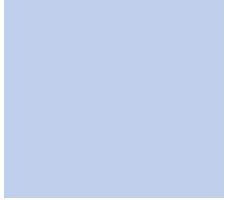




Séance 5

Objectif : vérification des contraintes à l'ELS dans une coque soumise à 6 efforts

- Conventions & hypothèses
- Mise en équations
- Résolution
- Illustrations



Conventions & hypothèses

01.

Conventions

On reprend les conventions usuelles des résultats donnés par les éléments finis :

Efforts de membrane :

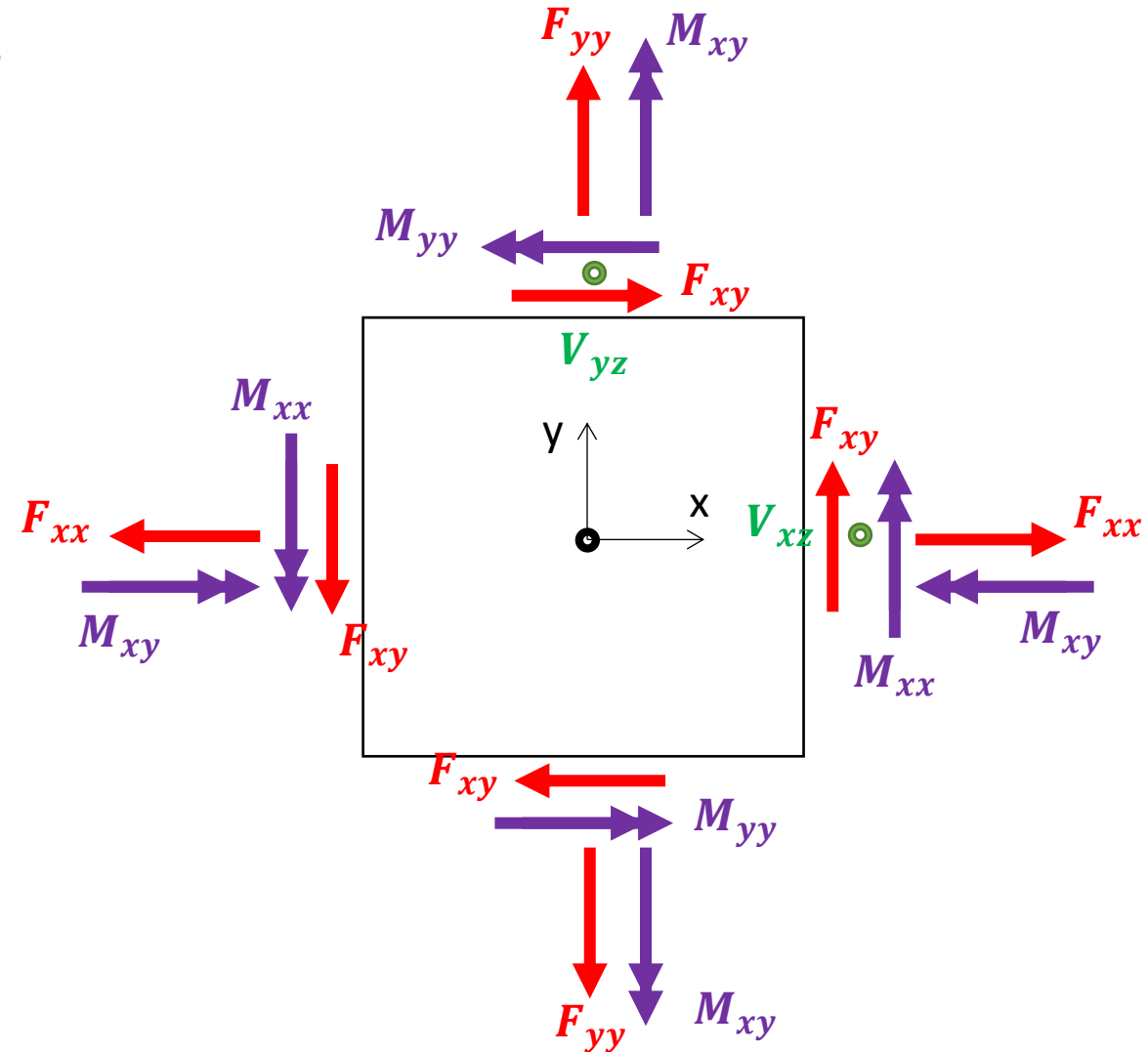
- $F_{xx} > 0$ en traction
- $F_{yy} > 0$ en traction
- $F_{xy} > 0$ par rotation de $+\pi/2$ par rapport à F_{xx}

Moments de flexion et torsion:

- $M_{xx} > 0$ s'il demande des aciers suivant x en face sup ($z > 0$)
- $M_{yy} > 0$ s'il demande des aciers suivant y en face sup ($z > 0$)
- $M_{xy} > 0$ s'il crée un cisaillement $\sigma_{xy} > 0$ en face sup

Unités

- Efforts en KN/m ou MN/m
- Moments en kN.m/m ou MN.m/m
- Sections d'armatures en cm^2/ml



Matériau Béton

Comportement élastique linéaire :

E_c : module d'Young

ν : coefficient de Poisson

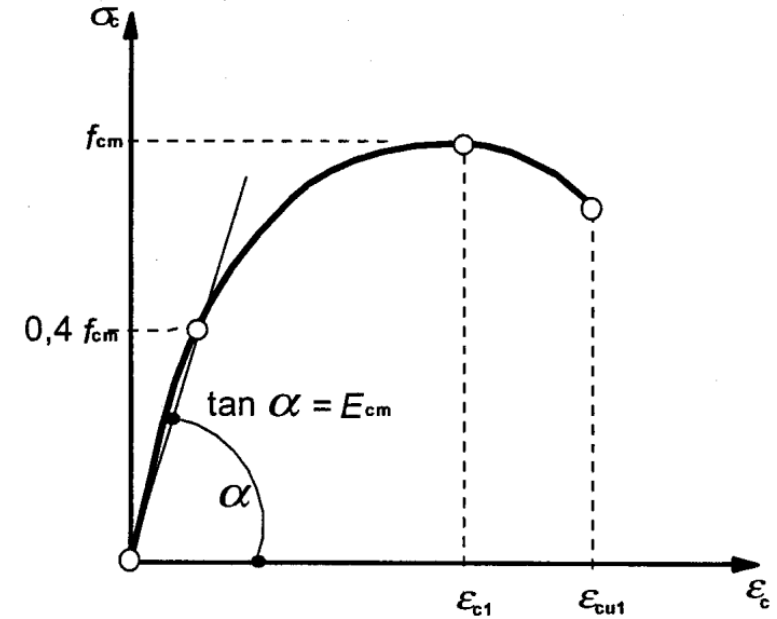
Béton non résistant en traction

Pour $\varepsilon_c < 0$:

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c$$

Pour $\varepsilon_c > 0$

$$\sigma_c = 0$$



Rem : l'hypothèse de linéarité est vraie en toute rigueur pour des niveaux de contraintes modérés ($\sigma_c < 0,4 f_{ck}$).

Matériau Béton

Les différents états de contrainte du béton :

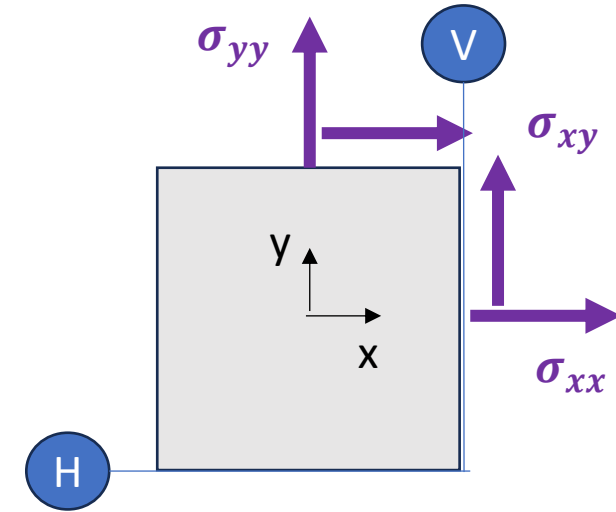
Etat 0 = béton comprimé dans toutes les directions :
les 2 contraintes principales sont négatives

- Pas de fissure : **0** fissures
- Comportement isotrope
- Application des lois de l'élasticité en contraintes planes :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_c} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_c} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_c}$$



