

CHAPITRE II

PROBLEMES

D' ELASTOPLASTICITE

1. Un exemple simple de structure

On s'intéresse au système réticulé, représenté figure 1, formé de trois barres verticales identiques (longueur l), numérotées de 1 à 3, fixées à leur extrémité supérieure (points A' , B' et C') par des articulations sans frottement, et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau *rigide*, les points A , B et C représentant également des articulations *sans frottement*. Les seules contraintes "généralisées" du système sont donc les efforts N_i , $i=1,2,3$ de *traction-compression* dans les barres. Le chargement est constitué d'une force verticale d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée au point D milieu de BC , et croissant progressivement à partir de zéro ($Q: 0 \uparrow$).

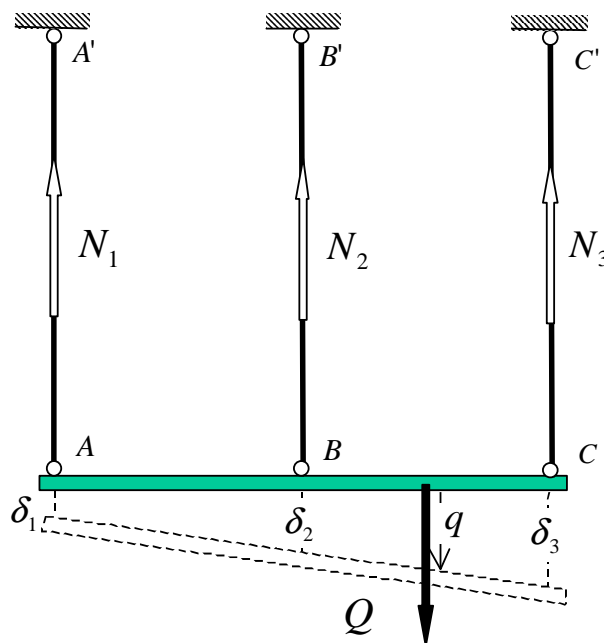


Figure 1 : Calcul élastoplastique d'un système réticulé.

Les barres ont un comportement *élastique parfaitement plastique* schématisé par le diagramme (N_i, δ_i) de la figure 2. S désigne la section des barres, E le module d'Young du matériau constitutif, supposé homogène, et L la limite d'élasticité en traction-compression. Le tableau ci-dessous, homologue de celui de la figure 17 du chapitre 1, récapitule les différentes écritures de la loi de comportement élastoplastique pour la barre n° i . On observe en particulier que le principe du travail plastique maximal se traduit ici par le fait que la barre s'allonge (resp. se raccourcit) plastiquement lorsque la limite d'élasticité étant atteinte en traction (resp. compression), la valeur de l'effort est maintenue constante.

$f(N_i)= N_i -L<0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e = \frac{\dot{N}_i l}{ES}$	
$f(N_i)=N_i-L=0$	$\dot{f} = \dot{N}_i \leq 0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e$
	$\dot{f} = \dot{N}_i = 0$	$\dot{\delta}_i = \underbrace{\dot{\delta}_i^e}_{=0} + \dot{\delta}_i^p = \dot{\lambda} (\partial f / \partial N_i) = +\dot{\lambda} \geq 0$
$f(N_i)=N_i+L=0$	$\dot{f} = \dot{N}_i \leq 0$	$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e$
	$\dot{f} = \dot{N}_i = 0$	$\dot{\delta}_i = \underbrace{\dot{\delta}_i^e}_{=0} + \dot{\delta}_i^p = \dot{\lambda} (\partial f / \partial N_i) = -\dot{\lambda} \leq 0$

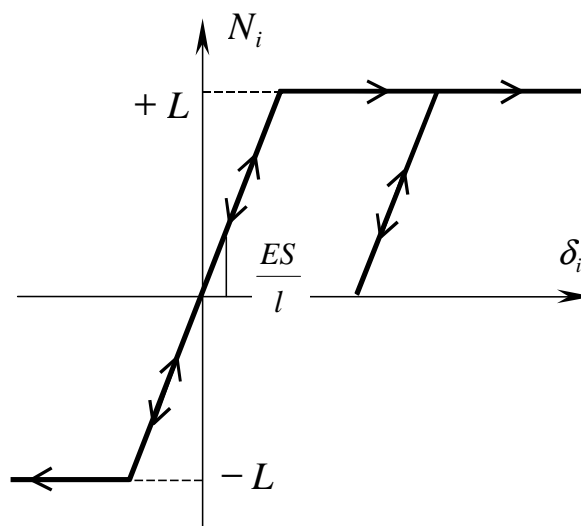


Figure 2 : Diagramme de comportement élastique parfaitement plastique de la barre n°i.

L'état *initial* de la structure étant supposé *naturel* ($N_i=0, i=1,2,3=0$ pour $Q=0$), on cherche à déterminer l'évolution du système à mesure que le chargement Q augmente à partir de la valeur nulle.

1.1. Phase de comportement élastique

Les équations permettant de mener à bien la résolution du problème sont classiquement :

- **Les équations d'équilibre**, valables indépendamment de la loi de comportement des barres. Elles résultent ici de l'équilibre global en *résultante* (verticale) et en *moment* (par exemple par

rapport au point d'application de la charge) du barreau horizontal soumis à l'action de la charge Q et des efforts N_i exercés par les barres. Soit immédiatement :

$$\begin{cases} Q = N_1 + N_2 + N_3 \\ N_3 = N_2 + 3N_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le système est *hyperstatique d'ordre un*.

- Les **relations de comportement**. Faisant l'hypothèse que les efforts restent strictement à l'intérieur du domaine d'élasticité, elles s'écrivent :

$$\delta_i = \frac{N_i l}{ES} \quad i=1,2,3 \quad (2.2)$$

- La relation de **compatibilité géométrique** entre allongements consiste ici tout simplement à exprimer que les points A, B, C restent alignés:

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0 \quad (2.3)$$

Elle permet, à travers les relations (2.2), de rajouter une troisième équation au système (2.1), dont la résolution donne alors :

$$N_1 = Q/12, \quad N_2 = Q/3, \quad N_3 = 7Q/12 \quad (2.4-a)$$

$$\delta_1 = Ql/12ES, \quad \delta_2 = Ql/3ES, \quad \delta_3 = 7Ql/12ES, \quad (2.4-b)$$

le déplacement vertical q du point d'application du chargement valant dès lors :

$$q = (\delta_2 + \delta_3)/2 = 11Ql/24ES \quad (2.5)$$

Cette solution n'est valable que dans la mesure où le comportement des barres demeure *purement élastique*, c'est-à-dire tant que $N_3 < L$, soit :

$$Q < Q^e = 12L/7 \quad (2.6)$$

Q^e représente la **limite d'élasticité** initiale de la structure. Elle correspond à la plastification en traction de la barre n°3. La réponse globale de la structure, représentée sous la forme d'une courbe donnant l'effort Q en fonction du déplacement q de son point d'application est représentée sur la

figure 3a, tandis que l'évolution correspondante des efforts des trois barres est donnée sur la figure 3b.

