

## CHAPITRE III

### *ELASTOPLASTICITE DES SYSTEMES DE BARRES EN FLEXION*



# PLAN

## ***Chapitre III. Elastoplasticité des systèmes de barres en flexion***

### **1. Calcul élastoplastique d'une poutre console sous charge concentrée**

- 1.1. Phase de comportement élastique.
- 1.2. Phase élastoplastique ; notion de rotule plastique
- 1.3. Charge limite et mécanisme de ruine plastique
- 1.4. Phase de décharge et état résiduel

### **2. Méthode de résolution énergétique**

- 2.1. Principe de minimum en contrainte
- 2.2. Retour sur l'exemple de la poutre console

\*\*\*\*\*



## 1. Calcul élastoplastique d'une poutre console sous charge concentrée

Une poutre console de longueur  $2l$ , encastrée à son extrémité  $O$  et en appui simple au point  $B$  est soumise à une charge verticale concentrée d'intensité  $Q$ , appliquée en son milieu  $A$ , que l'on fait croître progressivement à partir d'une valeur initiale nulle. La figure 1 montre la forme générale, *affine par morceaux*, d'un diagramme de moments fléchissants statiquement admissible pour le problème. Il dépend de la réaction d'appui  $Y$  au point  $B$ , que l'on peut prendre comme *inconnue hyperstatique* du problème (structure hyperstatique d'ordre 1). Il vient alors immédiatement

$$M(x) = \begin{cases} Y(2l-x) - Q(l-x) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ Y(2l-x) & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases} \quad (3.1)$$

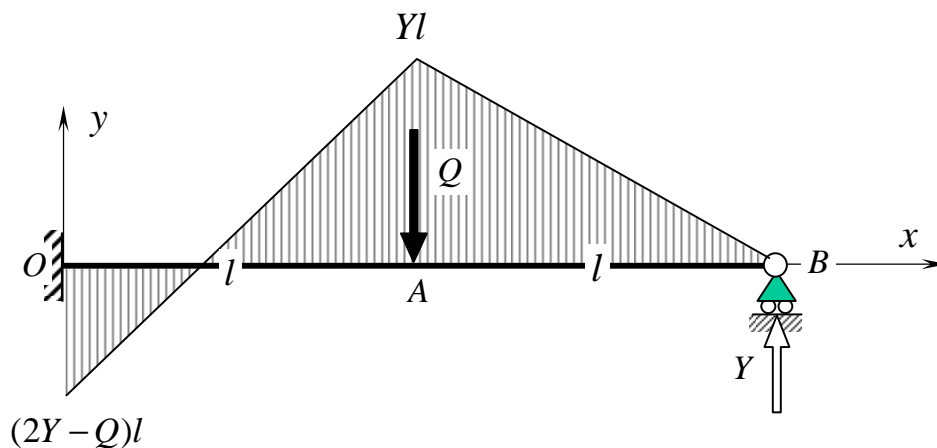


Figure 1 : Diagrammes de moments fléchissants statiquement admissibles pour une poutre console sous charge concentrée

Dans le cadre de la modélisation « poutre », la loi de comportement est du type *moment-courbure*. Partant de la résolution du problème d'évolution élastoplastique pour un élément de poutre, effectuée au chapitre II-section 4, on adoptera une schématisation simplifiée, de type *élastique parfaitement plastique*, du diagramme de la figure 11 de ce chapitre (figure 2), dans laquelle le comportement de l'élément de poutre demeure élastique tant que le moment de flexion est inférieur à la valeur limite  $M^l$ . Le tableau ci-après récapitule les différents cas rencontrés selon les valeurs de  $M$  et  $\dot{M}$ , dans l'hypothèse où la valeur du moment limite est la même en flexion négative que positive. Par ailleurs, du fait que dans le cas de la charge plastique  $\dot{M} = 0$ , le taux de courbure est purement plastique, avec le même signe que celui du moment de flexion.