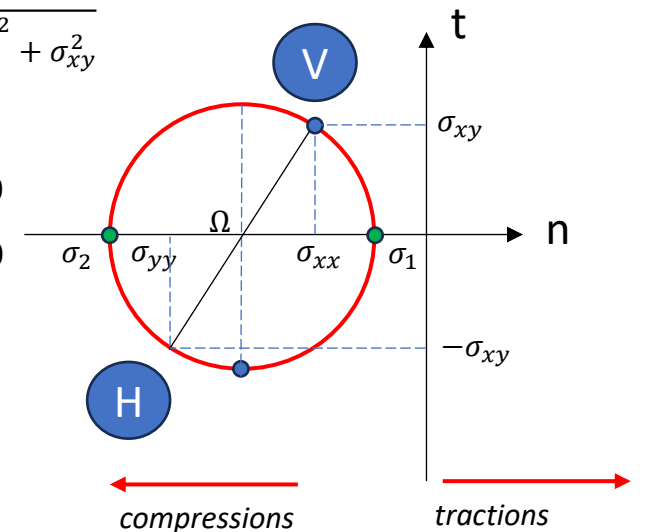
Propriétés du cercle de Mohr

$$s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{s}{2} + R < 0$$

$$\sigma_2 = \frac{s}{2} - R < 0$$

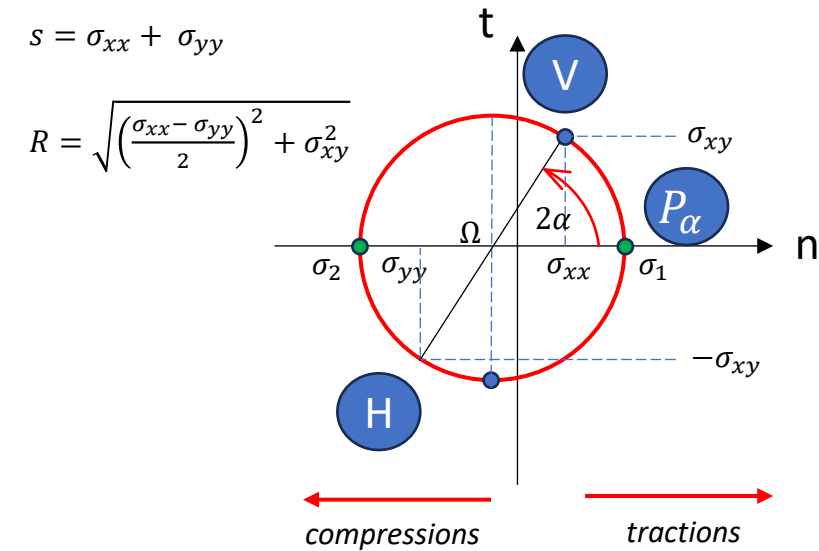
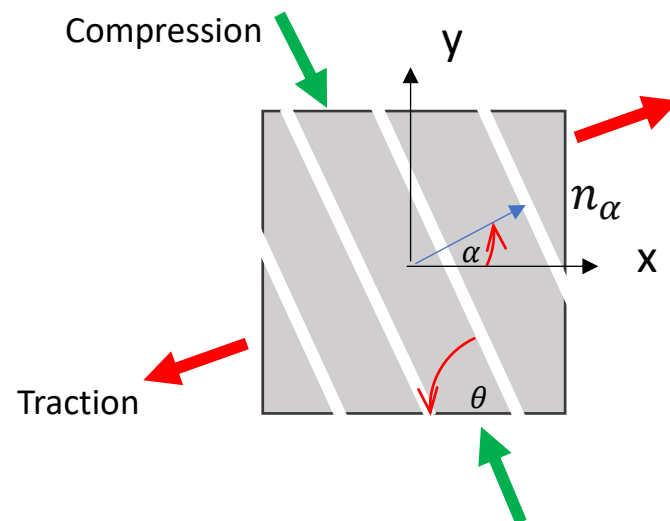


Matériau Béton

Les différents états de contrainte du béton :

Etat 1 = Partiellement comprimé et tendu: les 2 contraintes principales de signe contraire

- Bielles comprimées d'inclinaison θ par rapport à l'axe x-x
- Plans de fissures P_α inclinés d'un angle α par rapport à V (ou de normale n_α)



Dans la réalité, on passe de V à P_α en tournant de α . Dans le cercle de Mohr on passe de P_α à V en tournant d'un angle 2α .

Sur le cercle de Mohr, on lit :

$$\tan 2\alpha = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - s} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

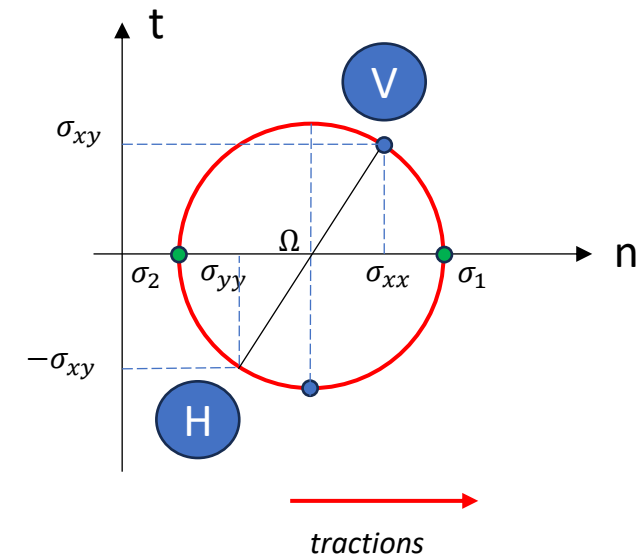
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

Matériau Béton

Les différents états de contrainte du béton :

Etat 2 = Béton entièrement tendu:
les 2 contraintes principales sont positives

- Le béton est négligé



$$s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

Matériau acier

Comportement élastique linéaire :

$E_S = 200\,000\text{ MPa}$: module d'Young

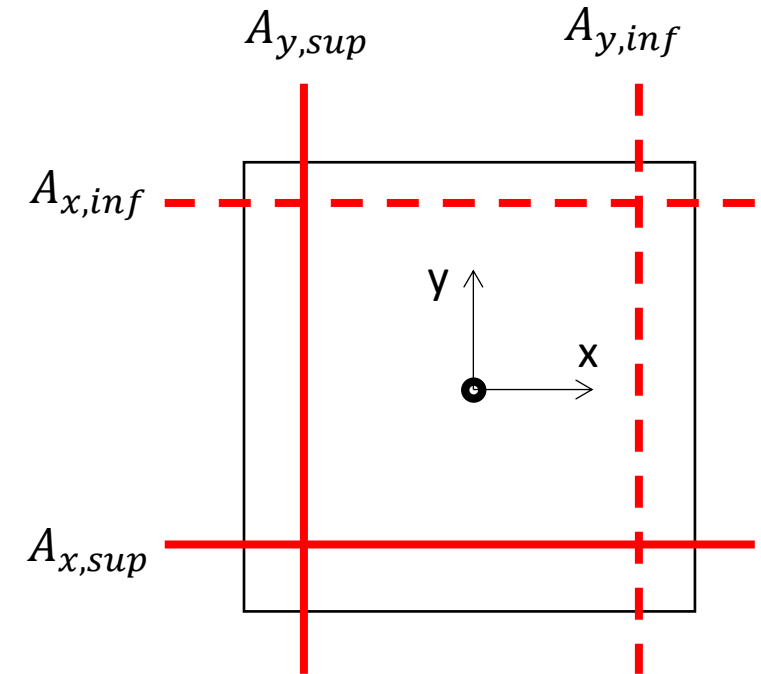
$$\sigma_S = E_S \varepsilon_S$$

Les armatures ne travaillent que dans leur direction (1D)

Par ailleurs, on suppose les quantités d'armatures connues.

⇒ On fait un calcul en vérification

Pour faire un calcul en détermination : il faudra faire des itérations sur les sections et les augmenter jusqu'à atteinte des critères ELS (par exemple limitation de la contrainte dans les aciers).



Hypothèses complémentaires

Hypothèse d'adhérence parfaite acier-béton :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s$$

Hypothèse de Navier :

Les sections planes restent planes. Les déformations suivent des lois du type :

$$\varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 z$$

$$\varepsilon_{yy} = a_2 + b_2 z$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z$$



Méthodologie et mise en équations



02.

Méthodologie

Champ de déformation du béton $[\varepsilon]$ défini par 6 constantes a_i, b_i à déterminer :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_1 + b_1 z \\ \varepsilon_{yy} &= a_2 + b_2 z \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z\end{aligned}$$

A un champ de déformation $[\varepsilon]$ donné à l'élément de coque, il est possible de déterminer le champ de contrainte (relation $\sigma - \varepsilon$) puis par intégration des contraintes, de déterminer un champ de forces équilibré par la coque, soit $[F_{\text{int}}] = \{N_{xx}; N_{yy}; N_{xy}; M_{xx}; M_{yy}; M_{yy}\}$.

⇒ $[F_{\text{int}}]$ dépend ainsi de 6 variables.

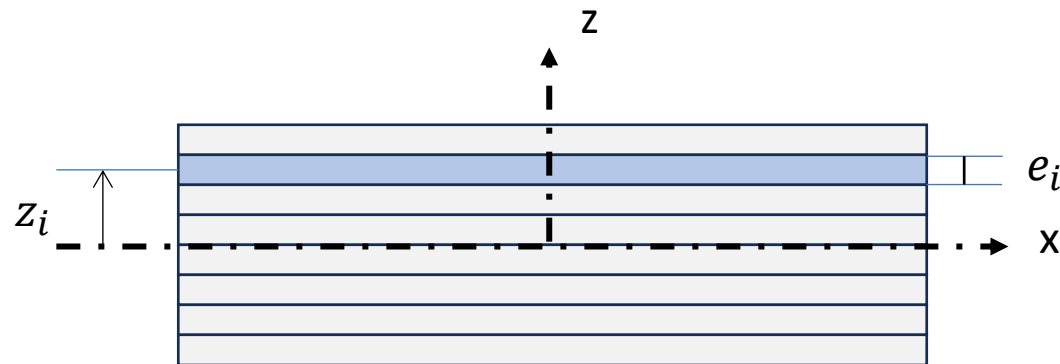
Or le champ de force extérieur est défini par 6 composantes $[F_{\text{ext}}] = \{F_{xx}; F_{yy}; N_{xy}; M_{xx}; M_{yy}; M_{yy}\}$ (donné par le calcul aux éléments finis par exemple).

L'égalité $[F_{\text{int}}] = [F_{\text{ext}}]$ permet de déterminer les constantes inconnues a_i, b_i

Méthodologie

Constat pour le béton:

- Etat de contrainte dans l'épaisseur de la couche complexe : les contraintes principales dans le béton varient suivant $z \Rightarrow$ les angles de fissure et des bielles peuvent varier suivant z
 - Relation non linéaire entre contrainte et déformation pour le béton (fissuration)
- \Rightarrow Pas de relation directe et explicite entre efforts extérieurs et champ de déformation du béton (comme en flexion simple ELS pour une poutre par exemple)
- \Rightarrow Solution : discrétisation dans l'épaisseur de la coque de béton, chaque couche peut avoir un **état 0**, **1** ou **2**.



