

2. Analyse élastoplastique de l'essai de compression simple d'une éprouvette

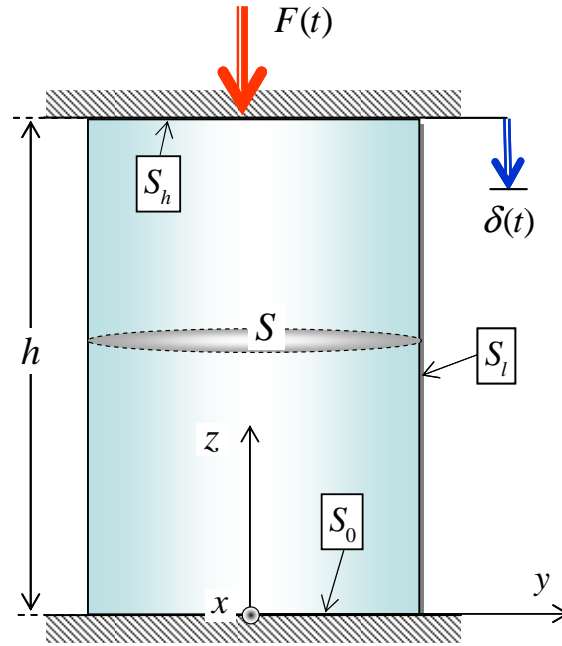


Figure 4

On considère une éprouvette cylindrique de section S et de hauteur h soumise à un *essai de compression simple* par le biais d'un plateau rigide placé sur sa section supérieure S_h et animé d'un mouvement vertical descendant, sa section inférieure S_0 reposant sur un plateau fixe, tandis que sa surface latérale S_l est libre de contrainte (figure 4). Se reportant au trièdre $Oxyz$, comme indiqué sur la figure, les conditions aux limites correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_0(z = 0) : \quad T_x^d = T_y^d = 0, \quad \xi_z^d = 0 \\
 S_h(z = h) : \quad T_x^d = T_y^d = 0, \quad \xi_z^d = -\delta(t) \\
 S_l : \quad \underline{T}^d = 0
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

tandis que les *forces de volume sont négligées*. Le matériau constitutif de l'éprouvette est homogène élastique isotrope (module d'Young E , coefficient de Poisson ν), parfaitement plastique, le critère de plasticité étant celui de *von Mises* ou de *Tresca*. L'état initial de l'éprouvette étant *naturel* ($\underline{\sigma}(t = 0) = 0$) et la température maintenue constante (évolution *isotherme*), on fait progressivement croître le déplacement du plateau supérieur à partir d'une valeur initiale nulle :

$$\delta(t = 0) = 0, \quad \delta(t) \uparrow \tag{4.27}$$

2.1. Phase élastique

La solution en termes de champs de contrainte et de déplacement s'écrit en *phase élastique* :

◇ Champ de contrainte *homogène uniaxial* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -E \frac{\delta}{h} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.28)$$

◇ Champ de *déplacement*:

$$\underline{\underline{\xi}} = -\delta \frac{z}{h} \underline{e}_z + \nu \frac{\delta}{h} (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y) \quad (4.29)$$

le champ de déformation étant *homogène* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\delta}{h} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \nu \frac{\delta}{h} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.30)$$

L'*effort résultant* (compté positivement vers le bas) appliqué par le plateau supérieur de l'éprouvette vaut :

$$F = -\int_{S_h} \sigma_{zz} dS = ES \frac{\delta}{h} \quad (4.31)$$

Limite d'élasticité

2.1.1 Le matériau obéit à un critère de *von Mises* :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} - k \leq 0 \quad (4.32)$$

Le déviateur de contrainte associé à la contrainte (28) vaut :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} = E \frac{\delta}{3h} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) = E \frac{\delta}{\sqrt{3}h} - k \quad (4.33)$$

de sorte que la limite d'élasticité est atteinte lorsque :

$$\boxed{\frac{\delta}{h} = \left(\frac{\delta}{h}\right)^e = \frac{k\sqrt{3}}{E}} \quad (4.34)$$

l'effort de compression correspondant étant en vertu de (4.31) :

$$\boxed{F = F^e = k\sqrt{3}S} \quad (4.35)$$

Cette phase élastique correspond à la droite *effort* (rapporté à la section de l'éprouvette)-*déplacement* (rapporté à sa hauteur) tracée sur la figure 5 (dont la pente est égale au module d'Young).

