

# CHAPITRE I

## **LE COMPORTEMENT**

## **ELASTOPLASTIQUE**



## 1. Mise en évidence expérimentale du comportement élastoplastique : l'expérience de charge-décharge

La figure 1 représente la courbe-type d'un essai de traction simple d'une éprouvette d'acier, donnant l'évolution de l'effort de traction  $F$  (rapporté à la section initiale de l'éprouvette  $S_0$ ) en fonction de l'allongement relatif  $\Delta l/l_0$ , mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette.

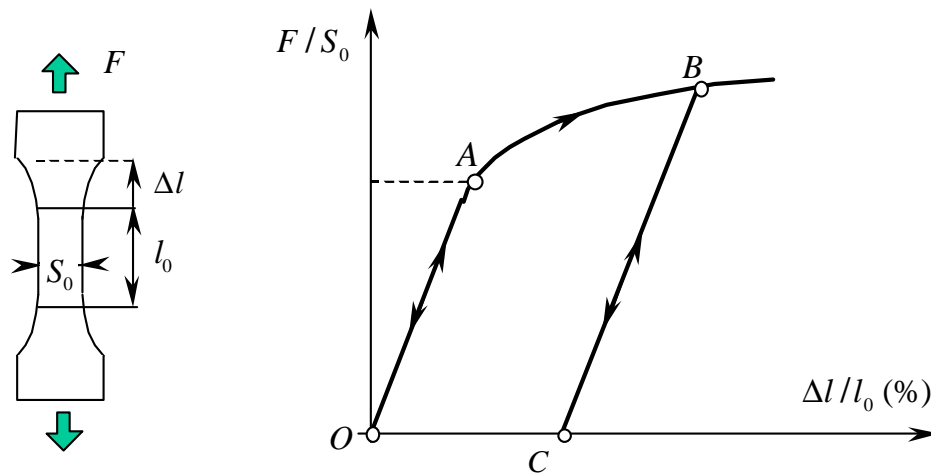


Figure 1 : Courbe expérimentale de traction d'une éprouvette d'acier.

L'analyse d'une telle expérience fait apparaître les caractéristiques suivantes :

- ✓ La **réversibilité** de la réponse en allongement de l'éprouvette dans la partie  $OA$  du diagramme, c'est-à-dire tant que l'effort  $F$  demeure inférieur à un seuil correspondant à l'ordonnée du point  $A$ , appelé *seuil d'élasticité initial*. Cette réversibilité se traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort et l'allongement, caractéristique du comportement **élastique** (linéaire) du matériau constitutif.
- ✓ L'**irréversibilité** de la réponse de l'éprouvette apparaît dès lors que l'on poursuit le chargement au-delà du seuil d'élasticité initial jusqu'à un point  $B$ , puis que l'on effectue une décharge complète ( $F=0$ ) jusqu'au point  $C$ . La courbe  $BC$  de décharge est différente de la courbe  $OAB$  de première charge, de sorte qu'au point  $C$  subsiste un allongement **rémanent**. C'est la manifestation du **comportement plastique** du matériau constitutif.
- ✓ Rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on constate que le point représentatif dans le diagramme parcourt en sens inverse le segment  $BC$  de décharge. L'ordonnée du point  $B$  représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé *seuil d'élasticité actuel*,

au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité. L'augmentation du seuil d'élasticité constitue le phénomène d'*écrouissage*.

Ces observations expérimentales appellent un certain nombre de commentaires :

a) Les champs de contrainte et de déformation dans la partie médiane de l'éprouvette étant homogènes (ce qui suppose notamment l'homogénéité du matériau constitutif à l'échelle de l'éprouvette),  $F/S_0$  et  $\Delta l/l_0$  peuvent s'interpréter respectivement comme la *contrainte uniaxiale* de traction  $\sigma$  subie *localement* par le matériau, et la *déformation linéarisée* correspondante  $\varepsilon$  selon l'axe de l'éprouvette, supposée en transformation infinitésimale ( $\Delta l/l_0 \ll 1$ ). On obtient ainsi le diagramme «contrainte-déformation» de la figure 2, homologue de celui de la figure 1, mais caractérisant cette fois-ci le comportement *local* du matériau sous sollicitation *uniaxiale* de traction. La valeur de la déformation correspondant à l'allongement résiduel consécutif au cycle charge-décharge, s'appelle la *déformation plastique*, notée  $\varepsilon^p$ .

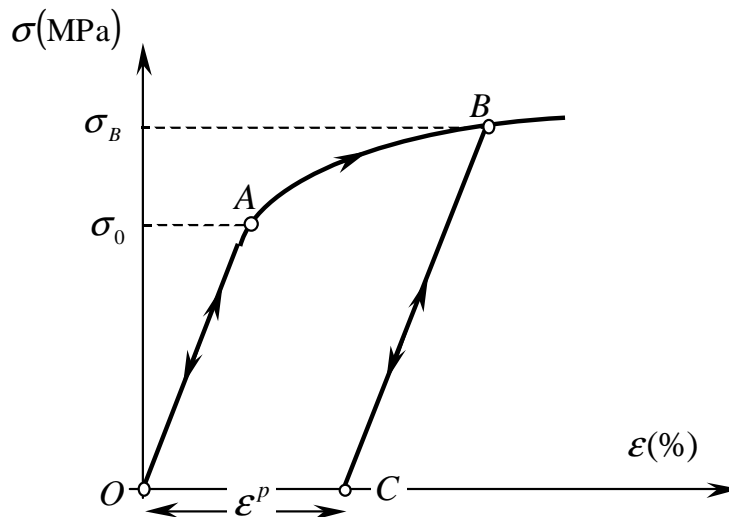


Figure 2 : Diagramme  $\sigma$ - $\varepsilon$  pour un matériau élastoplastique avec écrouissage.

b) Une caractéristique importante du modèle de comportement élastoplastique mis en évidence par des expériences telles que celle décrite ci-dessus, est l'*indépendance par rapport au temps physique*. C'est-à-dire que les diagrammes précédents ne dépendent pas de la vitesse à laquelle sont effectuées les phases de charge-décharge successives, ce qui revient à négliger les effets de *vieillissement* et de *viscosité* du matériau. Cette propriété est bien vérifiée par exemple pour des métaux à température ordinaire, comme l'illustre la figure 3 qui représente différentes courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium, montrant qu'un effet de viscosité n'apparaît que pour des sollicitations très rapides. Il convient en revanche de prendre en compte un tel effet, à travers un modèle viscoplastique, dès que la température s'élève (enceintes de réacteurs nucléaires, procédés de formage «à chaud», dégagements thermiques dans les massifs rocheux etc.).

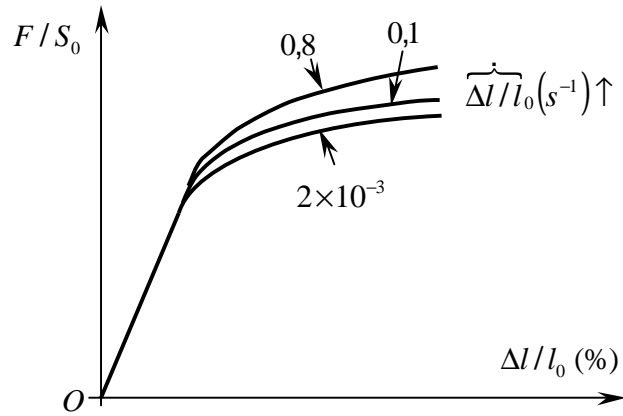


Figure 3 : Evolution des courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium en fonction de la vitesse de sollicitation.

c) La notion centrale caractérisant le comportement plastique d'un matériau est celle d'**irréversibilité** et non pas celle de **non-linéarité**, même si les deux notions coïncident dans le cas où l'élasticité du matériau est **linéaire** dans le cadre de la transformation infinitésimale. La mise en évidence de cette irréversibilité nécessite l'application d'un cycle charge-décharge, seul à même de faire apparaître une déformation plastique au terme de ce cycle. La figure 4 montre la différence essentielle existant entre un modèle élastique non linéaire et un modèle élastoplastique, en dépit de la similitude des courbes de première charge.

