

## ANNEXE

### DEUX CRITERES DE PLASTICITE USUELS : VON MISES ET TRESCA

#### 1. Préliminaires

Comme nous l'avons vu à la section 3.2 du chapitre I, la fonction de charge d'un matériau obéissant à un critère de *plasticité parfaite isotrope* s'écrit

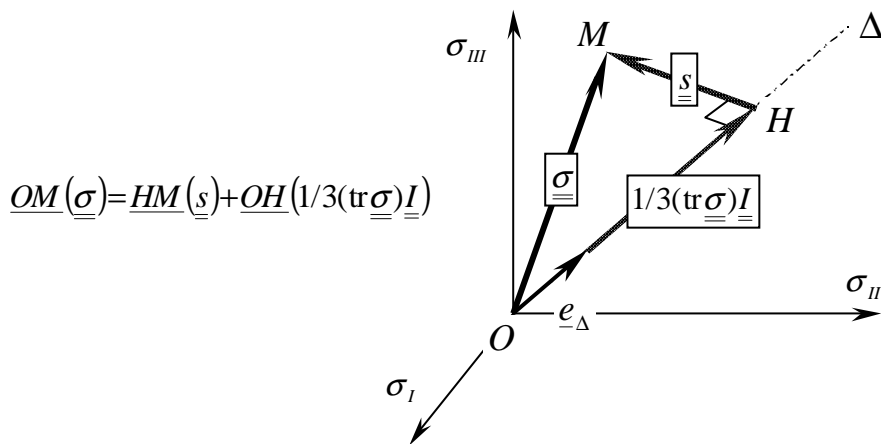
$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \tilde{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  sont les contraintes principales. Le domaine d'élasticité peut donc être représenté dans  $R^3$ . Dans cet espace, la décomposition de la contrainte en parties *sphérique* et *déviatorique* d'un tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + 1/3(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} \quad (\text{A.2})$$

peut être représentée de la façon suivante (figure 1). Le vecteur  $\underline{OM}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  étant associé à  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et  $\underline{e}_\Delta(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , vecteur *unitaire* porté par l'axe trissecteur  $\Delta$ , à  $\underline{I}/\sqrt{3}$ , il vient :

$$\underline{OH} = (\underline{OM} \cdot \underline{e}_\Delta) \underline{e}_\Delta = (\text{tr}\underline{\underline{\sigma}}) \underline{e}_\Delta / \sqrt{3} \quad (\text{A.3})$$



*Figure 1. Représentation géométrique dans l'espace des contraintes principales de la décomposition d'un tenseur en parties sphérique et déviatorique*

de sorte que le vecteur  $\underline{OH}$  de composantes  $(\text{tr}\underline{\sigma}/3, \text{tr}\underline{\sigma}/3, \text{tr}\underline{\sigma}/3)$  représente dans l'espace des contraintes principales la partie *sphérique* du tenseur  $\underline{\sigma}$ , la partie *déviatorique* étant associée au vecteur  $\underline{OM} - \underline{OH} = \underline{HM}$ . Ce dernier est perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ .

## 2. Critère de von Mises

### 2.1 Domaine d'élasticité.

La fonction de charge relative à un tel critère s'écrit :

$$\boxed{f(\underline{\sigma}) = (1/2 \underline{s} : \underline{s})^{1/2} - k = (1/2 s_{ij} s_{ji})^{1/2} - k = (1/2 (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2))^{1/2} - k} \quad (\text{A.4})$$

où  $(s_I, s_{II}, s_{III})$  désignent les valeurs principales de  $\underline{s}$  et  $k$  représente la *limite d'élasticité en cisssion simple*. Dans l'espace des contraintes principales, le module du vecteur  $\underline{HM}$  est égal à :

$$HM = (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

de sorte que le critère de von Mises peut également s'écrire

$$\boxed{f(\underline{\sigma}) \leq 0 \Leftrightarrow HM \leq k\sqrt{2}} \quad (\text{A.6})$$

Le domaine d'élasticité est un cylindre circulaire d'axe  $\Delta$  et de rayon  $k\sqrt{2}$  (figure 2).

