

## 11. Calcul d'un portique en élastoplasticité

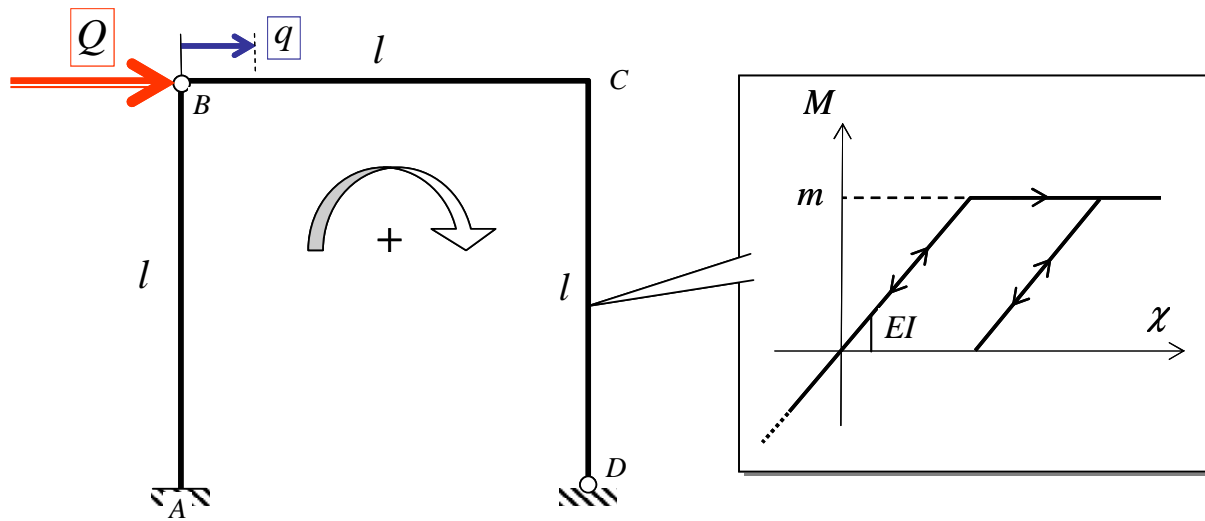


Figure 38

On considère le portique représenté sur la figure 38, constitué d'une travée horizontale de longueur  $l$  en appui sur deux poteaux verticaux de même longueur  $l$ . Les liaisons aux points  $B$  et  $D$  sont des *articulations sans frottement* (moment nul). La loi de comportement des différentes barres est représentée sur la partie droite de la figure 38, sous la forme d'un diagramme «moment-courbure» de type élastique (rigidité à la flexion  $EI$ ) *parfaitement plastique standard*, de moment limite  $m$  en flexion positive ou négative. Une charge horizontale d'intensité  $Q$  est appliquée au point  $B$ .

### 11.1 Analyse statique

Le problème étudié est *hyperstatique d'ordre 1* comme indiqué sur la figure 39. On peut ainsi prendre la valeur  $Y$  de la réaction d'appui verticale en  $D$  comme *inconnue hyperstatique*, la composante horizontale étant égale à  $-Y$  : il suffit pour montrer cela d'écrire l'équilibre en moment par rapport au point  $B$  de la portion  $BCD$  du portique, qui exige que la réaction d'appui passe par ce point. Les diagrammes de moments *statiquement admissibles* sont représentés sur la partie droite de cette figure. On obtient dans un repère orthonormé ayant l'appui  $A$  pour origine :