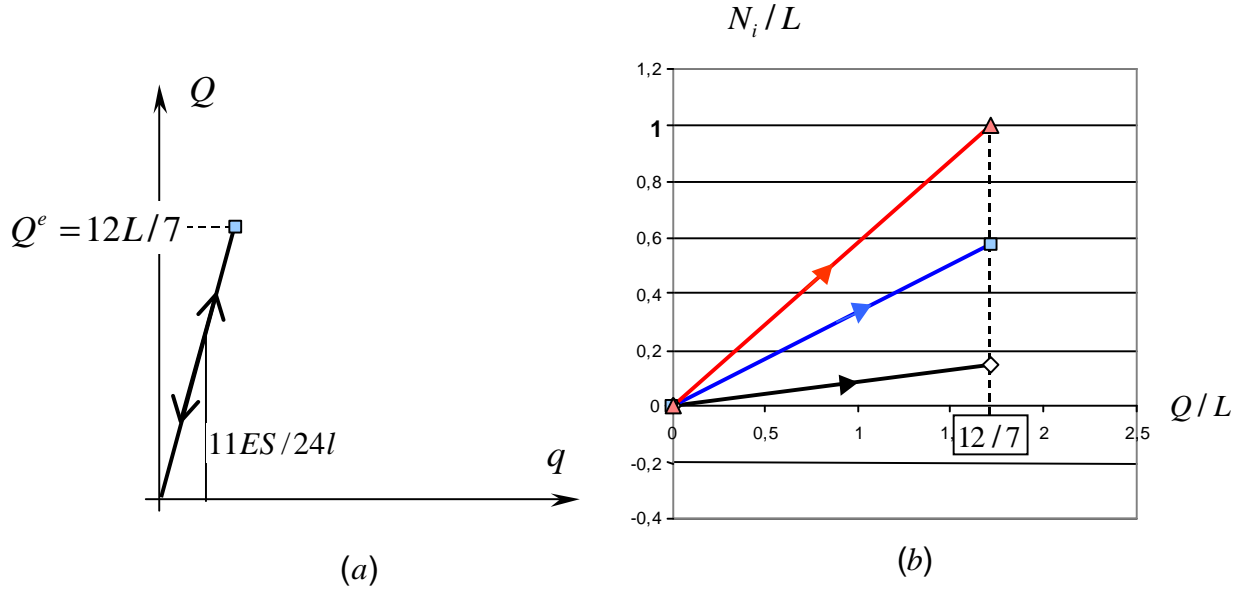


Figure 3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres

1.2. Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité du système, on fait l'hypothèse de travail, qu'il conviendra de vérifier *a posteriori*, que la **barre n°3 reste plastifiée en traction**

$$N_3 = +L \text{ pour } Q > Q^e \quad (2.7)$$

Cette hypothèse nous permet alors de déterminer les efforts dans les deux autres barres à partir des *équations d'équilibre* (2.1) :

$$N_1 = -Q/2 + L, \quad N_2 = 3Q/2 - 2L \quad (2.8)$$

Le comportement des barres n°s 1 et 2 *restant élastique* il vient en vertu de (2.2)

$$\delta_1 = (-Q/2 + L)l/ES, \quad \delta_2 = (3Q/2 - 2L)l/ES \quad (2.9)$$

d'où en tenant compte de la relation de *compatibilité géométrique* (2.3) :

$$\delta_3 = (7Q/2 - 5L)l/ES \quad (2.10)$$

Cette dernière relation montre que la loi de comportement de la barre n°3 et en particulier la *règle d'écoulement plastique* est bien vérifiée. En effet de façon générale, cette loi, exprimée en *taux de variation*, s'écrit :

$$\dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^e + \dot{\delta}_3^p \quad (2.11)$$

c'est-à-dire dans le cas présent ($N_3 = +L$, $\dot{N}_3 = 0$):

$$\dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^p \geq 0 \quad (2.12)$$

Cette relation est bien vérifiée puisque d'après (2.10) :

$$\dot{\delta}_3 = 7/2 \frac{l\dot{Q}}{ES} \quad \text{avec } \dot{Q} \geq 0 \quad (2.13)$$

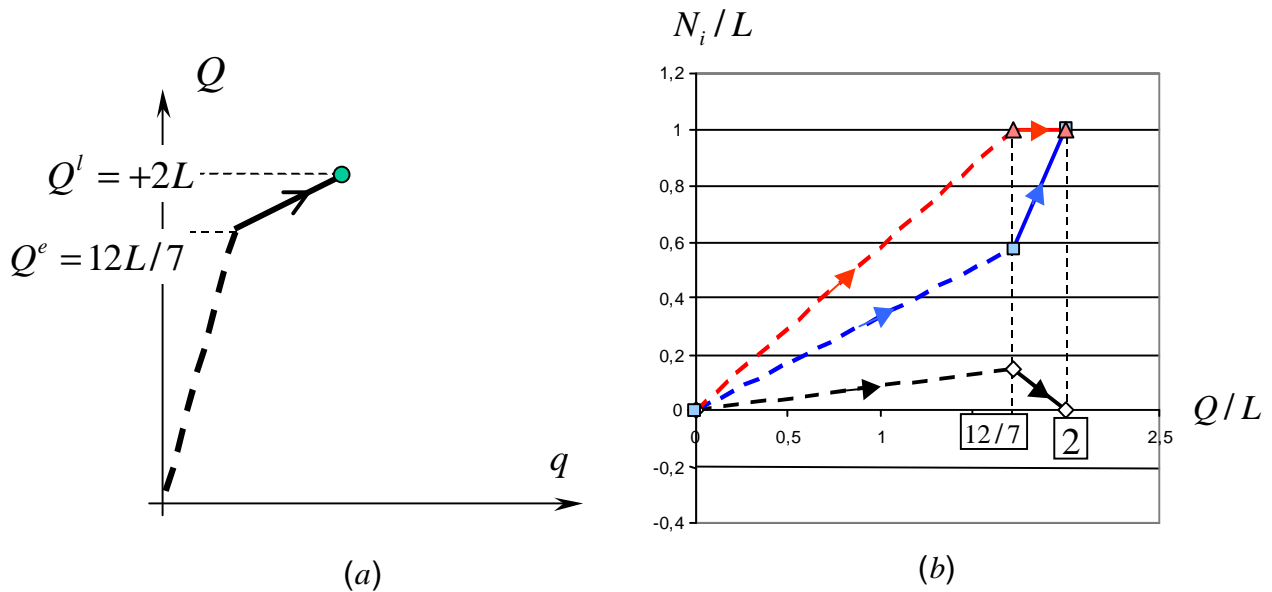


Figure 3 : Phase élastoplastique de comportement de la structure

Le *théorème d'unicité* en contraintes du problème d'évolution, que nous expliciterons ultérieurement, permet de montrer qu'il s'agit bien de *la solution du problème* tant que les efforts dans les barres n°s 1 et 2 restent dans le domaine élastique :

$$N_1 = -Q/2 + L \leq L \quad \text{et} \quad N_2 = 3Q/2 - 2L \leq L \quad (2.14)$$

soit

$$Q \leq 2L \quad (2.15)$$

La valeur $Q^l = 2L$ correspond à la *plastification* de la barre n° 2 en *traction* ($N_2 = +L$), l'effort dans la barre n°1 s'annulant pour cette valeur du chargement (voir figure 4-b).

1.3. Charge limite et ruine plastique

Nous allons tout d'abord montrer qu'il est impossible de poursuivre le chargement au-delà de la valeur $Q^l = 2L$. Le raisonnement est le suivant. L'équilibre du barreau rigide en moment par rapport au point A donne :

$$Q = 2/3N_2 + 4/3N_3 \quad (2.16)$$

Les valeurs des efforts dans les barres 2 et 3 étant astreintes à demeurer inférieures à la limite d'élasticité en traction ($+L$), il résulte *nécessairement* de (2.16) que Q doit rester *inférieur (ou égal)* à $+2L$. Il s'agit d'un raisonnement de **calcul à la rupture** (voir la partie «Calcul à la Rupture» du cours) fondé sur l'écriture de la compatibilité entre l'**équilibre** du système (réduit ici à l'équation d'équilibre en moment (2.16)) et la **résistance** de ses éléments constitutifs (les barres 2 et 3). Il convient de noter que le raisonnement ci-dessus démontre seulement *qu'il n'est pas possible de dépasser* la valeur $Q^l = 2L$, le calcul d'évolution en phase élastoplastique ayant montré que cette valeur est effectivement atteinte.

Que se passe-t-il alors si l'on *maintient* la charge à la valeur $Q^l = 2L$, soit $Q = Q^l, \dot{Q} = 0$? L'évolution correspondante des efforts dans les barres est dans ce cas :

$$N_1 = 0, N_2 = N_3 + L, \dot{N}_i = 0 \quad (2.17)$$

d'où d'après la loi de comportement :

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_1^e = 0, \dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_2^p = \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\delta}_3 = \dot{\delta}_3^p = \dot{\mu} \geq 0 \quad (2.18)$$

les multiplicateurs plastiques $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$ étant reliés entre eux par la relation de compatibilité géométrique des taux d'allongement déduite de (2.3) :

$$\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3 - 2\dot{\delta}_2 = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = 2\dot{\lambda} \quad (2.19)$$

d'où

$$\dot{q} = (\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3)/2 = 3\dot{\lambda}/2 \geq 0 \quad (2.20)$$

Les barres 2 et 3 s'allongent plastiquement sous charge constante, tandis que la barre n°1 restant de longueur invariable, le barreau rigide est animé d'un mouvement de rotation autour du point A (figure 5).

