

Cours de Plasticité

Jeudi: 8h30-11h45

Séance	Thème	Intervenants
1- Jeudi 08/02	Comportement élastoplastique pour le milieu continu 3D : <i>critère de plasticité</i> et <i>règle d'écoulement</i> .	Amphi (1h30): P. de BUHAN Petites classes (1h30) : M. ARQUIER, J. BLEYER, G. HASSEN
2- Jeudi 15/02	Problèmes d'évolution élastoplastique : <i>résolution pas-à-pas, contraintes et déformations résiduelles, charge limite</i> .	A (1h30): PdB PC (1h30) : MA/JB/GH
3- Jeudi 08/03	Résolution de <i>problèmes d'élastoplasticité</i> : compression œdométrique, cylindre en torsion	PC (3h00) : MA/JB/GH
4- Jeudi 15/03	Flexion cylindrique. Prise en main d'un logiciel. <i>Distribution des sujets d'approfondissement</i>	PC (3h00) : MA/JB/GH
5- Jeudi 22/03	Application aux structures à barres fléchies : notion de <i>rotule plastique</i> .	A (1h30): PdB PC (1h30) : MA/JB/GH
6- Jeudi 29/03	<i>Travail personnel sur les sujets d'approfondissement</i>	PC (3h00) :PdB/MA/JB/GH
7- Jeudi 05/04	Contrôle des connaissances (3h00)	PdB/MA/JB/GH



École des Ponts
ParisTech

COURS DE
PLASTICITE ET CALCUL A LA RUPTURE

RAPPELS ELEMENTAIRES DE
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS
ET DES STRUCTURES

PATRICK DE BUHAN

MECANIQUE DES STRUCTURES

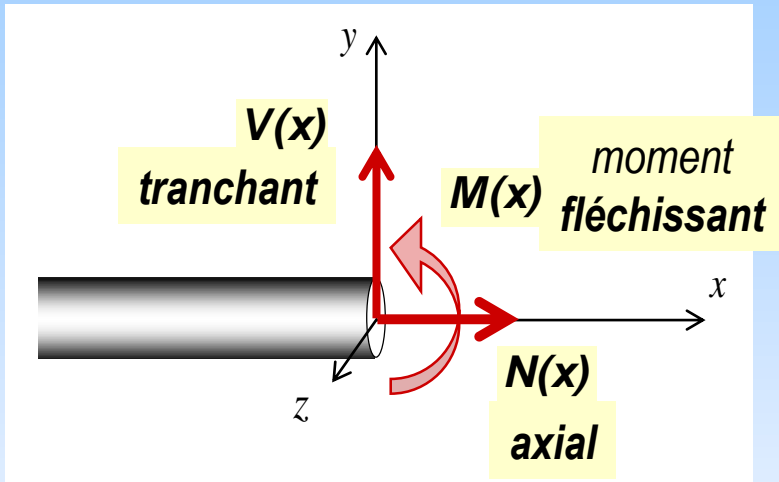


Calcul *élastoplastique*
des structures
à *barres fléchies*

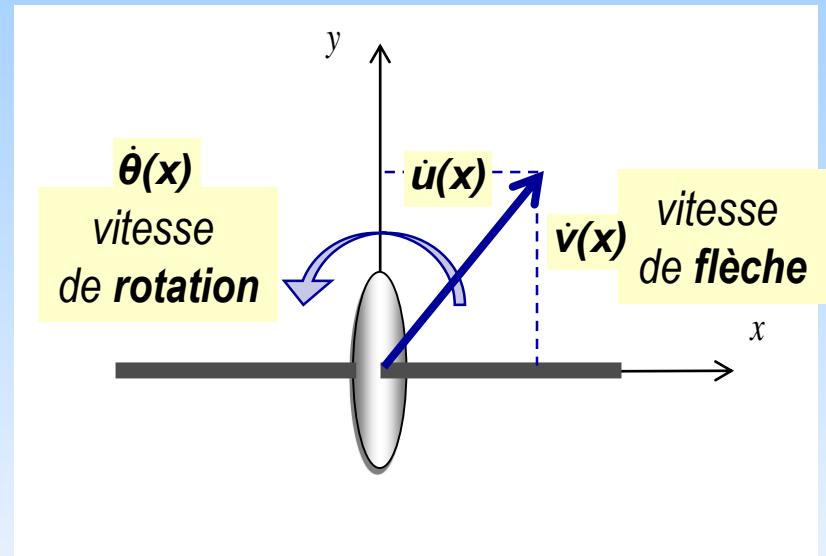
(chapitre III)

Rappel: structures planes formées de poutres droites sollicitées dans leur plan

Efforts intérieurs...



Cinématique...



puissance de déformation

Navier-Bernoulli

taux de courbure

$$P_{def}(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\theta}) = N \frac{d\dot{u}}{dx} + V \left(\frac{d\dot{v}}{dx} - \dot{\theta} \right) + M \frac{d^2\dot{v}}{dx^2} = M \dot{\chi}$$