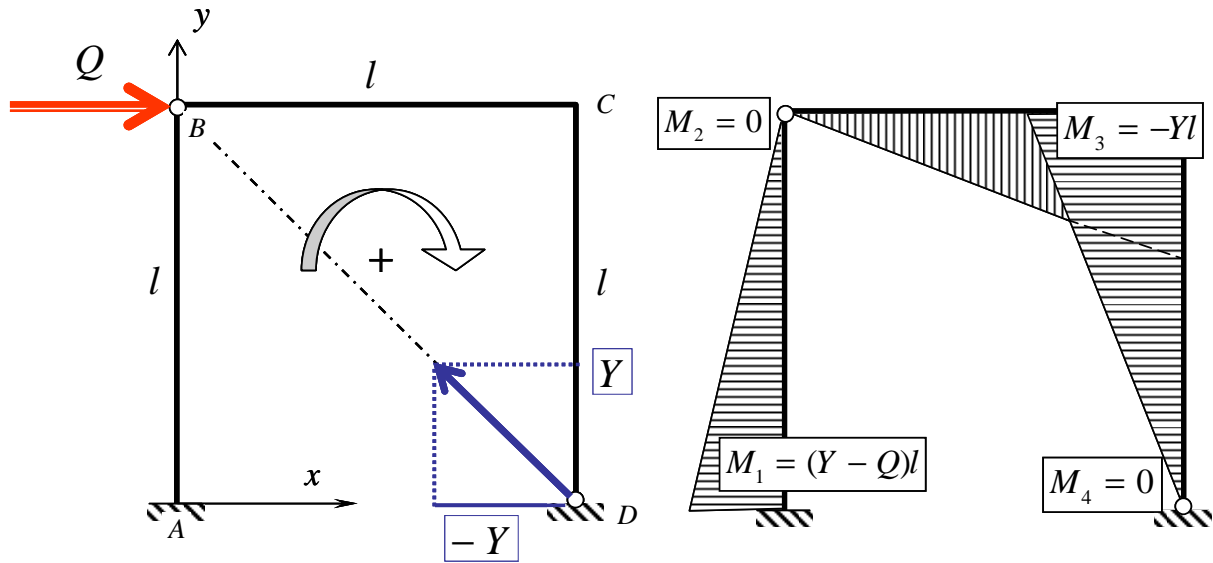


Figure 39

◇ Poteau AB :

$$M(y) = (Y - Q)(l - y) \text{ avec } M_1 = (Y - Q)l \quad (4.319)$$

◇ Travée BC : :

$$M(x) = -Yx \quad M_2 = 0 \text{ et } M_3 = -Yl \quad (4.320)$$

◇ Poteau CD :

$$M(y) = -yY \text{ avec } M_4 = 0 \quad (4.321)$$

## 11.2 Calcul élastique

L'état initial étant supposé *naturel* (diagramme des moments nuls pour  $Q=0$ ), l'énergie complémentaire de la structure s'écrit :

$$W^*[M(s)] = \int_A^D \frac{M^2(s)}{2EI} ds \quad (4.322)$$

soit, en tenant compte des équations (319) à (321) :

$$W^*(Y, Q) = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^l (Y - Q)^2 (l - y)^2 dy + 2 \int_0^l (-Yx)^2 dx \right\} = \frac{l^3}{6EI} [(Y - Q)^2 + 2Y^2] \quad (4.323)$$

Le *théorème du potentiel minimum* nous permet alors de calculer l'inconnue hyperstatique :

$$\frac{\partial W^*}{\partial Y} = \frac{l^3}{3EI} (3Y - Q) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{Y = \frac{Q}{3}} \quad (4.324)$$

tandis que le *théorème de Castigliano* nous permet de calculer le *déplacement horizontal*  $q$  du point d'application du chargement :

$$\boxed{q} = \frac{d}{dQ} W^* \left[ Y = \frac{Q}{3}; Q \right] = \boxed{\frac{2Ql^3}{9EI}} \quad (4.325)$$

Le point le plus sollicité étant l'encastrement A, où  $M_1 = -2Ql/3$ , la limite d'élasticité vaut :

$$M_1 = -2Q^e l / 3 = -m \quad \text{soit} \quad \boxed{Q^e = \frac{3m}{2l}} \quad (4.326)$$

tandis que la valeur correspondante du déplacement est :

$$\boxed{q^e} = \frac{2Q^e l^3}{9EI} = \boxed{\frac{ml^2}{3EI}} \quad (4.327)$$

Le diagramme des moments correspondant est représenté sur la figure 40a.