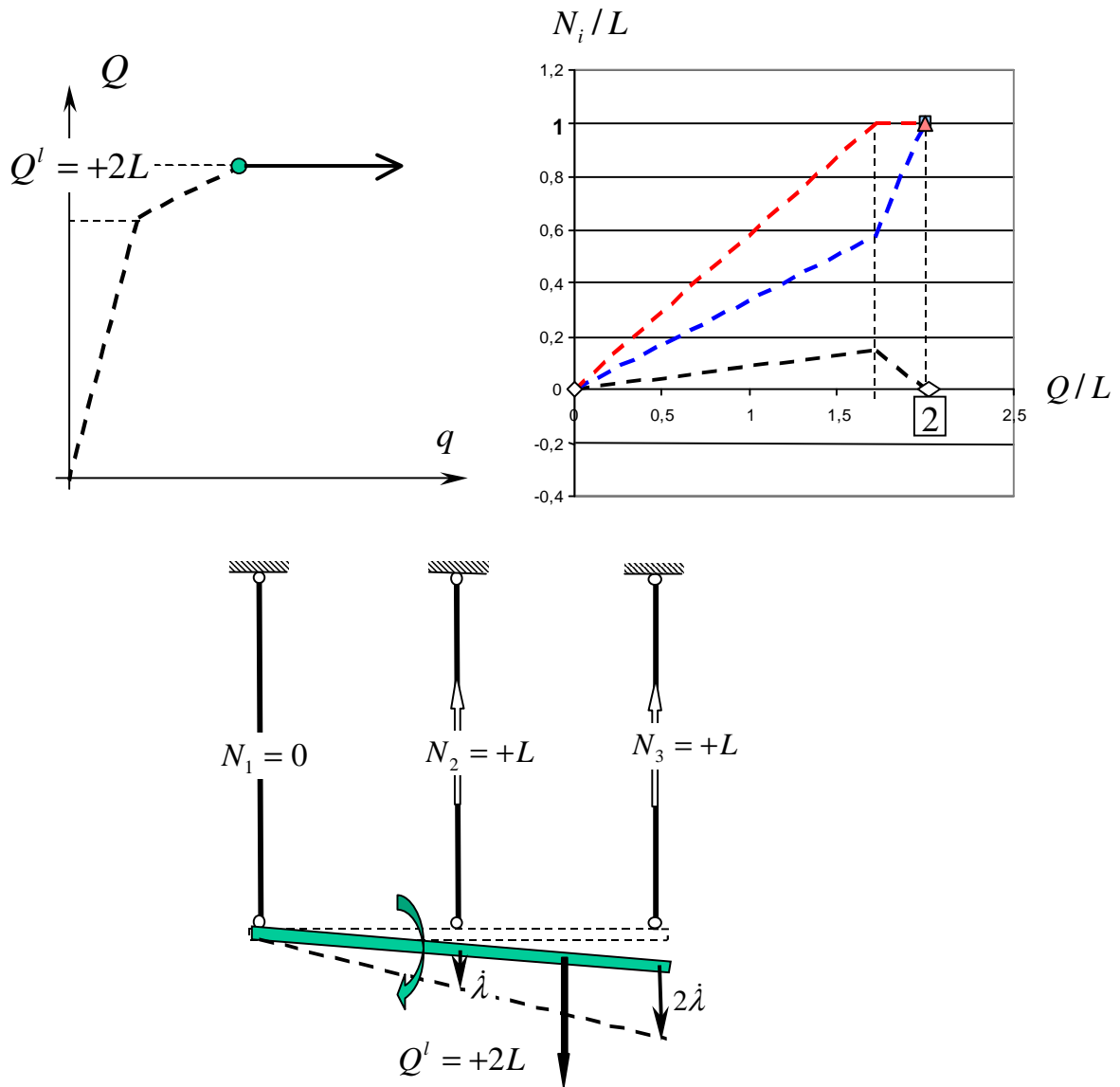


Figure 5 : Charge limite et mécanisme de ruine plastique

Il y a donc apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre*, ou de *ruine plastique* de la structure. Il vient se superposer aux allongements déjà acquis par les différentes barres au moment d'atteindre la *charge limite*. Bien entendu l'analyse ici faite suppose que les *changements de géométrie soient négligeables* (allongements des barres petits devant leur longueur).

1.4. Décharge de la structure. Etat résiduel

On effectue une décharge de la structure à partir de la charge limite Q^l , immédiatement avant que ne se produise l'écoulement plastique libre de la structure. Adoptant l'hypothèse que cette décharge est *élastique*, et raisonnant en accroissements en posant :

$$\begin{cases} Q=Q^l+\Delta Q, \Delta Q<0; & N_i=N_i(Q^l)+\Delta N_i \\ \delta_i=\delta_i(Q^l)+\Delta\delta_i; & q=q(Q^l)+\Delta q \end{cases} \quad (2.21)$$

il apparaît immédiatement que les accroissements (algébriques) $\Delta N_i, \Delta\delta_i$ et Δq sont donnés par les équations (2.4) et (2.5) dans lesquelles Q est remplacé par ΔQ . D'où immédiatement :

$$\begin{cases} N_1 = \Delta Q/12 & N_2 = L + \Delta Q/3 & N_3 = L + 7\Delta Q/12 \\ \delta_1 = l\Delta Q/12ES & \delta_2 = l(L + \Delta Q/3)/ES & \delta_3 = l(2L + 7\Delta Q/12)/ES \\ & q = l(3L/2 + 11\Delta Q/24)/ES \end{cases} \quad (2.22)$$

L'état *résiduel* de la structure, repéré par l'exposant $(*)^r$, est obtenu dans le cas de la *décharge totale* : $\Delta Q = -Q^l = -2L$. Il vient alors compte tenu de (2.22)

$$\begin{cases} N_1^r = -L/6 & N_2^r = L/3 & N_3^r = -L/6 \\ \delta_1^r = -lL/6ES & \delta_2^r = lL/3ES & \delta_3^r = 5lL/6ES \\ & q^r = 7lL/12ES \end{cases} \quad (2.23)$$

L'hypothèse de décharge élastique est bien vérifiée, les efforts dans les barres restant toujours à l'intérieur du domaine d'élasticité. On remarque bien évidemment que les *efforts résiduels* N_i^r forment un système *auto-équilibré* (c'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibre (2.1) avec $Q=0$), tandis que les *allongements résiduels* δ_i^r respectent la condition de compatibilité géométrique (2.3). Par contre les *allongements plastiques* δ_i^p acquis par les barres au cours de la phase de chargement valent :

$$\delta_1^p = \delta_2^p = 0, \quad \delta_3^p = lL/ES \quad (2.24)$$

Ils ne sont donc pas géométriquement compatibles, et c'est précisément cette **incompatibilité géométrique** qui est à l'origine de l'apparition d'**efforts résiduels**. En effet, intégrant sur l'ensemble du cycle charge-décharge la loi de comportement de chacune des barres :

$$\dot{\delta}_i = \dot{\delta}_i^e + \dot{\delta}_i^p = \dot{N}_i/ES + \dot{\delta}_i^p \quad (2.25)$$

il vient :

$$\delta_i^r = N_i^r/ES + \delta_i^p \quad (2.26)$$

Cette dernière relation fait clairement apparaître que ce sont les **déformations** (allongements) **élastiques dues aux efforts résiduels** qui, en se superposant aux **allongements plastiques**, **rétablissent la compatibilité géométrique** de la structure (voir figure 6).