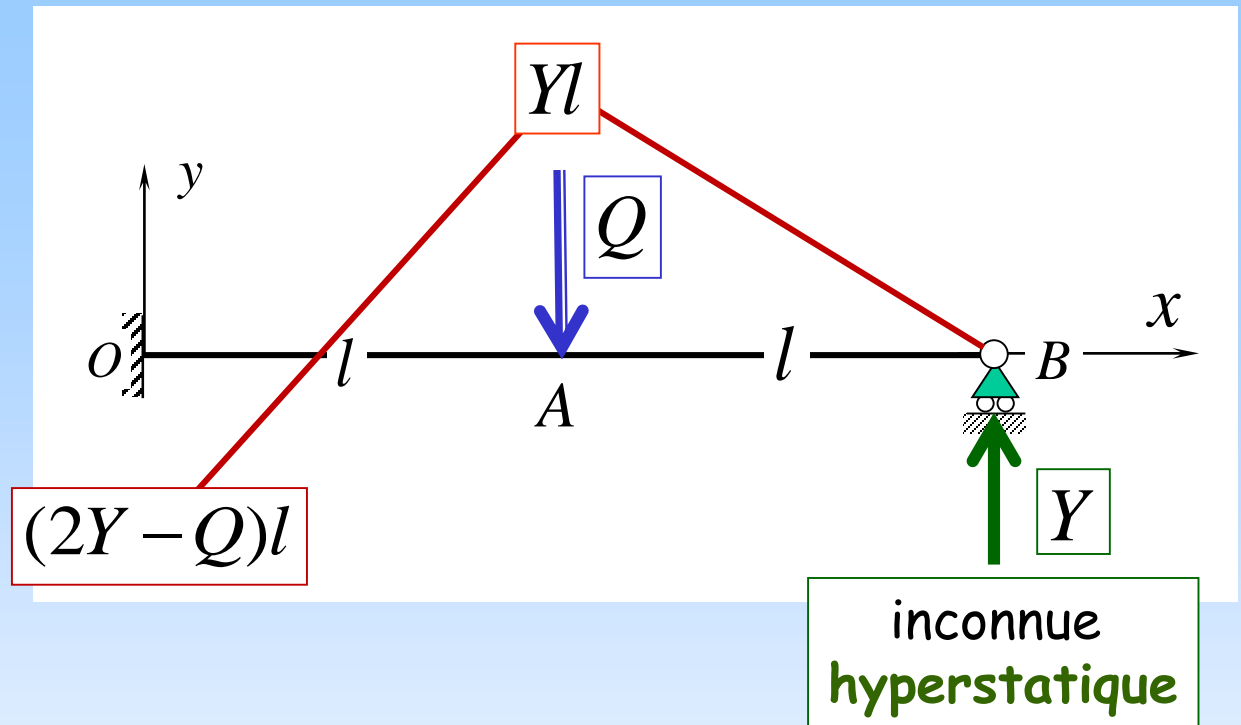
$= 0$

loi moment-courbure
 $M \leftrightarrow \chi = v''$

Exemple:
poutre-console

sous charge
concentrée

Diagrammes
de
**moments
fléchissants**
**statiquement
admissibles**



$$M(x) = \begin{cases} Y(2l-x) & l \leq x \leq 2l \\ Y(2l-x) - Q(l-x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Loi de comportement «moment-courbure»

Fin du
Chapitre II

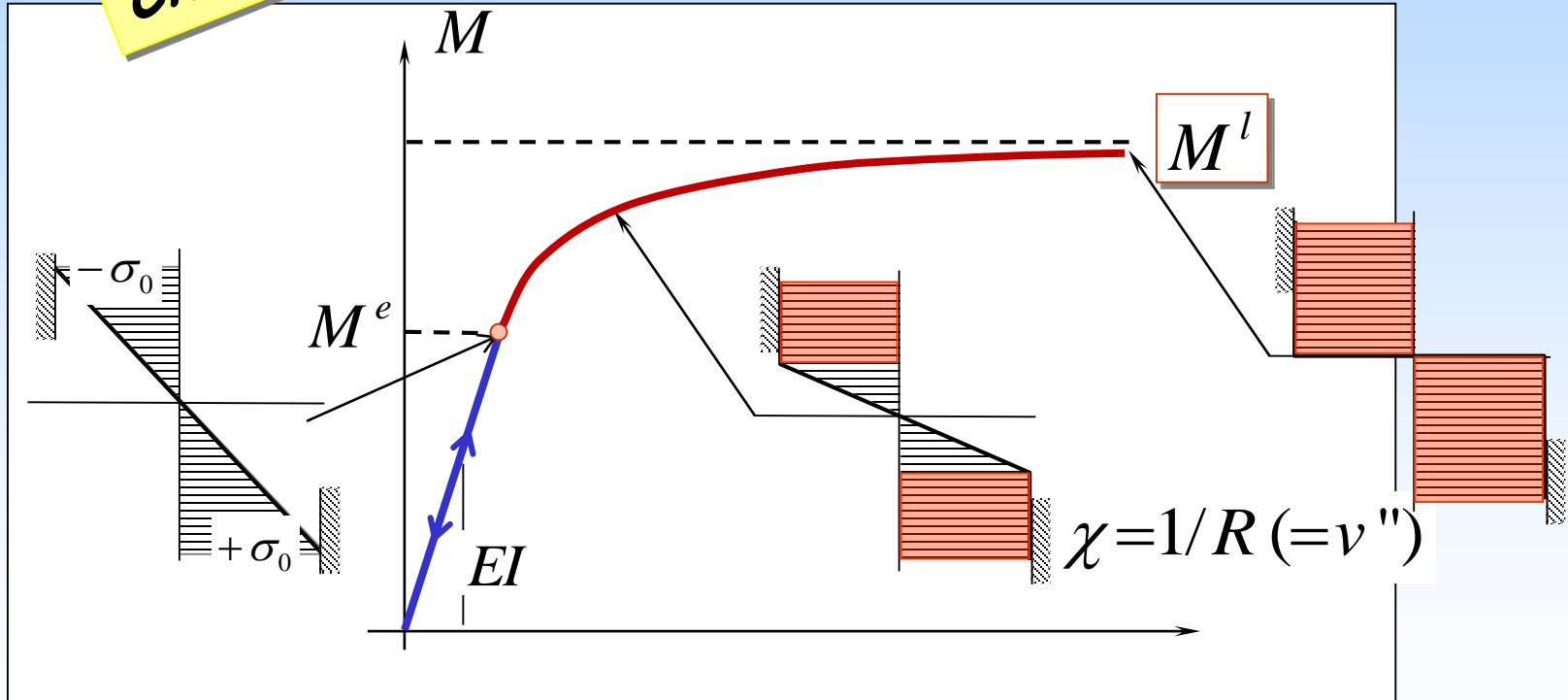
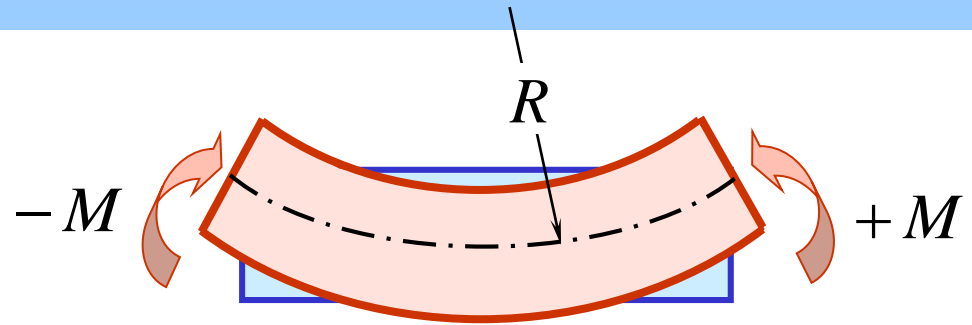
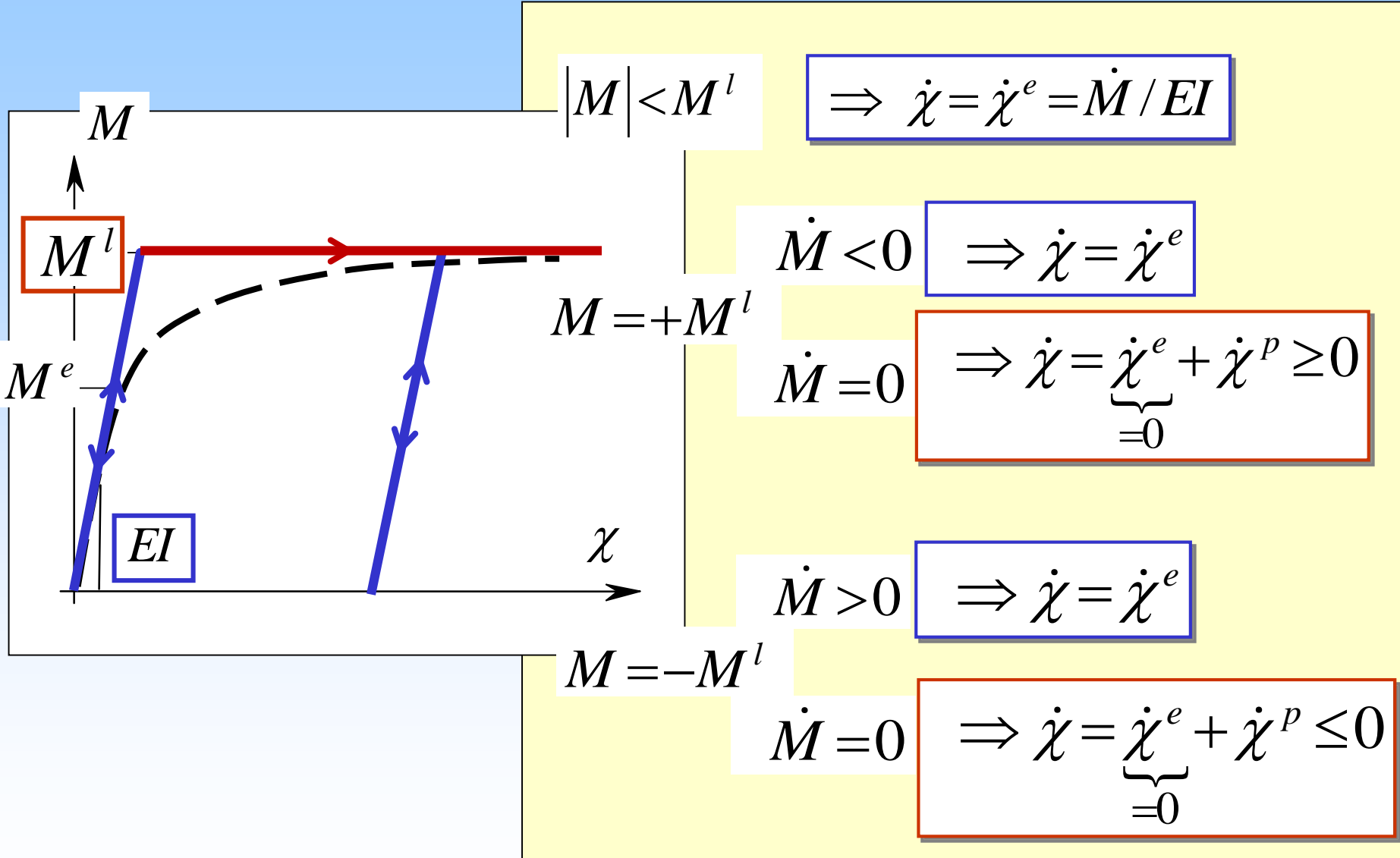