Armatec : discrétisation en 20 couches

Mise en équation

Couche entièrement comprimée : calcul des contraintes

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

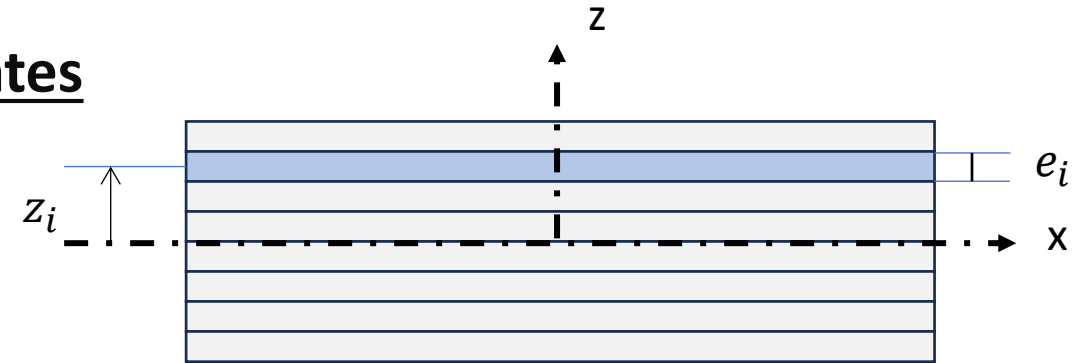
Où : $[\varepsilon] = [a] + z \cdot [b]$

$$\Rightarrow [\sigma] = [D][a] + z \cdot [D][b]$$

$$\sigma_{xx} = D_{11}a_1 + D_{12}a_2 + (D_{11}b_1 + D_{12}b_2)z$$

$$\sigma_{yy} = D_{21}a_1 + D_{22}a_2 + (D_{21}b_1 + D_{22}b_2)z$$

$$\sigma_{xy} = D_{33}a_3 + D_{33}b_3z$$



$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

Mise en équation

Couche entièrement comprimée : calcul des forces

Soit une couche i comprise entre $z_{i,inf} = (i - 1) \times e$ et $z_{i,sup} = i \times e$ (On suppose la couche discrétisée en n couches identiques d'épaisseur e).

$$N_{xx,i} = \int_{z_{i,inf}}^{z_{i,sup}} 1. \sigma_{xx}(z) dz = \int_{(i-1).e}^{i.e} \sigma_{xx}(z) dz$$

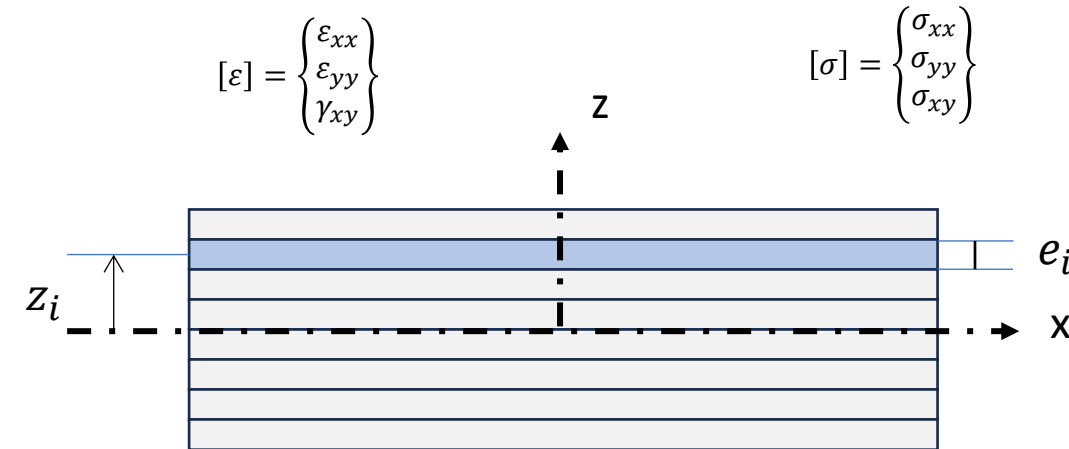
$$= (D_{11}a_1 + D_{12}a_2)e + (D_{11}b_1 + D_{12}b_2)(i - 0,5)e^2$$

$$N_{yy,i} = \int_{z_{i,inf}}^{z_{i,sup}} 1. \sigma_{yy}(z) dz = \int_{(i-1).e}^{i.e} \sigma_{yy}(z) dz$$

$$= (D_{21}a_1 + D_{22}a_2)e + (D_{21}b_1 + D_{22}b_2)(i - 0,5)e^2$$

$$N_{xy,i} = \int_{z_{i,inf}}^{z_{i,sup}} 1. \sigma_{xy}(z) dz = \int_{(i-1).e}^{i.e} \sigma_{xy}(z) dz$$

$$= D_{33}a_3e + D_{33}b_3(i - 0,5)e^2$$



$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [D][a] + z. [D][b]$$

$$\sigma_{xx} = D_{11}a_1 + D_{12}a_2 + (D_{11}b_1 + D_{12}b_2)z$$

$$\sigma_{yy} = D_{21}a_1 + D_{22}a_2 + (D_{21}b_1 + D_{22}b_2)z$$

$$\sigma_{xy} = D_{33}a_3 + D_{33}b_3z$$

Sous forme condensée

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_i = e. [D][a] + m_{ci}[D][b]$$

Où $m_{ci} = 1. (z_{i,sup}^2 - z_{i,inf}^2)/2$ est le moment statique de la couche i

Mise en équation

Couche entièrement comprimée : calcul des moments

Soit une couche i comprise entre $z_{i,inf} = (i - 1) \times e$ et $z_{i,sup} = i \times e$ (On suppose la couche discrétisée en n couches identiques d'épaisseur e).

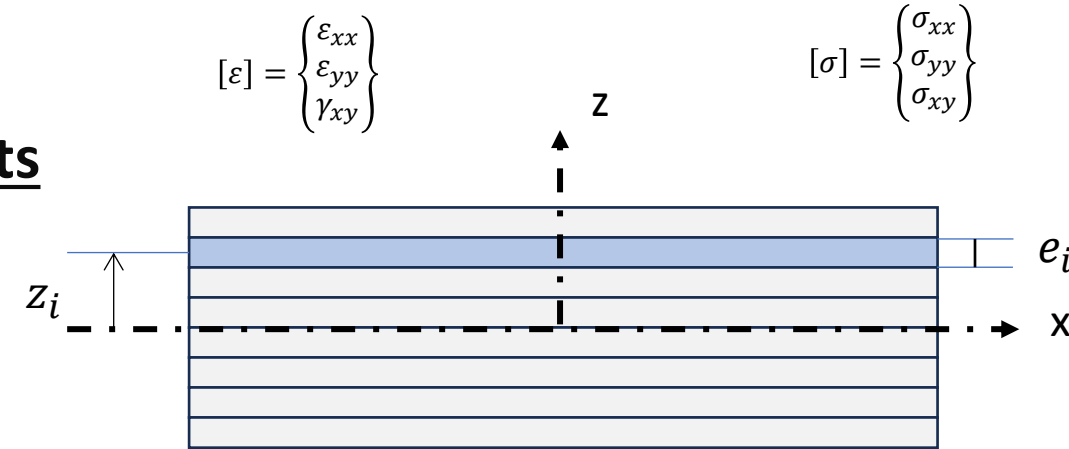
$$M_{xx,i} = \int_{(i-1).e}^{i.e} 1. \sigma_{xx}(z)z. dz =$$

$$= (D_{11}a_1 + D_{12}a_2)m_{ci} + (D_{11}b_1 + D_{12}b_2)I_{ci}$$

Où $I_{ci} = \frac{1}{3} (z_{i,sup}^3 - z_{i,inf}^3) = 1. \frac{e^3}{3} (n^3 - (n - 1)^3)$ est l'inertie de la couche i .

Soit :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_i = m_{ci}[D][a] + I_{ci}[D][b]$$



$$[D] = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [D][a] + z. [D][b]$$

$$\sigma_{xx} = D_{11}a_1 + D_{12}a_2 + (D_{11}b_1 + D_{12}b_2)z$$

$$\sigma_{yy} = D_{21}a_1 + D_{22}a_2 + (D_{21}b_1 + D_{22}b_2)z$$

$$\sigma_{xy} = D_{33}a_3 + D_{33}b_3z$$

Rappel :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_i = e. [D][a] + m_{ci}[D][b]$$

Où $m_{ci} = 1. (z_{i,sup}^2 - z_{i,inf}^2)/2$ est le moment statique de la couche i

Mise en équation

Couche entièrement comprimée : calcul des torseurs

Relation entre torseur interne et paramètres du champ de déformation pour la couche i :

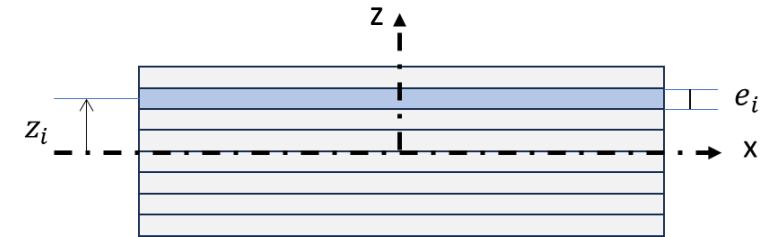
$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} eD_{11} & eD_{12} & 0 & m_{ci}D_{11} & m_{ci}D_{12} & 0 \\ eD_{21} & eD_{22} & 0 & m_{ci}D_{21} & m_{ci}D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & eD_{33} & 0 & 0 & m_{ci}D_{33} \\ m_{ci}D_{11} & m_{ci}D_{12} & 0 & I_{ci}D_{11} & I_{ci}D_{12} & 0 \\ m_{ci}D_{21} & m_{ci}D_{22} & 0 & I_{ci}D_{21} & I_{ci}D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{ci}D_{33} & 0 & 0 & I_{ci}D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$[T_{int}]_i = [R]_i[d]$$

$[R]_i$ représente la matrice de raideur de la couche i
On note que la matrice est symétrique

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$



$$[D] = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_i = e \cdot [D][a] + m_{ci}[D][b]$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_i = m_{ci}[D][a] + I_{ci}[D][b]$$

Mise en équation

Armature de direction α_j

On considère un acier « j » de section A_j à l'altitude z_j

L'acier ne développe une force que dans la direction de α_j

Hypothèse : l'armature est soumise au même champ de déformation que le béton (adhérence) : $\varepsilon_s = \varepsilon_c$

Calcul de l'élongation de l'acier ε_s :