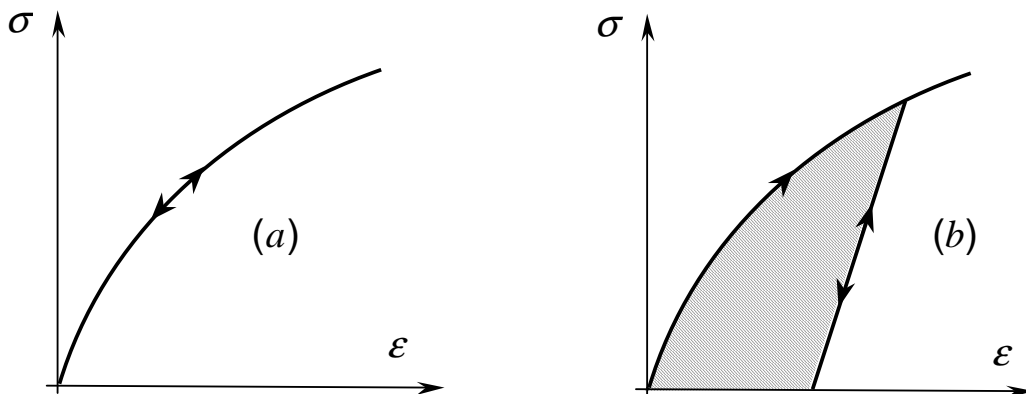


Figure 4 : Courbes  $\sigma - \varepsilon$  représentatives des comportements (a) élastique non-linéaire et (b) élastoplastique

Sur le plan énergétique, cette irréversibilité se traduit par le fait que le travail fourni au cours d'un cycle charge-décharge (proportionnel à l'aire hachurée sur la figure 4-b) est strictement positif, autrement dit que le travail fourni dans la phase de chargement n'est pas entièrement récupéré à la décharge (voir section 5 de ce chapitre).

d) Bien que les mécanismes physiques microscopiques qui sont à l'origine de la plasticité des matériaux observés à l'échelle macroscopique, soient parfois très différents (propagation de défauts dans le réseau cristallin pour les métaux, réarrangement des grains dans le cas des sols), le point de vue du mécanicien ici adopté va permettre de développer une présentation unifiée de ce comportement en termes de contraintes et déformations dans le cadre de la modélisation milieu continu tridimensionnel.

e) Un cas particulier important de comportement élastoplastique est celui du matériau *élastique parfaitement plastique* pour lequel la courbe contrainte-déformation comporte un palier horizontal. La figure 5 donne une représentation schématique d'un tel comportement pour lequel le seuil d'élasticité  $\sigma_0$  demeure constant, c'est-à-dire que l'écrouissage du matériau disparaît. Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de *ductilité*, par opposition à celle de *fragilité* qui évoque l'idée de rupture brutale de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

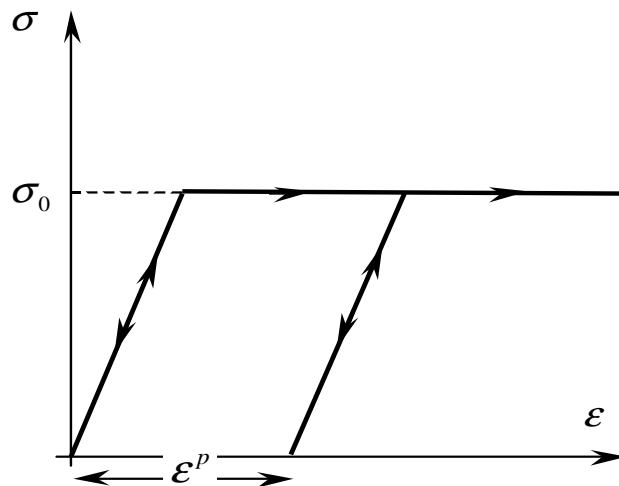


Figure 5 : Schéma de comportement élastoplastique parfait.

Il existe de multiples procédés expérimentaux qui permettent d'accéder au comportement des matériaux soumis à des sollicitations plus complexes que la simple traction-compression uniaxiale précédemment examinée. Citons par exemple l'*essai "triaxial de révolution"* utilisé couramment pour les sols, roches ou bétons, schématisé sur la figure 6-a, ou bien l'*essai de "traction-compression-torsion"* représenté sur la figure 6-b, employé pour tester des matériaux métalliques ou composites sous sollicitation de *traction-compression-cission* obtenue en chaque

point en exerçant sur un tube mince un effort axial de traction (compression) combiné à un couple de torsion.

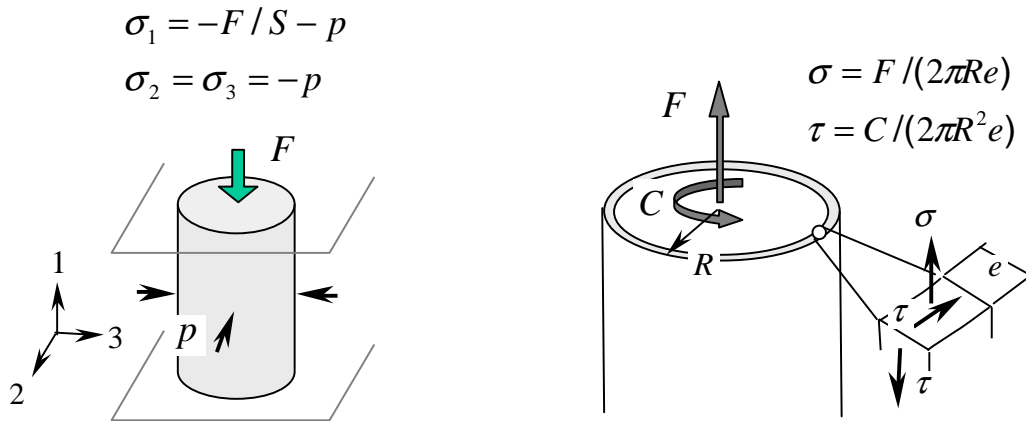


Figure 6 : Exemples d'essais "multiaxiaux".

La figure 7 représente dans le plan  $(\sigma, \tau)$  un domaine de forme elliptique, déterminé expérimentalement à l'aide de ce dernier essai, à l'intérieur duquel le comportement du tube et donc localement du matériau, demeure *élastique*. Dès que le point représentatif du chargement franchit le seuil du domaine, appelé *domaine d'élasticité initial*, pour revenir ensuite à l'état déchargé ( $\sigma = \tau = 0$ ), il subsiste un allongement et une rotation résiduels. L'écroutissage du matériau se traduit par une modification du domaine d'élasticité, qualifié d'*actuel*.

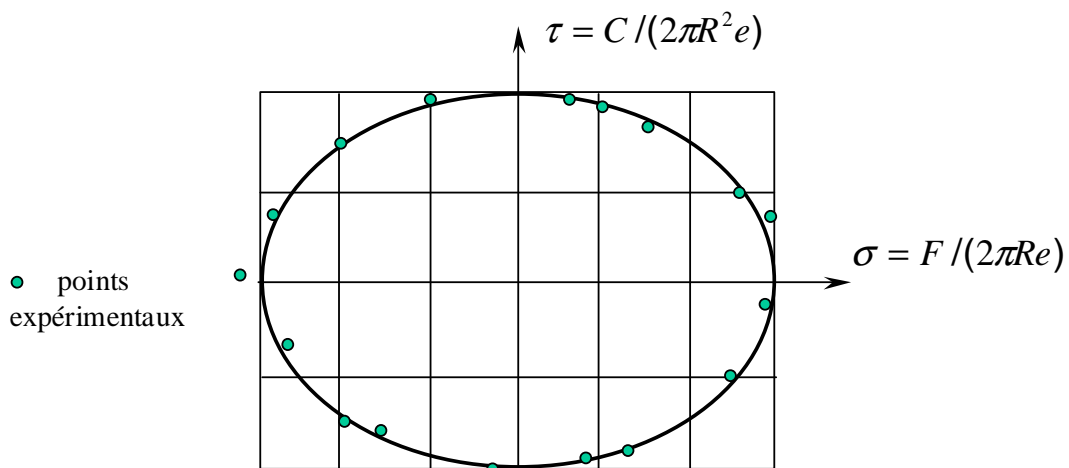


Figure 7 : Détermination expérimentale du domaine d'élasticité initial en traction-compression-torsion d'un matériau à l'aide d'un essai de traction-compression-torsion (d'après Bui, 1969).

## 2. Décomposition de la transformation élastoplastique ; notion de configuration relâchée.

Examinons plus précisément les transformations successives subies par l'élément de matière  $d\Omega_0$  au cours d'un *cycle charge-décharge* dans les expériences décrites précédemment. La figure 8 représente schématiquement la séquence des transformations subies par un élément de volume lors d'une telle expérience de charge-décharge. On désigne ainsi respectivement par :

- ◇  $d\Omega_0$  : l'élément de volume dans la *configuration initiale* (état non chargé);
- ◇  $d\Omega_t$  : le même élément au terme de la phase de chargement (*configuration actuelle*) ;
- ◇  $d\Omega_t^R$  : la configuration atteinte par ce même élément après *déchargement complet*.