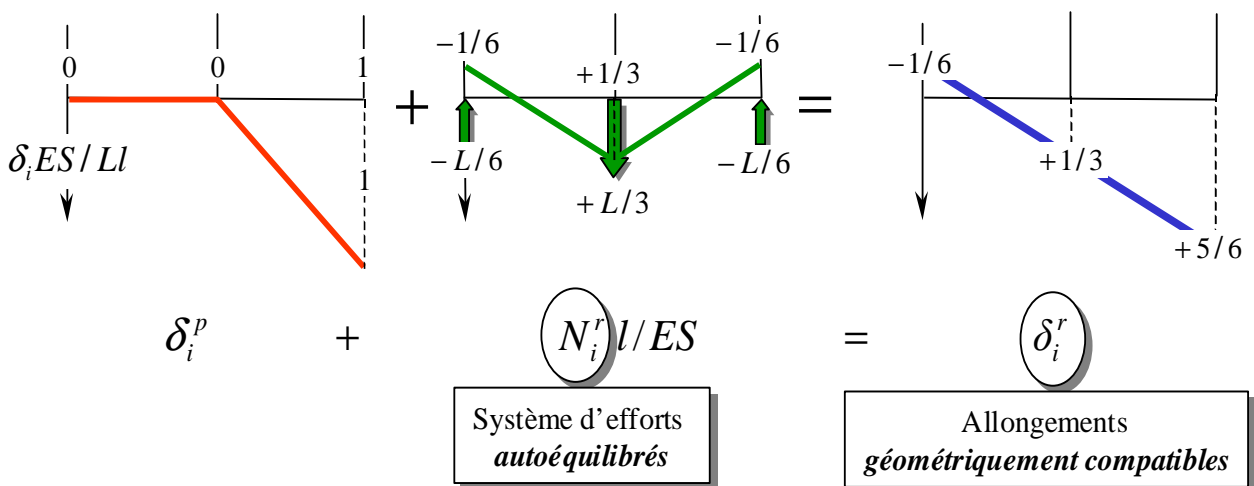


Figure 6 : Efforts résiduels rétablissant élastiquement la compatibilité géométrique de la structure.

1.4. Récapitulation

La figure 7a qui représente la courbe de première charge, décrit la **réponse globale** de la structure. Elle comporte trois parties. Le segment **1** correspondant à la phase élastique, le segment **2**, de pente inférieure, relatif à la réponse élastoplastique, et la demi-droite horizontale **3** correspondant à l'écoulement plastique libre du système. L'évolution des efforts dans les barres en fonction des différentes phases de ce comportement est donnée par la figure 7b.

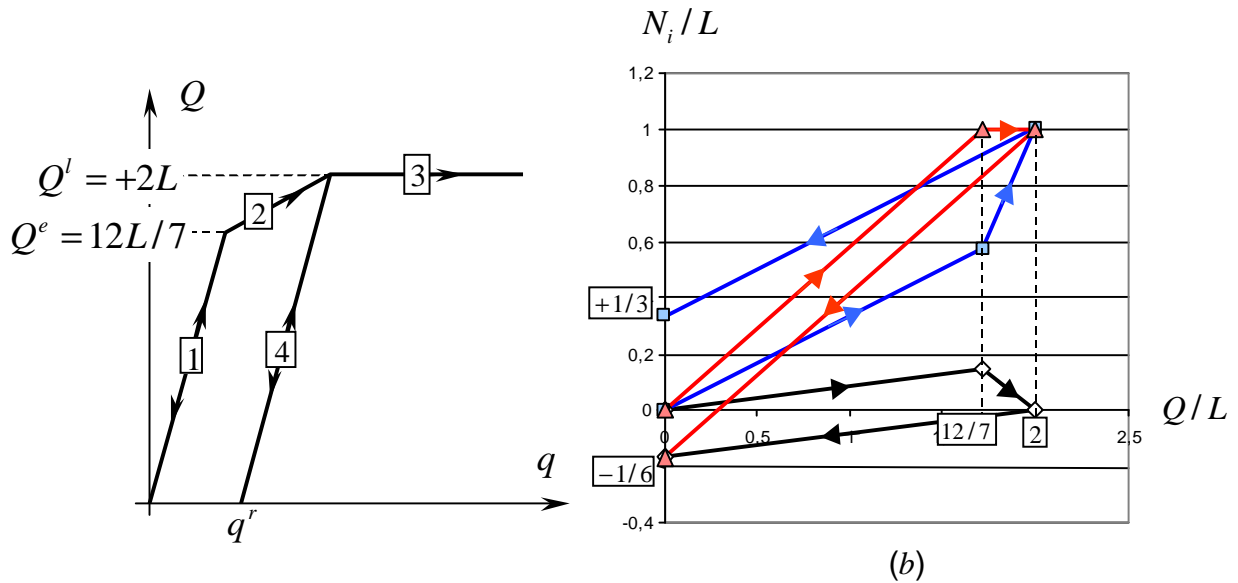


Figure 7 : Mise en évidence des différentes phases de comportement de la structure.

La phase de décharge élastique est représentée par le segment de droite [4]. Le déplacement résiduel du point d'application de la charge est donné par (2.23). Interprétant ce diagramme de la même façon que nous avons interprété au chapitre I la courbe de traction simple d'une éprouvette, il apparaît un *écrouissage global de la structure*, qui se manifeste par la modification du seuil d'élasticité initial qui peut augmenter jusqu'à atteindre la charge limite. On peut d'ailleurs facilement montrer sur cet exemple simple que cet écrouissage est de type "cinématique", c'est-à-dire que le *domaine d'élasticité actuel* est un segment obtenu par simple translation du domaine d'élasticité *initial* $[-12L/7, +12L/7]$.

2. Généralisation au cas des systèmes en milieu continu tridimensionnel

2.1. Position du problème d'évolution élastoplastique

Le système occupant un domaine Ω de bord $\partial\Omega$ dans l'espace R^3 (Figure 8), son chargement est défini à tout instant $t \in [0, T]$ par la donnée :

- ✓ d'un champ de *forces volumiques* $\underline{F}^d(\underline{x}; t)$ défini en tout point \underline{x} de Ω et à tout instant t ;

- ✓ de **conditions aux limites** portant sur 3 composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte \underline{T} et déplacements $\underline{\xi}$ en chaque point \underline{x} de $\partial\Omega$. Soit pour $i=1,2,3$:

$$\begin{aligned} \xi_i(\underline{x},t) &= \xi_i^d(\underline{x},t) & \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \\ T_i(\underline{x},t) &= T_i^d(\underline{x},t) & \forall \underline{x} \in S_{T_i} \end{aligned} \quad (2.27)$$

où S_{T_i} et S_{ξ_i} forment une *partition* de $\partial\Omega$, indépendante de t :

$$\partial\Omega = S_{T_i} \cup S_{\xi_i}, \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \quad (2.28)$$

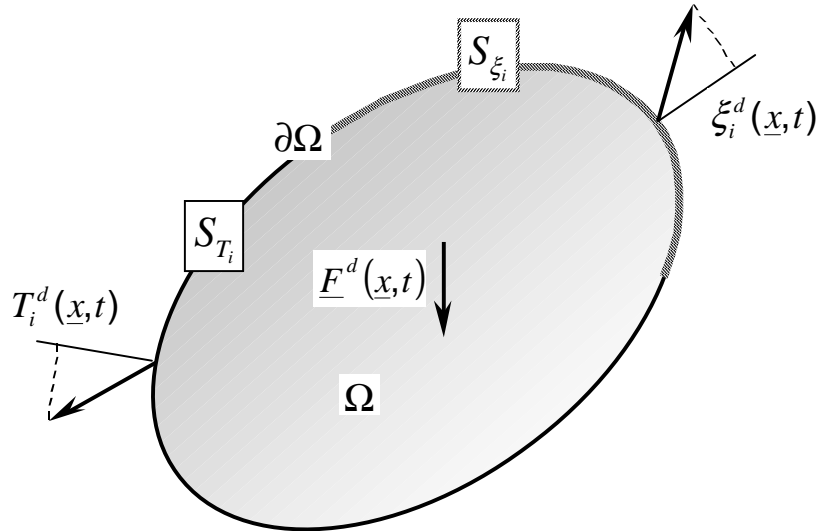


Figure 8 : Données relatives au chargement d'un système en milieu continu 3D.