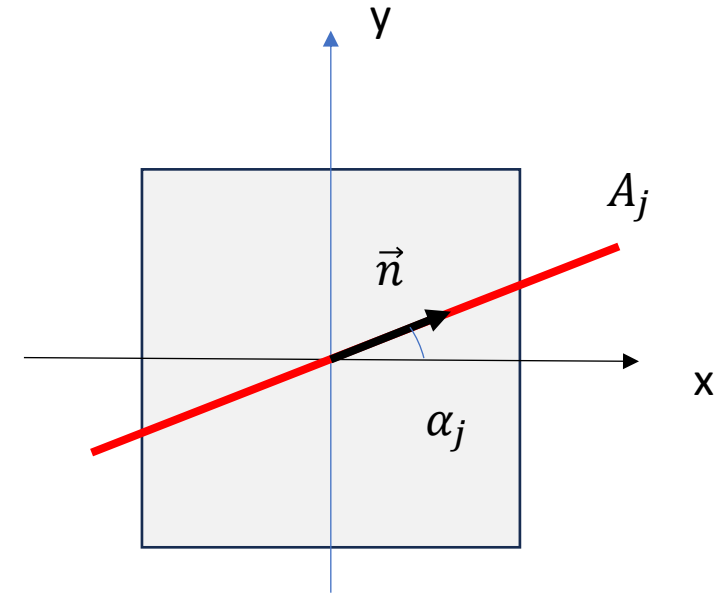
$$\varepsilon_s = {}^t\{n\}[\varepsilon]\{n\}$$

Soit :

$$\varepsilon_s = \{C \ S\} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix} = C^2 \varepsilon_{xx} + 2CS \cdot \varepsilon_{xy} + S^2 \cdot \varepsilon_{yy} = {}^t\{q\}[\varepsilon]$$

Contrainte dans l'acier :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = n E_c = E_s {}^t\{q\}([a] + z_j [b])$$



$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$$

$${}^t\{q\} = \{C^2 \ S^2 \ 2CS\}$$

$$\varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 z$$

$$\varepsilon_{yy} = a_2 + b_2 z$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z$$

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Mise en équation

Armature de direction α_j

Contrainte dans l'acier :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = n E_c = E_s {}^t\{q\}([a] + z_j [b])$$

Tenseur de contrainte de l'armature dans son repère local :

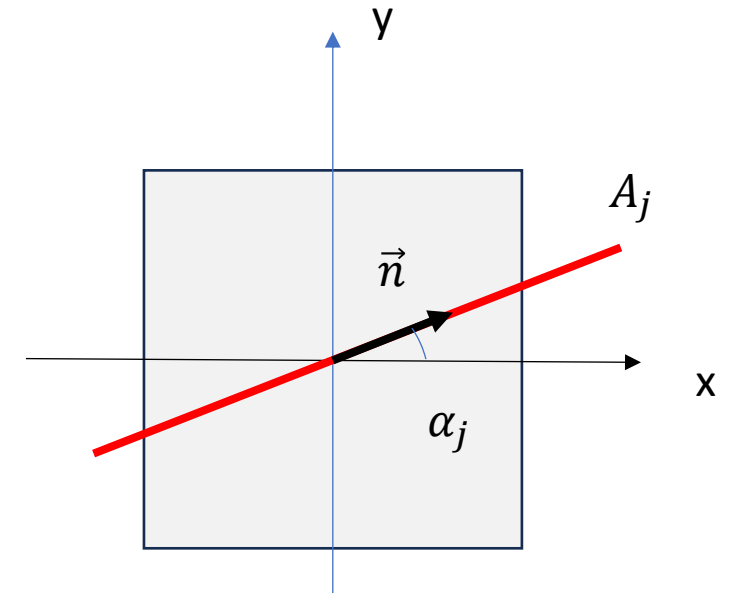
$$[\sigma_s]_{loc} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projection du tenseur de contrainte de l'armature dans le repère de la coque (rotation d'angle $-\alpha_j$) :

$$[\sigma_s]_{(x,y)} = {}^t[P][\sigma_s]_{loc}[P]$$

Où :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_j) & -\sin(-\alpha_j) \\ \sin(-\alpha_j) & \cos(-\alpha_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$



$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$$

$${}^t\{q\} = \{C^2 \ S^2 \ CS\}$$

$$\varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 z$$

$$\varepsilon_{yy} = a_2 + b_2 z$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z$$

Mise en équation

Armature de direction α_j

Tenseur des contraintes de l'acier dans le repère de la coque

$$[\sigma_s]_{(x,y)} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s \cdot C^2 & \sigma_s \cdot CS \\ \sigma_s \cdot CS & \sigma_s \cdot S^2 \end{bmatrix}$$

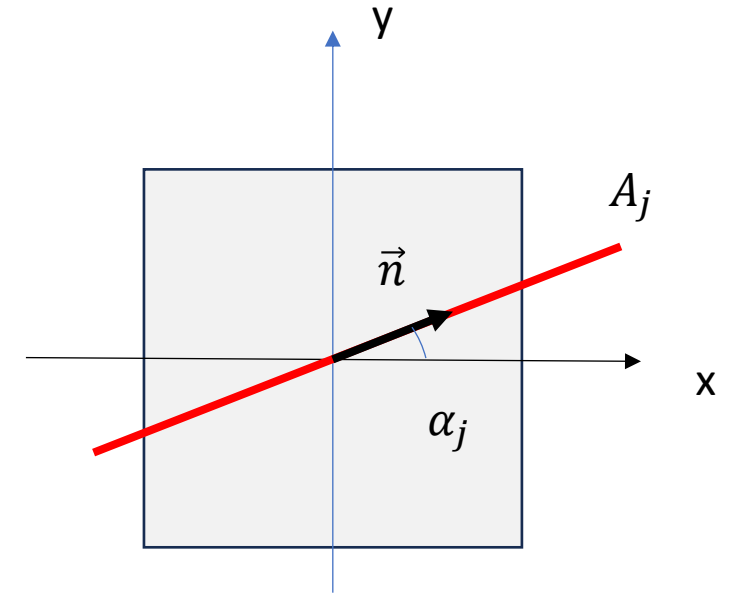
Où:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = E_s {}^t\{q\}([a] + z_j[b]) = nE_c [C^2(a_1 + b_1 z_j) + S^2(a_2 + b_2 z_j) + CS(a_3 + b_3 z_j)]$$

Puis :

$$N_{xx,j} = A_j \sigma_{s,xx} ; N_{yy,j} = A_j \sigma_{s,yy} ; N_{xy,j} = A_j \sigma_{s,xy}$$

$$M_{xx,j} = A_j \sigma_{s,xx} z_j ; M_{yy,j} = A_j \sigma_{s,yy} z_j ; M_{xy,j} = A_j \sigma_{s,xy} z_j$$



$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$$

$${}^t\{q\} = \{C^2 \ S^2 \ CS\}$$

$$\varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 z$$

$$\varepsilon_{yy} = a_2 + b_2 z$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z$$

Mise en équation

Armature de direction α_j

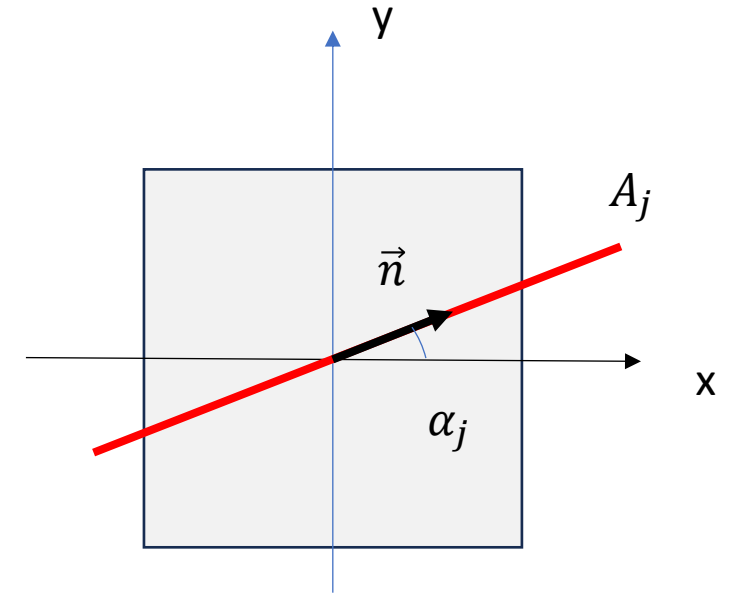
Torseur interne de l'armature

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_{A_j} = nE_c A_j \begin{bmatrix} C^4 & C^2 S^2 & C^3 S & C^4 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j \\ C^2 S^2 & S^4 & C S^3 & C^2 S^2 z_j & S^4 z_j & C S^3 z_j \\ C^3 S & C S^3 & C^2 S^2 & C^3 S z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j \\ C^4 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j & C^4 z_j^2 & C^2 S^2 z_j^2 & C^3 S z_j^2 \\ C^2 S^2 z_j & S^4 z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j^2 & S^4 z_j^2 & C S^3 z_j^2 \\ C^3 S z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j^2 & C S^3 z_j^2 & C^2 S^2 z_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$[T_{int}]_{A_j} = [R]_j [d]$$

La matrice $[R]_j$ est une matrice de rigidité de l'armature A_j ; elle est symétrique.