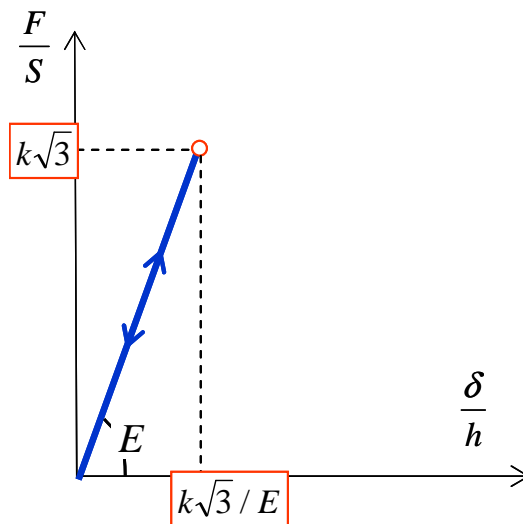


Figure 5

2.1.1 Le matériau obéit à un critère de *Tresca* :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_0 \leq 0, \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad (4.36)$$

d'où puisque d'après (28) $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 > \sigma_{zz} = \sigma_{III} = -\frac{E\delta}{h}$:

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{E\delta}{h} - \sigma_0 \quad (4.37)$$

de sorte que :

$$\boxed{\left(\frac{\delta}{h}\right)^e = \frac{\sigma_0}{E}} \quad \text{et} \quad \boxed{F^e = \sigma_0 S} \quad (4.38)$$

2.2. Charge limite et écoulement plastique libre

2.2.1 Cas du critère de *von Mises*

Continuant à faire croître le déplacement du plateau supérieur au-delà de la limite d'élasticité donnée par (4.34), la *solution en contrainte* est recherchée sous la forme d'un champ *constant en fonction du temps*, égal à celui associé à la limite d'élasticité :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -k\sqrt{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.39)$$

qui est bien *statiquement admissible* avec les données en efforts du problème et *plastiquement admissible*, tandis que la *solution en vitesse* est recherchée sous la forme:

$$\underline{\underline{\dot{\xi}}} = \underline{U} = -\frac{\delta}{h} z\underline{e}_z + \alpha \frac{\delta}{h} (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y) \quad (4.40)$$

qui est bien *cinématiquement admissible* avec les données en déplacements du problème, le champ des taux de déformation correspondant étant homogène égal à :

$$\underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\dot{\delta}}{h} \quad (4.41)$$

(le paramètre α est pour l'instant arbitraire).

Il reste à vérifier la *loi de comportement élastoplastique* du matériau, donnée par :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e + \underline{\underline{d}}^p \quad (4.42)$$

avec, puisque $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0$:

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}) \underline{1} = 0 \quad (4.43)$$

et en tenant compte de ce que $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ (charge plastique) :

$$\underline{\underline{d}}^p = \lambda \underline{\underline{s}} = \lambda k\sqrt{3}/3 \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{d}} \quad (4.44)$$

On obtient alors par identification avec l'expression (4.41) du taux de déformation totale :

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{\delta}}{kh} \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (4.45)$$

On vérifie bien la *positivité du multiplicateur plastique*, tandis que la valeur trouvée pour le coefficient α correspond à la condition d'*incompressibilité plastique*.