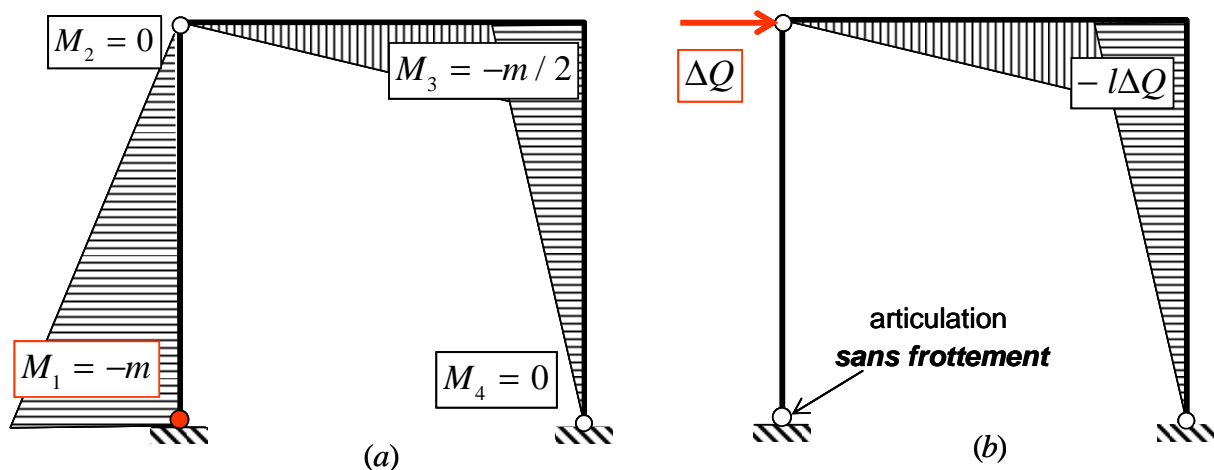


Figure 40

### 11.3 Evolution élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité ( $Q = Q^e + \Delta Q, \Delta Q \geq 0$ ), on fait l'hypothèse de *formation d'une rotule plastique* en A, de sorte que :

$$M_1 = -m, \Delta M_1 = 0 \quad (4.328)$$

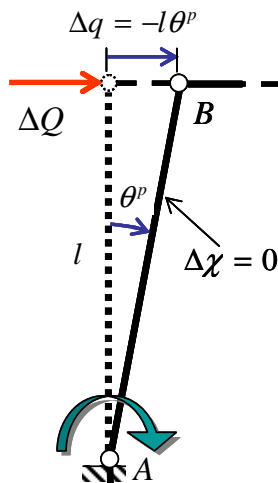
La solution du problème d'évolution dans cette phase élastoplastique se fait classiquement en superposant à la solution correspondant à la limite d'élasticité (figure 40a) celle du *problème isostatique associé* (figure 40b) : celui-ci correspond à un portique pour lequel l'encastrement de l'appui A est remplacé par une articulation sans frottement, tandis que le chargement appliqué est égal à l'incrément de charge  $\Delta Q$  au-delà de la limite d'élasticité. Le *théorème de Castigliano* appliquée à ce problème isostatique permet de calculer l'incrément de déplacement  $\Delta q$  pendant cette phase élastoplastique :

$$W^*(\Delta Q) = 2 \frac{1}{2EI} \int_0^l (\Delta Q x)^2 dx = \frac{\Delta Q^2 l^3}{3EI} \quad (4.329)$$

d'où :

$$\Delta q = \frac{dW^*}{d(\Delta Q)} = \frac{2\Delta Q l^3}{3EI} \quad (4.330)$$

