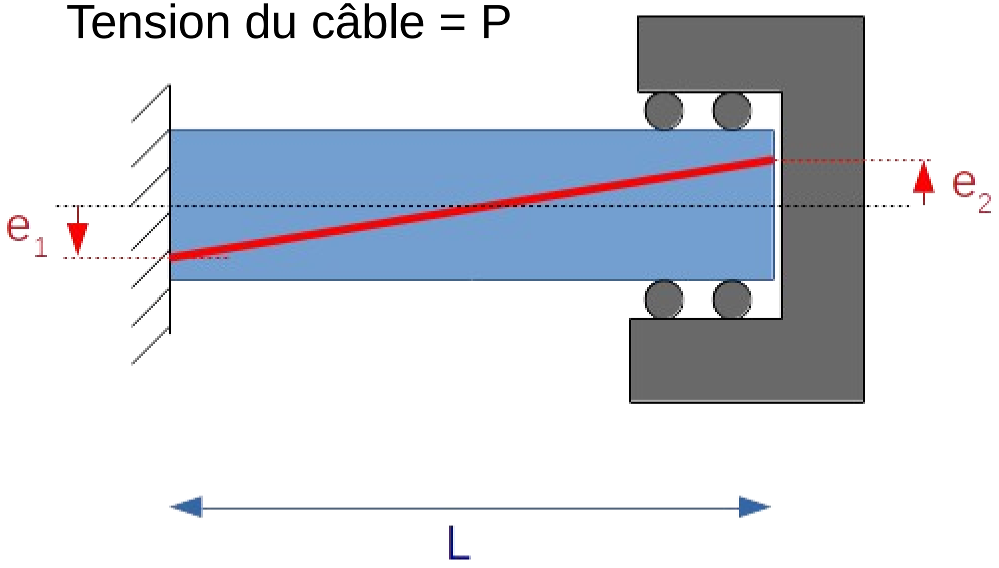
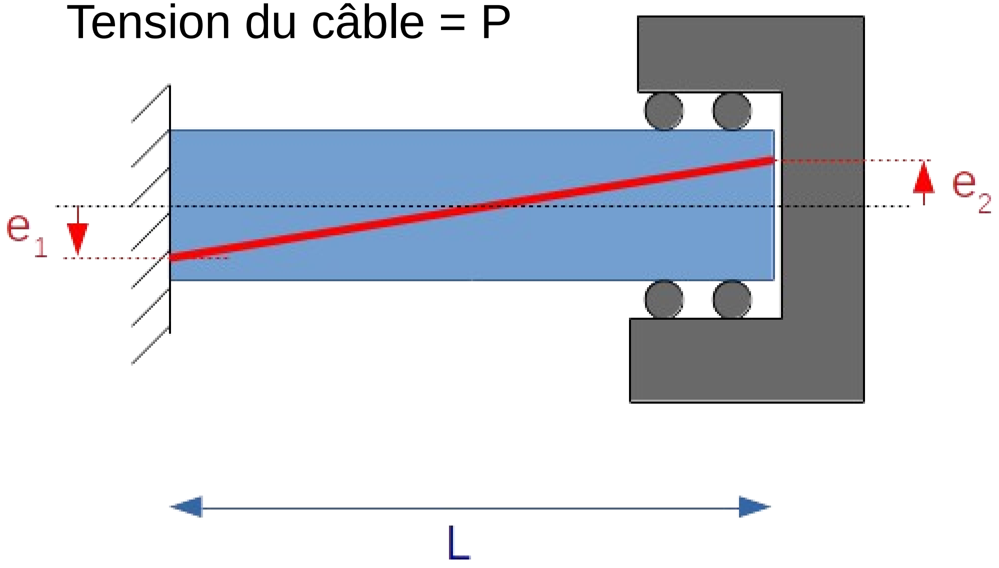
Exercice 1