schéma *élastique parfaitement plastique*



Phase de comportement **élastique**
(état initial **naturel**: $M(x)=0$)

$$M(x) = \begin{cases} Y(2l - x) - Q(l - x) & 0 \leq x \leq l \\ Y(2l - x) & l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

Théorème du
potentiel minimum

$$\frac{\partial W^*}{\partial Y} = \int_0^{2l} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Y} dx = 0$$

⇓

$$Y = \frac{5Q}{16}$$

Energie élastique

$$W^*(Q, Y) = \int_{x=0}^{x=2l} \frac{M^2(Q, Y)}{2EI} dx$$

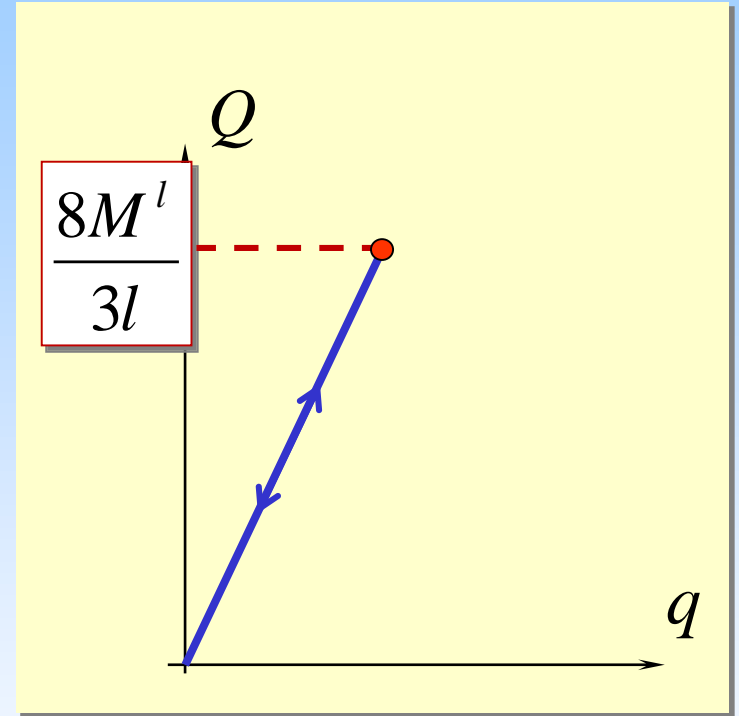
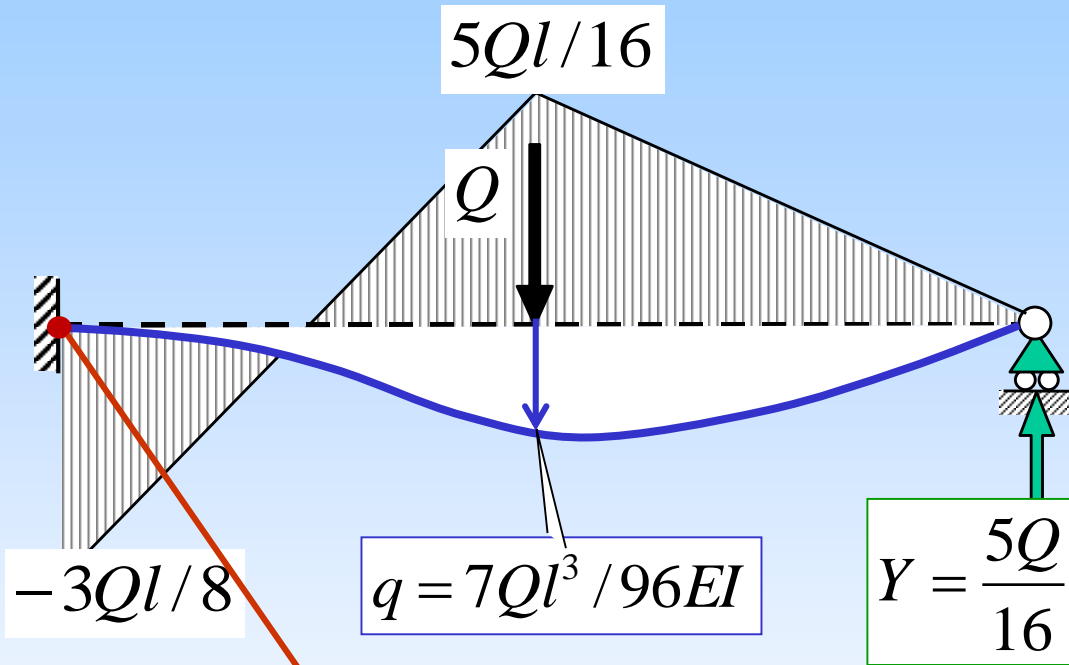
Théorème de
Castigliano