Nous avons ainsi mis en évidence un *mécanisme d'écoulement plastique libre* de l'éprouvette correspondant an champ de vitesse :

$$\underline{\underline{U}} = -\frac{\dot{\delta}}{h} z\underline{\underline{e}}_z + \frac{\dot{\delta}}{2h} (x\underline{\underline{e}}_x + y\underline{\underline{e}}_y) \quad (4.46)$$

associé à la *charge limite* (voir figure 6):

$$F^l = F^e = k\sqrt{3}S \quad (4.47)$$

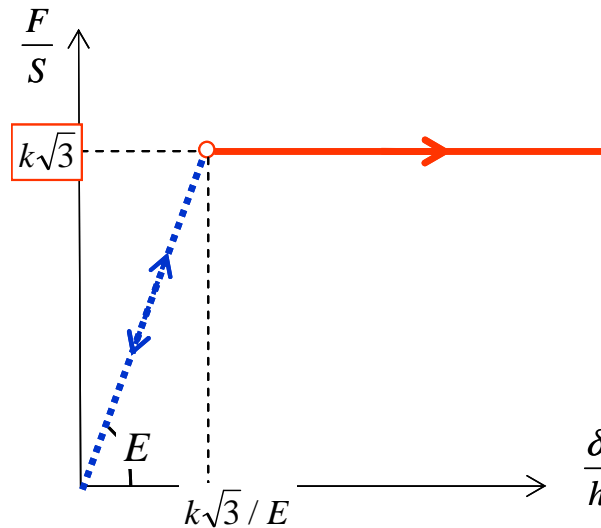


Figure 6

2.2.2 Cas du critère de Tresca

La solution en *contrainte* est encore une fois recherchée sous la forme du champ homogène et constant, égal à :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -\sigma_0 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (4.48)$$

qui est bien *statiquement* et *plastiquement admissible*, le champ de vitesse étant recherché sous la forme (4.40) et le champ de taux de déformation sous la forme (4.41).

La loi de comportement élastoplastique s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = \underbrace{d^e}_{=0} + \underline{\underline{d}}^p \quad (4.42)$$

et, puisque l'on est en «régime d'arête» (cf. l'annexe du chapitre I du cours et la figure 7 ci-dessous), c'est-à-dire que :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I (= \sigma_{xx}) - \sigma_{III} (= \sigma_{zz}) - \sigma_0 = \sigma_{II} (= \sigma_{yy}) - \sigma_{III} (= \sigma_{zz}) - \sigma_0 = 0 \quad (4.43)$$

les composantes du taux de déformation plastique sont de la forme :

$$d_{xx}^p = d_I^p = \dot{\lambda}, \quad d_{yy}^p = d_{II}^p = \dot{\mu}, \quad d_{zz}^p = d_{III}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}) \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\mu} \geq 0 \quad (4.44)$$

où $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$ sont des champs scalaires quelconques.

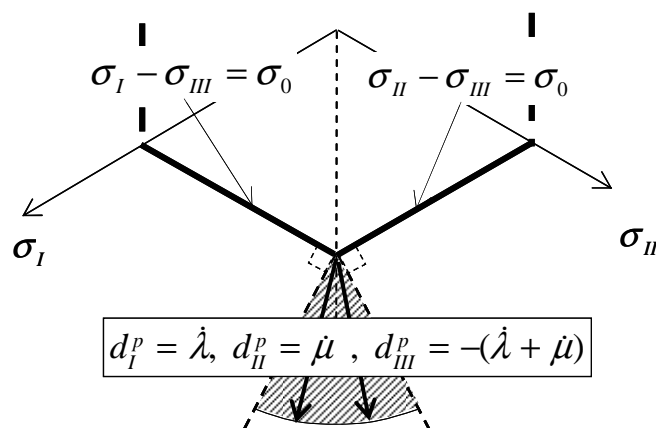


Figure 7

Partant de là, *plusieurs mécanismes de ruine plastique* peuvent être mis en évidence, comme des solutions en vitesse du problème.

a) Mécanismes de déformation *homogène* (figure 8).

$$\underline{U} = -\frac{\dot{\delta}}{h} z\mathbf{e}_z + \alpha \frac{\dot{\delta}}{h} x\mathbf{e}_x + \beta \frac{\dot{\delta}}{h} y\mathbf{e}_y \quad \text{d'où} \quad \underline{d} = \frac{\dot{\delta}}{h} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

d'où par identification avec (44) :