On introduit alors

- L'ensemble (espace affine) $\mathcal{S}(t)$ des champs de **contrainte statiquement admissibles (s.a.)** avec les **données en effort** à l'instant t , c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{aligned} \text{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho \underline{F}^d(\underline{x},t) &= 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \sigma_{ij}(\underline{x},t) n_j &= T_i^d(\underline{x},t) & \forall \underline{x} \in S_{T_i} \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

soit :

$$\mathcal{S}(t) = \{ \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a. avec } \underline{F}^d(t), T_i^d(t) \} \quad (2.30)$$

- L'espace affine des champs de *déplacement cinématiquement admissibles (c.a.)* avec les données en déplacement à l'instant t, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites :

$$\underline{\xi}_i(\underline{x}, t) = \underline{\xi}_i^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \quad i=1,2,3 \quad (2.31)$$

$$\mathcal{C}(t) = \{ \underline{\xi} \text{ c.a. avec } \underline{\xi}_i^d(t) \} \quad (2.32)$$

Nous limitant dans ce qui suit au cas du matériau *élastique parfaitement plastique standard*, la loi de comportement, formulée en vitesse, s'écrit en tout point :

$$f(\underline{\sigma}(\underline{x}, t); \underline{x}) \leq 0 \quad (2.33)$$

$$\underline{d}(\underline{x}, t) = \underline{\Lambda} : \underline{\dot{\sigma}}(\underline{x}, t) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}[\underline{\sigma}(\underline{x}, t), \underline{x}], \quad \lambda \geq 0 \quad (2.34)$$

avec:

$$\underline{d}(\underline{x}, t) = 1/2 \{ \underline{\text{grad}} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, t) + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}, t) \} \quad (2.35)$$

On introduit enfin l'ensemble (convexe) des champs $\underline{\sigma}$ "*plastiquement admissibles*"

$$\mathcal{P} = \{ \underline{\sigma} ; \forall \underline{x} \in \Omega, f(\underline{\sigma}(\underline{x}), \underline{x}) \leq 0 \} \quad (2.36)$$

Il reste alors à préciser l'*état initial* du système (correspondant à $\underline{\xi}(\underline{x}, t=0) = 0$) en se donnant le champ de contrainte correspondant :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t=0) = \underline{\sigma}^0(\underline{x}) \quad (2.37)$$

qui doit être *statiquement et plastiquement admissible*

$$\underline{\sigma}^0 \in \mathcal{S}(t=0) \cap \mathcal{P} \quad (2.38)$$

Résoudre un tel problème d'évolution élastoplastique consiste alors à déterminer un couple $(\underline{\sigma}(t), \underline{\xi}(t))$, $t \in [0, T]$ vérifiant l'ensemble des conditions suivantes

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t=0) &= \underline{\sigma}^0 \\ \underline{\sigma}(t) &\in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P}, \quad \underline{\xi}(t) \in \mathcal{C}(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

ainsi que la *loi de comportement* (2.34) reliant en tout point $\underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ à travers (2.34) et (2.35). Le schéma de la figure 9 représente la structure générale d'un problème d'évolution élastoplastique.

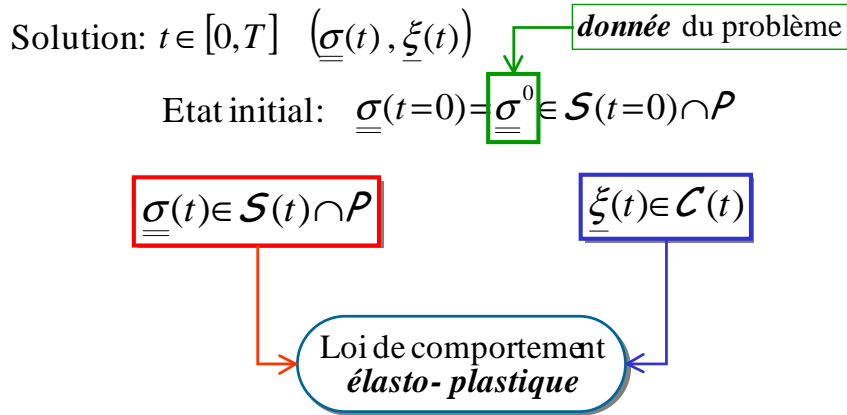


Figure 9 : Structure générale d'un problème d'évolution élastoplastique

Remarque. Les inconnues du problème étant les champs $\underline{\underline{\xi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$, auxquels se rajoute le champ des *multiplicateurs plastiques* $\dot{\lambda}$, les équations locales dont nous disposons sont :

- l'équation d'équilibre (2.29) ;
- l'équation de comportement (2.34) (à travers (2.35)).

soit un jeu de $3+6=9$ équations scalaires pour $6+3+1=10$ inconnues scalaires $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}}, \dot{\lambda})$. La *dixième équation* est fournie par la condition de plasticité qui stipule qu'en tout point où le multiplicateur plastique est *strictement positif* ($\dot{\lambda} > 0$ arbitraire) $\underline{\underline{\sigma}}$ est astreint à vérifier :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0 \quad (2.40)$$

c'est-à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte se déplace sur la surface de charge (fixe). Cela nous conduit à penser que le problème est bien posé et qu'il possède une solution. On admettra ici l'*existence* et l'*unicité de l'évolution en contrainte* de cette dernière (voir pour plus de précisions sur cette question Halphen et Salençon, 1987).

3. Cas des systèmes soumis à un mode de chargement à un nombre fini de paramètres

On s'intéresse ici plus particulièrement au cas où les données relatives au chargement du système dépendent linéairement de m paramètres scalaires $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, \dots, m)$, appelés *paramètres de chargement*, de sorte que la puissance des forces extérieures peut à tout instant s'écrire :

$$P_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} \, da + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, d\Omega = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{U}) \quad (2.41)$$

où \underline{U} désigne un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacement (vitesse) du problème :

$$U_i(\underline{x}, t) = \dot{\xi}_i^d(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.42)$$

tandis que $\dot{\underline{q}}(\underline{U})$ représente le vecteur des *vitesse généralisées* associé par dualité à \underline{Q} dans l'expression de cette puissance. Il s'agit par exemple de la vitesse de déplacement verticale du point d'application de la charge Q dans le cas de la structure réticulée, traité au début de ce chapitre. Généralisant les résultats obtenus à cette occasion, on établit les propriétés suivantes.

a) Partant d'un *état initial* caractérisé par $\underline{Q}=0$, l'évolution du système demeure *élastique* tant que le *trajet de chargement* (représenté par une courbe dans l'espace des chargements \underline{Q} (figure 10) demeure à l'intérieur d'un domaine, appelé *domaine d'élasticité initial du système*. Sa frontière est une surface formée de l'ensemble des chargements \underline{Q}^e qui correspondent au *seuil d'élasticité* du système.

b) Poursuivant le chargement sur un trajet qui *franchit* la frontière du domaine d'élasticité initial, on observe une *irréversibilité du système* qui se traduit par le fait qu'au terme d'un cycle mécanique de *charge-décharge* (courbe fermée dans l'espace des \underline{Q}), les déplacements du système, et en particulier le déplacement *résiduel* généralisé $\underline{q}^r = \oint \dot{\underline{q}} \, dt$, ne sont pas nuls. On constate par ailleurs un *écrouissage* du système qui se manifeste par une transformation du domaine d'élasticité initial en *domaine d'élasticité actuel* (domaine en pointillé sur la figure 10). Comme cela a clairement été constaté sur l'exemple de la structure réticulée, l'origine de cet écrouissage doit être recherchée dans l'*incompatibilité géométrique des déformations plastiques*. Plus précisément, désignant par $\underline{\varepsilon}^p$ le champ des déformations plastiques engendrées au cours du cycle charge-décharge, on peut écrire la relation homologue de (2.26)¹:

¹ Relation valable dans l'hypothèse où l'état initial est *naturel* ($\underline{\sigma}^0 = 0$).