Il reste à vérifier la règle d'écoulement plastique au point A, où s'est formée la *rotule plastique*. Or la *discontinuité de rotation plastique*, notée  $\theta^p$ , n'est autre que la discontinuité de rotation à l'endroit de l'articulation sans frottement en A pour le problème isostatique associé. Dans ce problème, le diagramme des moments dans le poteau AB étant nul, il n'y a aucune variation de courbure, de sorte que ce poteau est animé d'un mouvement de corps rigide autour de l'articulation sans frottement A, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Compte tenu de la relation (330), il vient alors :



$$\Delta q = \frac{2\Delta Q l^3}{3EI} = -l\theta^p \quad (4.331)$$

$$\text{d'où : } \theta^p = -\frac{2\Delta Q l^2}{3EI} \quad (4.332)$$

$$\text{soit : } \dot{\theta}^p = -\frac{2\dot{Q} l^2}{3EI} \leq 0 \quad (4.333)$$

Le signe négatif de la vitesse de discontinuité de rotation plastique est bien en cohérence avec le fait que  $M_1 = -m$ .

### 11.4 Charge limite et mécanisme de ruine plastique

La solution précédente est valable tant que le moment  $M_3$  au point C reste supérieur au moment limite de plastification négative, soit :

$$M_3 = -\frac{m}{2} - l\Delta Q \geq -m \Rightarrow \Delta Q \leq \frac{m}{2l} \quad (4.334)$$

d'où la charge limite de la structure :

$$Q \leq Q^l = Q^e + \frac{m}{2l} = \frac{2m}{l} \quad (4.335)$$

le déplacement correspondant étant égal à :

$$q^l = q^e + \Delta q = \frac{2ml^2}{3EI} \quad (4.336)$$

et le diagramme des moments fléchissants associé est représenté sur la figure 41a.

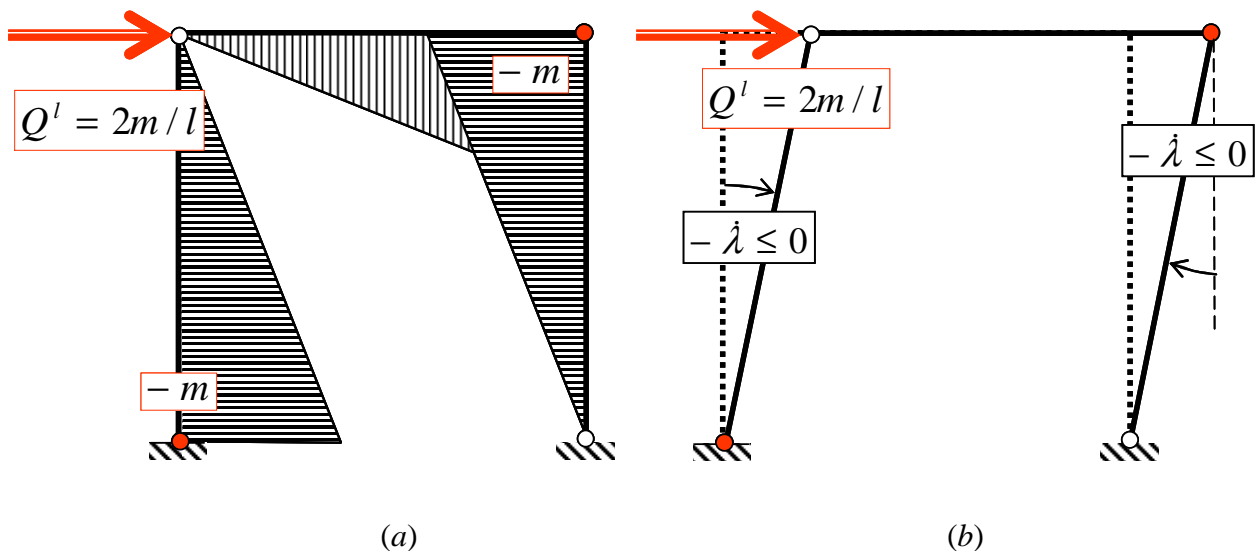


Figure 41

L'apparition d'une seconde rotule plastique au point  $C$  correspond à la formation d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre* sous charge maintenue constante (figure 41b), le signe négatif des rotules plastiques étant compatible avec la règle d'écoulement. Le mécanisme correspondant est appelé «*mécanisme de panneau*» (voir le cours de Calcul à la Rupture).