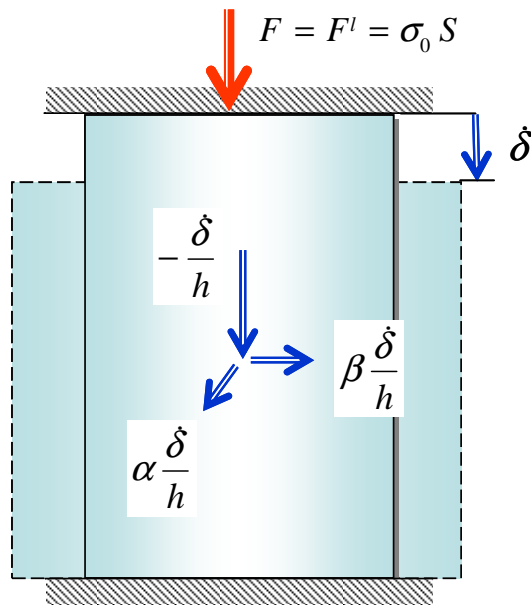


Figure 8

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad (4.46)$$

c'est-à-dire que tous les couples \$(\alpha \geq 0, \beta \geq 0)\$ avec \$\alpha + \beta = 1\$ (condition d'*incompressibilité plastique*) conviennent.

b) Mécanismes avec «*bande de cisaillement*» (figure 9).

Le champ de vitesse correspondant à un tel mécanisme est défini comme suit :

$$\checkmark \quad \text{Zone } \boxed{1} : \underline{U} = 0 \quad (\text{bloc immobile}) \quad (4.47a)$$

$$\checkmark \quad \text{Zone } \boxed{3} : \underline{U} = \frac{\dot{\delta}}{\sin \theta} \mathbf{e}_y \quad (\text{bloc en translation}) \quad (4.47b)$$

$$\checkmark \text{ Zone } \boxed{2} : \underline{U} = \frac{\dot{\delta}}{\sin \theta} \left(\frac{Z}{e} \right) \underline{e}_y \quad (4.47c)$$

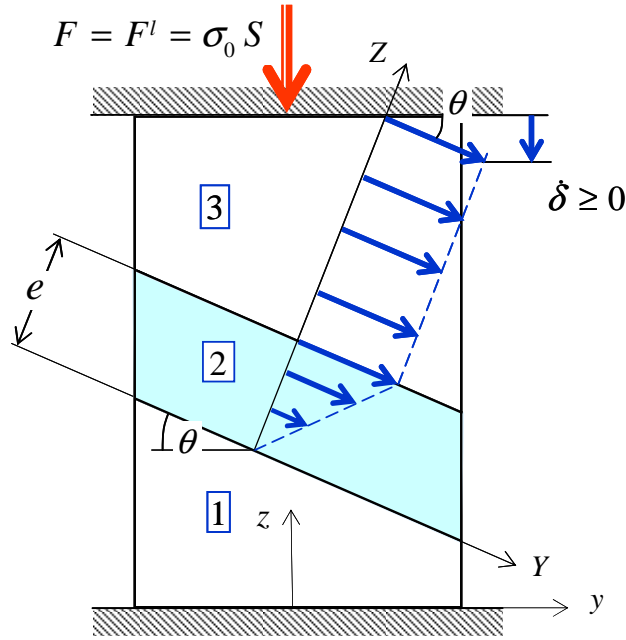


Figure 9

La seule zone en déformation est la zone $\boxed{2}$ (bande de cisaillement d'épaisseur e), où le taux de déformation totale, égal au taux de déformation plastique en vertu de (4.42), vaut :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\delta}}{2e \sin \theta} (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y) = \underline{\underline{d}}^p \quad (4.48)$$

soit encore :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\delta}}{2e \sin \theta} (\underline{e}_U \otimes \underline{e}_U - \underline{e}_V \otimes \underline{e}_V) = \underline{\underline{d}}^p \quad (4.49)$$

où les vecteurs unitaires \underline{e}_v et \underline{e}_w sont respectivement portés par la première et seconde bissectrice des axes (Y,Z) . Or les directions principales du taux de déformation plastique devant en tout point coïncider avec celles du tenseur des contraintes (4.48) (voir chapitre I), il en résulte nécessairement que la bande de cisaillement doit être inclinée à $\theta = \pi/4$ par rapport à l'horizontale (figure 10), c'est-à-dire que les axes (U,V) coïncident avec les axes (y, z) .