$-M^l < M < +M^l$	$\forall \dot{M}$	$\dot{\chi} = \dot{\chi}^e = \dot{M} / EI_z$
$M = +M^l$	$\dot{M} < 0$ $\dot{M} = 0$	$\dot{\chi} = \dot{\chi}^e = \dot{M} / EI_z$ $\dot{\chi} = \underbrace{\dot{M} / EI_z}_{=0} + \dot{\chi}^p \geq 0$
$M = -M^l$	$\dot{M} > 0$ $\dot{M} = 0$	$\dot{\chi} = \dot{\chi}^e = \dot{M} / EI_z$ $\dot{\chi} = \underbrace{\dot{M} / EI_z}_{=0} + \dot{\chi}^p \leq 0$

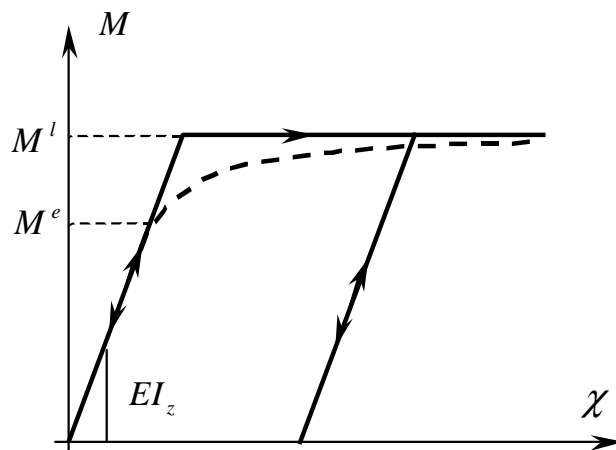


Figure 2 : Schématisation simplifiée de la loi de comportement «moment-courbure»

### 1.1. Phase de comportement élastique

Partant d'un *état initial* ( $Q = 0$ ) *naturel* (diagramme de moments nul) on augmente progressivement la valeur du chargement. Le comportement de la poutre est alors en tout point élastique, soit

$$x \in [0, 2l] \quad M(x) = EI_z \chi(x) = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}(x) \quad (3.2)$$

où  $v(x)$  désigne la flèche au point  $x$ , comptée positivement dans le sens de l'axe  $Oy$ , le moment fléchissant  $M(x)$  étant positif selon le sens de l'axe  $Oz$ . La procédure de résolution de ce problème est classique. Elle consiste à intégrer à deux reprises l'équation (3.2) où l'on tient compte de (3.1), et à exprimer les différentes conditions aux limites

- encastrement en  $O$  :  $v(x=0) = \frac{dv}{dx}(x=0) = 0$  (3.3-a)

- appui simple en  $B$  :  $v(x=2l) = 0$  (3-b)

ainsi que la condition de *continuité de la flèche et de la rotation* au point  $A$

$$v(x=l^+) = v(x=l^-) , \quad \frac{dv}{dx}(x=l^+) = \frac{dv}{dx}(x=l^-) \quad (3.4)$$

Le *diagramme de moments fléchissants* solution est alors (figure 3)

$$Y = \frac{5Q}{16} \Rightarrow M(x) = \begin{cases} \frac{Q}{8} \left( \frac{11}{2}x - 3l \right) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ \frac{5Q}{16} (2l - x) & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases} \quad (3.5)$$

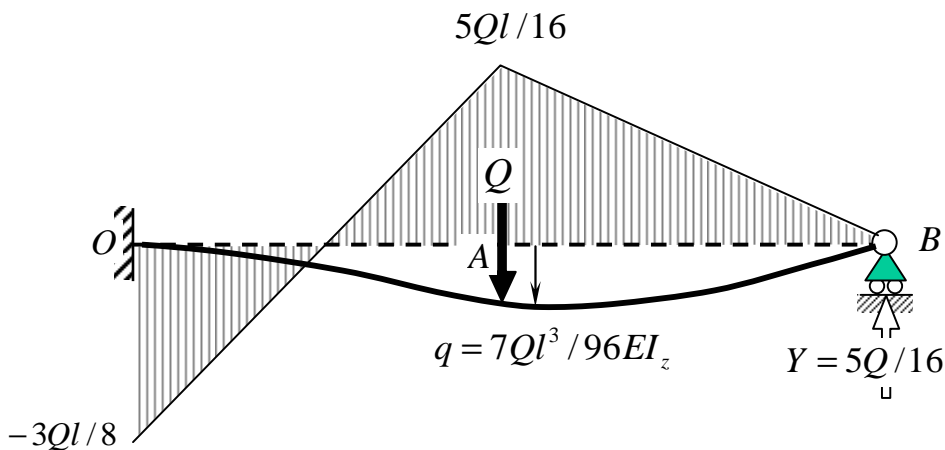


Figure 3 : Diagramme de moments fléchissants et déformée de la structure dans la phase de comportement élastique