Tension du câble = P



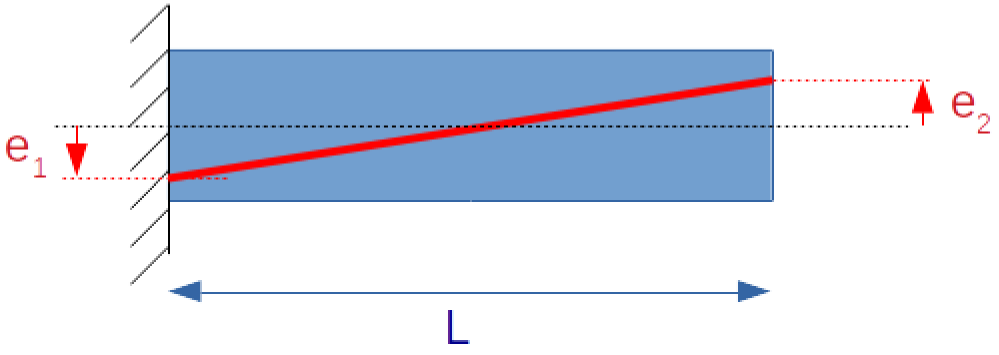
Exercice 1

Tension du câble = P



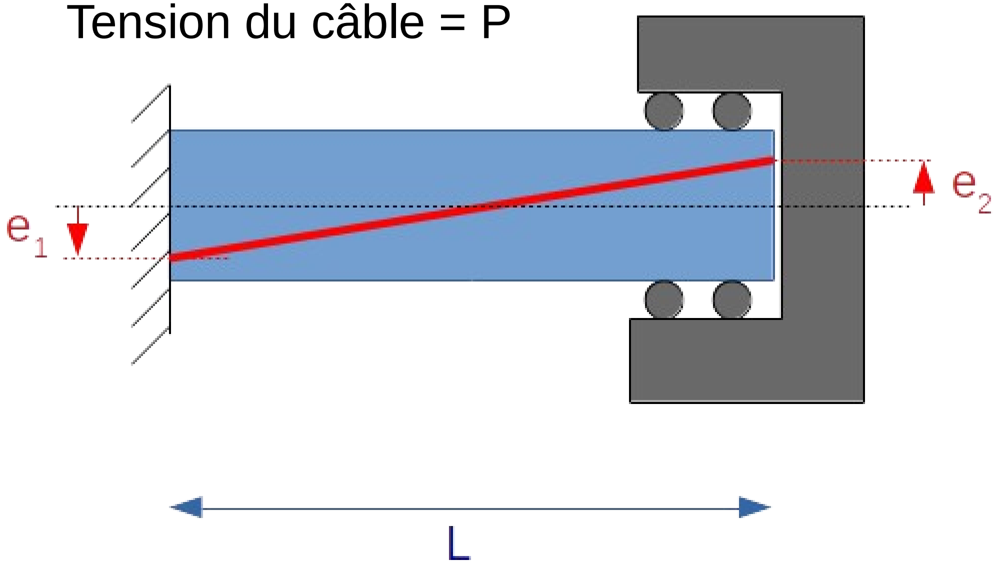
<u>A : Résolution par méthode interne</u>,

structure isostatique associée



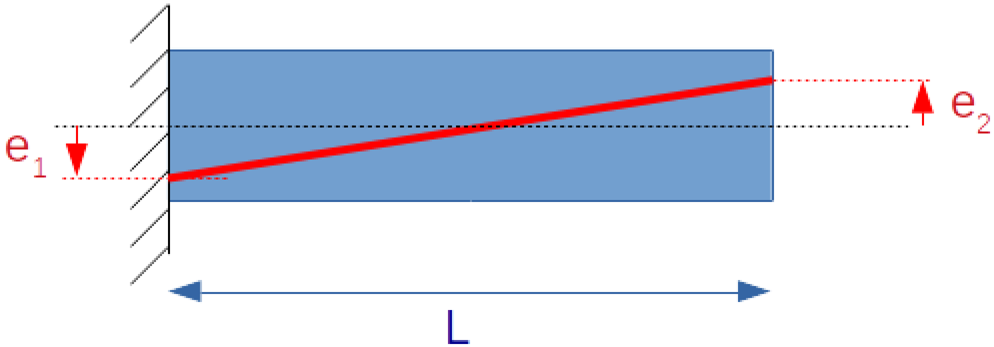
Exercice 1

Tension du câble = P



A : Résolution par méthode interne,

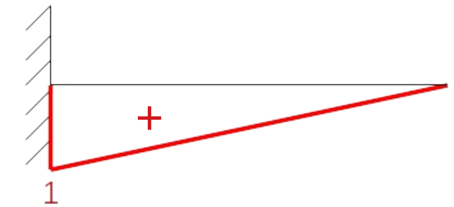
structure isostatique associée



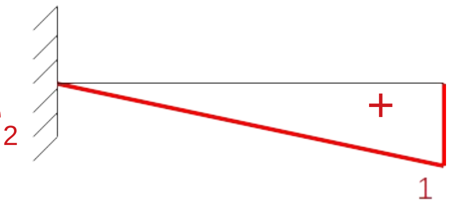
Calculer Miso ou M_0 :