$$q = \frac{\partial W^*}{\partial Q} = \int_0^{2l} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx$$

⇓

$$q = \frac{7}{96} \frac{Ql^3}{EI}$$

Diagramme de *moments fléchissants* et *déformée*



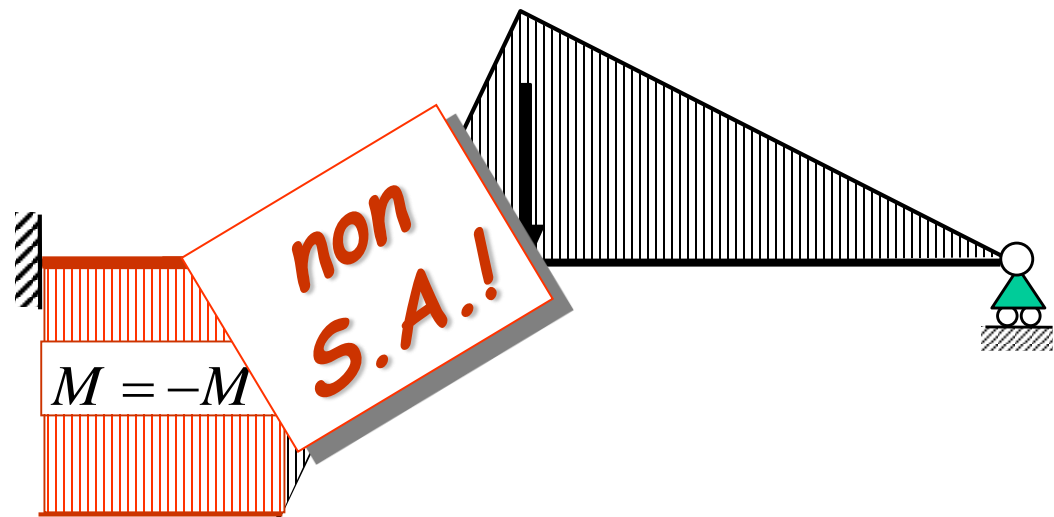
$$M(x=0) = -M^l \Rightarrow Q^e = \frac{8M^l}{3l} \rightarrow \text{Limite d'élasticité}$$

Phase **élastoplastique**:

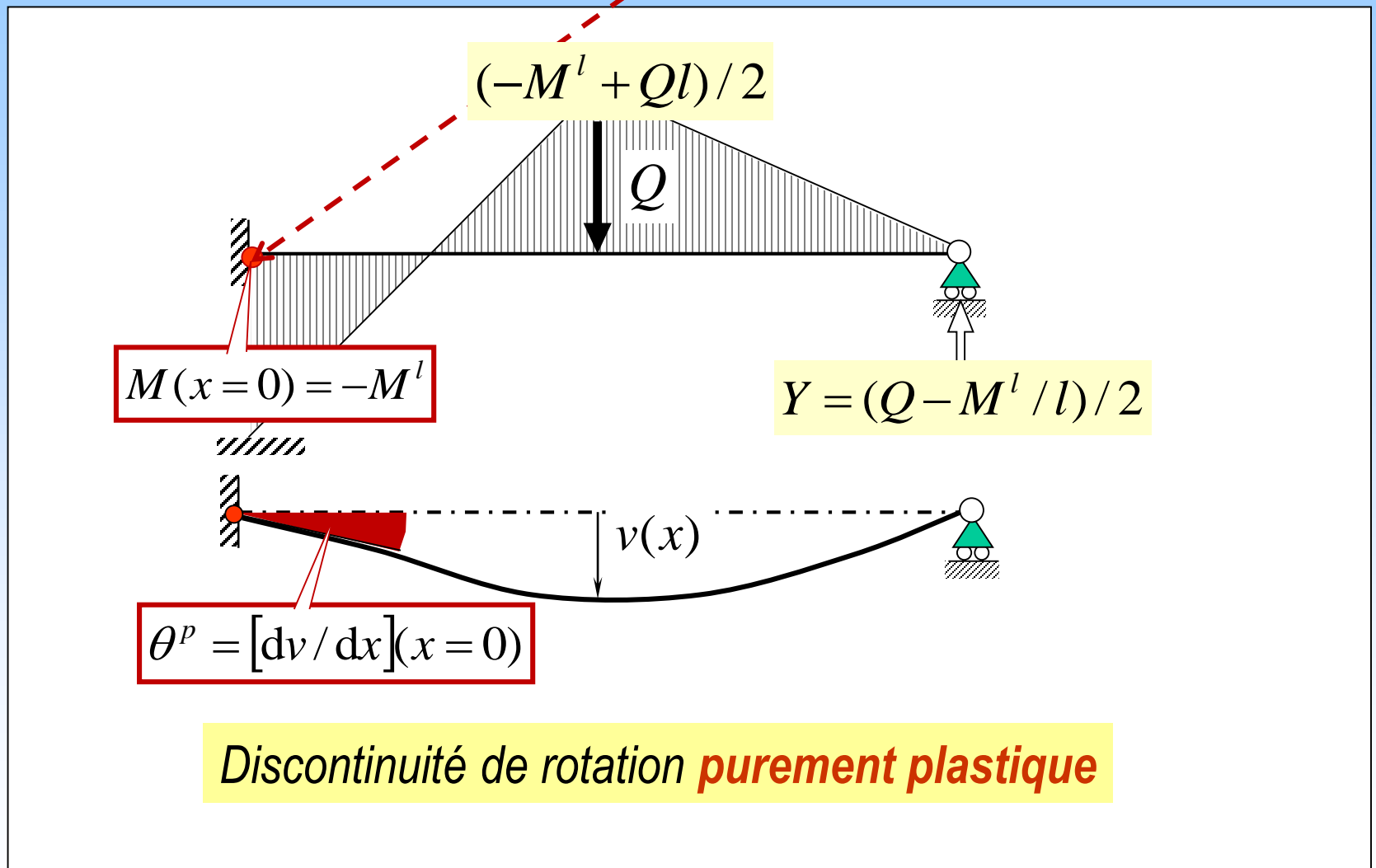
$$Q = Q^e + \Delta Q, \quad \Delta Q \geq 0$$

Hypothèse : propagation **zone plastique** ?