$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha_j \\ \sin \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$$

$${}^t\{q\} = \{C^2 \ S^2 \ CS\}$$

$$\varepsilon_{xx} = a_1 + b_1 z$$

$$\varepsilon_{yy} = a_2 + b_2 z$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = a_3 + b_3 z$$

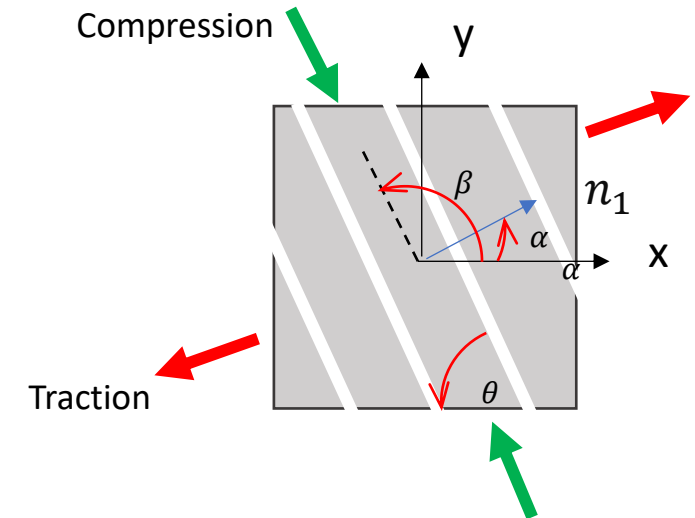
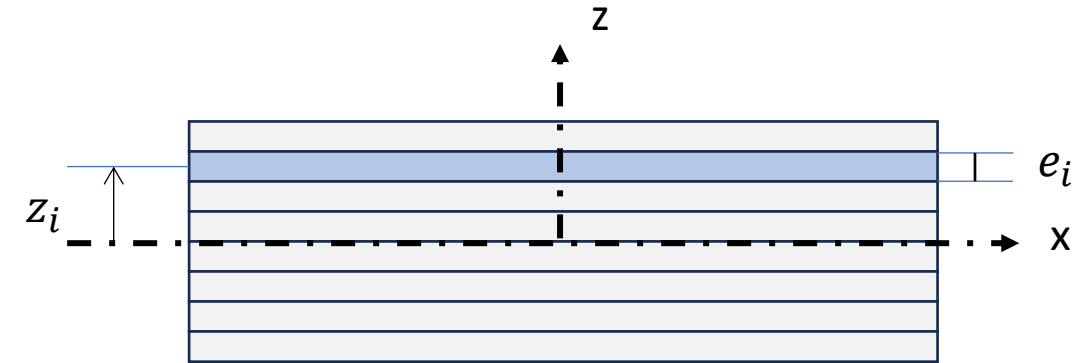
Mise en équation

Couche de béton fissurée - Bielles

On considère qu'une telle couche ne reprend que des efforts parallèles aux bielles.

On peut donc assimiler une bielle à un acier fictif et établir sa matrice de rigidité avec les adaptations suivantes :

- Remplacement de l'aire homogénéisée (nA_i) par l'épaisseur de la couche
- Inclinaison de la bielle parallèle à la direction des fissures : $\beta = \alpha + \pi/2$
- Position médiane de l'armature fictive $z_i =$ position du centre de la couche



$n_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ direction principale de traction.

Mise en équation

Couche fissurée - Bielle de direction β

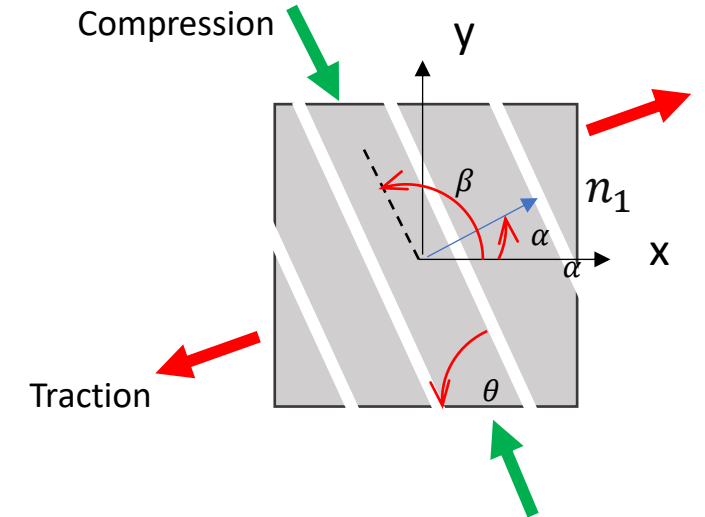
Torseur interne de la couche fissurée

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_{B_i} = E_c e \begin{bmatrix} C^4 & C^2 S^2 & C^3 S & C^4 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j \\ C^2 S^2 & S^4 & C S^3 & C^2 S^2 z_j & S^4 z_j & C S^3 z_j \\ C^3 S & C S^3 & C^2 S^2 & C^3 S z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j \\ C^4 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j & C^4 z_j^2 & C^2 S^2 z_j^2 & C^3 S z_j^2 \\ C^2 S^2 z_j & S^4 z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j^2 & S^4 z_j^2 & C S^3 z_j^2 \\ C^3 S z_j & C S^3 z_j & C^2 S^2 z_j & C^3 S z_j^2 & C S^3 z_j^2 & C^2 S^2 z_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$[T_{int}]_{B_i} = [R]_{B_i} [d]$$

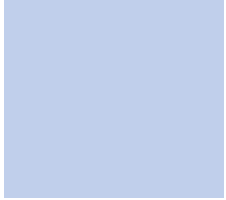
La matrice $[R]_{B_i}$ est une matrice de rigidité de la couche i fissurée ; elle est symétrique.



$n_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ direction principale de traction.

$$C = \cos \beta = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$S = \sin \beta = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$



Résolution

03.

Résolution

1 / Assemblage des raideurs élémentaires

Torseur interne de la coque :

$$[T_{int}] = \sum [T_{int}]_i + [T_{int}]_{Bi} + [T_{int}]_{Aj}$$

Soit :

$$[T_{int}] = \left(\sum [R]_i + [R]_{Bi} + [R]_{Aj} \right) \cdot [d] = [R] \cdot [d]$$

$[R]$ est la matrice de rigidité de la coque

Résolution

2 / Inversion du système

On doit assurer

$$[T_{ext}] = [T_{int}]$$

Soit :

$$[T_{ext}] = [R] \cdot [d] \Rightarrow [d] = [R]^{-1} \cdot [T_{ext}]$$

On déduit les paramètres (a_i, b_i) donc le champ de déformation dans la coque.

On déduit alors le champ de contrainte dans la coque :

- Contraintes dans les aciers
- Contraintes dans les couches de béton et état de fissuration (**0** , **1** , **2**).

Résolution

3 / Calcul itératif

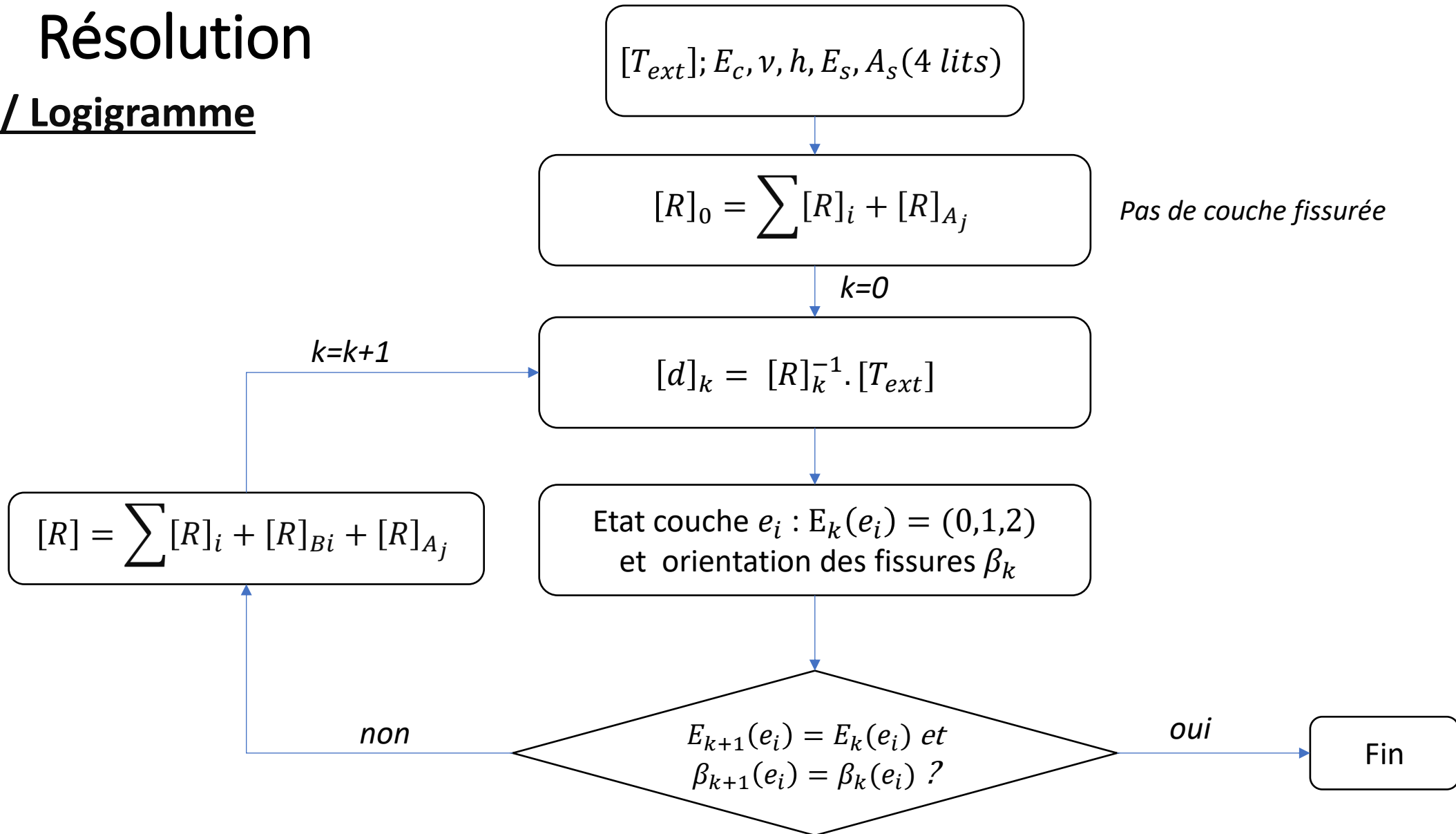
Itération 1 :

- On suppose que toutes les couches sont non fissurées (état **0**) avec une raideur $[R]_0$
- Le calcul de $[d]_1 = [R]_0^{-1} \cdot [T_{ext}]$ permet d'effectuer un premier calcul de l'état de contrainte chaque couche
- On effectue une mise à jour de la raideur $[R]_1$
- Le calcul de $[d]_2 = [R]_1^{-1} \cdot [T_{ext}]$ permet une mise à jour de l'état de contrainte et de fissuration dans les différentes couches
- => nouvelle raideur $[R]_2$, etc

Calcul itératif jusqu'à atteinte d'un état stable ie pas de modification de l'état des couches (**0,1,2**) ni de la direction des fissures entre 2 calculs successifs.

