

4. Simulation du tassement d'un massif de sol élastoplastique

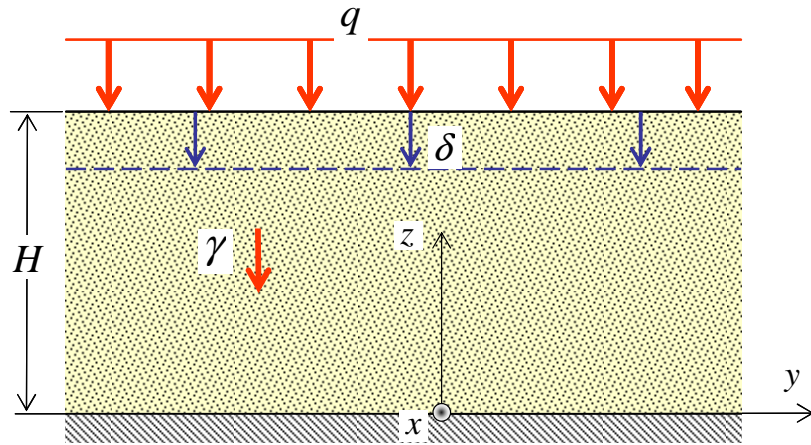


Figure 14

Une couche de sol horizontale d'épaisseur H reposant sur un substratum indéformable (figure 14) est soumise à l'action d'une surcharge $-qe_z$ appliquée au niveau de sa surface ($z=H$). Le sol est homogène, pesant, de poids volumique $-\gamma e_z$. Son comportement est modélisé par une loi de comportement *élastique linéaire* (module d'Young E et coefficient de Poisson ν , ou coefficients de Lamé λ et μ), *parfaitement plastique standard*, le critère de plasticité étant celui de *Tresca* avec une *cohésion* égale à C (sol argileux). On se propose d'évaluer le *tassement* engendré par l'application progressive de la surcharge p à partir de la valeur nulle.

4.1. Définition de l'état initial ($q=0$)

Dans l'état initial, c'est-à-dire préalablement à l'application de la surcharge, mais en présence du poids volumique du sol, on désigne par $\underline{\underline{\sigma}}_0$ le champ de contrainte régnant dans le massif. Un tel champ doit être d'une part *statiquement admissible*, c'est-à-dire vérifier

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_0 - \gamma e_z = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}_0(z=H) \cdot e_z = 0 \quad (4.72)$$

et *plastiquement admissible*, c'est-à-dire vérifier le critère de *Tresca* en tout point :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}_0) = \sigma_{0,I} - \sigma_{0,III} - 2C \leq 0 \quad (4.73)$$

le contact entre le sol et le substratum étant supposé à *adhérence totale* (aucune condition sur le vecteur contrainte). Considérant des champs tels que :

$$\sigma_{0,xx} = \sigma_{0,yy} = K_0 \sigma_{0,zz}, \text{ autres } \sigma_{0,ij} = 0 \quad (4.74)$$

où K_0 est une constante («*coefficient des terres au repos*»). l'équation d'équilibre associée à la condition aux limites en surface du massif (équations (4.72)) donne immédiatement :

$$\sigma_{0,zz} = \gamma(z - H), \sigma_{0,xx} = \sigma_{0,yy} = K_0 \gamma(z - H) \quad (4.75)$$

et le critère du sol est vérifié en tout point du massif si et seulement si :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}_0) = |\sigma_{0,xx} - \sigma_{0,zz}| - 2C = \gamma(H - z)|K_0 - 1| - 2C \leq 0, \forall z; 0 \leq z \leq H \quad (4.76)$$

soit :

$$\boxed{1 - \frac{2C}{\gamma H} \leq K_0 \leq 1 + \frac{2C}{\gamma H}} \quad (4.77)$$

On supposera désormais que $K_0 = 1$, de sorte que le champ de contrainte initial est *hydrostatique* :

$$\underline{\underline{\sigma}}_0 = \gamma(z - H) \underline{\underline{1}} \quad (4.78)$$

4.2. Tassement en phase élastique

La solution en déplacement est donnée par :

$$\underline{\underline{\xi}} = -\frac{q}{\lambda + 2\mu} z \underline{\underline{e}}_z \quad (4.79)$$

où $\lambda + 2\mu$ est le *module oedométrique* du sol, tandis que le champ de contrainte est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \left[\gamma(z - H) - q \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \underline{\underline{1}} - 2q \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \quad (4.80)$$

Le *tassement* en surface vaut donc :

$$\boxed{\delta = -\xi_z(z = H) = \frac{qH}{\lambda + 2\mu}} \quad (4.81)$$

Cette solution demeure valable tant que le sol n'est pas plastifié :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = |\sigma_{xx} - \sigma_{zz}| - 2C = 2q \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} - 2C \leq 0 \quad (4.82)$$

d'où la *limite d'élasticité* :

$$\boxed{q \leq q^e = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) C} \quad (4.83)$$

et la valeur correspondante du tassement :

$$\boxed{\delta^e = H \frac{C}{\mu}} \quad (4.84)$$

Cette limite d'élasticité correspond à la *plastification simultanée* de tous les points du massif.