Diagramme
de moments

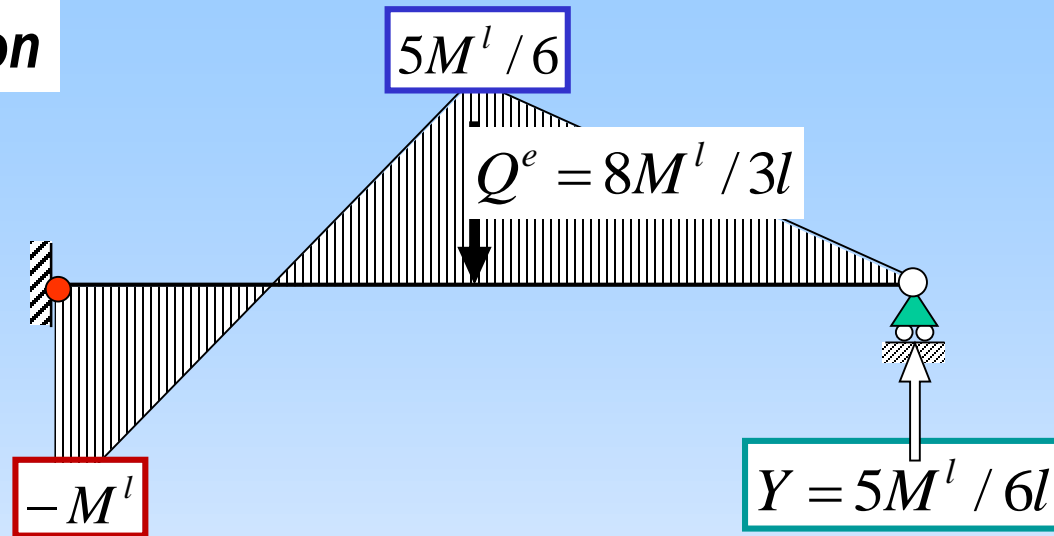


Hypothèse : formation *rotule plastique* à l'encastrement



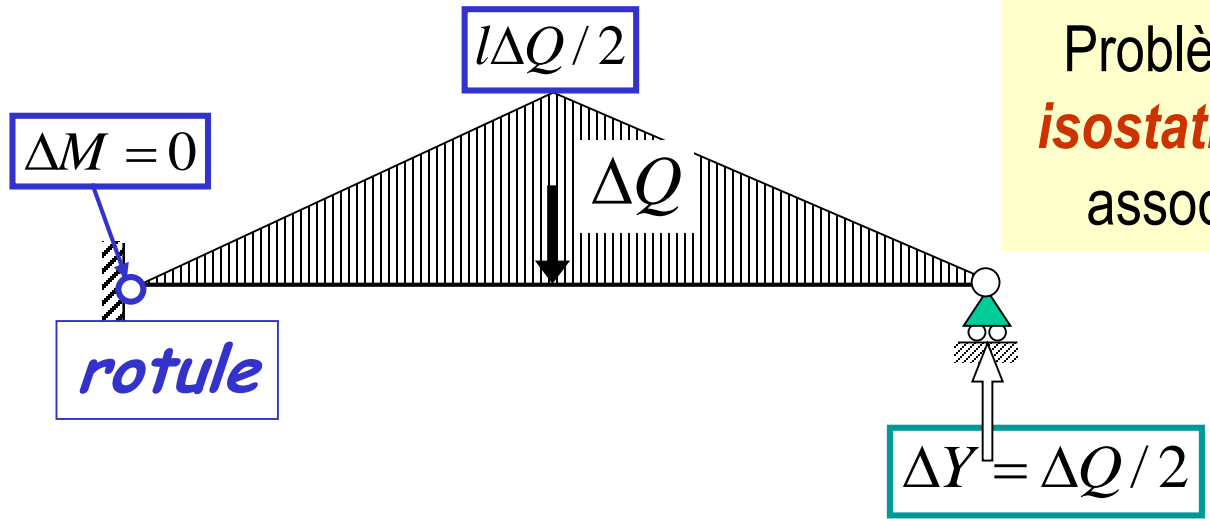
Résolution par *décomposition*

$Q = Q^e$

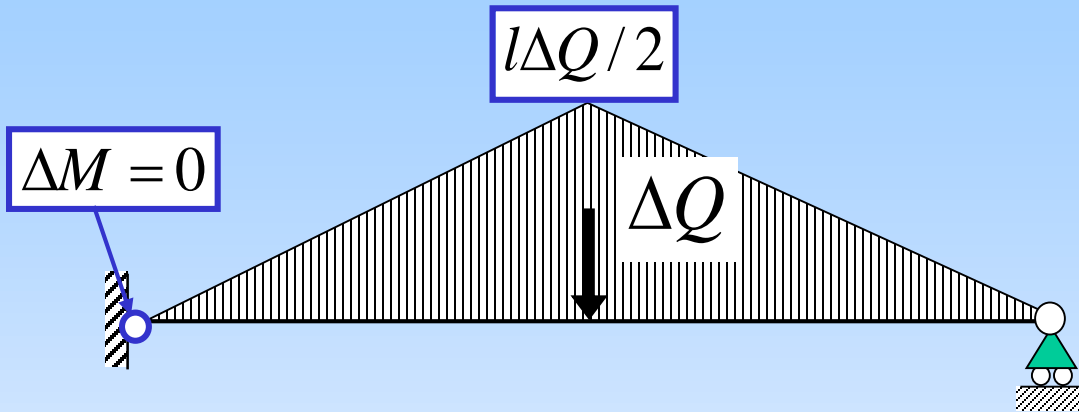


+

ΔQ



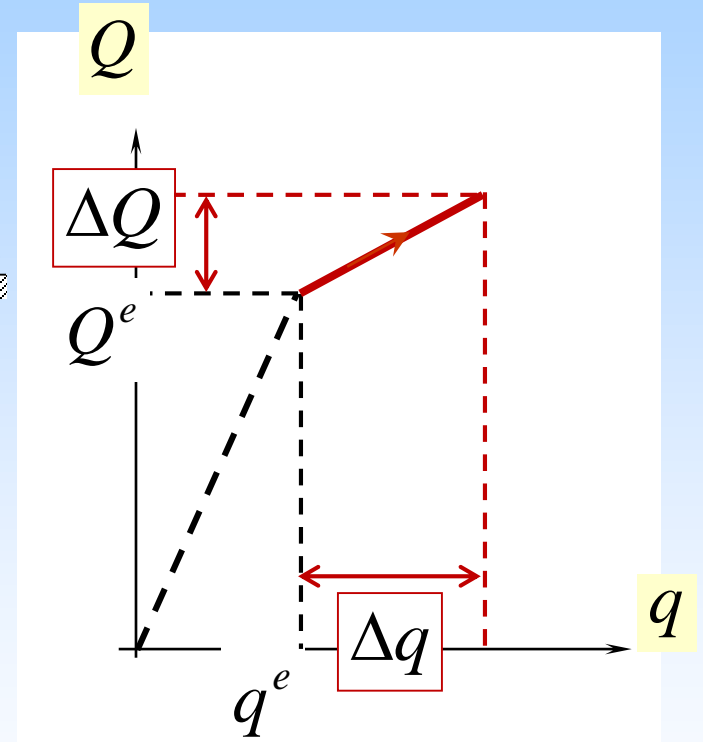