$M_0 = P e_1 (1-x/L) + P e_2 x/L$

$M_0 = P e_1$

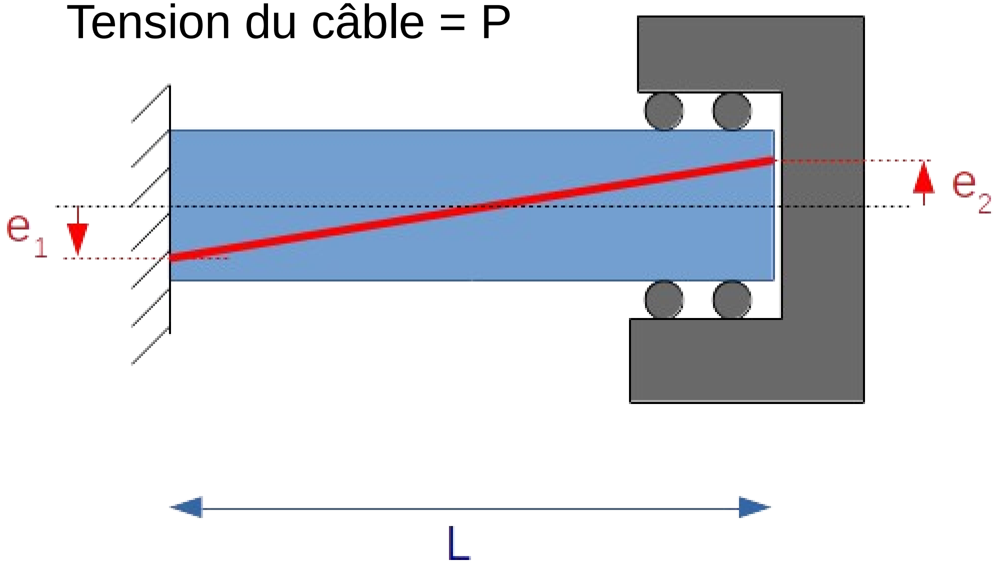


$+P e_2$



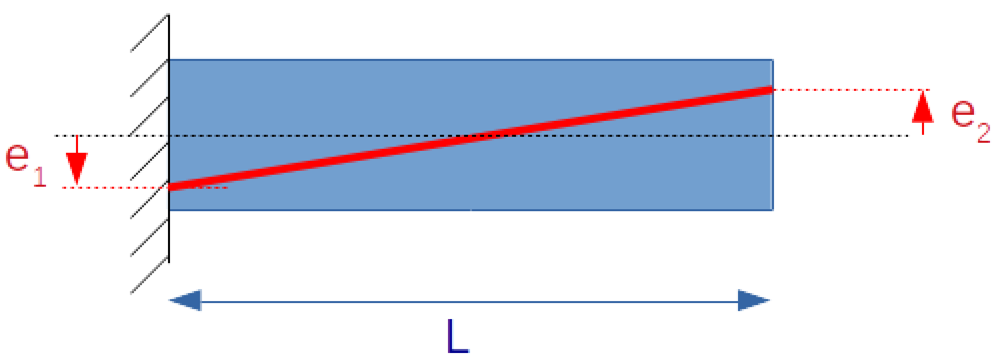
Exercice 1

Tension du câble = P



<u>A : Résolution par méthode interne</u>,

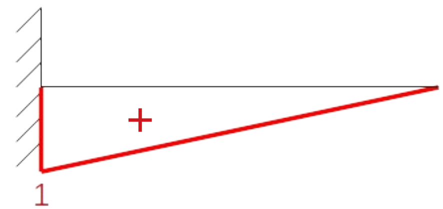
structure isostatique associée



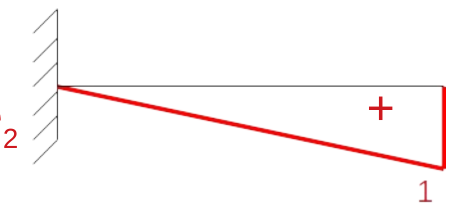
Calculer Miso ou M_0 :

$M_0 = P\, e_1\, (1\text{-}x/L) + P\, e_2\, x/L$

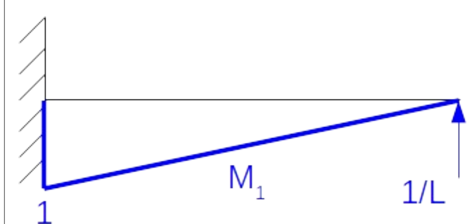
$M_0 = P\, e_1$

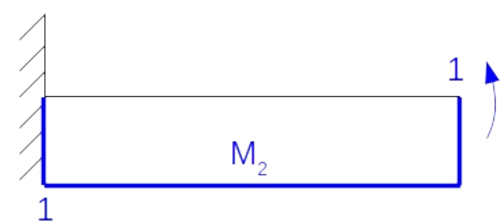


$+P\, e_2$



Puis application méthode des forces :