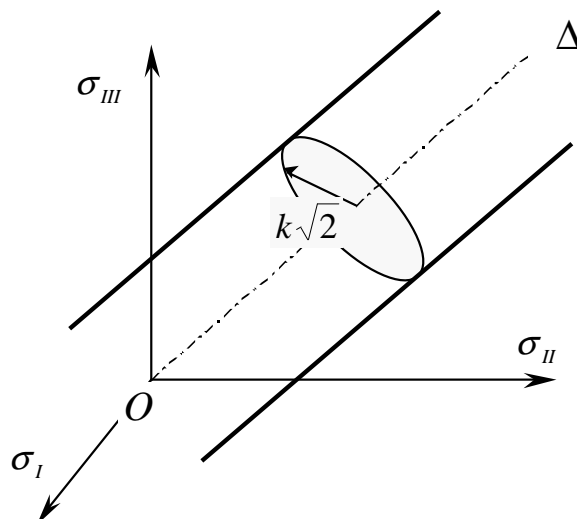


Figure2. Domaine d'élasticité relatif au critère de von Mises

## 2.2 Règle d'écoulement plastique(matériau standard)

Partant de l'expression générale

$$\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Tenant compte de (A.4), il vient

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : d\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}{2(1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2}} = \frac{\underline{\underline{s}} : d\underline{\underline{s}}}{2k} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} : d\underline{\underline{\sigma}} \quad \forall d\underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{A.8})$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{2k} \quad (\text{A.9})$$

et par conséquent, puisque le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est indéterminé

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{s}} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{si } (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} = k \quad \text{et } \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cette règle d'écoulement peut s'interpréter géométriquement en remarquant d'une part que  $\underline{\underline{d}}^p$  a les mêmes directions principales que  $\underline{\underline{\sigma}}$  (voir également la section 4.4. du chapitre I), et que dans l'espace des contraintes principales le vecteur associé à  $\underline{\underline{d}}^p$  est *normale extérieure* à la surface de charge cylindrique, donc perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ , et même plus précisément *colinéaire* au vecteur associé à  $\underline{\underline{s}}$  (figure 3).

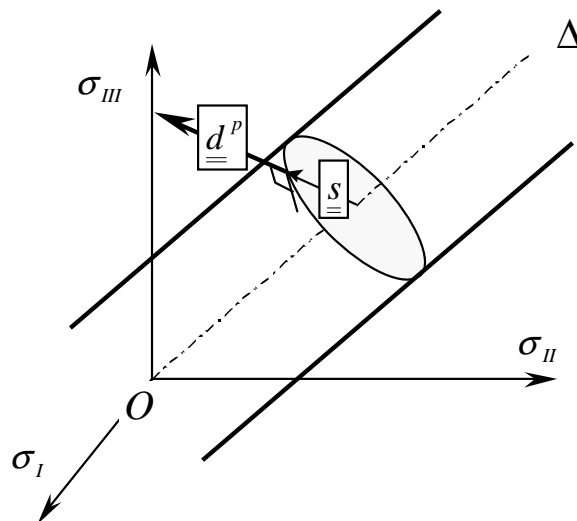


Figure3. Interprétation géométrique de la règle d'écoulement associée pour un critère de von Mises

La relation (A.10) implique en particulier que

$$\text{tr}(\underline{d}^p) = \text{tr}(\underline{\lambda}_s) = 0 \quad (\text{A.11})$$

signifiant ainsi que le matériau est *plastiquement incompressible*.

### 3. Critère de Tresca

#### 3.1 Domaine d'élasticité.

La fonction de charge d'un tel critère s'écrit :

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K - \sigma_L\} - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{A.12})$$