tandis que la **flèche** a pour expression

$$v(x) = \begin{cases} \frac{Qx^2}{96EI_z}(11x-18l) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ \frac{Qx^2}{96EI_z}(2l-x)(5x^2 - 20lx + 8l^2) & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases} \quad (3.6)$$

d'où en particulier le **déplacement**  $q$  du point d'application de la charge (compté positivement dans le sens des  $y$  négatifs)

$$q = -v(x=l) = \frac{7Ql^3}{96EI_z} \quad (3.7)$$

Cette solution reste valable tant que  $|M(x)| \leq M^l \quad \forall x \in [0, 2l]$ , c'est-à-dire compte tenu de (3.5), tant que le moment d'encastrement en  $O$  est supérieur à  $-M^l$ . La **limite d'élasticité** qui correspond à la plastification à l'encastrement est donc égale à

$$Q^e = \frac{8M^l}{3l} \quad (3.8)$$

le déplacement correspondant étant

$$q^e = q(Q = Q^e) = \frac{7M^l l^2}{36EI_z} \quad (3.9)$$

### 1.2. Phase élastoplastique ; notion de rotule plastique

Le chargement étant poursuivi au-delà de la limite d'élasticité, on peut tout d'abord penser à faire l'hypothèse d'une zone plastique se propageant à partir de l'encastrement, c'est-à-dire que le moment limite en flexion négative serait atteint sur un intervalle de la forme  $[0, e]$

$$M(x) = -M^l \quad 0 \leq x \leq e \quad (3.10)$$

Une telle hypothèse ne peut convenir, car le diagramme de moments de la forme (3.10) qu'elle implique *n'est pas statiquement admissible*, c'est-à-dire de la forme (3.1).

On propose alors une solution alternative consistant à admettre que seule la section située à l'encastrement  $O$  reste *plastifiée*, le reste de la structure demeurant *élastique*. Compte tenu des conditions d'équilibre, le diagramme de moments est nécessairement de la forme (figure 4)



$$M(x) = \begin{cases} -M^l + (Q + M^l/l)x/2 \\ (Q - M^l/l)(2l - x)/2 \end{cases} \quad (3.11)$$

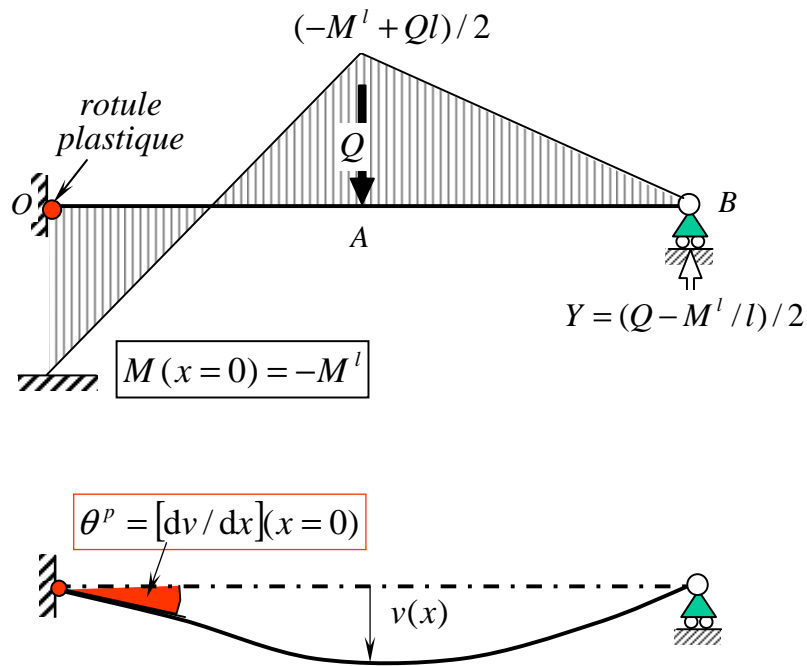


Figure 4 : Diagramme des moments et déformée de la structure en phase élastoplastique