$M_{hyper} = X_1\, M_1 + X_2\, M_2$

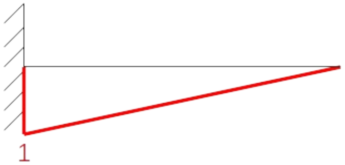
X_1 et X_2 inconnues hyperstatiques à trouver

On résout un système de la forme :

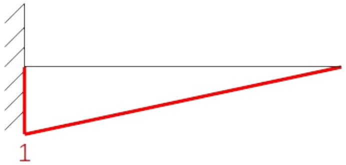
$$\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{12} & \delta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\delta_{01}\\ \delta_{02}\end{pmatrix}$$

avec :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_1^2\,dx = \frac{L}{EI}$$



*



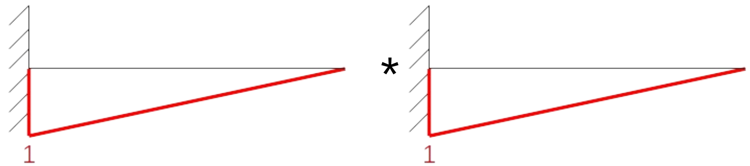
$$= \frac{1}{3}\frac{L}{EI}$$

On résout un système de la forme :

$$\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{12} & \delta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\delta_{01}\\ \delta_{02}\end{pmatrix}$$

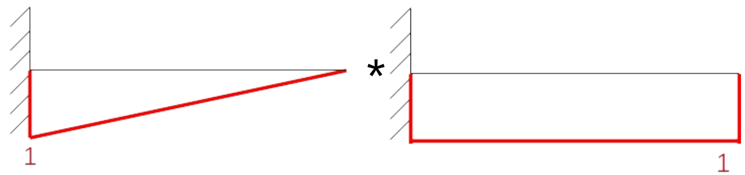
avec :

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_1^2\,dx=\frac{L}{EI}$$



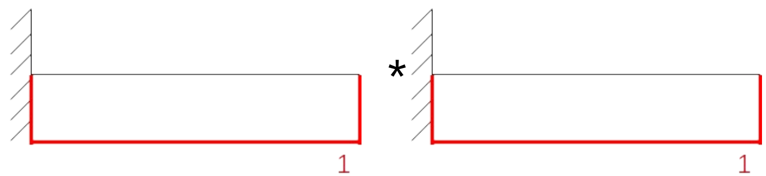
$$=\frac{1}{3}\frac{L}{EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_1 M_2\,dx=\frac{L}{EI}$$



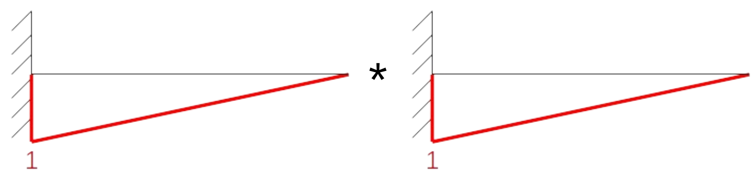
$$=\frac{1}{2}\frac{L}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_2^2\,dx=\frac{L}{EI}$$

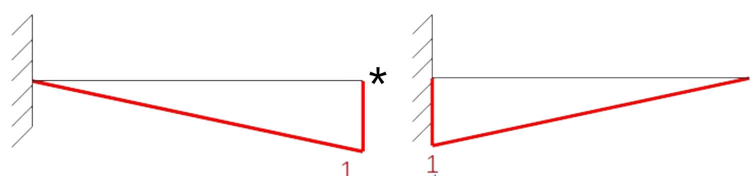


$$=\frac{L}{EI}$$

$$\delta_{01}=\frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_0 M_1\,dx=\frac{L}{EI}P\,e_1$$

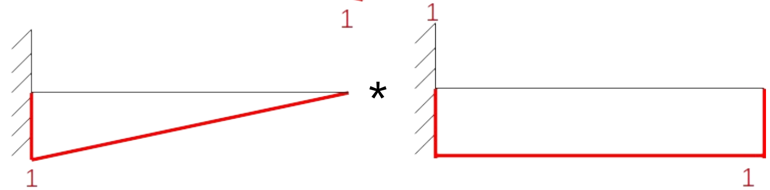


$$+\frac{L}{EI}Pe_2$$

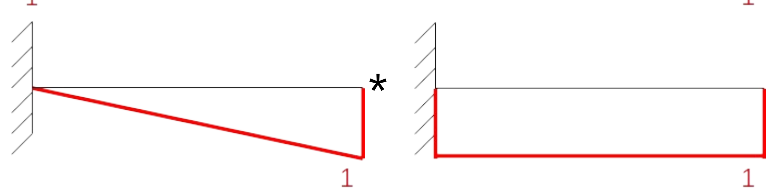


$$=\frac{L}{EI}\left(\frac{P\,e_1}{3}+\frac{P\,e_2}{6}\right)$$

$$\delta_{01}=\frac{1}{EI}\int_{x=0}^{L} M_0 M_1\,dx=\frac{L}{EI}P\,e_1$$



$$+\frac{L}{EI}Pe_2$$



$$=\frac{L}{EI}\left(\frac{P\,e_1}{2}+\frac{P\,e_2}{2}\right)$$

L’équation à résoudre est :