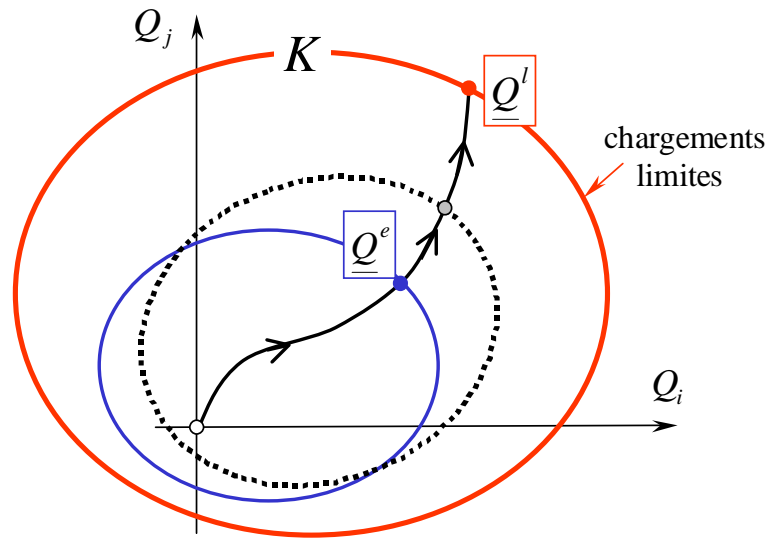


Figure 10 : Evolution élastoplastique d'un système en matériau élastique parfaitement plastique dans le cas d'un mode de chargement à m paramètres

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^r = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}}^r + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.43)$$

qui traduit le fait que le **champ de contrainte résiduel** $\underline{\underline{\sigma}}^r$ (champ équilibrant $\underline{Q} = 0$) rétablit, par le biais des déformations élastiques qui lui sont associées, la compatibilité géométrique des **déformations résiduelles** $\underline{\underline{\varepsilon}}^r$, cinématiquement admissibles avec \underline{q}^r . L'existence de ce champ de contrainte résiduel modifie le domaine d'élasticité du système.

c) Cette phase de comportement élastoplastique s'achève lorsque le long du trajet de chargement, la charge \underline{Q} atteint une valeur limite, au-delà de laquelle il n'est plus possible d'assurer simultanément l'équilibre du système et le respect du critère de plasticité en tout point. C'est le **chargement limite** \underline{Q}^l . L'ensemble de ces chargements constitue la frontière d'un domaine K (figure 10) dont la détermination repose sur un raisonnement du **calcul à la rupture**, identique à celui effectué au paragraphe 1.3. Il est important de bien noter d'un tel domaine K ne dépend que de la **géométrie** du système, de son **chargement** et du **critère de plasticité**. Il est en revanche **indépendant** :

- ✓ de l'**état initial** du système ;
- ✓ des **modules d'élasticité** du matériau constitutif ;
- ✓ du **trajet de chargement** suivi jusqu'au chargement limite.

Lorsque le chargement limite est effectivement atteint, le système continue de se déformer sous charge constante²: il y a apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre* ou de ruine plastique. De façon qualitative, cela signifie que les zones entrées en plasticité sont suffisamment étendues pour que le *champ des taux de déformations plastiques* $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$ devienne *géométriquement compatible*, induisant alors la ruine plastique du système.

4. Un exemple de résolution: la flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique

On considère un élément de poutre assimilé à un solide ayant la forme d'un cylindre de longueur l et de section rectangulaire (hauteur $2h$ et épaisseur b), représenté sur la figure 11, constitué d'un matériau homogène *élastique isotrope* (module d'Young E , coefficient de Poisson ν), *parfaitement plastique standard*, le critère de plasticité étant celui de *von Mises*

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} - k \leq 0 \quad (2.44)$$

où $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - 1/3(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$ désigne le *déviateur de contrainte*, et k la limite d'élasticité en *cission pure*. Ce solide est soumis à un processus de chargement caractérisé par le jeu de données suivant :

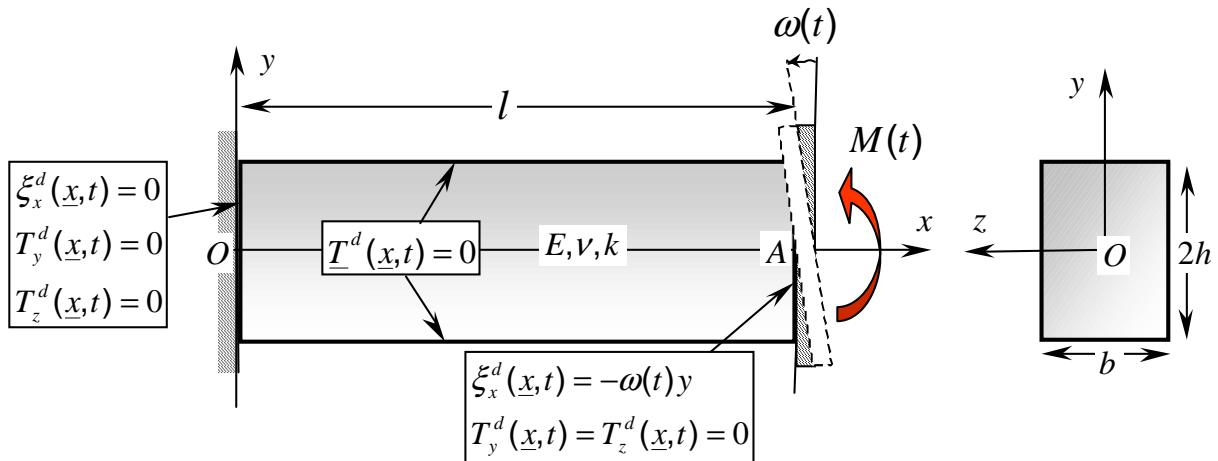


Figure 11 : Flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique : données du problème

² En supposant bien entendu que les changements de géométrie demeurent négligeables (hypothèse dite des "petites perturbations").

✓ forces de volume nulles :

$$\underline{F}^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (2.45)$$

✓ faces latérales libres de contrainte :

$$\underline{T}^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (2.46)$$

✓ section extrémité $\Sigma(x=0)$ en contact *sans frottement* avec un plan *indéformable* :

$$\xi_x^d(\underline{x}, t) = 0, T_y^d(\underline{x}, t) = T_z^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (2.47)$$

✓ section extrémité $\Sigma(x=l)$ en contact *sans frottement* avec un poinçon *indéformable* auquel on impose une rotation $\omega(t)$ autour de l'axe Az :

$$\xi_x^d(\underline{x}, t) = -\omega(t)y, T_y^d(\underline{x}, t) = T_z^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (2.48)$$

L'expression de la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur cet élément de poutre dans un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacements du problème, s'écrit alors d'après (2.41) :

$$P_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U} \, da + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, d\Omega = - \int_{\Sigma(x=l)} T_x \dot{\omega} y \, dydz = \overbrace{\left(- \int_{\Sigma(l)} T_x y \, dydz \right)}^M \dot{\omega} \quad (2.49)$$

faisant ainsi apparaître le moment M autour de l'axe Az des efforts appliqués par le poinçon sur la section extrémité $\Sigma(x=l)$, dit **moment de flexion**, comme l'*unique paramètre de chargement* du système. La vitesse généralisée associée n'est autre que la **rotation** ω de ce même poinçon.

4.1. Phase élastique

Partant d'un état initial ($\omega(t=0)=0$) *naturel* $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$, on fait progressivement croître la rotation ω du poinçon. On rappelle ci-après la solution en *phase élastique* du problème précédent

- *Solution en contrainte* (figure 12a) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -E \frac{\omega}{l} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.50)$$

- *Solution en déplacement* :

$$\xi_x = -\frac{\omega}{l}xy, \quad \xi_y = \frac{\omega}{2l}(x^2 - \nu(z^2 - y^2)), \quad \xi_z = \nu\frac{\omega}{l}yz \quad (2.51)$$

La valeur correspondante du moment de flexion est :

$$M = - \int_{\Sigma(x=l)} y \sigma_{xx} \, dx dy = E \frac{\omega}{l} I_z \quad (2.52)$$

où $I_z = b \int_{-h}^{+h} y^2 dy = \frac{2}{3}bh^3$ désigne l'*inertie géométrique* de la section autour de l'axe Az . Le rapport $\chi = \omega/l$ représentant la *courbure moyenne* de la poutre, la relation (2.52) s'interprète comme une *relation moment-courbure*. EI_z est la *rigidité à la flexion* de la poutre.

Cette phase élastique est valable tant que le champ de contrainte (2.50) vérifie en tout point le critère de plasticité de von Mises (2.44)

$$f(\underline{\sigma}) = (\sigma_{xx}^2/3)^{1/2} - k \leq 0 \quad \text{soit} \quad |\sigma_{xx}| = E \frac{\omega}{l} |y| \leq k\sqrt{3} \quad \forall y \in [-h, +h] \quad (2.53)$$

c'est-à-dire tant que $E\omega/l \leq \frac{k\sqrt{3}}{h}$ ou encore compte tenu de (2.49) :

$$M \leq M^e = k\sqrt{3} \frac{I_z}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} bkh^2 \quad (2.54)$$

Cette valeur du moment de flexion représente la *limite d'élasticité initiale* du système. Elle correspond à l'entrée en plasticité des «fibres» extrêmes supérieures ($y=+h$) en *compression* et des fibres extrêmes inférieures ($y=-h$) en *traction* (figure 12b).

