigma_{Edy}$ $\sigma_{Edy} < - \tau_{Edxy} $ $\sigma_{Edx}\sigma_{Edy} \leq \tau_{Edxy}^2$	$\frac{ \tau_{Edxy} }{-\sigma_{Edy}}$	$\sigma_{Edx} + \frac{\tau_{Edxy}^2}{ \sigma_{Edy} }$	0	$ \sigma_{Edy}  \left(1 + \left(\frac{\tau_{Edxy}}{\sigma_{Edy}}\right)^2\right)$

## Merci pour votre attention

Jocelyn POULAIN

Directeur technique setec nucléaire

Tél +33 1 82 51 69 49 / Mob +33 6 23 98 06 77

Mél : [jocelyn.poulain@setec.com](mailto:jocelyn.poulain@setec.com)

INGÉNIEURS  
& CITOYENS



setec  
nucléaire