Adoptant la terminologie employée par Lee (1969) ou Mandel (1971), nous appellerons cette dernière configuration la *configuration relâchée*. Nous introduisons alors classiquement les outils permettant de décrire les transformation entre ces différentes configurations:

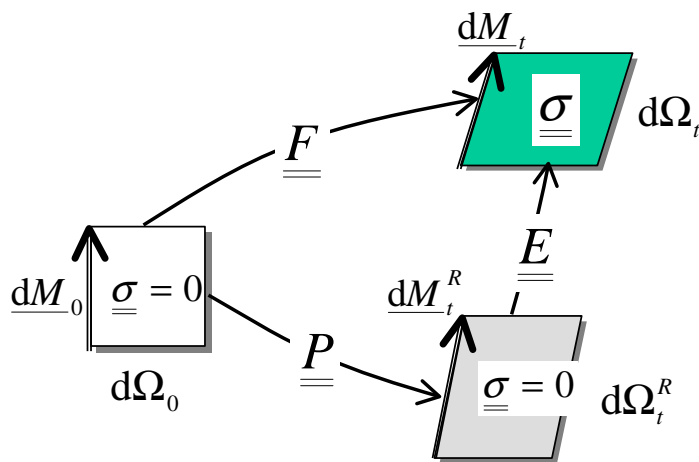


Figure 8 : Configurations successives d'un élément de volume matériel au cours d'un cycle charge-décharge élastoplastique.

- $\underline{\underline{F}}$  désigne le gradient de la transformation (homogène tangente) faisant passer de  $d\Omega_0$  à  $d\Omega_t$ . Il permet de calculer le transporté  $\underline{\underline{dM}}_t$  dans la configuration actuelle d'un vecteur matériel élémentaire quelconque  $\underline{\underline{dM}}_0$  attaché à  $d\Omega_0$  :



$$\underline{\underline{dM}}_t = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{dM}}_0 \quad (1.1)$$

- $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{P}}$  représentent respectivement les gradients des transformations faisant passer de  $d\Omega_t^R$  à  $d\Omega_t$ , et de  $d\Omega_0$  à  $d\Omega_t^R$ . Ils sont définis par les relations :

$$\underline{\underline{dM}}_t = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{dM}}_t^R \quad (1.2)$$

et

$$\underline{\underline{dM}}_t^R = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{dM}}_0 \quad (1.3)$$

D'où la décomposition multiplicative suivante du gradient total de la transformation en parties élastique et plastique :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}} \quad (1.4)$$

Dans le cas où le comportement du matériau est *purement élastique*,  $\underline{\underline{P}}$  se réduit à l'identité  $\underline{\underline{I}}$  (ou éventuellement à un tenseur orthogonal, c'est-à-dire tel que  ${}^t \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$ ), de sorte que les configurations *initiale* et *relâchée coïncident* à un mouvement rigidifiant près. La mise en évidence expérimentale du comportement plastique correspond au fait que la transformation  $\underline{\underline{P}}$ , dite *plastique*, est associée à une *déformation* non nulle ( ${}^t \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}} \neq \underline{\underline{I}}$ ). La transformation  $\underline{\underline{E}}$ , dite *élastique*, est la partie réversible de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ , récupérée à la décharge.

Nous nous limitons dans tout ce qui suit au cas où toutes les transformations précédentes restent *infinitésimales*, cadre dans lequel la modélisation du comportement élastoplastique sera désormais développée. Une telle modélisation suppose d'apporter la réponse à deux questions complémentaires:

- ◇ Pour quelles sollicitations, exprimées localement en termes de contraintes, la plastification du matériau, c'est-à-dire son irréversibilité au cours d'un cycle charge-décharge, se manifeste-t-elle? C'est la question du *critère de plasticité*.
- ◇ Comment traduire cette irréversibilité du point de vue des déformations? C'est la question de la *règle d'écoulement plastique*, qui sera abordée à partir de la formule de décomposition (1.4).

Ces deux aspects constitutifs de la loi de comportement élastoplastique vont être successivement abordés.

### 3. Critère de plasticité en transformation infinitésimale ; fonction de charge

Etant donnée l'hypothèse de transformation infinitésimale qui impose que les déformations et les rotations subies par l'élément de matière soient simultanément petites, permettant alors de confondre les représentants lagrangien (i.e. défini sur la configuration initiale  $d\Omega_0$ ) et eulérien (i.e. défini sur la configuration actuelle  $d\Omega_t$ ) de l'état de contrainte, la condition de plasticité va porter sur le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  qui décrit l'état de sollicitation du matériau.

#### 3.1. Domaines d'élasticité initial et actuel et fonction de charge.

L'interprétation des expériences décrites précédemment, conduites dans le cadre de la transformation infinitésimale, a permis de mettre en évidence l'existence d'un *domaine d'élasticité initial* (généralement convexe) du matériau, dans l'espace des contraintes assimilé à  $R^6$  (figure 9).

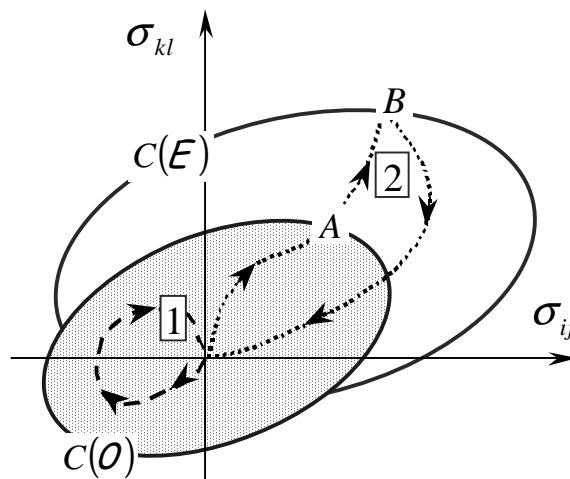


Figure 9 : Domaines d'élasticité initial et actuel.

Ce domaine  $C(O)$  est tel qu'au terme de tout *cycle de chargement*, représenté par une courbe fermée (telle que (1) sur la figure) contenue dans le domaine, n'apparaît aucune déformation plastique. A l'inverse, le suivi d'un trajet de chargement tel que (2), au cours duquel le seuil d'élasticité représenté par la frontière de  $C(O)$  est franchi, va engendrer des déformations plastiques. Il en résulte également une modification du domaine d'élasticité, appelé *domaine d'élasticité actuel*  $C(E)$  manifestation *phénoménologique*, à l'échelle de la modélisation macroscopique, de l'*écrouissage* du matériau, symbolisé par  $E$ .

Il est alors commode de caractériser ces domaines par la donnée d'une *fonction de charge*, notée  $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}})$ , telle que, pour un état d'écroissage donné  $\underline{\underline{E}}$

- $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) < 0$  si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est à l'intérieur de  $C(\underline{\underline{E}})$ ;
  - $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) = 0$  si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est situé sur la frontière de  $C(\underline{\underline{E}})$
  - $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) > 0$  si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est à l'extérieur de  $C(\underline{\underline{E}})$ .
- (1.5)

On observera que la seule situation physiquement possible correspond à  $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) \leq 0$ , c'est-à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte ne peut jamais être extérieur au domaine d'élasticité *actuel*. Ainsi, la portion  $AB$  du trajet de chargement  $\square$  correspond au franchissement de la frontière du domaine  $C(\underline{\underline{O}})$  ( $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{O}}) > 0$ ), mais à l'«entraînement» de la frontière du domaine actuel  $C(\underline{\underline{E}})$  ( $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) = 0$ ), les paramètres d'écroissage  $\underline{\underline{E}}$  évoluant avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans cette phase de «charge plastique». On utilise fréquemment dans les calculs de structures deux modèles simplifiés d'écroissage:

- Celui de l'écroissage "*isotrope*" (figure 10-a) dans lequel le domaine  $C(\underline{\underline{E}})$  est obtenu par homothétie de centre l'origine et de rapport  $\lambda(\underline{\underline{E}}) \geq 1$  à partir du domaine initial. On peut alors adopter comme fonction de charge:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) = f_0(\lambda^{-1}(\underline{\underline{E}})\underline{\underline{\sigma}}) \quad (1.6)$$