La déformation (courbure) plastique, localisée au seul encastrement, est nécessairement de la forme

$$\chi^p(x) = \theta^p \delta_0(x) \quad (3.12)$$

où  $\delta_0$  désigne la distribution de Dirac au point  $x=0$ , tandis que  $\theta^p$  représente la *discontinuité de rotation purement plastique* (et donc totale puisqu'il n'y pas de discontinuité de rotation élastique), en ce même point (figure 4)

$$\theta^p = \left[ \frac{dv}{dx} \right] (x=0) = \frac{dv}{dx} (x=0^+) - \frac{dv}{dx} (x=0^-) \quad (3.13)$$

Il en résulte que le champ de *déformation de courbure totale* s'écrit

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \chi(x) = \chi^e(x) + \chi^p(x) = \frac{M(x)}{EI_z} + \theta^p \delta_0(x) \quad (3.14)$$

et donc le champ de rotation par intégration de (3.14), compte tenu de (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x) &= \theta^p H(x) \\ &+ \frac{1}{EI_z} \begin{cases} -M^l x + (Q + M^l/l)x^2/4 & 0 \leq x \leq l \\ -M^l l + (Q + M^l/l)l^2/4 - (Q - M^l/l)(x-l)(x-3l)/4 & l \leq x \leq 2l \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $H(x)$  désigne la fonction d'Heaviside ( $H(x < 0) = 0$ ,  $H(x > 0) = 1$ ). La déformée de la structure (figure 4) est obtenue par intégration de (15) en tenant compte de la condition  $v(x=0) = 0$

$$\begin{aligned} v(x) &= \theta^p x + \\ &+ \frac{1}{EI_z} \begin{cases} -M^l x^2/2 + (Q + M^l/l)x^3/12 & 0 \leq x \leq l \\ -M^l l^2/2 + (Q + M^l/l)l^3/12 - M^l l(x-l) + (Q + M^l/l)l^2(x-l)/4 \\ - (Q - M^l/l)(x-l)^2(x-4l)/12 & l \leq x \leq 2l \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

En exprimant alors que la *flèche est nulle au point B* ( $x = 2l$ ), il vient

$$v(x=2l) = \theta^p 2l + \frac{1}{EI_z} (4M^l l^2/3 - Ql^3/3) = 0 \quad (3.17)$$

d'où la valeur de la *rotation plastique* à l'encastrement

$$\theta^p = \frac{l^2}{4EI_z} (8M^l/3l - Q) = \frac{l^2}{4EI_z} (Q^e - Q) \quad (3.18)$$

Cette dernière relation permet de montrer que la règle d'écoulement plastique est bien vérifiée au niveau de la rotule plastique (*rotule plastique «négative»*)

$$M = -M^l, \dot{M} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^p = -\frac{l^2}{4EI_z} \dot{Q} \leq 0 \quad (3.19)$$

Dans cette phase de comportement élastoplastique, l'expression du déplacement du point d'application de la charge est

$$q = -v(x=l) = \frac{l^2}{EI_z} \left( \frac{Ql}{6} - \frac{M^l}{4} \right) = \frac{l^3}{6EI_z} (Q - Q^e) + q^e \quad (3.20)$$

qui correspond au second segment de droite de la courbe charge-déplacement représentée sur la figure 5.

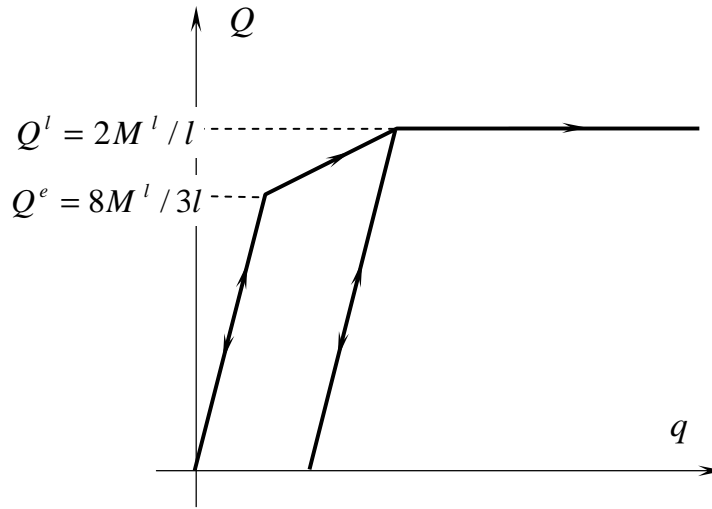


Figure 5 : Courbe charge-déplacement

### 1.3. Charge limite et mécanisme de ruine plastique

La solution mise en évidence dans la phase de comportement élastoplastique demeure valable tant que le point A où le moment est extrémal reste élastique, soit