4.2. Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité initiale du système, c'est-à-dire faisant croître le paramètre de chargement M au-delà de la valeur M^e , on fait l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que le champ de contrainte demeure *uniaxial* de la forme :

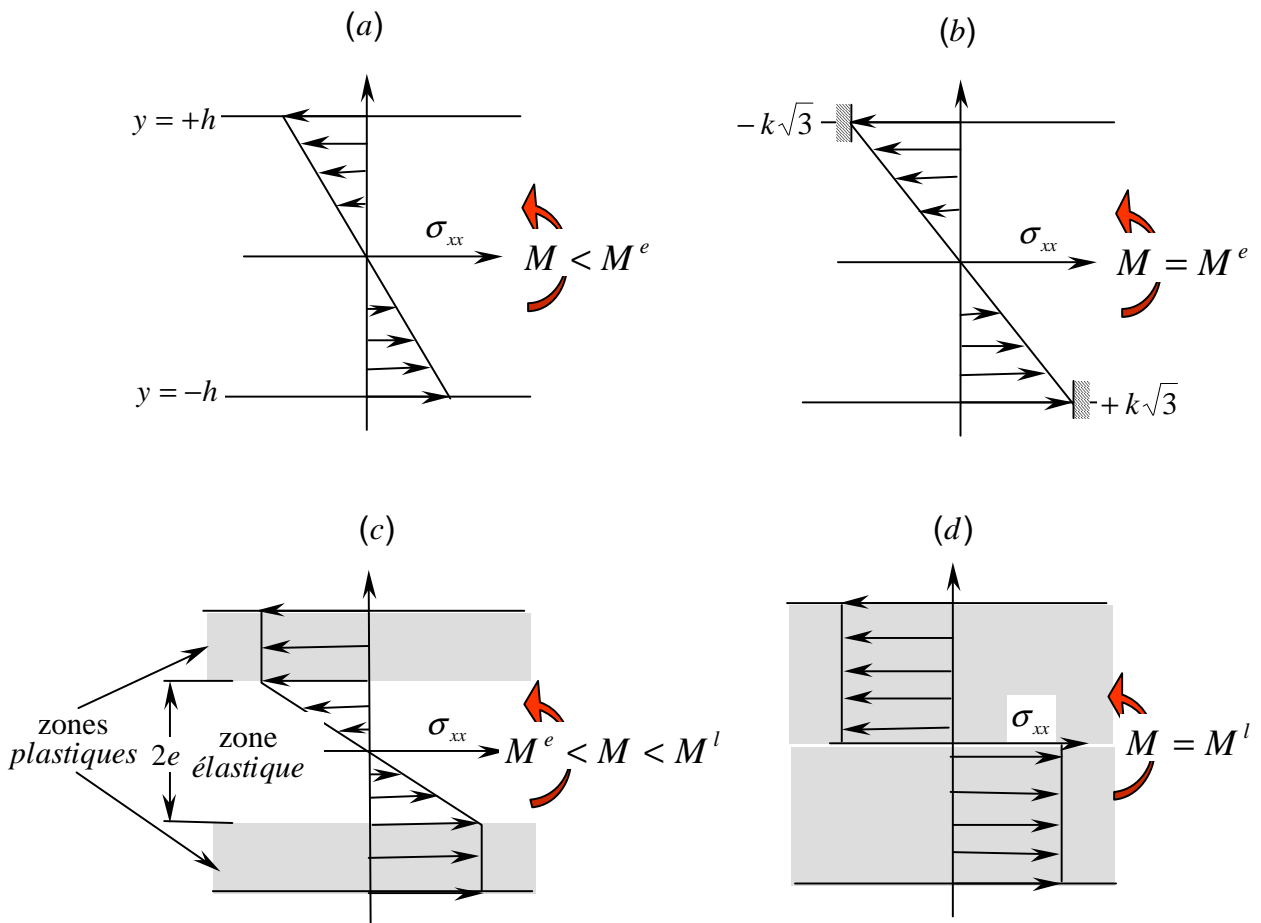


Figure 12 : Diagrammes de contrainte dans les différentes phases d'évolution élastoplastique du problème de la flexion

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.55)$$

avec

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -k\sqrt{3} & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ -k\sqrt{3} \frac{y}{e} & \text{si } -e \leq y \leq +e \\ +k\sqrt{3} & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \quad (2.56)$$

c'est-à-dire que l'épaisseur de la poutre est subdivisée en trois parties : un «*noyau élastique*» d'épaisseur $2e$ situé entre les plans $y = \pm e$, et deux *zones plastiques* où le matériau a atteint sa limite d'élasticité en *compression* ($+e \leq y \leq +h$) et en *traction* ($-h \leq y \leq -e$) (voir figure 12c). Ce champ est bien statiquement admissible avec les données en efforts du problème, équilibrant la valeur suivante du paramètre de chargement

$$M(e) = - \int_{\Sigma(x=l)} y \sigma_{xx} dx dy = bk\sqrt{3} \left[h^2 - \frac{e^2}{3} \right] \quad (2.57)$$

La valeur du moment varie entre la limite d'élasticité correspondant à $e=h$ et une valeur maximale correspondant à la *plastification complète de la section* de la poutre ($e=0$: figure 12d)

$$M^e = \frac{2}{\sqrt{3}} bkh^2 = M(e=h) \leq M(e) \leq M(e=0) = \sqrt{3} bkh^2 = \frac{3}{2} M^e \quad (2.58)$$

4.3. Solution en zone élastique ($-e \leq y \leq +e$)

Elle correspond simplement à la solution *élastique* du problème de flexion d'une poutre d'épaisseur $2e$, données par les expressions (2.50) et (2.51) valables pour $-e \leq y \leq +e$. Comparant en particulier les deux expressions du champ de contrainte dans cette zone données respectivement par (2.50) et (2.56), il vient alors immédiatement

$$e = \frac{kl\sqrt{3}}{\omega E} \quad (2.59)$$

L'expression de la loi *moment-courbure* en phase élastoplastique se calcule alors très simplement à partir de (2.57) et (2.59)

$$M(\chi = \omega/l) = bkh^2 \sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{k}{Eh\chi} \right)^2 \right] \quad (2.60)$$

c'est-à-dire encore

$$M(\chi = \omega/l) = \frac{3M^e}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi^e}{\chi} \right)^2 \right] \quad (2.61)$$

où $\chi^e = k\sqrt{3}/hE$ et $M^e = 2bkh^2/\sqrt{3}$ désignent les valeurs de la courbure et du moment de flexion correspondant à la limite d'élasticité initiale. La figure 13 représente un tel **diagramme moment-courbure**, tracé dans le plan des variables adimensionnelles $(M/M^e, \chi/\chi^e)$, associé aux expressions (2.52) en phase élastique et (2.63) en phase élastoplastique. On remarque que le moment de flexion tend vers une valeur asymptotique égale à :

$$M^l = 3M^e/2 \quad (2.62)$$

correspondant à la *plastification totale* de la section de la poutre ($e \rightarrow 0$: figure 12d). Cette valeur n'est autre que la **charge limite**. Il convient d'observer que cette charge limite n'est atteinte qu'*asymptotiquement*, c'est-à-dire en théorie pour une valeur infinie de la courbure, pour laquelle on sortirait alors du cadre des petites perturbations. En pratique, la relation (2.61) montre par exemple que la valeur du moment est égale à près de 99% de la charge limite lorsque $\chi = 5\chi^e$.