où  $\sigma_0 = 2C$  représente la limite d'élasticité en *traction simple* du matériau,  $C$  désignant sa *cohésion*. Dans l'espace des contraintes principales le domaine d'élasticité est représenté par un cylindre d'axe  $\Delta$ . En effet étant donné un point  $M(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  appartenant à ce domaine, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité (A.12), ce dernier contient toute la droite passant par  $M$  et parallèle à  $\Delta$  constituée des points de la forme  $M'(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha)$ , puisqu'il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad \hat{f}(\sigma_I + \alpha, \sigma_{II} + \alpha, \sigma_{III} + \alpha) = \\ \sup_{K,L=I,II,III} \{\sigma_K + \alpha - \sigma_L - \alpha\} - \sigma_0 = \hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Il reste alors à préciser la section de ce cylindre en se plaçant dans un *plan déviateur* quelconque, perpendiculaire à  $\Delta$  (figure 4). L'expression (A.12) fait apparaître que le critère de Tresca consiste à *limiter la différence entre les contraintes principales extrêmes*, la contrainte principale intermédiaire n'intervenant pas dans un tel critère. L'espace des contraintes principales peut être ainsi subdivisé en six régions égales délimitées par les trois plans passant par  $\Delta$  et contenant respectivement les trois axes principaux. Chacune de ces régions correspond à un classement d'ordre donné entre les contraintes principales.

Plaçons nous par exemple dans la région où  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$  sont les contraintes principales majeure et mineure, tandis que  $\sigma_{II}$  est la contrainte principale intermédiaire. Le critère de Tresca s'écrit alors

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

La restriction du domaine d'élasticité à cette région est donc délimitée par le plan d'équation  $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_0$  parallèle à  $\Delta$  et à l'axe  $O\sigma_{II}$ . Effectuant le même raisonnement pour les cinq

autres régions, il apparaît que la frontière du domaine d'élasticité est un *hexagone régulier* représenté sur la figure 4.

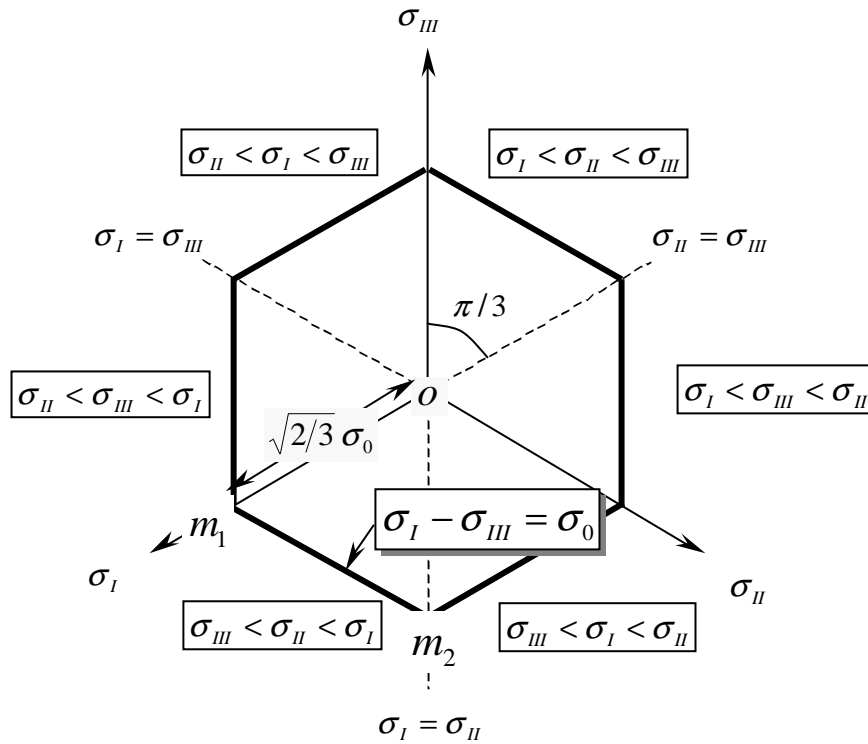


Figure 4. Section par un plan déviateur du domaine d'élasticité relatif à un critère de Tresca

La dimension de cet hexagone est caractérisée par la distance  $om_1 = om_2$ , où  $m_1$  désigne la trace dans le plan déviateur de l'arête du cylindre hexagonal, parallèle à l'axe  $\Delta$ , qui passe par le point  $(\sigma_I = \sigma_0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0)$  correspondant à limite d'élasticité en traction uniaxiale. Cette distance n'est autre que la norme du déviateur associé à cet état de contrainte  $(s_I = 2\sigma_0/3, s_{II} = s_{III} = -\sigma_0/3)$

$$om_1 = om_2 = (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (\text{A.15})$$

### 3.2 Règle d'écoulement

On utilise le résultat du cours (chapitre I, équation (1.39)) exprimé en vitesse :

$$d_K^p = \lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_K}, \quad \lambda \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

Deux cas doivent être distingués selon la position de l'état de contrainte sur la surface de charge hexagonale.