$$(-M^l + Ql)/2 \leq M^l \Rightarrow Q \leq Q^l = 3 \frac{M^l}{l} \quad (3.21)$$

Cette valeur du chargement ne peut être dépassée. En effet, un diagramme de moments fléchissants statiquement admissible avec une valeur  $Q$  du chargement est de la forme (3.1). Il respecte le critère de plasticité en tout point de la structure si et seulement si les moments extrêmes aux points  $O$  et  $A$  satisfont ce critère

$$|Yl| \leq M^l \text{ et } |2Yl - Ql| \leq M^l \quad (3.22)$$

Il est alors facile de voir que les deux inégalités précédentes ne peuvent être simultanément satisfaites si  $Q > Q^l = 3M^l/l$ . En d'autres termes il n'est pas possible d'équilibrer une valeur du chargement strictement supérieure à  $Q^l$  par une distribution de moments fléchissants qui respecte le critère de plasticité. Il s'agit encore une fois d'un raisonnement de *calcul à la rupture* fondé sur l'examen de la compatibilité entre les conditions *d'équilibre* de la poutre, se traduisant par l'expression (1) du diagramme des moments, et le respect d'un critère de *résistance*.

$Q = Q^l$  constitue la *charge limite* de la structure. Maintenant le chargement à cette valeur

$$Q = Q^l = 3 \frac{M^l}{l}, \quad \dot{Q} = 0 \quad (3.23)$$

la distribution correspondante des moments fléchissant est

$$M(x) = \begin{cases} M^l(2x/l - 1) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ M^l(2 - x/l) & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases} \quad (3.24)$$

Elle correspond à la plastification en flexion négative de la section  $O$  (encastrement) et en flexion positive de la section  $A$  située au point d'application de la charge (figure 6).

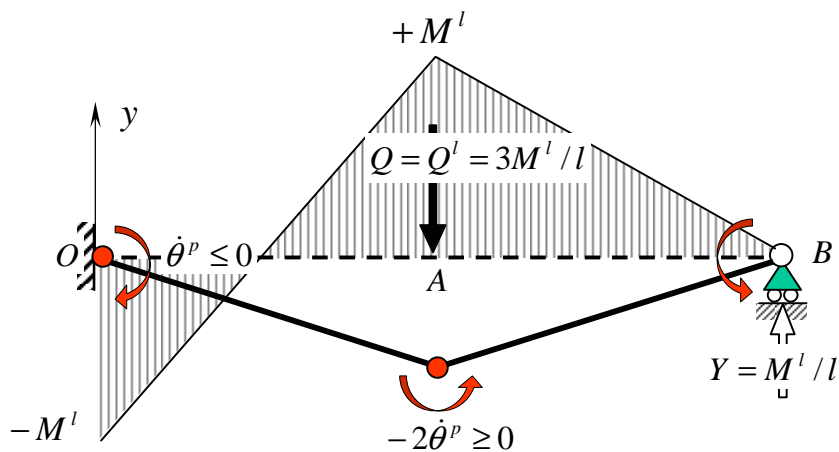


Figure 6 : Diagramme des moments associé à la charge limite et mécanisme de ruine plastique

Puisque le diagramme des moments reste constant ( $\dot{M} = 0$ ) les taux de déformation de courbure sont purement plastiques, donc nulles en dehors des points  $O$  et  $A$  où le critère de plasticité est atteint. Ces sections sont le siège de *rotules plastiques*, *négative* en  $O$  et *positive* en  $A$  compte tenu de la loi de comportement. La compatibilité géométrique implique que les

discontinuités de rotation plastiques en ces points sont reliées entre elles :  $\dot{\theta}^p \leq 0$  en  $O$  et  $-2\dot{\theta}^p \geq 0$  en  $A$ . Le **mécanisme de ruine plastique** correspondant est représenté sur la figure 6 : il s'agit d'un «*mécanisme de poutre*» dans lequel les deux moitiés de la structure sont animés de mouvements de rotation de vitesses respectives  $\dot{\theta}^p$  et  $-\dot{\theta}^p$ . Cette phase d'écoulement plastique libre est associée au palier horizontal de la courbe charge-déplacement de la figure 5.