$$\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = -\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)} P \begin{pmatrix} \frac{e_1}{3} + \frac{e_2}{6} \\ \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice M s’inverse aisément :

$$M^{-1} = -12 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

L’équation à résoudre est :

$$\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=-\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}P\begin{pmatrix}\frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6}\\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2}\end{pmatrix}$$

La matrice M s’inverse aisément :

$$M^{-1}=-12\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=-12\,P\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6}\\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-e_1+e_2\\ -e_2\end{pmatrix}$$

$$M_{hyper}=P\left(-e_1+e_2\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)-P\,e_2$$

$$M_{hyper}=-P\,e_1\left(1-\frac{x}{L}\right)-P\,e_2\frac{x}{L}$$

L'équation à résoudre est :

$$\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}P\begin{pmatrix}\frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6}\\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2}\end{pmatrix}$$

La matrice M s'inverse aisément :

$$M^{-1}=-12\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-12\,P\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6}\\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-e_1+e_2\\ -e_2\end{pmatrix}$$

$$M_{hyper}=P(-e_1+e_2)\left(1-\frac{x}{L}\right)-P\,e_2$$

$$M_{hyper}=-P\,e_1\left(1-\frac{x}{L}\right)-P\,e_2\frac{x}{L}$$

Le moment total apporté par la précontrainte, M_{total}, est la somme du moment iso M_0 et du moment M_{hyper}

$M_{total}=M_0 + M_{hyper} = P * e_0 + M_{hyper}$

$M_{total} = P * (\underbrace{e_0 + M_{hyper}/P}_{e_{00}\text{ (ligne de précontrainte)}})$

e_{00} :ligne de précontrainte

e_0 : tracé de la précontrainte

<u>Rque :</u> pour calculer une contrainte due à l'action de la précontrainte en hyperstatique, on remplace dans les formules e_0 par e_{00}

Par exemple :

$$\sigma(y)=\frac{P}{A_c}+(P\,e_0+M_{hyper})\frac{y}{I}=\frac{P}{A_c}+(P\,e_{00})\frac{y}{I}$$

Dans notre cas, le moment total est nul, la précontrainte ne génère aucun moment
En revanche, l'effort normal est égal à P (on suppose inclinaison faible)

N = P

M = 0

L'équation à résoudre est :

$$\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = -\cancel{\left(\frac{L}{EI}\right)} P \begin{pmatrix} \frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6} \\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice M s'inverse aisément :

$$M^{-1} = -12 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = -12\,P \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{6} \\ \frac{e_1}{2}+\frac{e_2}{2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -e_1+e_2 \\ -e_2 \end{pmatrix}$$

$$M_{hyper} = P(-e_1+e_2)\left(1-\frac{x}{L}\right) - P\,e_2$$

$$M_{hyper} = -P\,e_1\left(1-\frac{x}{L}\right) - P\,e_2\frac{x}{L}$$

Le moment total apporté par la précontrainte, M_{total}, est la somme du moment iso M_0 et du moment M_{hyper}

$M_{total} = M_0 + M_{hyper} = P * e_0 + M_{hyper}$

$M_{total} = P * (\underbrace{e_0 + M_{hyper}/P}_{e_{00}})$ e_{00} (ligne de précontrainte)