Résolution du *problème isostatique associé*

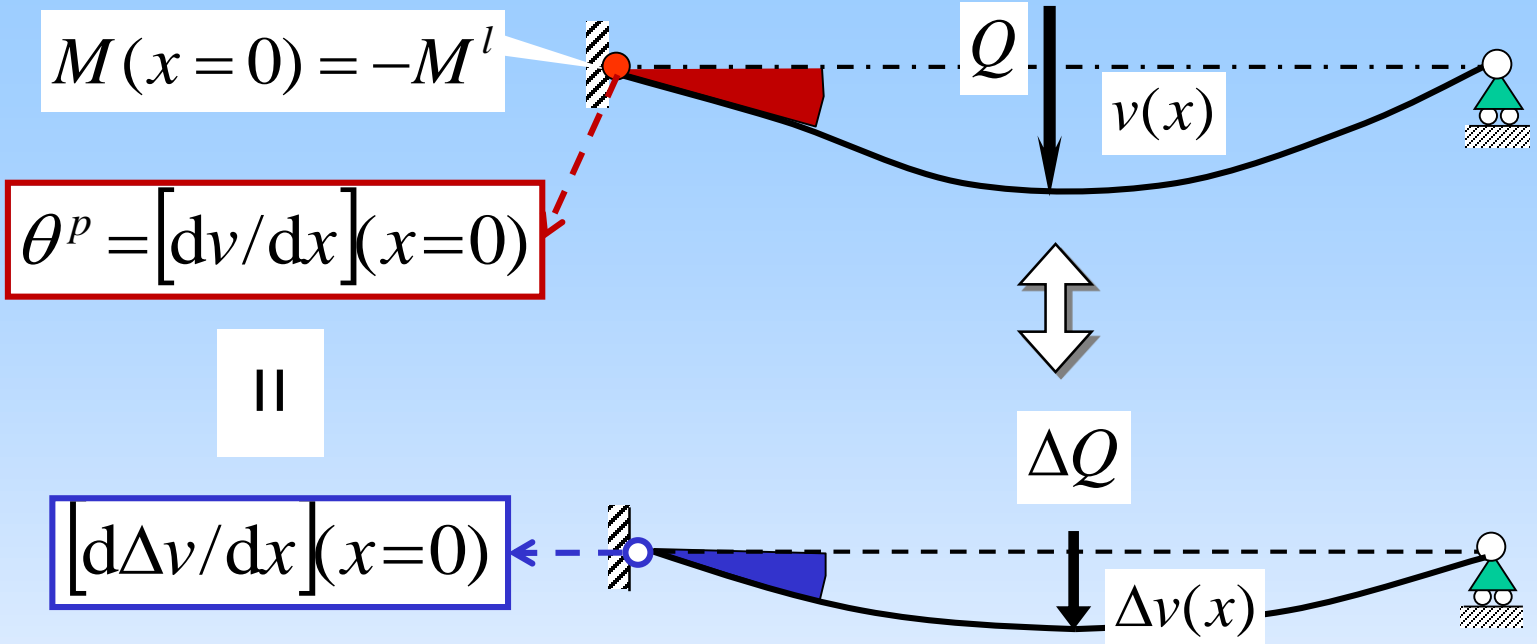


$$W^*(\Delta Q) = \int_0^{2l} \frac{(\Delta M)^2}{2EI} dx$$

Castigliano

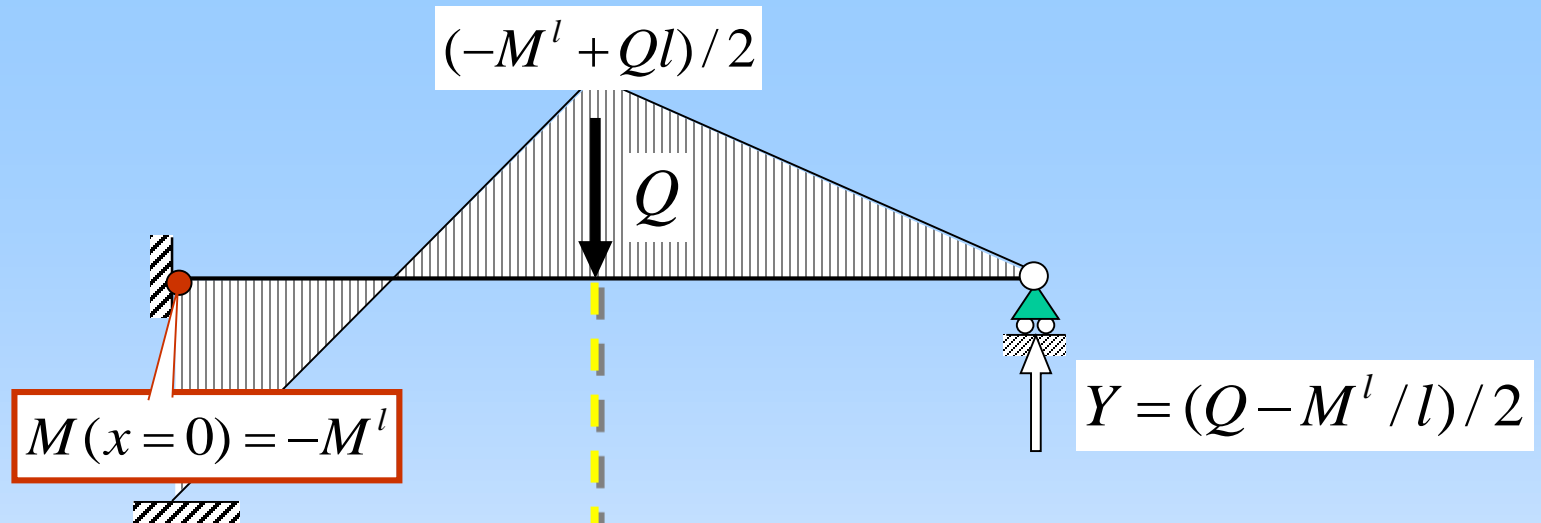
$$\Delta q = \frac{dW^*(\Delta Q)}{d(\Delta Q)} = \frac{l^3 \Delta Q}{6EI}$$