### 11.5 Décharge et état résiduel de la structure

Ayant tout juste atteint la charge limite de la structure et sans que le mécanisme de ruine ne se développe, on procède à une *décharge* de la structure :  $Q = Q^l + \Delta Q$ ,  $\Delta Q \leq 0$ . Supposant qu'une telle décharge demeure *élastique* jusqu'à la décharge *totale* ( $\Delta Q = -2m/l$ ), les *moments résiduels* aux points  $A$  et  $C$  sont :

$$M_1^r = -m - \frac{2(-2m/l)}{3} = \frac{m}{3}, \quad M_3^r = -m - \frac{(-2m/l)}{3} = -\frac{m}{3} \quad (4.337)$$

le diagramme des moments résiduels *autoéquilibré*, c'est-à-dire en équilibre avec un chargement nul, est représenté sur la figure 42.

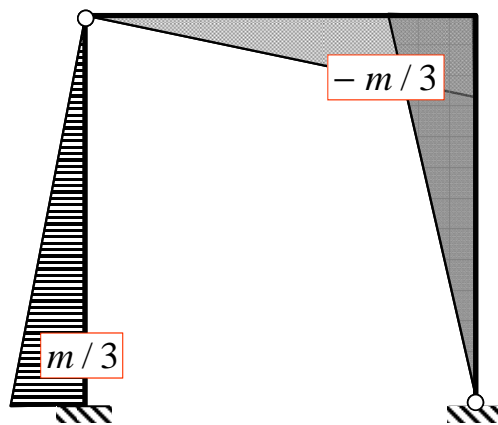


Figure 42

Le *déplacement résiduel* du point d'application de la charge se calcule comme suit :

$$q^r = q^l + \frac{2l^3(-2m/l)}{9EI} = \frac{2ml^2}{9EI} \quad (4.338)$$

Le diagramme charge-déplacement correspondant au cycle complet de charge-décharge, ainsi que l'évolution correspondante des moments fléchissants aux points A et C, sont représentés sur la figure 43.