e_{00} :ligne de précontrainte

e_0 : tracé de la précontrainte

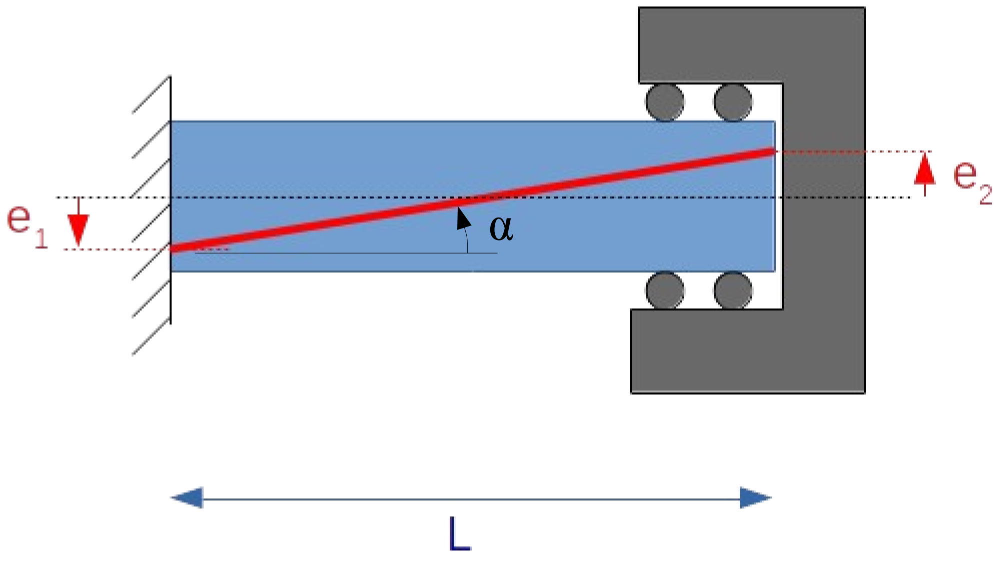
<u>Rque :</u> pour calculer une contrainte due à l'action de la précontrainte en hyperstatique, on remplace dans les formules e_0 par e_{00}

Par exemple :

$$\sigma(y) = \frac{P}{A_c} + (P\,e_0 + M_{hyper})\frac{y}{I} = \frac{P}{A_c} + (P\,e_{00})\frac{y}{I}$$

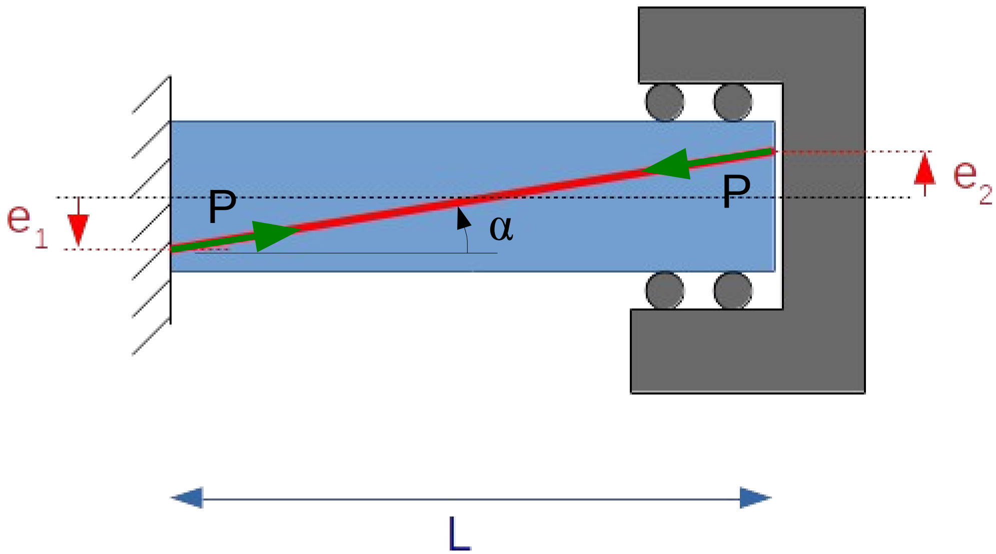
B : Résolution par méthode externe

Représentons les efforts appliqués par la précontrainte sur la structure (en vert)



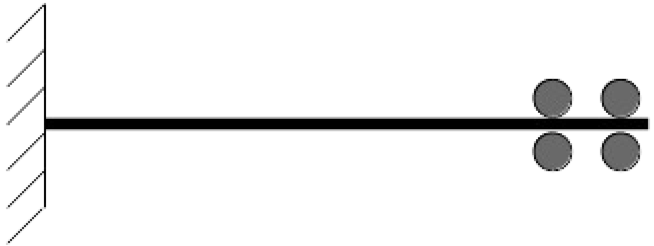
B : Résolution par méthode externe

Représentons les efforts appliqués par la précontrainte sur la structure (en vert)