$$\theta^p = -\frac{\Delta Q l^2}{EI \cdot 4} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^p = -\frac{\dot{Q} l^2}{EI \cdot 4} \leq 0$$

Règle d'écoulement plastique vérifiée



solution valable tant que...

$$M(x=l) = (-M^l + Ql)/2 \leq M^l$$

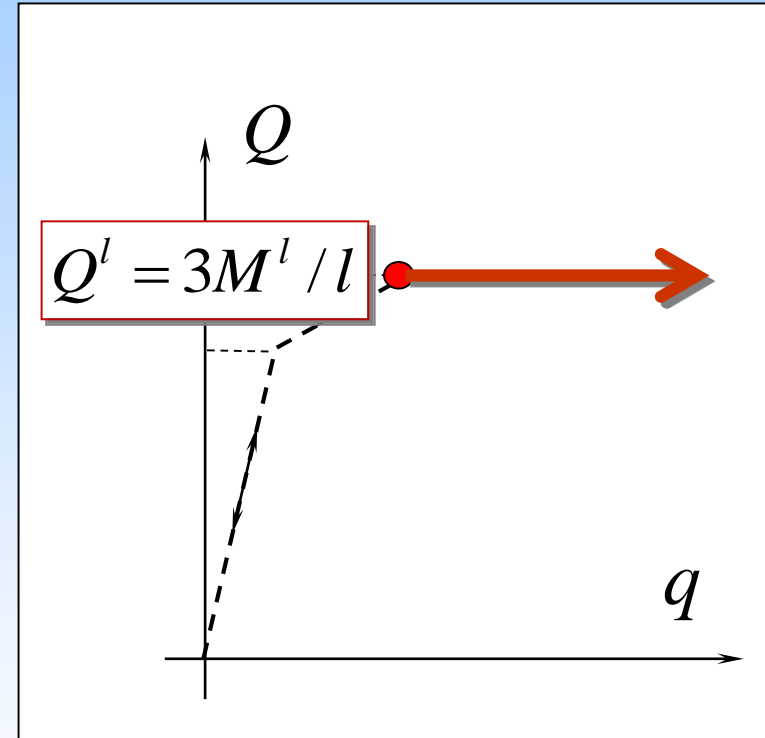
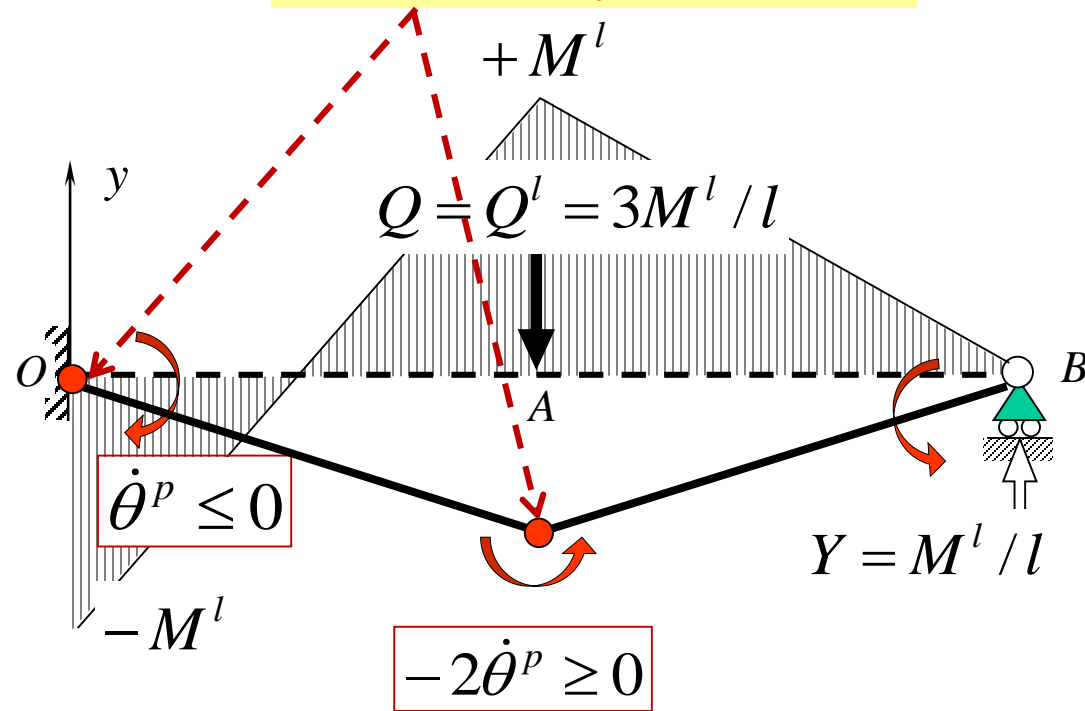