Résolution

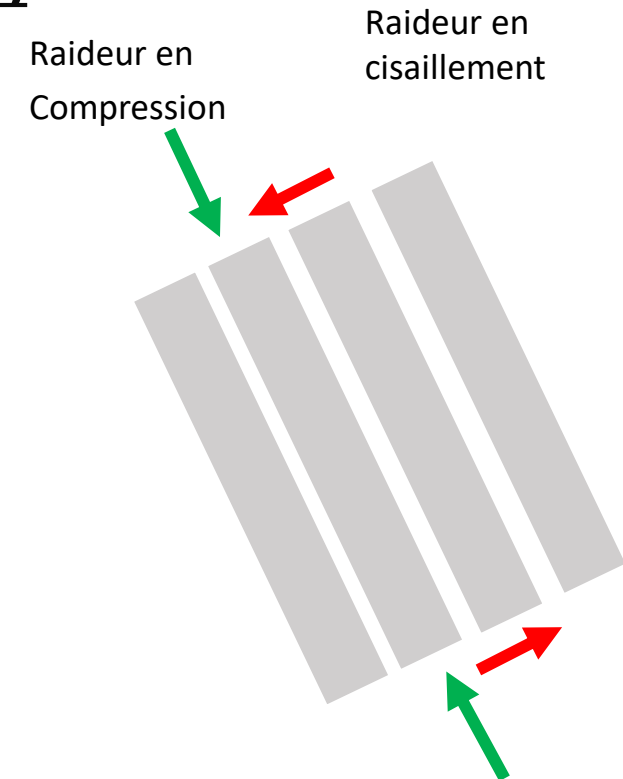
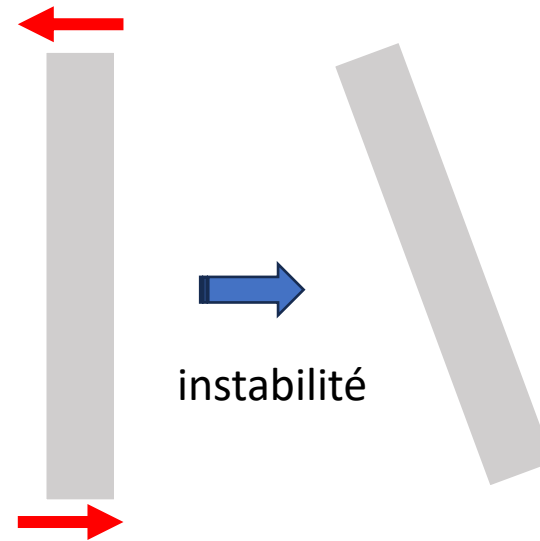
3 / Logigramme



Résolution

3 / Cas particulier des couches à l'état 1 (comprimé – tendu)

Par construction, les bielles n'ont qu'une seule raideur axiale et pas de raideur en cisaillement => le moindre effort de cisaillement aux extrémités de la bielle rend celle-ci instable



Ainsi, une couche à l'état 1 peut devenir instable en entraînant une divergence du champ de déformation (terme b_3 en particulier).

Résolution

3 / Cas particulier des couches à l'état 1 (comprimé – tendu)

Résolution de la divergence :

On introduit une raideur en cisaillement permettant à la bielle de résister au cisaillement.

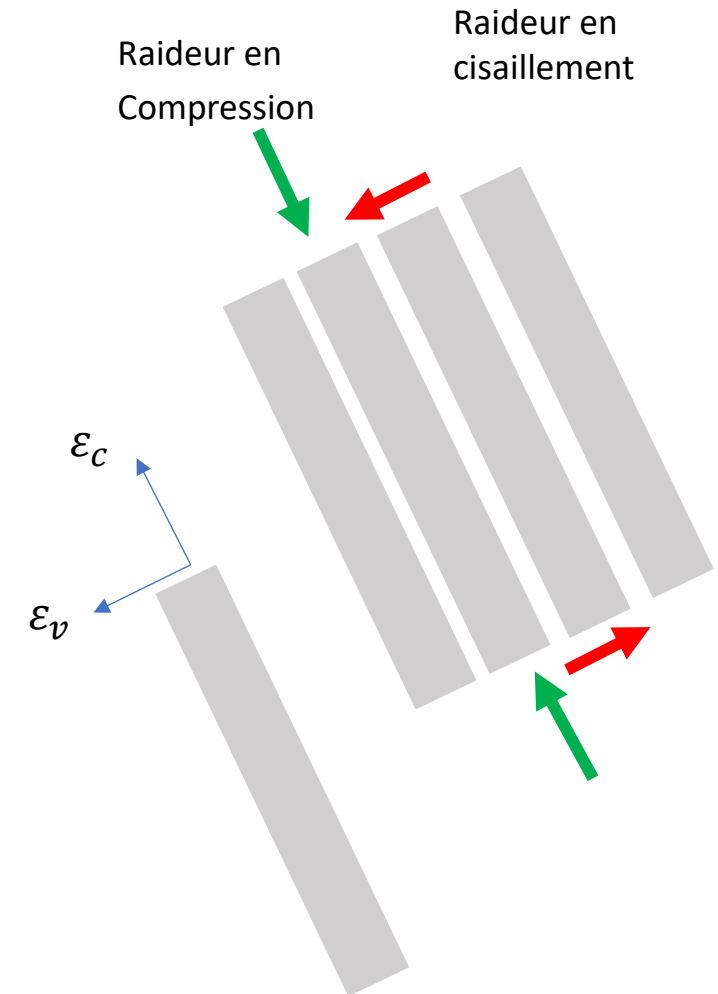
Tenseur de contraintes d'une couche à l'état 1, dans son repère local :

$$[\sigma_c]_{loc} = \begin{bmatrix} \sigma_c & \sigma_v \\ \sigma_v & 0 \end{bmatrix}$$

Loi contrainte déformation :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c \varepsilon_c \\ \sigma_v &= k E_c \varepsilon_v \end{aligned}$$

Remarque : la raideur en cisaillement a une réalité physique, c'est une raideur de cisaillement entre les bielles fissurées (le béton fissuré est apte à reprendre du cisaillement). Dans notre modèle, in fine, l'orientation des bielles est calée sur la direction principale donc on aura $\varepsilon_v = 0$, entraînant $\sigma_v = 0$. Conclusion : la valeur de k est arbitraire, elle n'intervient que pour assurer la stabilité des calculs (dans d'autres modèles comme MCFT de Vecchio, cette raideur peut être vraiment mobilisée, entraînant une orientation des fissures différentes de celles de la direction principale de traction).



Résolution

3 / Cas particulier des couches à l'état 1 (comprimé – tendu)

Raideur additionnelle en cisaillement pour les couches à l'état 1

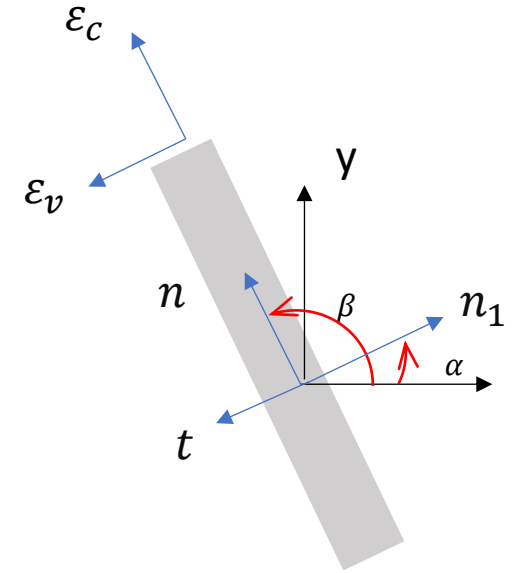
$$\varepsilon_v = {}^t\{t\}[\varepsilon]\{n\}$$

Soit :

$$\varepsilon_s = \{-S \ C\} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix} = -CS \varepsilon_{xx} + (C^2 - S^2)\varepsilon_{xy} + CS\varepsilon_{yy} = {}^t\{q\}[\varepsilon]$$

Contrainte de cisaillement dans la bielle :

$$\sigma_v = kE_c \varepsilon_v = kE_c {}^t\{q\}([a] + z_j[b])$$



$n \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ direction de la bielle

$t \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$ direction principale de traction

$${}^t\{q\} = \{-CS ; C^2 - S^2 ; CS\}$$

Résolution

3 / Cas particulier des couches à l'état 1 (comprimé – tendu)

Projection de σ_v dans le repère de la coque

$$[\sigma_v]_{(x,y)} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_v \\ \sigma_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2CS & C^2 - S^2 \\ C^2 - S^2 & 2CS \end{bmatrix} \cdot \sigma_v$$

Torseur dû à σ_v :

$$F_{xx,v} = 1. e. \sigma_{xx,v} ; F_{yy,v} = 1. e. \sigma_{yy,v} ; F_{xy,v} = 1. e. \sigma_{xy,v}$$

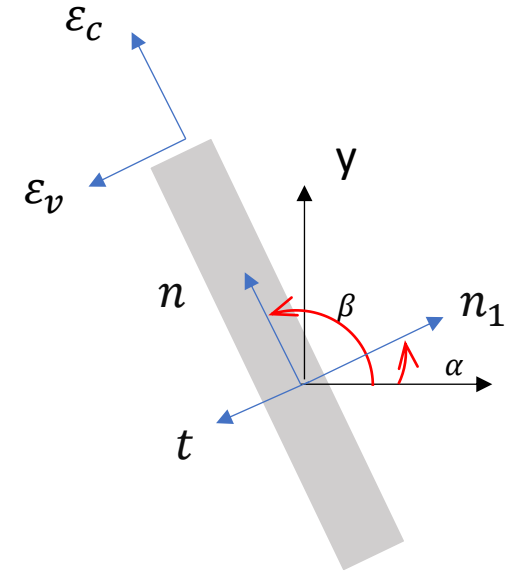
$$M_{xx,v} = 1. e. \sigma_{xx,v} \cdot z_i ; F_{yy,v} = 1. e. \sigma_{yy,v} \cdot z_i ; F_{xy,v} = 1. e. \sigma_{xy,v} \cdot z_i$$

On aboutit ainsi à une relation :

$$[T_{int}]_{v,i} = [R]_{v,i} \cdot [d]$$

Si la couche i est dans l'état 1, alors on lui ajoute la raideur $[R]_{i,v}$:

$$[R]'_{B,i} = [R]_{B,i} + [R]_{v,i}$$

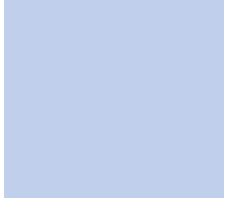


$n \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ direction de la bielle

$t \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$ direction principale de traction

$${}^t\{q\} = \{-CS ; C^2 - S^2 ; CS\}$$

$$\sigma_v = kE_c \varepsilon_v = kE_c {}^t\{q\}([a] + z_j[b])$$



Illustrations

04.