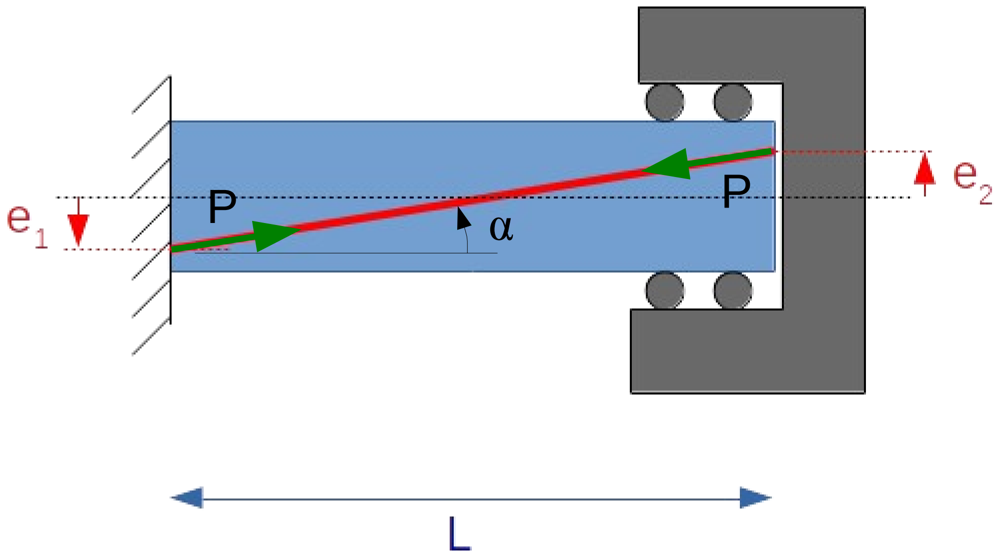


La précontrainte n'exerce des efforts sur la structure qu'aux deux extrémités (on néglige les frottements des armatures dans la gaine)

Ces efforts peuvent être représentés sous forme d'effort et de moment avec le formalisme « RDM »

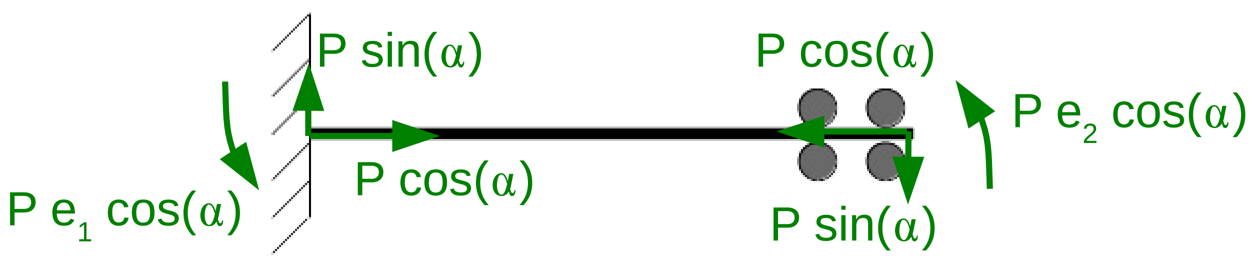


B : Résolution par méthode externe
Représentons les efforts appliqués par la précontrainte sur la structure (en vert)



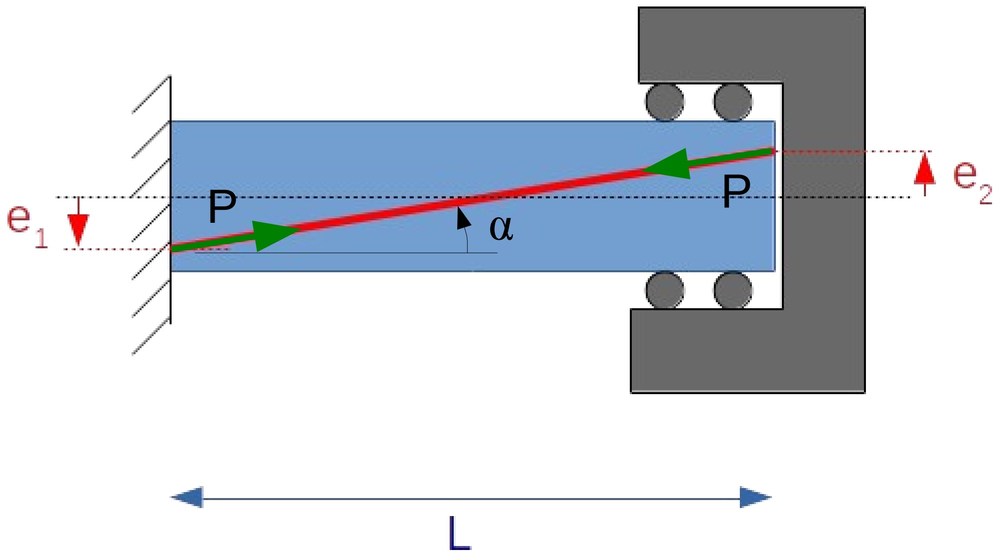
La précontrainte n'exerce des efforts sur la structure qu'aux deux extrémités (on néglige les frottements des armatures dans la gaine)

Ces efforts peuvent être représentés sous forme d'effort et de moment avec le formalisme « RDM »