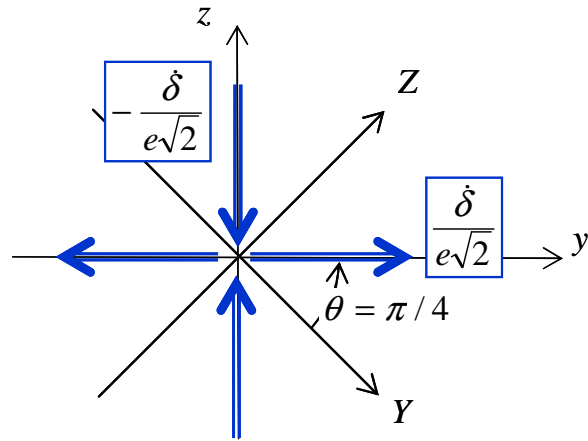


Figure 10

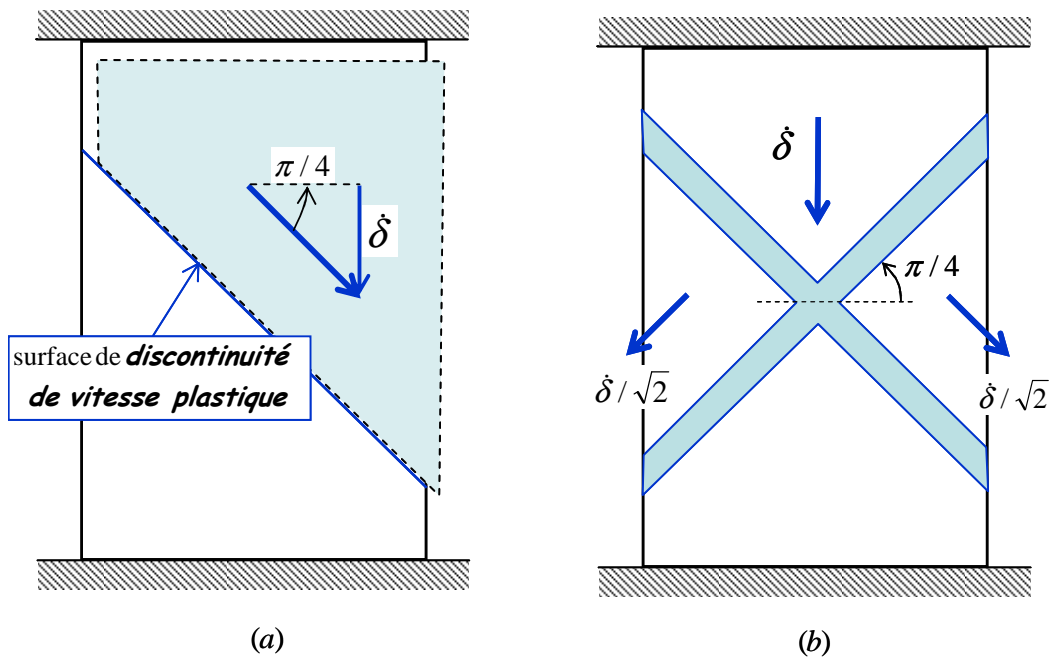


Figure 11

Dans ces conditions, les valeurs principales du taux de déformation plastique sont :

$$d_{xx}^p = 0, d_{yy}^p = \frac{\delta}{e\sqrt{2}}, d_{zz}^p = -\frac{\delta}{e\sqrt{2}} \quad (4.50)$$

qui est bien de la forme (4.44) avec :

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \dot{\mu} = \frac{\dot{\delta}}{e\sqrt{2}} \geq 0 \quad (4.51)$$

On a ainsi mis en évidence une famille de mécanismes de ruine plastique de l'éprouvette avec bande de cisaillement d'épaisseur e arbitraire (mode de rupture «localisé»). On obtient lorsque l'épaisseur de la bande de cisaillement tend vers zéro, un mécanisme par bloc en translation avec *discontinuité de vitesse plastique* (figure 11a). Il est également possible d'exhiber des mécanismes symétriques avec deux bandes de cisaillement (figure 11b), que l'on observe expérimentalement.