4.3. Phase élastoplastique ($q \geq q^e$)

Le chargement du massif étant poursuivi au-delà de la limite d'élasticité, on recherche le champ de contrainte solution du problème d'évolution sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = [\gamma(z - H) - q] \underline{\underline{1}} + 2C(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.85)$$

qui est bien *statiquement* et *plastiquement admissible*, le critère de plasticité étant atteint en tout point, d'où en particulier :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = -\dot{q} \underline{\underline{1}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \quad (4.86)$$

La solution en déplacement étant par ailleurs recherchée sous la forme

$$\underline{\underline{\xi}} = u(z) \underline{e}_z \quad \text{avec } u(z = 0) = 0 \quad (4.87)$$

le champ des taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = \dot{u}'(z) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad \text{avec} \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dz} \quad (4.88)$$

d'où en reportant dans l'équation (4.86) et en tenant compte de l'*incompressibilité plastique* du sol ($\text{tr}\underline{\underline{d}}^p=0$) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\dot{q} \underline{1} = \lambda \dot{u}' \underline{1} + 2\mu (\dot{u}' \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \underline{\underline{d}}^p)$$

En prenant la trace des deux membres de cette dernière équation, il vient :

$$\dot{u}' = -\frac{3\dot{q}}{3\lambda + 2\mu} \Rightarrow u'(q, z) - u'(q^e, z) = -3 \frac{q - q^e}{3\lambda + 2\mu} \quad (4.89)$$

d'où par intégration apr rapport à z , en tenant compte de ce que $u(q,0) = u(q^e,0) = 0$:

$$u(q, z) - u(q^e, z) = -3 \frac{q - q^e}{3\lambda + 2\mu} z \quad (4.90)$$

et letassement en surface vaut finalement :

$$\delta(q) = \delta^e + \frac{q - q^e}{\lambda + 2\mu/3} H \quad (4.91)$$

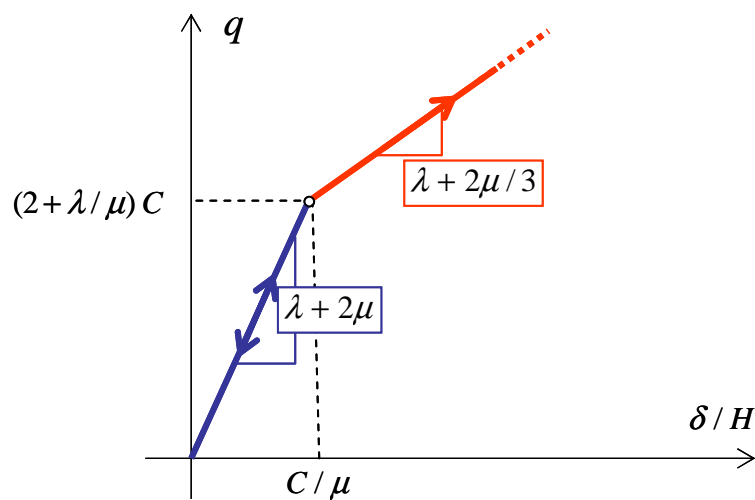


Figure 15

La figure 15 représente la courbe bi-linéaire donnant l'évolution du tassement du massif en fonction de la surcharge appliquée. Elle se compose d'une partie élastique (segment de droite de pente égale au *module oedométrique* du sol $\lambda+2\mu$), suivie d'une demi-droite de pente inférieure, égale au *module de compression isotrope* $\lambda+2\mu/3$ du sol, correspondant à l'évolution en régime elastoplastique. Sous réserve que l'on reste dans le domaine des petites perturbations ($\delta \ll H$), la surcharge peut être augmentée indéfiniment : *il n'y a donc pas de charge limite*, ce qu'un raisonnement simple de *calcul à la rupture* confirme immédiatement.

Il reste à s'assurer que la loi de comportement elastoplastique, et en particulier la positivité du multiplicateur plastique, est bien vérifiée. Il suffit pour cela de prendre les déviateurs des deux membres de l'équation (4.88), ce qui donne en tenant compte de (4.89) :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{\dot{u}}{3} (2\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{\dot{q}}{3\lambda + 2\mu} (-2\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.92)$$

Le tenseur taux de déformation plastique a donc bien en tout point du massif les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes donné par (4.85), dont les composantes principales sont telles que :

$$\sigma_{xx} = \sigma_I = \sigma_{yy} = \sigma_{II} > \sigma_{III} = \sigma_{zz} \quad (4.93)$$