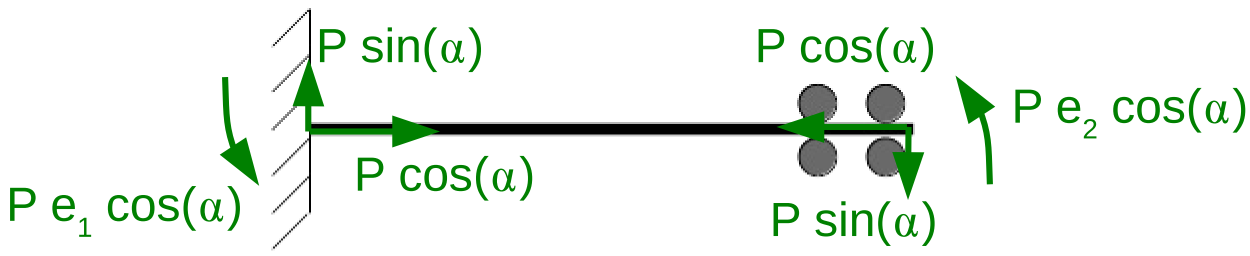
B : Résolution par méthode externe

Représentons les efforts appliqués par la précontrainte sur la structure (en vert)



La précontrainte n'exerce des efforts sur la structure qu'aux deux extrémités (on néglige les frottements des armatures dans la gaine)

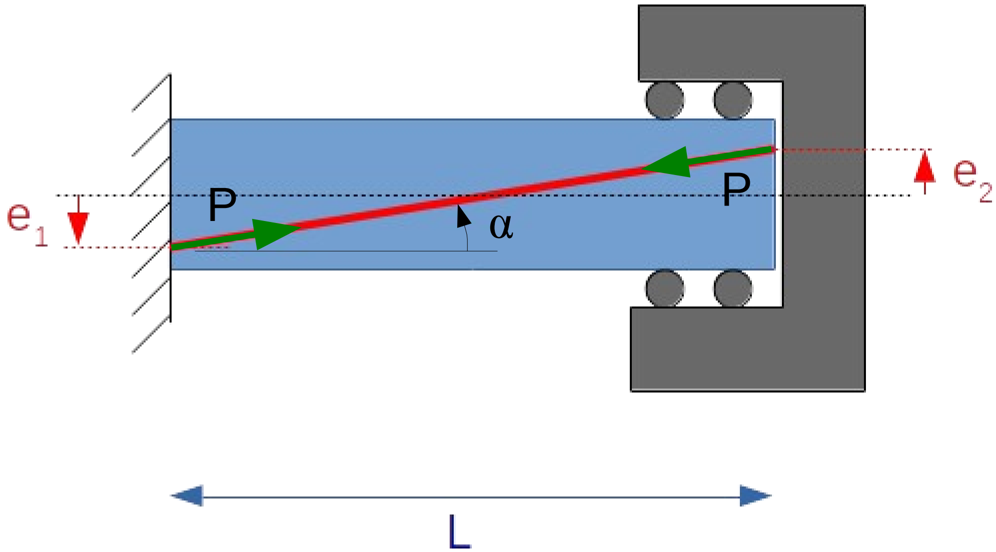
Ces efforts peuvent être représentés sous forme d'effort et de moment avec le formalisme « RDM »



Les composantes verticales et les moments sont repris directement par les appuis

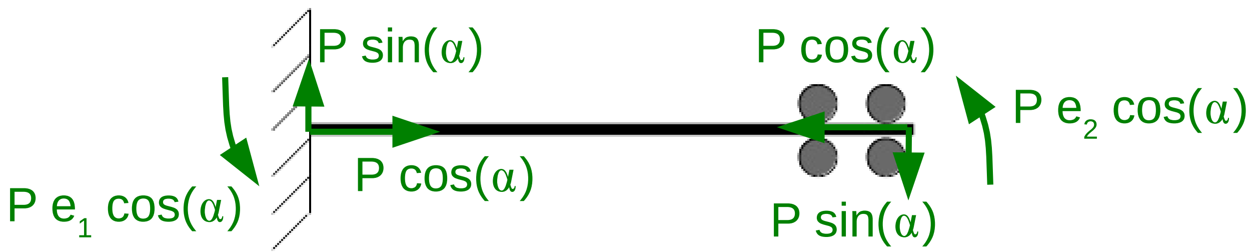
B : Résolution par méthode externe

Représentons les efforts appliqués par la précontrainte sur la structure (en vert)



La précontrainte n’exerce des efforts sur la structure qu’aux deux extrémités (on néglige les frottements des armatures dans la gaine)

Ces efforts peuvent être représentés sous forme d’effort et de moment avec le formalisme « RDM »



Les composantes verticales et les moments sont repris directement par les appuis

Seules les composantes horizontales ont un effet, donc on a de l’effort normal mais pas de moment !