#### 1.4. Phase de décharge et état résiduel

Partant de l'état où la section  $A$  vient juste de plastifier, on effectue une décharge que l'on suppose *élastique*. Le **diagramme des moments résiduels** (figure 7-c) qui correspond à la *décharge totale* de la structure, est alors obtenu en superposant au diagramme associé à la charge limite (figure 7-a) celui correspondant à un calcul purement élastique où  $Q = -Q^l$  (figure 7-b).

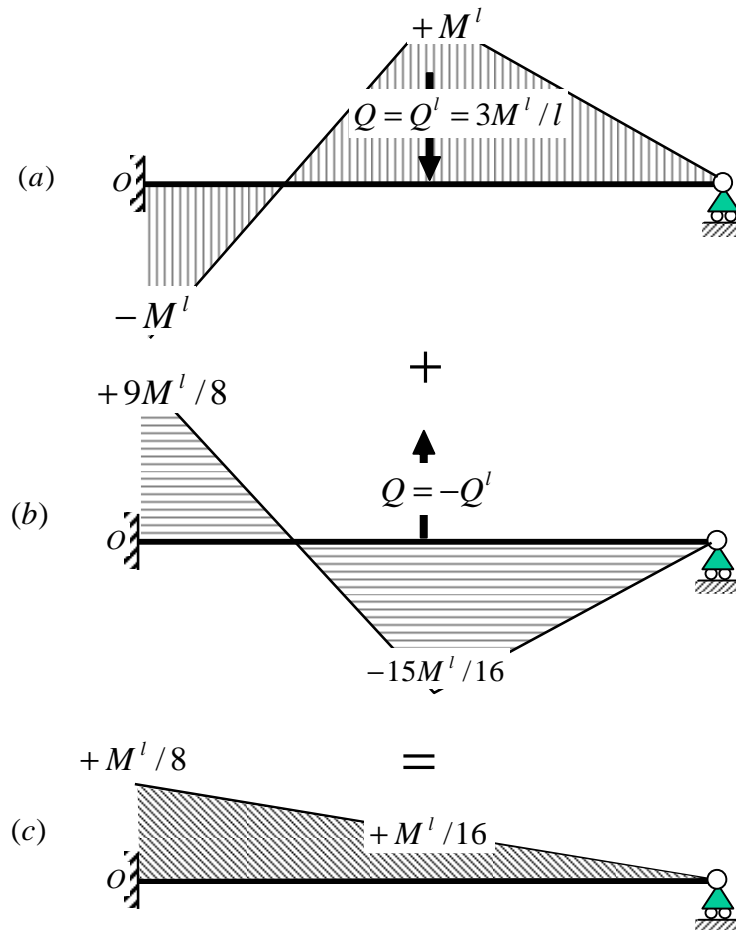


Figure 7: Décharge élastique et diagramme de moments résiduels

Il vient alors compte tenu des expressions (3.5) des distributions de moments en phase élastique, écrites pour  $Q = -3M^l / l$ , et de (3.24)

$$M^r(x) = \begin{cases} M^l(2x/l - 1) + \frac{-3M^l}{8l} \left( \frac{11}{2}x - 3l \right) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ M^l(2 - x/l) + \frac{-15M^l}{16l} (2l - x) & \text{si } l \leq x \leq 2l \end{cases} = \frac{M^l}{8} (1 - x/2l) \quad (3.25)$$

Une telle distribution de moments résiduels est *autoéquilibrée*, c'est-à-dire de la forme (3.1) avec  $Q = 0$  et  $Y^r = M^l / 16l$ . On observe encore une fois que ce sont ces efforts résiduels qui, par le biais des déformations élastiques qu'ils engendrent, rétablissent la compatibilité géométrique des déformations plastiques acquises par la structure dans sa phase de chargement. Cette observation est illustrée sur la figure 8. Le champ des déformations plastiques s'écrit en effet

$$\chi^p(x) = \theta^p(Q = Q^l) \delta_o(x) \quad (3.26)$$

avec d'après (3.18)