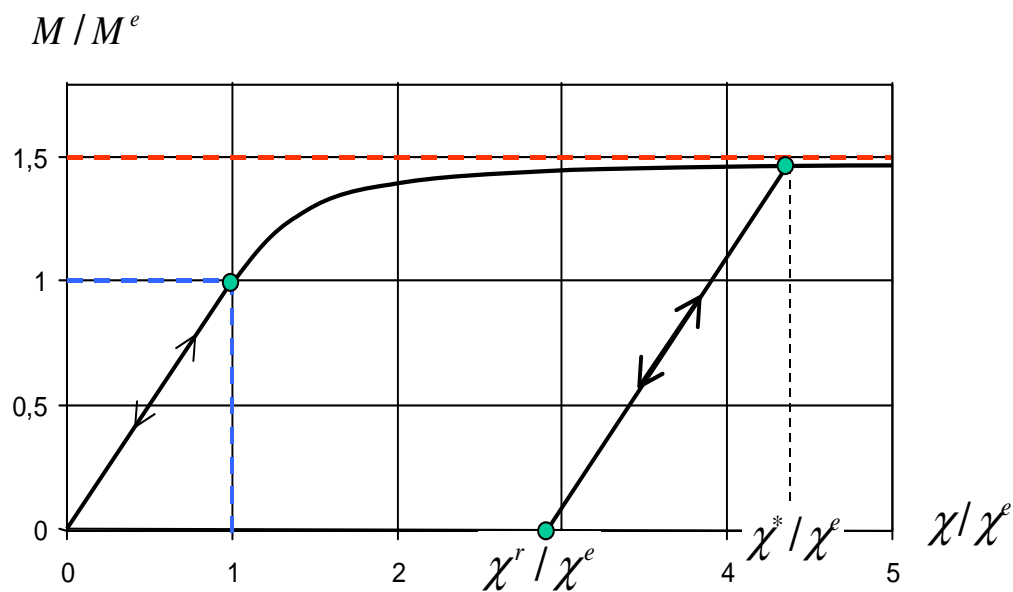


Figure 13 : Diagramme «moment-courbure» d'un poutre en flexion elastoplastique

4.4. Solution dans les zones plastiques ($-h \leq y \leq -e$ et $+e \leq y \leq +h$)

Il nous reste à mettre en évidence la solution dans les zones plastiques situées de part et d'autre du noyau élastique, et plus particulièrement la *solution en vitesse*, le champ de contrainte étant constant, donné par les première et troisième lignes de (2.56). Nous allons démontrer, qu'à certaines conditions que nous expliciterons, le champ de vitesse défini par

$$\xi_x = -\frac{\dot{\omega}}{l}xy, \quad \xi_y = \frac{\dot{\omega}}{2l}\left(x^2 - \frac{1}{2}(z^2 - y^2)\right), \quad \xi_z = \frac{\dot{\omega}}{2l}yz \quad (2.63)$$

constitue bien la solution en vitesse du problème. Ce champ est tout d'abord *cinématiquement admissible* avec les conditions aux limites en vitesse du problème caractérisées par la vitesse de rotation $\dot{\omega}$ du poinçon. Par ailleurs le champ de taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = -\frac{\dot{\omega}}{l} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{\dot{\omega}}{2l} y (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (2.64)$$

de sorte que la loi de comportement élastoplastique (2.34), tenant compte de (2.44) et (2.56), est bien vérifiée. En effet, puisque dans ces zones $\underline{\underline{\sigma}} = 0$, $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{d}}$ défini par (2.64) est bien de la forme

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{s}} = \dot{\lambda} \begin{cases} -k/\sqrt{3} (2\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ +k/\sqrt{3} (2\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \quad (2.65)$$

d'où par identification avec (2.64)

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} +\frac{\sqrt{3}\dot{\omega}y}{2kl} & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ -\frac{\sqrt{3}\dot{\omega}y}{2kl} & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \geq 0 \quad (2.66)$$

démontrant ainsi la **positivité** du multiplicateur plastique puisque $\dot{\omega} \geq 0$.

La dernière vérification porte sur la *continuité* (ou *discontinuité plastique* éventuelle) entre zone élastique et plastiques à la traversée des plans d'équation $y = \pm e$, séparant le noyau élastique des zones plastiques. Considérant par exemple le plan $y = e$, la *discontinuité de vitesse* à travers ce plan vaut d'après (2.51) et (2.63)

$$[\underline{\underline{\xi}}](x=e) = \underline{\underline{\xi}}(x=e^+) - \underline{\underline{\xi}}(x=e^-) = (\nu-1/2) \frac{\dot{\omega}}{2l} [(z^2 - e^2) \underline{e}_y - 2ez \underline{e}_z] \quad (2.67)$$

Une telle discontinuité ne pourrait être admissible qu'en étant de nature purement plastique ; et donc en raison de la *règle d'écoulement plastique, tangentielle* au plan de discontinuité (voir Annexe du chapitre 1), ce qui n'est pas le cas, hormis dans la situation particulière du matériau *élastiquement incompressible* ($\nu = 1/2$), où cette discontinuité s'annule. On trouvera dans Ducomet (1980) une mise en évidence de la solution complète de ce problème dans le cas du matériau élastiquement compressible, dans laquelle il apparaît notamment que le champ de contrainte solution ne peut rester uniaxial.

4.5. Analyse de la décharge ; état résiduel

On supposera ici pour simplifier que la décharge est effectuée à partir d'une valeur de la courbure χ^* pour laquelle la valeur correspondante du moment de flexion est pratiquement égale à la charge limite (figure 13), c'est-à-dire que la poutre est plastifiée sur toute la hauteur (figure 12d). Le champ de contrainte correspondant est

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{cases} -k\sqrt{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } 0 < y \leq +h \\ +k\sqrt{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

Faisant l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que cette phase de décharge est entièrement *élastique*, les calculs effectués en 4.1. demeurent valables à la condition de remplacer la valeur de M par celle de sa variation $\Delta M \leq 0$ à partir de $M = M^l$. La variation correspondante du champ de contrainte vaut ainsi compte tenu de (2.50) et (2.52)

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\Delta M}{I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.69)$$

d'où en particulier le **champ de contrainte résiduel** obtenu pour une **décharge totale** ($\Delta M = -M^l$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\sigma}}^* + \frac{M^l}{I_z} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.70)$$

ou encore puisque $M^l / I_z = (\sqrt{3} b k h^2) / (2 b h^3 / 3) = \frac{3\sqrt{3} k}{2 h}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \begin{cases} k\sqrt{3} \left(\frac{3y}{2h} - 1 \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } 0 < y \leq +h \\ k\sqrt{3} \left(\frac{3y}{2h} + 1 \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Le diagramme de contrainte correspondant est représenté sur la figure 14. Il s'agit d'un **champ d'autocontrainte**, c'est-à-dire équilibrant un moment de flexion *nul*. La **courbure résiduelle** est donnée par

$$\chi^r = \chi^* - \frac{M^l}{EI_z} = \chi^* - \frac{3\sqrt{3}k}{2Eh} \quad (2.72)$$

L'apparition de ces contraintes résiduelles est liée à l'*incompatibilité géométrique* du champ des déformations plastiques acquises lors de la phase de chargement jusqu'à $M(\chi^*) = M^l$.

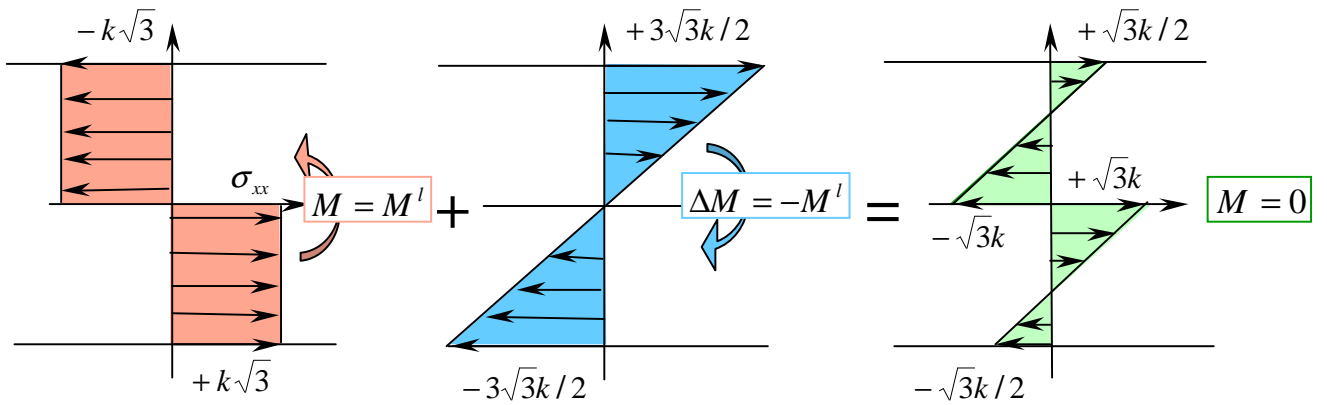


Figure 14 : Décharge élastique totale de la poutre et diagramme des contraintes résiduelles