Le critère de plasticité est alors atteint en *régime d'arête* (voir annexe du chapitre I) de sorte que la règle d'écoulement plastique impose :

$$d_{xx}^p = d_I^p = \dot{\alpha}, \quad d_{yy}^p = d_{II}^p = \dot{\beta}, \quad d_{zz}^p = d_{III}^p = -(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \quad \text{avec } \dot{\alpha} \geq 0, \quad \dot{\beta} \geq 0 \quad (4.94)$$

ce qui est bien le cas puisque par identification de (4.92) et (4.94) :

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \frac{\dot{q}}{3\lambda + 2\mu} \geq 0 \quad (4.95)$$

4.4. Phase de décharge

Le chargement du massif ayant été poursuivi au delà de la limite d'élasticité jusqu'à une valeur notée q^* , on le fait ensuite décroître jusqu'à la valeur $q = 0$ (décharge totale). Pour $q = q^*$, le tassement vaut d'après (4.91)

$$\delta^* = \delta^e + \frac{q^* - q^e}{\lambda + 2\mu/3} H \quad (4.96)$$

tandis que le champ de contrainte correspondant est d'après (4.85) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = [\gamma(z - H) - q^*] \underline{\underline{1}} + 2C(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.97)$$

Faisant alors l'hypothèse de *décharge élastique* et posant $\Delta q = q - q^*$, on obtient (voir le calcul en phase élastique) :

$$\Delta \delta = \frac{\Delta q H}{\lambda + 2\mu} \quad \text{et} \quad \Delta \underline{\underline{\sigma}} = -\Delta q \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \Delta q \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y] \quad (4.98)$$

d'où lorsque la décharge est totale ($\Delta q = -q^*$) l'expression du champ des contraintes *résiduelles* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \gamma(z - H) \underline{\underline{1}} + 2C \underbrace{\left\{ 1 - \frac{q^*}{2C} \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right\}}_{(q^*/q^e)} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (4.99)$$

Le critère de plasticité est vérifié tout au long de cette phase de décharge si :

$$|\sigma_{xx}^r - \sigma_{zz}^r| = 2C \left(\frac{q^*}{q^e} - 1 \right) \leq 2C \quad \Rightarrow \quad q^* \leq 2q^e \quad (4.100)$$

et dans ces conditions le tassement résiduel du massif vaut d'après (96) :

$$\delta^r = \delta^* - \frac{q^*}{\lambda + 2\mu} H = (q^* - q^e) H \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu/3} - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right) \quad (4.101)$$

soit :

$$\boxed{q^e \leq q^* \leq 2q^e, \quad \delta^r = (q^* - q^e) H \left(\frac{4\mu}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \right)} \quad (4.102)$$

4.5. Application numérique

L'épaisseur H de la couche est de 5m ; elle est constituée d'un sol élastique linéaire (module d'Young $E=10$ MPa, coefficient de Poisson $\nu=0,25$) de cohésion égale à $C=20$ kPa. On obtient donc :

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 4 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 4 \text{ MPa} \quad (4.103)$$

d'où :

$$\boxed{q^e = 60 \text{ kPa} \quad , \quad \delta^e = 2,5 \text{ cm}} \quad (4.104)$$

Le chargement étant poursuivi jusqu'à $q^* = 2q^e = 120 \text{ kPa}$, on obtient alors :

$$\boxed{\delta^* = 7 \text{ cm} \quad , \quad \delta^r = 2 \text{ cm}} \quad (4.105)$$

La courbe *charge-tassement* correspondante est tracée sur la figure 16 ci-dessous.

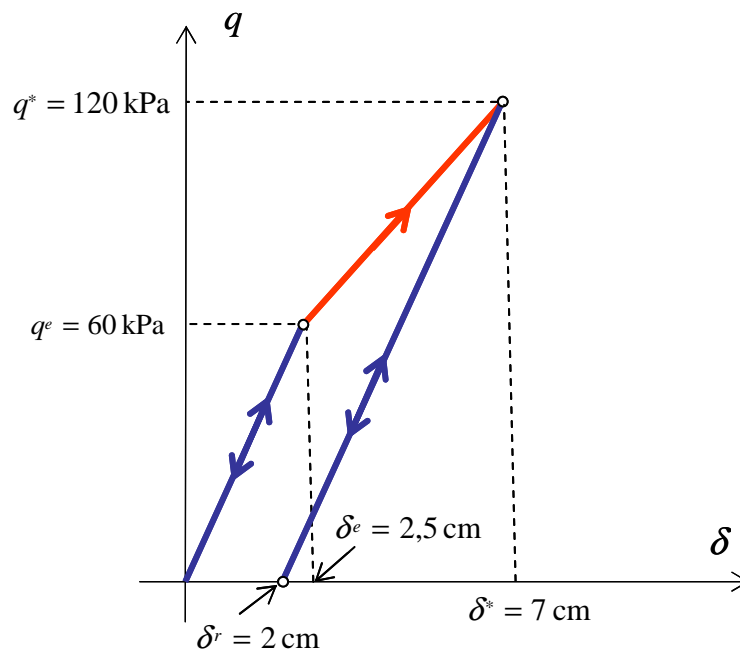


Figure 16