$$\theta^p(Q = Q^l) = -\frac{M^l l}{12EI_z} \quad (3.27)$$

de sorte qu'en intégrant deux fois par rapport à  $x$  et en tenant compte des conditions aux limites à l'encastrement  $v(x=0) = dv/dx(x=0^-) = 0$ , l'expression de la flèche, notée  $v^p$ , est

$$v^p(x) = \theta^p(Q^l)x \quad (3.28)$$

On voit donc que le champ (3.26) est bien intégrable, mais que la distribution de flèche dont il dérive *n'est pas géométriquement compatible*, car ne respectant pas la condition d'appui en  $x = 2l$  (figure 8-a). En revanche, si l'on superpose à  $v^p$  la flèche élastique associée à la distribution de moments résiduels (3.25) égale à (figure 8-b)

$$v^{el}(x) = \frac{Y^r}{EI_z} (lx^2 - x^3/6) = \frac{M^l}{16EI_z} (lx^2 - x^3/6) \quad (3.29)$$

la distribution de flèche résiduelle (figure 8c) s'écrit

$$v^r(x) = v^p(x) + v^{el}(x) = -\frac{M^l l}{12EI_z} x + \frac{M^l}{16EI_z} (lx^2 - x^3/6) = -\frac{M^l}{96EI_z} \frac{x}{l} (2l - x) \quad (3.30)$$

On voit donc qu'elle est bien *géométriquement compatible* puisque

$$v^r(x=0) = v^r(x=2l) = 0 \quad (3.31)$$

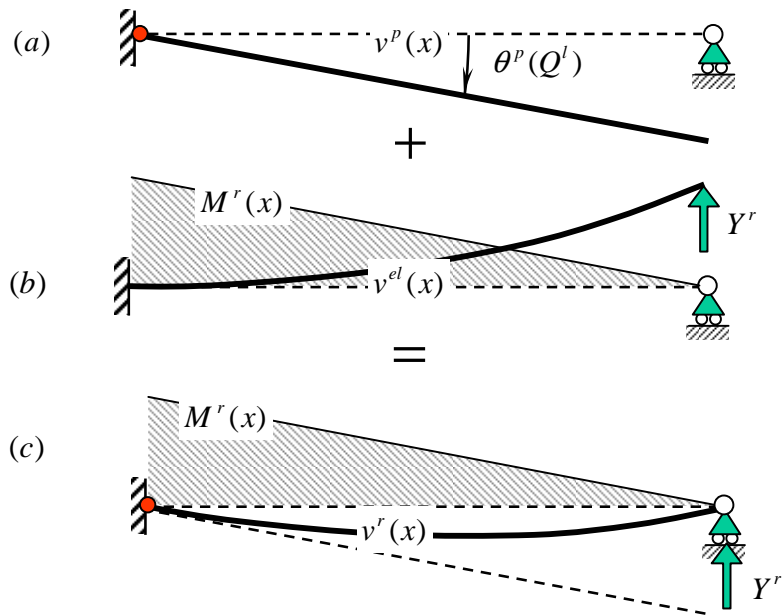


Figure 8: *Interprétation des moments résiduels comme rétablissant la compatibilité géométrique des déformations plastiques*

## 2. Méthode de résolution énergétique

### 2.1. Principe de minimum en contrainte

On considère un système de barres en flexion, noté  $L$ , tel que les *données en déplacements soient nulles* (appuis fixes, encastremets), les données en efforts dépendant d'un paramètre de chargement noté  $Q$ . La structure étant supposée *une fois hyperstatique*, on désigne par  $Y$  l'inconnue hyperstatique. Les barres ont un comportement élastoplastique de sorte que, l'état initial du système étant *naturel*, la déformation de courbure en un point quelconque repéré par son abscisse  $s$ , s'écrit

$$\chi(s) = \chi^p(s) + \frac{M(s)}{(EI)(s)} \quad (3.32)$$

où  $\chi^p$  est la courbure plastique,  $M$  le moment fléchissant et  $EI$  le module de rigidité à la flexion.  $(Q', Y')$  désignant un couple de valeurs *quelconques* du paramètre de chargement et de l'inconnue hyperstatique, on introduit alors la forme quadratique définie comme suit

$$F(Q', Y') = \int_L \overbrace{\left[ \frac{M(Q', Y')^2}{2EI} + \chi^p M(Q', Y') \right]}^{G(Q', Y')} ds - Q'q \quad (3.33)$$

où  $q$  représente la valeur du paramètre cinématique associé au paramètre de chargement, pour la *solution du problème*  $(Q, Y(Q))$ .  $M(Q', Y')$  désigne la distribution de moments fléchissant correspondant au couple de valeurs  $(Q', Y')$ . Nous allons établir le principe de minimum suivant

$$q \text{ et } \chi^p \text{ donnés } F(Q, Y(Q)) = \underset{(X', Q')}{\text{Min}} F(Q', Y') \quad (3.34)$$