Illustration : cisaillement pur

Coque d'épaisseur 1m, ferrillée avec HA20@200 en inf et sup et X,Y

$$F_{xy} = 1 \text{ MN/m}$$

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME												
Titre : CISAILLEMENT PUR												
DONNEES					RESULTATS							
Béton	Epaisseur = 1.00 m		Modification d'état = 0 (0 => Ok; 1 => itération nécessaire)									
Variation maxi d'angle de fissure (deg) = 0.000 < 0.100												
fck (MPa)	Ecm (MPa)	Ec,eff (MPa)	v	fctd (MPa)								
40.0	35 220	35 000	0.00	1.64								
Aciers passifs introduits sous la forme : n barres phi .../m												
n°	Section		position		Δ Angle (deg)	N°	z moyen (m)	Etat	σ1	σ2	Angle de fiss. ou d'acier	
	nombre/ml	phi (mm)	cm2/ml	% face ext	% axe							
1 = AX SUP	5	20	15.7	0.050	0.450	0.0	2	0.425	1	2.00	-	-45.0
2 = AY SUP	5	20	15.7	0.050	0.450	0.0	3	0.375	1	2.00	-	-45.0
3 = AX INF	5	20	15.7	0.050	-0.450		4	0.325	1	2.00	-	-45.0
4 = AY INF	5	20	15.7	0.050	-0.450		5	0.275	1	2.00	-	-45.0
							6	0.225	1	2.00	-	-45.0
							7	0.175	1	2.00	-	-45.0
							8	0.125	1	2.00	-	-45.0
							9	0.075	1	2.00	-	-45.0
							10	0.025	1	2.00	-	-45.0
							11	-0.025	1	2.00	-	-45.0
							12	-0.075	1	2.00	-	-45.0
							13	-0.125	1	2.00	-	-45.0
							14	-0.175	1	2.00	-	-45.0
							15	-0.225	1	2.00	-	-45.0
							16	-0.275	1	2.00	-	-45.0
							17	-0.325	1	2.00	-	-45.0
							18	-0.375	1	2.00	-	-45.0
							19	-0.425	1	2.00	-	-45.0
							20	-0.475	1	2.00	-	-45.0
							Face inf	-0.500	1	2.00	-	
							1 = X sup	0.450	1	318.31	-	0.0
							2 = Y sup	0.450	1	318.31	-	90.0
							3 = X inf	-0.450	1	318.31	-	0.0
							4 = Y inf	-0.450	1	318.31	-	90.0
Es = 200 000 MPa			Position des armatures									
na = 5.71			Orientation des armatures									
Efforts appliqués (> 0 en traction)												
Fxx =	0.0	kN/ml										
Fyy =	0.0	kN/ml										
Fxy =	1000.0	kN/ml										
Mxx =	0.0	kN.m/ml										
Myy =	0.0	kN.m/ml										
Mxy =	0.0	kN.m/ml										
Convention de signes pour les résultats												
- Béton : σ > 0 en compression												
σ1 = compr. maxi σ2 = compr. mini												
- Acier : σ > 0 en traction												
Itération si les angles de fissures varient de plus de 0.1° d'une itération à la suivante												
setec tpi	CL-Plaque.xls	19/04/26	PLAQ-ELS				v.8					

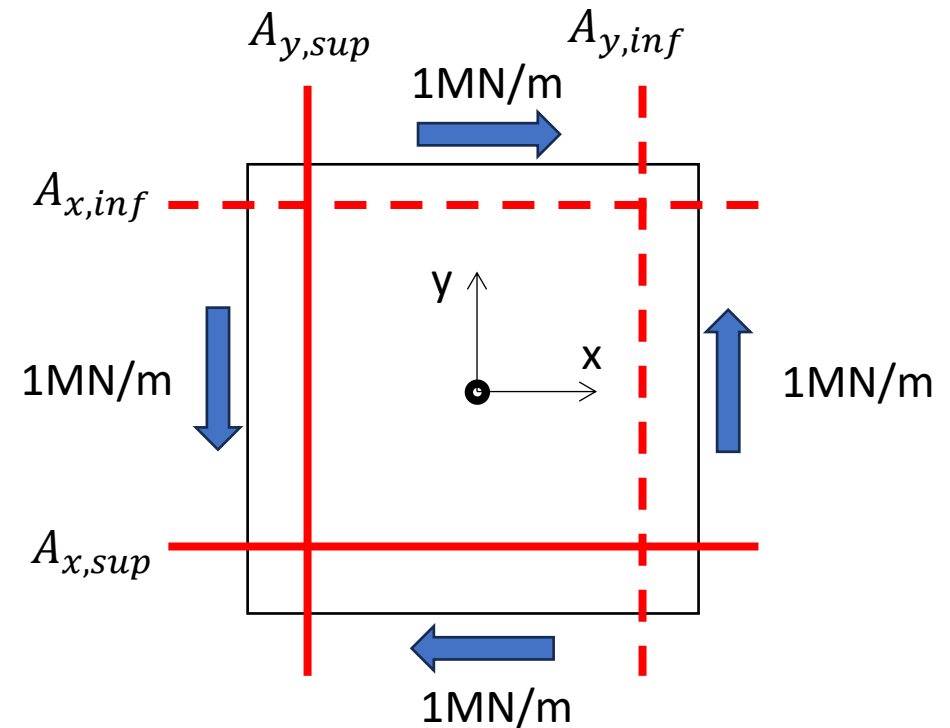


Illustration : cisaillement pur

Tapez une équation ici. Coque d'épaisseur 1m, ferrillée avec HA20@200 en inf et sup et X,Y : F = 1 MN/m

Analyse :

⇒ Bielles inclinées à -45° (ou 135° idem)

⇒ Contraintes identiques pour toutes les armatures : $\sigma_s = 318,31 \text{ MPa}$

⇒ Effort repris par les armatures

Suivant x : $R_x = A_x \sigma_s = 2 \times 15,7 \times 31,83 = 1000 \text{ kN}$

Suivant y : $R_y = A_y \sigma_s = 2 \times 15,7 \times 31,83 = 1000 \text{ kN}$

⇒ Contrainte dans la bielle béton :

$$\sigma_c = \sigma_{xy} (\tan \theta + \cot \theta) = -2\sigma_{xy} = -2 \text{ MPa}$$

Peut s'interpréter comme la somme de 2 contributions :

- l'effort extérieur de compression : $N_{ext} = 1000 \text{ kN/m}$
- La traction dans les armatures qui comprime le béton

Résultats identiques à l'approche ELU avec des armatures $A_x = A_y$ et $\sigma_s = f_{yd}$

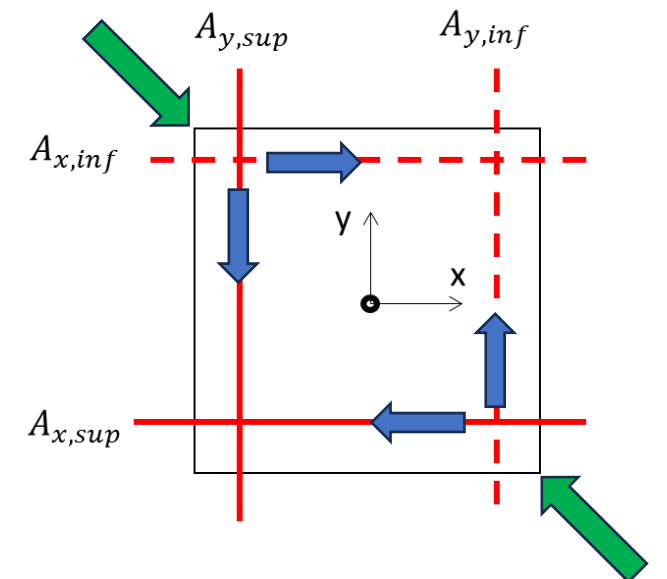
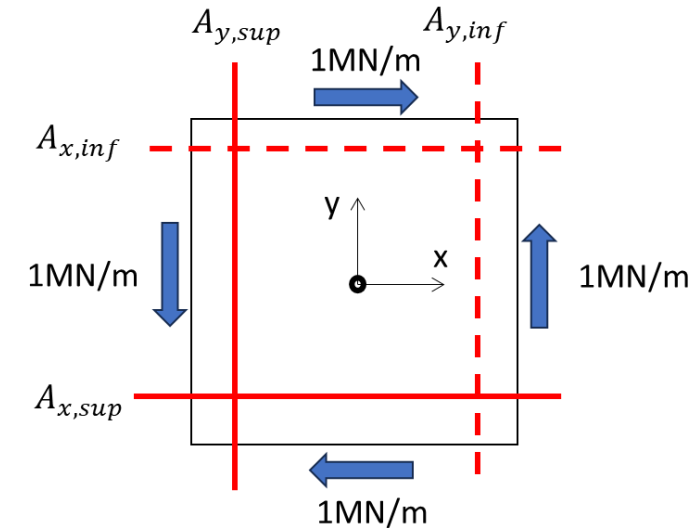


Illustration : torsion pure

Coque d'épaisseur 1m, ferrillée avec HA20@200 en inf et sup et X,Y : $M_{xy} = 250 \text{ kN/m}$