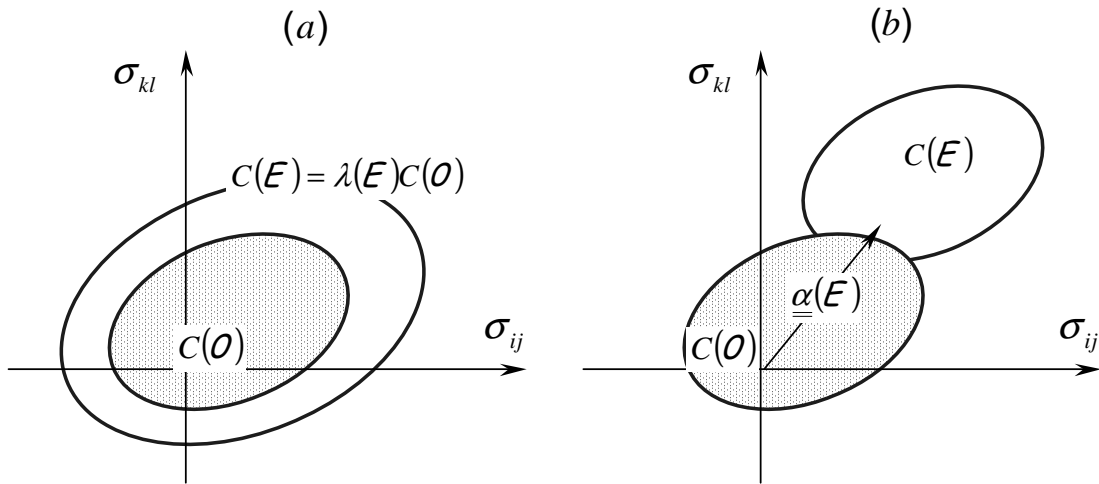


Figure 10: Modèles d'écroissage "isotrope" et "cinématique".

- Celui de l'érouissage "*cinématique*" (figure 10-b) où le domaine actuel est obtenu par translation d'une quantité  $\underline{\underline{\alpha}}(E)$  du domaine initial, ce dont il est possible de rendre compte par la fonction de charge:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = f_0(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\alpha}}(E)) \quad (1.7)$$

A un domaine d'élasticité actuel  $C(E)$  donné, correspond une infinité de choix possibles pour la fonction de charge, qui respecte les conditions (1.5). Il conviendra alors de vérifier que la formulation de la loi de comportement est indépendante du choix effectué.

Le cas de la *plasticité parfaite* correspond à la situation où le domaine d'élasticité est *fixe*, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer les domaines d'élasticité initial et actuel. La fonction de charge n'est plus alors argumentée par des paramètres d'érouissage.

### 3.2. Cas des matériaux isotropes

La fonction de charge apparaît alors comme une fonction des seuls *invariants principaux* de  $\underline{\underline{\sigma}}$ :

$$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad I_2 = 1/2 \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^2 \quad , \quad I_3 = 1/3 \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^3 \quad (1.8)$$

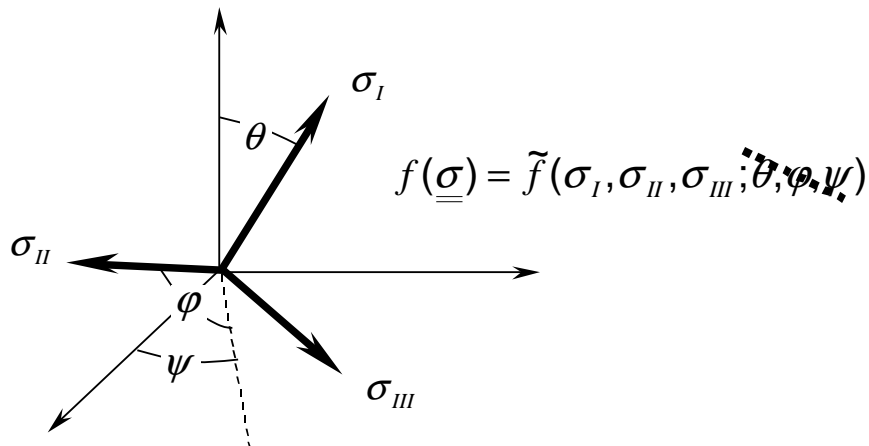


Figure 11: Isotropie plastique d'un matériau.

ou de manière équivalente, et plus concrète, des seules *contraintes principales* notées  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ , puisque la propriété d'isotropie du matériau traduit le fait (vérifiable expérimentalement) que la condition d'apparition de la plasticité ne fait nullement intervenir l'*orientation* du trièdre des directions principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$  par rapport à un trièdre de directions matérielles (figure 11):

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \tilde{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \quad (1.9)$$

Il en résulte en particulier que le domaine d'élasticité, qui peut être représenté dans l'espace  $R^3$  des contraintes principales possède dans cet espace une symétrie ternaire autour de l'axe des contraintes isotropes  $(\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III})$  puisque  $\tilde{f}$  est une fonction *symétrique* de ses arguments. Les critères de plasticité usuels (Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager : voir Annexe A) sont des critères isotropes.

## 4. Formulation de la loi de comportement ; règle d'écoulement plastique

### 4.1. Décomposition additive de la déformation totale linéarisée

Compte tenu de la décomposition multiplicative (1.4) valable dans le cas général, la *déformation totale* de Green-Lagrange entre  $d\Omega_0$  et  $d\Omega_t$  peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}] = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^e \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{\Delta}}^p \quad (1.10)$$

où l'on a introduit :

$$\underline{\underline{\Delta}}^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{I}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Delta}}^p = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{I}}) \quad (1.11)$$

qui représentent respectivement les déformations associées à la transformation élastique  $\underline{\underline{E}}$  et à la transformation plastique  $\underline{\underline{P}}$ .

L'hypothèse de *transformation infinitésimale* dans laquelle nous nous sommes placés implique alors par définition :

$$\|\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}}\| \ll 1 \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{1}}\| \ll 1 \quad (1.12)$$

et donc au second ordre près :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.13)$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  désignent les déformations *linéarisées*. La décomposition *multiplicative* (1.4) devient en transformation infinitésimale une décomposition de type *additif*, faisant apparaître la déformation totale de l'élément de volume d'un matériau élastoplastique comme la somme d'une partie *élastique*, récupérable à la décharge, et d'une partie *plastique* acquise au terme du cycle de chargement. Il s'agit donc maintenant d'évaluer séparément ces deux contributions en fonction de la sollicitation  $\underline{\underline{\sigma}}$  appliquée, ou plus précisément du trajet de sollicitation.

- Pour ce qui est de la partie *élastique* de cette déformation, l'hypothèse couramment admise et bien vérifiée expérimentalement, consiste à admettre que les propriétés élastiques du matériau ne sont pas affectées par la déformation plastique acquise par le matériau. Dans le cas de l'essai de traction schématisé sur la figure 2 cette hypothèse de "découplage" se traduit par le fait que la pente de la droite élastique de première charge (égale au module d'Young du matériau) est égale à celle de la droite de décharge élastique. Il en résulte que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.14)$$

où  $\underline{\underline{\Lambda}}$  désigne le *tenseur des complaisances élastiques*, c'est-à-dire dans le cas *isotrope* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (1.15)$$

$E$  et  $\nu$  désignant le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

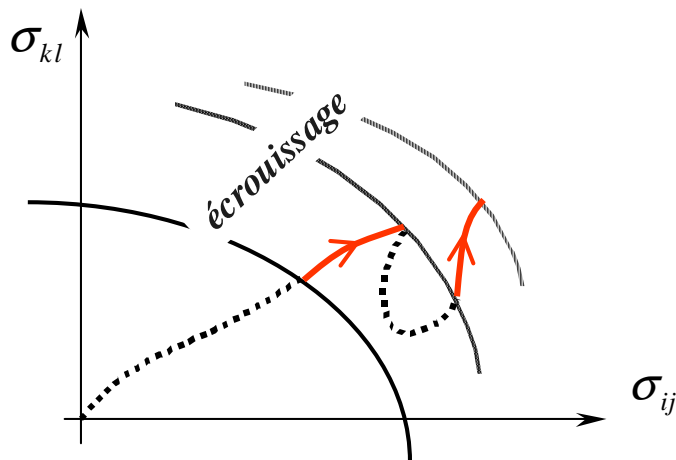


Figure 12 : Séquences plastiques le long d'un trajet de chargement dans l'espace des contraintes.