$$Q \leq Q^l = 3 \frac{M^l}{l}$$

**Charge
limite**

Mécanisme de *ruine plastique*

2 rotules plastiques



Décharge ...élastique

$$Q = Q^l + \Delta Q, \quad \Delta Q = -Q^l$$

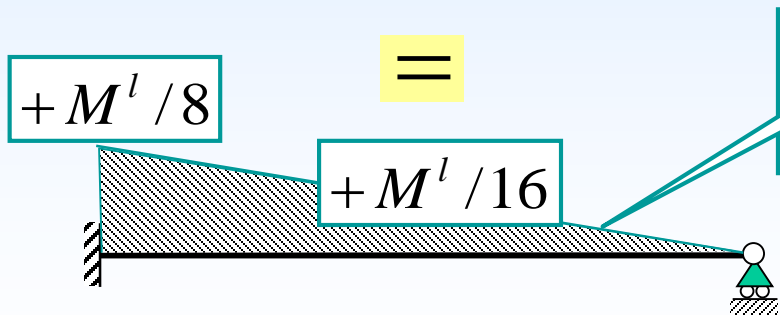
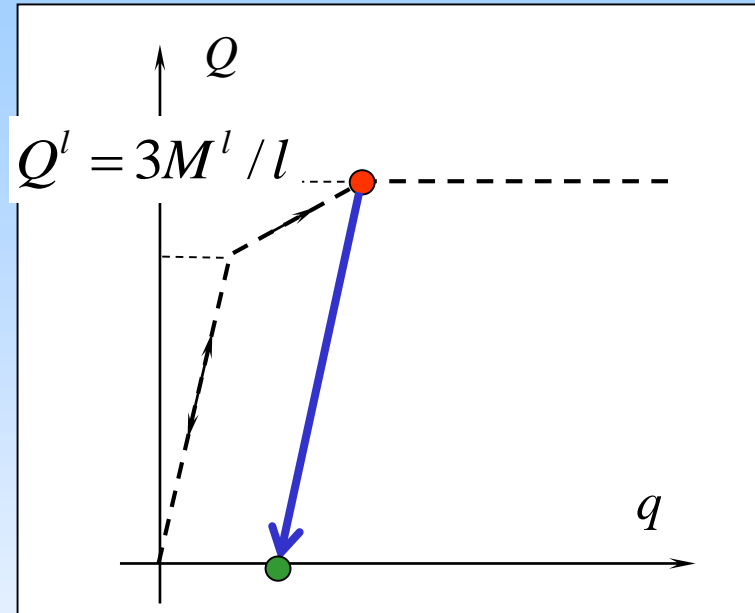
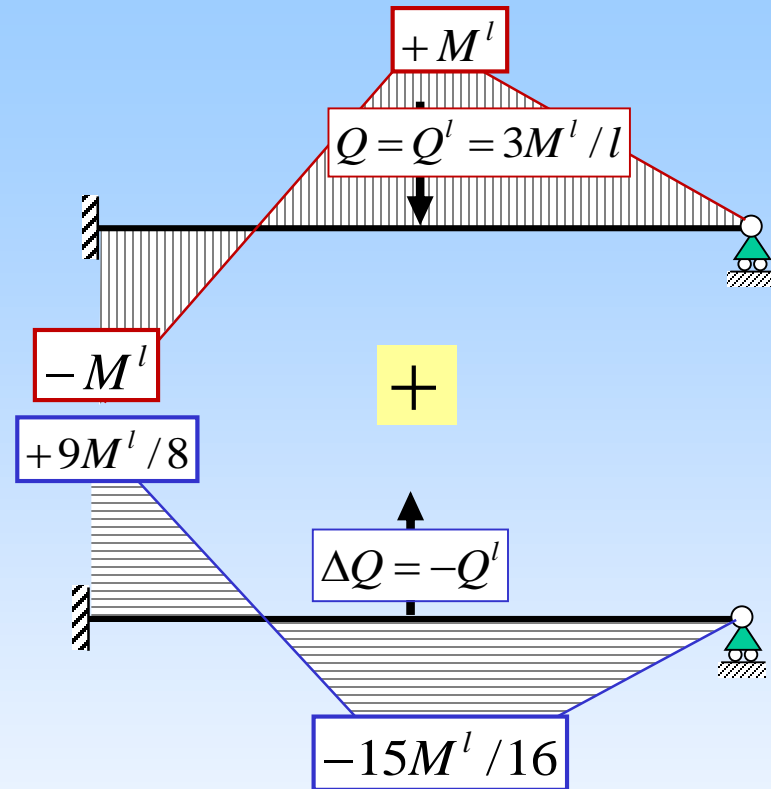
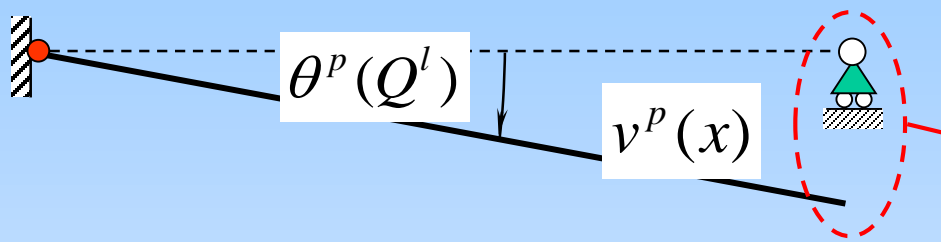


Diagramme de moments *résiduels* (autoéquilibrés)

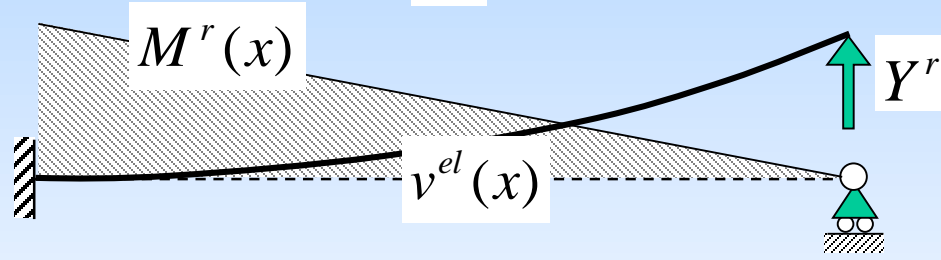
Interprétation



$$\chi^P(x) = \theta^P(Q^l) \delta_0(x)$$

Géométriquement *incompatible*

+

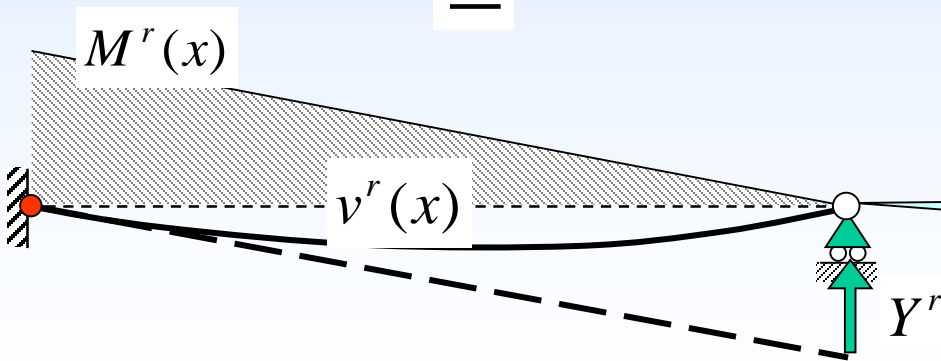


+

$$M^r(x) / EI$$

=

=



$$\chi^r(x)$$

Géométriquement *compatible*