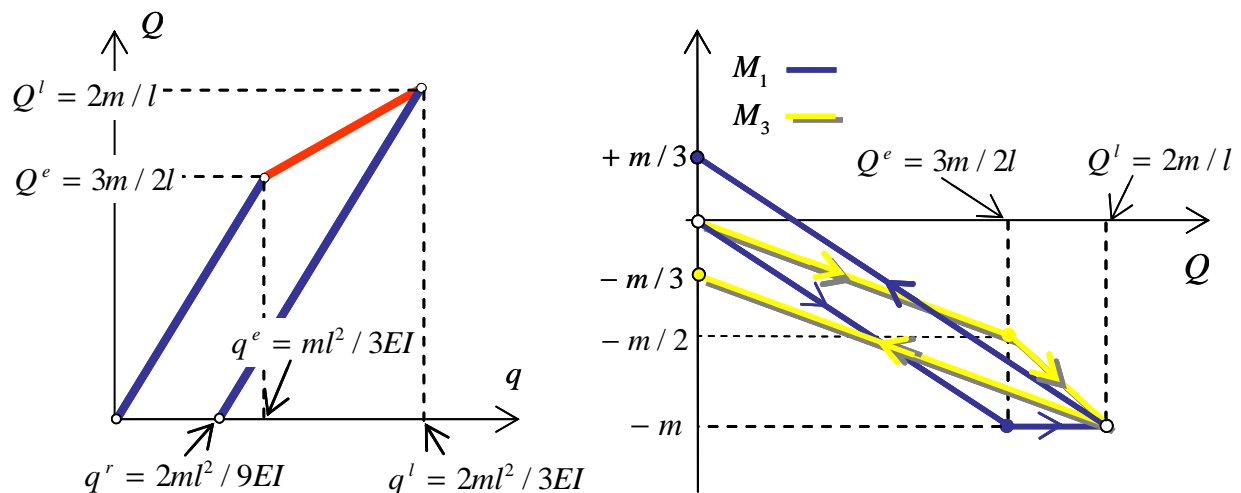


Figure 43

## 11.6 Interprétation de l'état résiduel

La discontinuité de rotation plastique au point A accumulée pendant la phase élastoplastique jusqu'au moment où la charge limite est atteinte, vaut d'après (4.333) :

$$\theta^{p,\max} = -\frac{2l^2}{3EI} (Q^l - Q^e) = -\frac{ml}{3EI} \quad (4.339)$$

Le champ de déformation plastique correspondant, localisé en ce seul point, est manifestement *géométriquement incompatible* comme l'illustre la figure 44, où son intégration à partir de l'appui A le long de la structure aboutit par exemple à une position de l'extrémité inférieure droite du portique décalée d'une distance égale  $l\theta^{p,\max}$  par rapport à l'appui fixe D.

Afin de rétablir cette *compatibilité géométrique*, c'est-à-dire de déplacer l'extrémité inférieure droite du portique afin de l'amener au point C, il convient d'exercer un effort d'intensité *horizontale* X, incliné à 45° comme indiqué sur la figure 44, de manière à respecter l'équilibre. La valeur de cet effort résulte d'un calcul élastique sur la structure isostatique

obtenue en libérant la liaison en C. Il suffit pour cela de calculer l'énergie élastique de contrainte correspondant à l'application de cet effort, soit avec le diagramme de moments fléchissants engendré par cet effort (figure 44) :

$$W^*(X) = 3 \frac{1}{2EI} \int_0^l X^2 x^2 dx = \frac{X^2 l^3}{2EI} \quad (4.340)$$

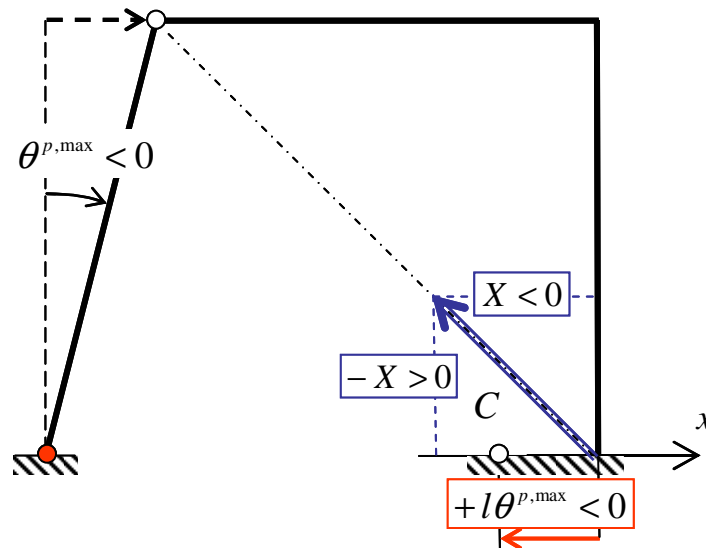


Figure 44

et donc par application du théorème de Castigliano :

$$\frac{dW^*}{dX} = \frac{Xl^3}{EI} = +l\theta^{p,max} = -\frac{ml^2}{3EI} \Rightarrow X = -\frac{m}{3l} \quad (4.341)$$

Il en résulte que les moments fléchissants aux points A et C valent :

$$M_1 = \frac{m}{3}, M_3 = -\frac{m}{3} \quad (4.342)$$

ce qui correspond bien aux valeurs des moments résiduels. Ce sont donc bien ces efforts résiduels qui par le biais des déformations élastiques qu'elles engendrent permettent de rétablir la compatibilité géométrique de la structure.

\*\*\*\*\*