- *Régime de face* (figure 5-a). Le point est situé sur une face du polyèdre (segment  $m_1m_2$  à l'exclusion des extrémités). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{A.17})$$

d'où en vertu de (A.16)

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\lambda} \quad \text{lorsque} \quad \hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (\text{A.18})$$

De même sur la «face»  $m_2m_3$

$$d_I^p = 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -\dot{\mu} \quad \text{lorsque} \quad \hat{f}(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \dot{\sigma}_{II} - \dot{\sigma}_{III} = 0 \quad (\text{A.19})$$

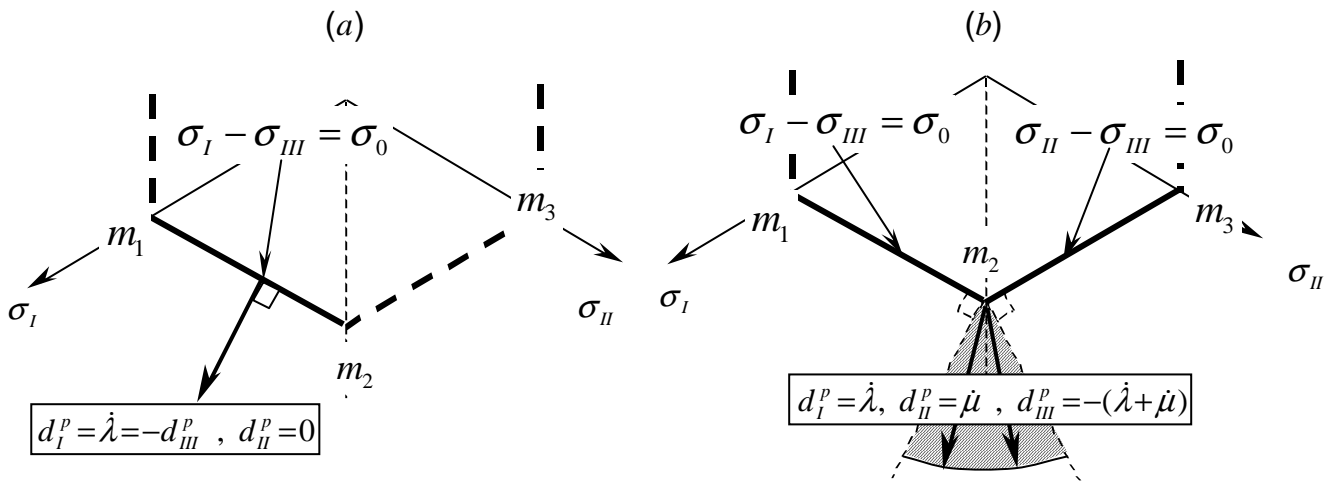


Figure 5. Règle d'écoulement plastique pour un matériau de Tresca : (a) régime de face, (b) régime d'arête

- *Régime d'arête* (figure 5-b). Le point est situé sur une arête du polyèdre (point  $m_2$ ). La fonction de charge s'écrit dans ce cas

$$\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_0 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Le vecteur représentant le taux de déformation plastique appartient au cône des normales extérieures en ce point, c'est-à-dire qu'il est combinaison convexe des vecteurs correspondant aux régimes des «faces»  $m_1m_2$  et  $m_2m_3$ . Soit

$$d_I^p = \dot{\lambda} \geq 0 \quad d_{II}^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad d_{III}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}) \text{ lorsque } \dot{\sigma}_I = \dot{\sigma}_{II} = \dot{\sigma}_{III} \quad (\text{A.21})$$

On observe que dans tous les cas, la *condition d'incompressibilité plastique* est bien vérifiée

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^p = \sum_K d_K^p = 0 \quad (\text{A.22})$$

ce qui se traduit géométriquement par le fait que le vecteur associé au taux de déformation plastique reste perpendiculaire à l'axe  $\Delta$ .

\*\*\*\*\*