- L'évaluation de la partie **plastique** de cette déformation est plus délicate. Elle n'est pas comme la partie élastique une fonction bi-univoque de l'état de contrainte, mais dépend *a priori* du trajet de chargement, et plus précisément, le long de ce trajet, des "séquences de charge plastique" caractérisées par le fait que le point représentatif de l'état de contrainte reste sur la frontière du domaine d'élasticité actuel, qu'il «entraîne dans son mouvement» (portions de courbe en trait plein sur la figure 12). Pour un état d'écroutissement donné, il est alors possible de raisonner en termes d'accroissements infinitésimaux à partir d'un état de contrainte, mettant ainsi en évidence le **caractère incrémental** de la loi de comportement élastoplastique.

Se référant à la figure 13, plusieurs cas de figure se présentent selon la *position* de  $\underline{\underline{\sigma}}$  par rapport à la frontière du domaine d'élasticité actuel, et la *direction de l'incrément* de sollicitation  $d\underline{\underline{\sigma}}$ .

- **Cas n°1**.  $\underline{\underline{\sigma}}$  est à l'intérieur du domaine d'élasticité :  $f(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{E}) < 0$ . L'incrément de déformation est alors *purement élastique*, d'où en tenant compte de (1.13) et (1.14)

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad (1.16)$$

- **Cas n°2**. L'état de contrainte est *sur la frontière du domaine d'élasticité*  $f(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{E}) = 0$ , l'incrément  $d\underline{\underline{\sigma}}$  étant dirigé *vers l'intérieur du domaine*, ce que l'on peut caractériser par :

$$d_{\mathbf{E}} f = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} \leq 0^1 \quad (1.17)$$

La formule (1.12) est encore applicable.

- **Cas n°3**. Cas de la **charge plastique**.  $d\underline{\underline{\sigma}}$  est orienté *vers l'extérieur* de  $C(\mathbf{E})$  à partir d'un état de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  situé sur la frontière de  $C(\mathbf{E})$  :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{E}) = 0 \text{ avec } d_{\mathbf{E}} f = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} > 0 \quad (1.18)$$

Dans ce cas :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (1.19)$$

---

<sup>1</sup>  $(\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}})$  étant *normale extérieure* à  $C(\mathbf{E})$  en  $\underline{\underline{\sigma}}$ , le produit doublement contracté  $(\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}) : d\underline{\underline{\sigma}}$  (interprété comme un produit scalaire de deux vecteurs de  $R^6$ ) a même signe que la projection algébrique de  $d\underline{\underline{\sigma}}$  sur la normale extérieure.

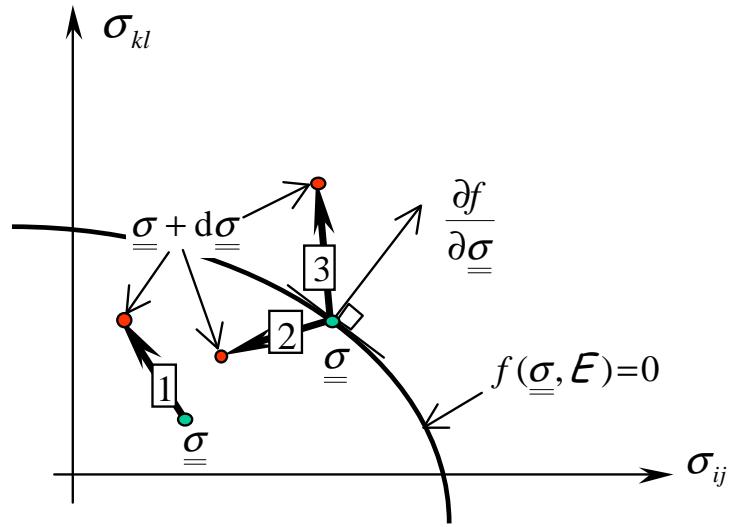


Figure 13 : Différents cas de chargement incrémental.

Il nous reste alors à préciser l'expression de l'incrément de déformation plastique  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ . Celui-ci dépend *a priori* de l'état d'écrouissage actuel du matériau (qui détermine en particulier le domaine d'élasticité actuel  $C(\underline{\underline{E}})$ ), de l'état de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de l'incrément de chargement appliqué  $d\underline{\underline{\sigma}}$  à partir de cet état. Il ne dépend pas en revanche, conformément à l'hypothèse faite d'indépendance de la loi de comportement par rapport au temps physique, de la vitesse avec laquelle cet incrément est appliqué :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = F[\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}, d\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\sigma}}}] \quad (1.20)$$

La condition de **continuité** du comportement entre le cas n°2 de la décharge élastique et celui n°3 de la charge plastique impose en outre :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad d_{\underline{\underline{E}}} f \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déformation plastique dans le cas où  $d\underline{\underline{\sigma}}$  est appliqué *tangentiellement* à la frontière du domaine d'élasticité. Il en résulte que  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  ne dépend de  $d\underline{\underline{\sigma}}$  qu'au travers de sa projection, notée  $d\underline{\underline{\sigma}}^n$ , sur la normale extérieure (figure 14). Sa projection  $d\underline{\underline{\sigma}}^t$  sur le plan tangent n'induisant en effet aucune déformation plastique, en raison de l'argument de continuité invoqué précédemment ("*charge neutre*"). Ce résultat implique que  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  peut se mettre sous la forme.



$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{H}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}}) d_{\underline{\underline{E}}} f \quad (1.22)$$

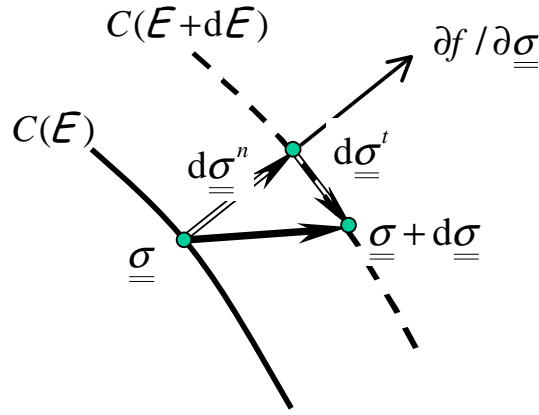


Figure 14 : Projections normale et tangentielle à la surface de charge de l'incrément de contrainte  $d\underline{\underline{\sigma}}$ .

#### 4.2. Principe du travail plastique maximal ; règle de normalité.

Ce principe, énoncé par Hill (1950), indique que pour un état de contrainte "plastiquement admissible" (c'est-à-dire appartenant au domaine d'élasticité  $C(\underline{\underline{E}})$ ) et un incrément de sollicitation donnés, l'incrément de déformation plastique  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  correspondant vérifie la propriété suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sup \{ \underline{\underline{\sigma}}^* : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p ; \underline{\underline{\sigma}}^* \in C(\underline{\underline{E}}) \} \quad (1.23)$$

$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  a la dimension d'un *travail élémentaire par unité de volume*, d'où la dénomination du principe. Ce principe a deux conséquences, illustrées sur la figure 15.

- ✓ Lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}$  est strictement à l'intérieur du convexe d'élasticité  $C(\underline{\underline{E}})$ ,  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0$ . On retrouve l'expression (1.16) de la loi de comportement.
- ✓ Lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}$  est sur la frontière de  $C(\underline{\underline{E}})$ , la propriété (1.23) exprime que  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est tel qu'il rend maximum le produit scalaire  $\underline{\underline{\sigma}}^* : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ . Il s'ensuit que  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est **normale extérieure** à  $C(\underline{\underline{E}})$  en  $\underline{\underline{\sigma}}$ , ce que l'on peut écrire :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \text{ avec } d\lambda \geq 0 \quad (1.24)$$

où  $d\lambda$  désigne le *multiplicateur plastique*.

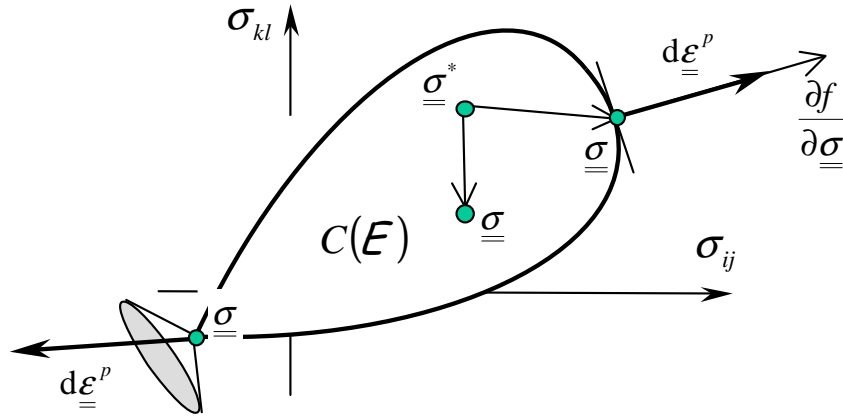


Figure 15 : Illustration du principe du travail plastique maximal.