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME										
Titre : TORSION PURE										
DONNEES					RESULTATS					
Béton	Epaisseur = 1.00 m				Modification d'état = 1 (0 => Ok; 1 => itération nécessaire)					
Variation maxi d'angle de fissure (deg) = 45.000					< 0.100					
fck (MPa)	Ecm (MPa)	Ec,eff (MPa)	v	fctd (MPa)	---					
40.0	35 220	35 000	0.00	1.64						
Aciers passifs introduits sous la forme : n barres phi .../m					N°	z moyen (m)	Etat	$\sigma 1$	$\sigma 2$	Angle de fiss. ou d'acier
n°					Face sup	0.500	1	1.50	-	-45.0
introduits sous la forme : n barres phi .../m					Couche 1	0.475	1	1.43	-	-45.0
nombre/ml	phi (mm)	cm2/ml	% face ext	% axe	2	0.425	1	1.28	-	-45.0
1 = AX SUP	5	20	0.050	0.450	3	0.375	1	1.13	-	-45.0
2 = AY SUP	5	20	0.050	0.450	4	0.325	1	0.98	-	-45.0
3 = AX INF	5	20	0.050	-0.450	5	0.275	1	0.83	-	-45.0
4 = AY INF	5	20	0.050	-0.450	6	0.225	1	0.68	-	-45.0
Es = 200 000 MPa					7	0.175	1	0.53	-	-45.0
na = 5.71					8	0.125	1	0.38	-	-45.0
Position des armatures					9	0.075	1	0.23	-	-45.0
Efforts appliqués (> 0 en traction)					10	0.025	1	0.08	-	-45.0
Fxx =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		11	-0.025	1	0.07	-	-45.0
Fyy =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		12	-0.075	1	0.23	-	-45.0
Fxy =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		13	-0.125	1	0.38	-	-45.0
Mxx =	0.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		14	-0.175	1	0.53	-	-45.0
Myy =	0.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		15	-0.225	1	0.68	-	-45.0
Mxy =	250.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		16	-0.275	1	0.83	-	-45.0
Convention de signes pour les résultats					17	-0.325	1	0.98	-	-45.0
- Béton : $\sigma > 0$ en compression					18	-0.375	1	1.13	-	-45.0
$\sigma 1 =$ compr. maxi $\sigma 2 =$ compr. mini					19	-0.425	1	1.28	-	-45.0
- Acier : $\sigma > 0$ en traction					20	-0.475	1	1.43	-	-45.0
Itération si les angles de fissures varient de plus de 0.1° d'une itération à la suivante					Face inf	-0.500	1	1.50	-	-
					1 = X sup	0.450	1	0.00	-	0.0
					2 = Y sup	0.450	1	0.00	-	90.0
					3 = X inf	-0.450	1	0.00	-	0.0
					4 = Y inf	-0.450	1	0.00	-	90.0
setec tpi CL-Plaque.xls 19/04/26					PLAQ-ELS v.8					

Calcul au bout de la 1^{ère} itération : toutes couches de béton actives en état 1 (compression-traction)

VERIFICATION ELS D'UNE PLAQUE EN BETON ARME										
Titre : TORSION PURE										
DONNEES					RESULTATS					
Béton	Epaisseur = 1.00 m				Modification d'état = 0 (0 => Ok; 1 => itération nécessaire)					
Variation maxi d'angle de fissure (deg) = 0.000					< 0.100					
fck (MPa)	Ecm (MPa)	Ec,eff (MPa)	v	fctd (MPa)	---					
40.0	35 220	35 000	0.00	1.64						
Aciers passifs introduits sous la forme : n barres phi .../m					N°	z moyen (m)	Etat	$\sigma 1$	$\sigma 2$	Angle de fiss. ou d'acier
n°					Face sup	0.500	1	9.42	-	-
introduits sous la forme : n barres phi .../m					Couche 1	0.475	1	7.43	-	-45.0
nombre/ml	phi (mm)	cm2/ml	% face ext	% axe	2	0.425	1	3.46	-	-45.0
1 = AX SUP	5	20	0.050	0.450	3	0.375	2	-	-	-
2 = AY SUP	5	20	0.050	0.450	4	0.325	2	-	-	-
3 = AX INF	5	20	0.050	-0.450	5	0.275	2	-	-	-
4 = AY INF	5	20	0.050	-0.450	6	0.225	2	-	-	-
Es = 200 000 MPa					7	0.175	2	-	-	-
na = 5.71					8	0.125	2	-	-	-
Position des armatures					9	0.075	2	-	-	-
Efforts appliqués (> 0 en traction)					10	0.025	2	-	-	-
Fxx =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		11	-0.025	2	-	-	-
Fyy =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		12	-0.075	2	-	-	-
Fxy =	0.0	kN/ml	Orientation des armatures		13	-0.125	2	-	-	-
Mxx =	0.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		14	-0.175	2	-	-	-
Myy =	0.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		15	-0.225	2	-	-	-
Mxy =	250.0	kN.m/ml	Orientation des armatures		16	-0.275	2	-	-	-
Convention de signes pour les résultats					17	-0.325	2	-	-	-
- Béton : $\sigma > 0$ en compression					18	-0.375	2	-	-	-
$\sigma 1 =$ compr. maxi $\sigma 2 =$ compr. mini					19	-0.425	1	3.46	-	45.0
- Acier : $\sigma > 0$ en traction					20	-0.475	1	7.43	-	45.0
Itération si les angles de fissures varient de plus de 0.1° d'une itération à la suivante					Face inf	-0.500	1	9.42	-	-
					1 = X sup	0.450	1	173.32	-	0.0
					2 = Y sup	0.450	1	173.32	-	90.0
					3 = X inf	-0.450	1	173.32	-	0.0
					4 = Y inf	-0.450	1	173.32	-	90.0
setec tpi CL-Plaque.xls 19/04/26					PLAQ-ELS v.8					

Calcul au bout de 5 itérations : les couches extrêmes de béton sont résistantes (état 1), le cœur ne résiste pas => justification du modèle sandwich

Illustration : torsion pure

Coque d'épaisseur 1m, ferrillée avec HA20@200 en inf et sup et X,Y : $M_{xy} = 250 \text{ kN/m}$

Analyse :

Le moment de torsion engendre :

- Un cisaillement positif en face sup
- Un cisaillement négatif en face inférieure



Il est donc logique que les fissures soient à 135° en face sup et 45° en face inf

Les armatures subissent la même contrainte dans les deux directions, donc les mêmes elongations, dans les deux directions.

Les composantes b_i du champ de déformations sont toutes nulles

⇒ Les couches de béton subissent donc une extension globale.

⇒ Les couches externes sont équilibrées grâce à la présence d'armatures qui recompriment les bielles

⇒ Les couches centrales, non ferrillées sont en extension et sont fissurées dans les deux directions (état 2).

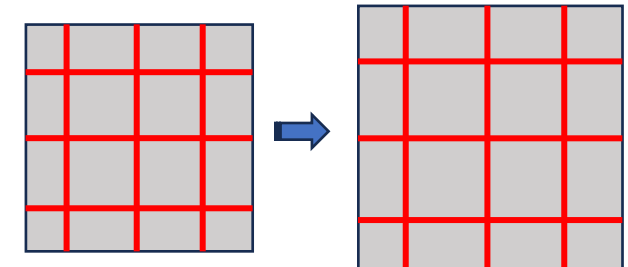
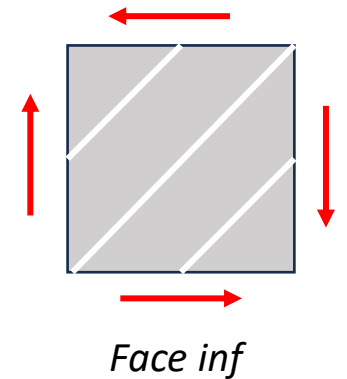
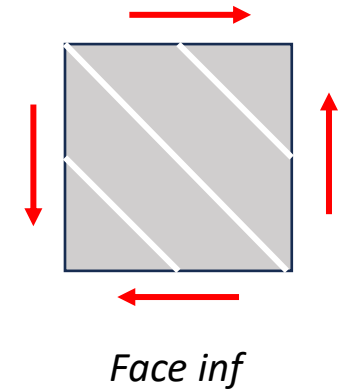


Illustration : torsion pure

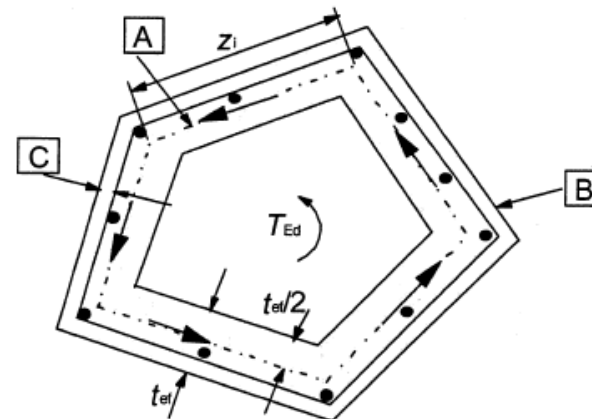
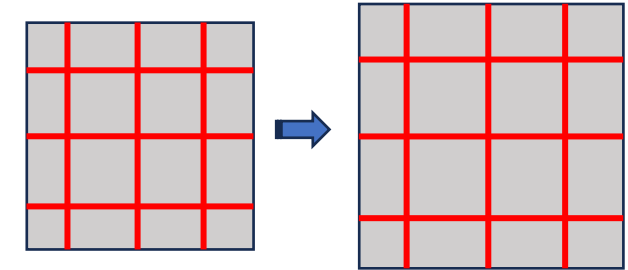
Coque d'épaisseur 1m, ferrillée avec HA20@200 en inf et sup et X,Y : $M_{xy} = 250 \text{ kN/m}$

Analyse :

⇒ Les couches centrales, non ferrillées sont en extension et sont fissurées dans les deux directions (état 2).

Cela justifie l'approche de l'EN 1992-1-1 pour la justification des sections à la torsion:

- On considère une section creuse fictive car elle ne participe pas à la reprise de la torsion (entièrement tendue).



- A** - feuillet moyen
- B** - parement extérieur de la section, périmètre u ,
- C** - enrobage

Merci pour votre attention

Jocelyn POULAIN

Directeur technique setec nucléaire

Tél +33 1 82 51 69 49 / Mob +33 6 23 98 06 77

Mél : jocelyn.poulain@setec.com

INGÉNIEURS
& CITOYENS



setec
nucléaire