$f(\underline{\underline{\sigma}}, E) < 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}}$	
$f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = 0$	$d_E f \leq 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$
	$d_E f > 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{1}{M(\underline{\underline{\sigma}}, E)} d_E f \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, M > 0$

- ✓ Dans le cas où la frontière du domaine comporte un point singulier (figure 15), l'équation (1.24) doit être remplacée par :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \in \partial_E f \quad (1.25)$$

où  $\partial_E f$  désigne le cône des normales extérieures à  $C(E)$  en  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

La *règle de normalité* (1.24) associée à l'expression générale (1.22) précédemment établie, permet en définitive d'écrire  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  sous la forme :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{1}{M(\underline{\underline{\sigma}}, E)} d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} f \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad M > 0 \quad (1.26)$$

Le tableau ci-dessus récapitule les différentes situations relatives à l'écriture de la loi de comportement élastoplastique pour un matériau écrouissable obéissant au *principe du travail plastique maximal* (matériau *standard*).

### Identification du paramètre $M$ à partir de l'essai de traction simple.

Dans cet essai, l'état de contrainte en tout point de l'éprouvette est homogène *uniaxial*, de la forme:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (1.27)$$

L'expression générale (1.26) donne alors:

$$d\varepsilon_{11}^p = \frac{1}{M(\sigma_{11}, E)} d_{\underline{\underline{\varepsilon}}} f \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \frac{d\sigma_{11}}{M} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \right)^2 \quad (1.28)$$

soit:

$$\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p} = \frac{M}{\left( \partial f / \partial \sigma_{11} \right)^2} \quad (1.29)$$

Le rapport  $M = d\sigma_{11} / d\varepsilon_{11}^p$ , appelé *module d'écrouissage*, est mesuré expérimentalement en effectuant un cycle élémentaire de charge-décharge (voir figure 16). On obtient alors:

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{11}^e = \frac{d\sigma_{11}}{E_t} - \frac{d\sigma_{11}}{E} \quad (1.30)$$

soit:

$$M = \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}^p} = \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)^{-1} \quad (1.31)$$

où  $E$  désigne le module d'Young et  $E_t$  le module tangent (pente locale de la courbe de charge). Par comparaison de (1.25) et (1.26) le module d'écrouissage vaut ainsi:

$$M = \frac{\mathcal{M}}{(\partial f / \partial \sigma_{11})^2} \quad (1.32)$$

Cette dernière relation montre que la dimension physique de la grandeur  $\mathcal{M}$  introduite dans l'expression de la règle d'écoulement plastique (1.26) dépend directement du choix fait pour la fonction de charge. En vertu de (1.27), elle ne possède la dimension d'un module d'élasticité ou d'écrouissage que si l'on fait le choix d'une fonction de charge ayant la dimension d'une contrainte.

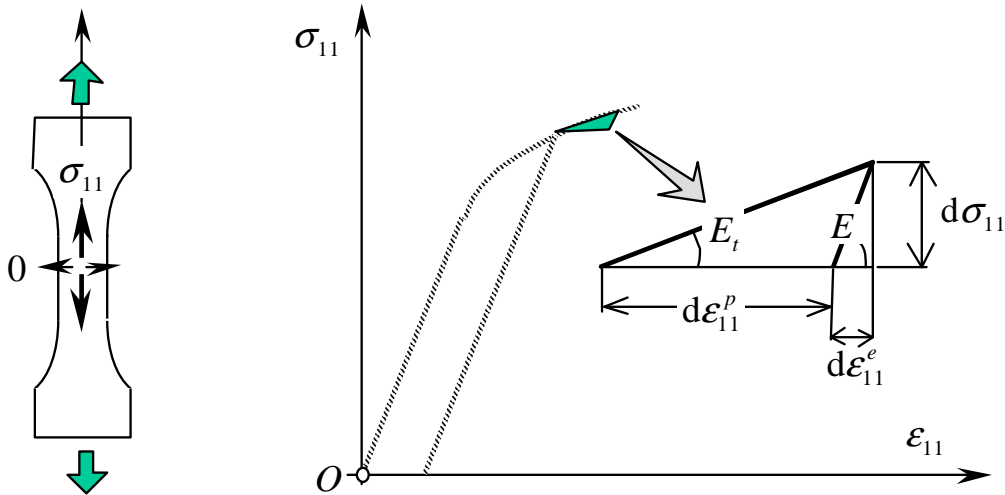


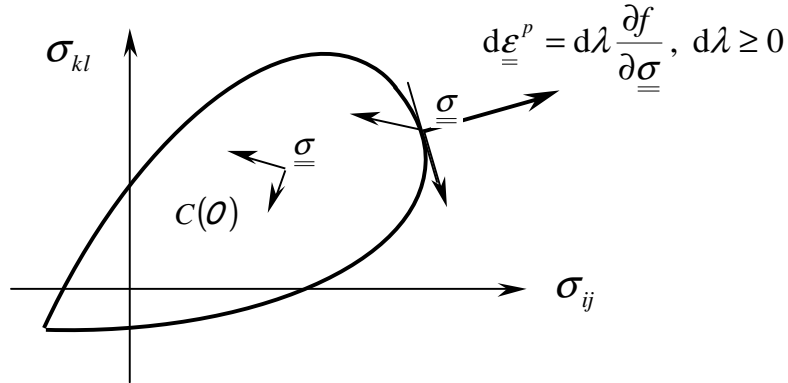
Figure 16: Cycle charge-décharge élémentaire dans un essai de traction simple.

**Remarque.** Le principe du travail plastique maximal qui nous a permis de préciser l'orientation de l'incrément de déformation plastique, est bien vérifié expérimentalement pour les métaux. Il est en revanche sujet à caution pour ce qui concerne des matériaux de type sols, roches ou bétons ("géomatériaux"). Dans ce cas l'expression (1.22) demeure valable, mais l'orientation de  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ , c'est-à-dire du tenseur  $\underline{\underline{H}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{E}})$ , doit être spécifiée autrement que par la règle de normalité (matériaux non standards).

### 4.3. Le cas de la plasticité parfaite

Nous plaçant toujours dans le cas du matériau obéissant au principe du travail plastique maximal, le caractère non écrouissable du matériau implique que dans l'expression (1.26) le paramètre  $\mathcal{M}$ , proportionnel ainsi que nous venons de le voir au **module d'écrouissage**  $M$ , s'annule, de même qu'au numérateur l'incrément de fonction de charge  $df$ , puisque le point représentatif de l'état de contrainte ne peut plus sortir du domaine d'élasticité fixe  $C(O)$ . Cela

signifie que l'amplitude  $d\lambda = df / M$  de l'incrément du multiplicateur plastique, et donc de la déformation plastique reste *indéterminée*, bien que toujours positive en raison de la règle de normalité. Le tableau ci-dessous associé à la figure 17 récapitule les différentes écritures de la loi de comportement selon la situation rencontrée.



$f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : d\underline{\underline{\sigma}}$	
$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$	$df \leq 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$
	$df = 0$	$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, d\lambda &gt; 0</math> </div>

Figure 17 : Ecriture de la loi de comportement pour un matériau élastique parfaitement plastique standard.

#### 4.4. Cas du matériau isotrope

La fonction de charge s'écrivant dans ce cas comme une fonction des seuls invariants principaux de  $\underline{\underline{\sigma}}$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \hat{f}(I_1 = \text{tr}\underline{\underline{\sigma}}, I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}\underline{\underline{\sigma}}^2, I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}\underline{\underline{\sigma}}^3) \quad (1.33)$$

l'écriture de la règle d'écoulement plastique (1.26) dans le cas où le matériau obéit au principe du travail plastique maximal devient :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = d\lambda \left( \frac{\hat{f}}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\hat{f}}{\partial I_2} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\hat{f}}{\partial I_3} \underline{\underline{\sigma}}^2 \right) \quad (1.34)$$

Cette dernière expression montre que  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  *a les mêmes directions principales que*  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tandis que, si l'on suppose que le matériau est également isotrope du point de vue de ses propriétés élastiques, soit :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} d\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } d\underline{\underline{\sigma}}) \mathbf{1} \quad (1.35)$$

( $E$ : module d'Young,  $\nu$ : coefficient de Poisson), l'incrément de déformation élastique  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  *a les mêmes directions principales que l'incrément de charge*  $d\underline{\underline{\sigma}}$ . En outre il résulte de (1.34) que :

$$d\varepsilon_K^p = d\lambda \left( \frac{\hat{f}}{\partial I_1} + \frac{\hat{f}}{\partial I_2} \sigma_K + \frac{\hat{f}}{\partial I_3} \sigma_K^2 \right) \quad (1.36)$$

où  $d\varepsilon_K^p$  (respectivement  $\sigma_K$ ), avec  $K = I, II, III$ , désignent les valeurs principales de  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  (respectivement  $\underline{\underline{\sigma}}$ ). D'où en observant que :

$$I_1 = \sum_{K=I}^{III} \sigma_K, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sum_{K=I}^{III} \sigma_K^2, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sum_{K=I}^{III} \sigma_K^3 \quad (1.37)$$

et donc

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_K} = 1, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_K} = \sigma_K, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_K} = \sigma_K^2 \quad (1.38)$$

il vient

$$d\varepsilon_K^p = d\lambda \frac{\hat{f}}{\partial \sigma_K} (I_1, I_2, I_3) = d\lambda \frac{\hat{f}}{\partial \sigma_K}, \quad d\lambda \geq 0 \quad (1.39)$$

ce qui signifie en particulier que la règle de normalité est valable dans l'*espace des valeurs principales* de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ .

#### 4.5. Formulation «en vitesse»

Le tableau ci-dessous se réfère à l'écriture «en vitesse» de la loi de comportement élastoplastique pour un matériau élastoplastique parfait. Il est identique au tableau de la figure 17,

à ceci près que les accroissements infinitésimaux (incrément) ont été remplacés par des dérivées temporelles, c'est-à-dire des taux de variation dans le temps. On parlera ainsi de taux de déformation *totale* ( $\underline{\underline{d}}$ ), *élastique* ( $\underline{\underline{d}}^e$ ) ou *plastique* ( $\underline{\underline{d}}^p$ ).

$f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$	$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{d}}^e = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$	
$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$	$\dot{f} \leq 0$	$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e$
	$\dot{f} = 0$	$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e + \underline{\underline{d}}^p$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\underline{\underline{d}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \lambda &gt; 0</math> </div>

## 5. Quelques aspects thermodynamiques du comportement élastoplastique

C'est l'observation d'une *irréversibilité géométrique* au terme d'un cycle de charge-décharge dans une expérience homogène, qui constitue l'élément caractéristique premier du comportement élastoplastique d'un matériau. Nous nous proposons dans ce qui suit de préciser le lien entre cette irréversibilité mécanique et la notion d'irréversibilité introduite classiquement en thermodynamique, et que nous avons déjà brièvement évoquée. On se limite ici au cadre des transformations *infinitésimales*, *quasi-statiques* et *isothermes*.

On appellera *cycle mécanique* un cycle de chargement défini, dans l'espace des sollicitations  $\underline{\underline{\sigma}}$  s'exerçant sur un volume élémentaire de matériau, par un *trajet fermé issu de l'origine* ( $\underline{\underline{\sigma}}_A = \underline{\underline{\sigma}}_B = 0$ ). Le travail des forces extérieures calculé sur un tel cycle, *par unité de volume*, est égal au travail de déformation :

$$W_A^B = \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} \quad (1.40)$$

L'*inégalité de Clausius-Duhem* qui associe le premier et le second principes de la thermodynamique s'écrit dans le cas d'une telle évolution isotherme:

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} - \rho d\psi \geq 0 \quad (1.41)$$

où  $d\psi$  représente la variation d'*énergie libre massique* du matériau ( $\rho$  est sa masse volumique) dans l'incrément de chargement  $d\underline{\underline{\sigma}}$ . Il vient alors en intégrant (1.41) le long du cycle mécanique et en tenant compte de (1.40) :

$$D_A^B = W_A^B - \int_A^B \rho d\psi = W_A^B - [\rho\psi(A) - \rho\psi(B)] \geq 0 \quad (1.42)$$

où  $D_A^B$  représente la *dissipation intrinsèque* (énergie dissipée sous forme de chaleur).

Nous considérerons successivement trois cas de figure :

◇ **Comportement élastique**

Il se caractérise par deux propriétés<sup>2</sup> :

- La *réversibilité des déformations* au cours d'un cycle mécanique quelconque, qui se traduit par le fait que le trajet correspondant dans l'espace des  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est également *fermé* (figure 18):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_A = \underline{\underline{\varepsilon}}_B = 0 \quad (1.43)$$

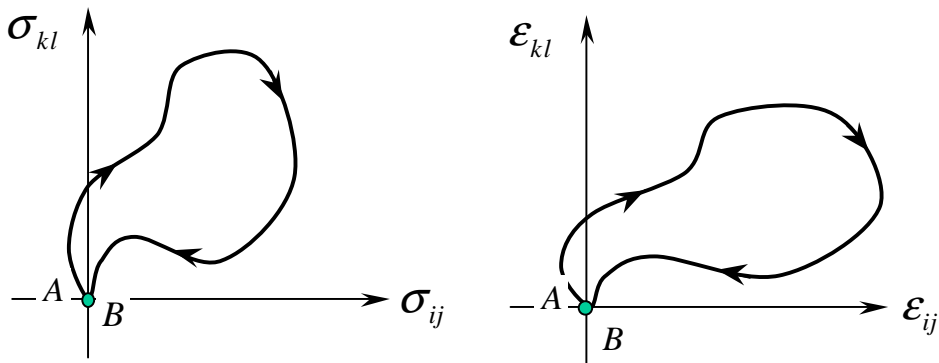


Figure 18 : Cycle mécanique appliqué à un matériau élastique dans l'espace des contraintes et des déformations

- La *nullité du travail* fourni au cours du cycle, ainsi que de la *quantité de chaleur* échangée au terme de ce cycle:

<sup>2</sup> La première propriété est immédiate dans le cas d'un chargement monodimensionnel (cf. par exemple la figure 4-a). La mise en évidence expérimentale de la seconde passe par l'emploi d'un calorimètre.



$$W_A^B = Q_A^B = 0 \quad (1.44)$$

d'où en vertu du premier principe :

$$\rho e(B) - \rho e(A) = W_A^B + Q_A^B = 0 \quad (1.45)$$

où  $e$  désigne l'**énergie interne massique**, ce qui signifie que le cycle mécanique est également un **cycle thermodynamique**, la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  qui décrit elle-même un cycle, pouvant être prise comme seule **variable d'état** (hormis la température supposée ici constante) dont dépendent les fonctions thermodynamiques telles que  $\psi$  et  $e$ . Par suite  $\psi(A) = \psi(B)$  et donc d'après (1.42) et (1.44):

$$D_A^B = 0 \quad (1.46)$$

La dissipation intrinsèque est nulle pour tout cycle et donc *l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à une égalité* :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} - \rho d\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : d\underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \quad \forall d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.47)$$

d'où l'équation d'état classique:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (1.48)$$

Au cours d'un cycle mécanique de charge-décharge, un matériau élastique "emmagasine" le travail qui lui est fourni sous forme d'**énergie élastique** (identifiée à l'énergie libre  $\psi$ ) dans la phase de charge, énergie qu'il restitue ensuite intégralement lors de la décharge.

#### ◇ **Comportement élastique parfaitement plastique**

Imaginons maintenant le même cycle mécanique  $AB$  appliqué à un matériau *élastique parfaitement plastique*, caractérisé par un convexe d'élasticité  $C(\mathcal{O})$ , de sorte que sur une partie  $A'B'$  de ce cycle le matériau soit en *charge plastique*, c'est-à-dire que le point représentatif du trajet de chargement se déplace sur la frontière de  $C(\mathcal{O})$  (figure 19). On constate alors qu'il n'y a pas réversibilité des déformations, puisque par définition de la plasticité :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_B = \underline{\underline{\varepsilon}}^p \neq 0 \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_B^e = 0 \quad (1.49)$$

Le travail fourni au cours du cycle est cette fois-ci *strictement positif*, comme le montre par exemple la figure 4-b dans le cas monodimensionnel :

$$W_A^B > 0 \quad (1.50)$$

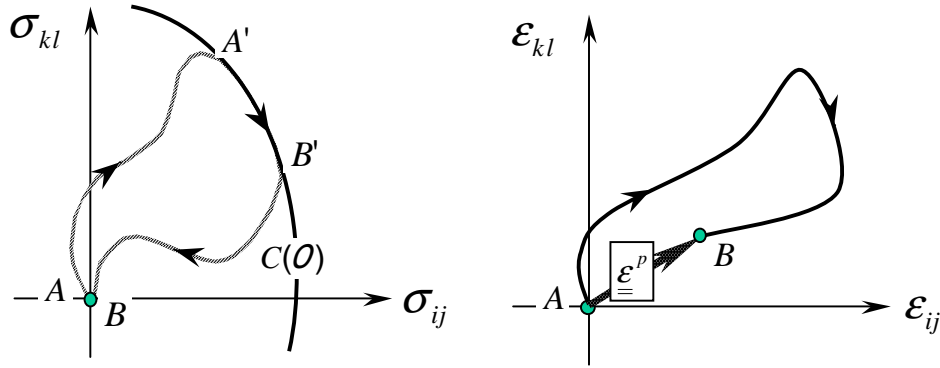


Figure 19 : Cycle mécanique dans le cas élastique parfaitement plastique.

Il est entièrement récupéré par l'extérieur sous forme de chaleur <sup>3</sup>, de sorte que :

$$W_A^B + Q_A^B = 0 \quad (1.51)$$

Cette dernière relation signifie que le cycle mécanique est là encore un cycle thermodynamique, la variable d'état étant cette fois-ci la **déformation élastique**  $\underline{\underline{\xi}}^e$ . Par suite  $\rho\psi(A)=\rho\psi(B)$ , et donc d'après (1.42) et (1.51) :

$$D_A^B = W_A^B = -Q_A^B > 0 \quad (1.52)$$

Compte tenu de la décomposition de la déformation totale en parties élastique et plastique, et du fait que l'énergie libre massique  $\psi$  ne dépende que de la partie élastique, l'inégalité (1.41) s'écrit encore :

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\xi}}^e} \right) : d\underline{\underline{\xi}}^e + \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\xi}}^p \geq 0 \quad (1.53)$$

<sup>3</sup> Comme on pourrait le mettre en évidence expérimentalement si l'on disposait de mesures calorimétriques suffisamment précises.

Effectuant alors à partir d'un point  $\underline{\underline{\sigma}}$  situé sur la frontière du critère ( $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ ) une *décharge élastique* ( $df < 0$ ), (1.53) devient une égalité :

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \right) : d\underline{\underline{\varepsilon}}^e = 0, \quad \forall d\underline{\underline{\sigma}}; \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} < 0 \quad (1.54)$$

d'où nécessairement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad (1.55)$$

et par conséquent :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (1.56)$$

soit

$$D_A^B = \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (1.57)$$

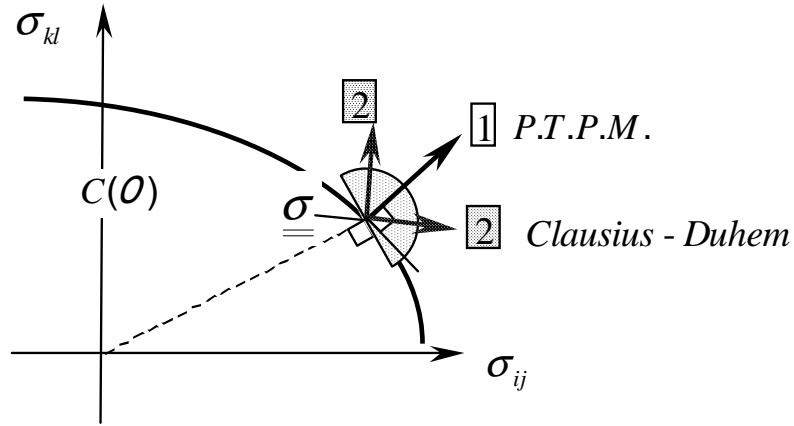


Figure 20 : Principe du travail plastique maximal et positivité de la dissipation intrinsèque.

Le principe du travail plastique maximal indique par ailleurs que :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^*; \quad f(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq 0 \quad (1.58)$$

Il implique donc toujours l'inégalité (1.57) dans la mesure où l'état de contrainte nul appartient au domaine d'élasticité (figure 20).

◇ **Comportement élastoplastique avec écrouissage**

La figure 21 représente les trajets représentatifs dans les espaces des contraintes et des déformations d'un cycle mécanique imposé à un matériau *élastoplastique avec écrouissage*. On constate :

- une non-réversibilité des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_B = \underline{\underline{\varepsilon}}^p \neq 0 \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_B^e = 0 \quad (1.59)$$

- une modification de la surface de charge due à l'écrouissage :  $C(E_A) \neq C(E_B)$ .

D'un point de vue thermodynamique on pourrait constater, si l'on disposait par exemple de mesures calorimétriques suffisamment précises, que le travail fourni au cours du cycle n'est pas entièrement récupéré par l'extérieur sous forme de chaleur :

$$W_A^B + Q_A^B > 0 \quad (1.60)$$

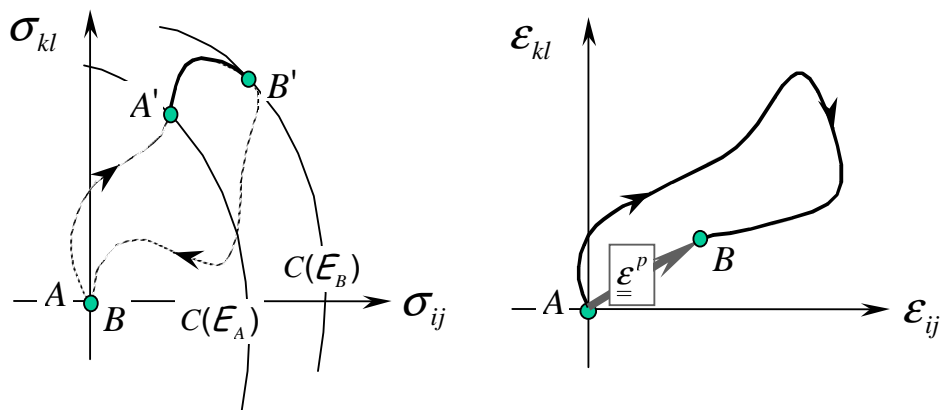


Figure 21 : Cycle mécanique pour un matériau élastoplastique écrouissable.

Cela signifie que le cycle mécanique *n'est plus un cycle thermodynamique* comme dans les cas précédents. Ceci est corroboré par le fait que les variables qui définissent l'état d'écrouissage du matériau prises, outre la déformation élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ , comme variables définissant l'état thermodynamique du matériau, ne sont pas revenues à leur état initial. Il est possible de donner une interprétation plus précise de ces variables dans le cadre d'une analyse de type homogénéisation, mettant en évidence le phénomène d'écrouissage comme la manifestation à

l'échelle macroscopique de l'incompatibilité des déformations plastiques à l'échelle microscopique. Désignant provisoirement par  $\underline{E} = (E_i, i = 1, \dots, n)$  ces variables, l'inégalité (1.41) devient :

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \right) : d\underline{\underline{\varepsilon}}^e - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \cdot d\underline{E} + \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (1.61)$$

Le même raisonnement en décharge élastique que celui fait dans le cas parfaitement plastique donne :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad (1.62)$$

d'où :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \cdot d\underline{E} \geq 0 \quad (1.63)$$

Contrairement au cas parfaitement plastique examiné précédemment  $\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  *ne s'identifie plus à l'incrément de dissipation plastique*. L'hypothèse de "découplage" entre élasticité et plasticité, fondée notamment sur la constatation expérimentale que les propriétés élastiques du matériau ne sont pas modifiées par l'état d'écroutissage, et que donc l'équation de comportement (1.62) est *indépendante* de  $\underline{E}$ , conduit à écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{E}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \right) = 0 \quad (1.64)$$

d'où

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{E}) = \theta(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) + \varphi(\underline{E}) \quad (1.65)$$

Par suite l'inégalité (1.63) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \rho d\varphi(\underline{E}) \geq 0 \quad (1.66)$$

soit par intégration sur le cycle de chargement :

$$D_A^B = \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \rho \{ \varphi(\underline{E}_A) - \varphi(\underline{E}_B) \} \geq 0 \quad (1.66)$$

Cette dernière inégalité peut s'interpréter comme suit. Le *travail "plastique"* dépensé au cours d'un cycle mécanique (qui est égal au travail total, puisque la part "élastique" de ce travail est

nulle), n'est pas totalement dissipé sous forme de chaleur. Il vient également accroître, à travers l'écroutissage du matériau, une partie de l'énergie libre égale à  $\varphi$ , non récupérable à la décharge.  $\varphi$  s'appelle l'*énergie élastique bloquée*. Une interprétation mécanique claire de cette énergie peut être donnée dans le cadre d'une approche micromécanique de l'écroutissage.

\*\*\*\*\*