Cette propriété est aisément démontrable. Il suffit de calculer la différence

$$F(Q', Y') - F(Q, Y(Q)) = \int_L \left[ \frac{M^2(Q', Y') - M^2(Q, Y(Q))}{2EI} + \chi^p (M(Q', Y') - M(Q, Y(Q))) \right] ds - (Q' - Q)q \quad (3.35)$$

soit puisque

$$\frac{M^2(Q', Y') - M^2(Q, Y(Q))}{2EI} \geq \frac{M(Q, Y(Q))}{EI} [M^2(Q', Y') - M^2(Q, Y(Q))] \quad (3.36)$$



et en tenant compte de la loi de comportement (3.32)

$$\begin{aligned}
& F(Q', Y') - F(Q, Y(Q)) \geq \\
& \int_L \left[ \left( \frac{M(Q, Y(Q))}{EI} + \chi^p \right) (M(Q', Y') - M(Q, Y(Q))) \right] ds - (Q' - Q)q \quad (3.37) \\
& = \int_L [\chi (M(Q', Y') - M(Q, Y(Q)))] ds - (Q' - Q)q
\end{aligned}$$

Or  $\chi$  étant *cinématiquement admissible* avec  $q$  (car solution du problème), et la distribution de moments fléchissants  $M(Q', Y') - M(Q, Y(Q))$  étant *statiquement admissible* avec  $Q' - Q$ , l'application du *théorème des travaux virtuels* conduit à la nullité de la dernière intégrale. D'où le principe de minimum énoncé, qui se traduit par l'annulation des dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial Y'} [Q, Y(Q)] = \frac{\partial G}{\partial Y'} [Q, Y(Q)] = 0 & \text{(a)} \\ \frac{\partial F}{\partial Q'} [Q, Y(Q)] = \frac{\partial G}{\partial Y'} [Q, Y(Q)] - q = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (3.38)$$

Dans le cas d'une évolution *purement élastique*, pour laquelle  $\chi^p = 0$ , la fonction  $G$  n'est autre que *l'énergie complémentaire*, et l'équation (37-a) le *principe du minimum en contrainte* (ou théorème du potentiel minimum), tandis que la seconde équation constitue le *théorème de Castigliano* relatif aux structures élastiques. Dans le cas général, l'équation (37-a) est désignée sous l'appellation de *théorème de Colonnetti*.

## 2.2. Retour sur l'exemple de la poutre console

Dans l'exemple de la poutre console traité au début de ce chapitre, l'ensemble des distributions de moments fléchissants *s.a.* est de la forme (3.1), c'est-à-dire paramétré par l'inconnue hyperstatique  $Y$ . La fonctionnelle énergétique s'écrit alors

$$G(Q'; Y') = \frac{l^3}{6EI_z} (8Y'^2 + Q'^2 - 5Y'Q') + Y' \int_0^{2l} \chi^p(x) (2l - x) dx - Q' \int_0^l \chi^p(x) (l - x) dx \quad (3.39)$$

Le principe du minimum en contrainte établi au paragraphe précédent est alors appliqué aux différentes phases d'évolution du système.

· **Phase élastique.** Dans cette phase  $\chi^p(x)=0$ , et les équations (3.38) donnent immédiatement compte tenu de (3.39)

$$\frac{\partial G}{\partial Y'}(Q, Y(Q)) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(Q) = \frac{5Q}{16} \quad (3.40)$$

ainsi que (théorème de Castigliano)

$$\frac{\partial G}{\partial Y'}(Q, Y(Q)) = q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{l^3}{6EI_z}(2Q - 5Y(Q)) = \frac{7Ql^3}{96EI_z} \quad (3.41)$$

· **Phase élastoplastique.** Le champ de déformation plastique, correspondant à la formation d'une *rotule plastique à l'encastrement*, est de la forme

$$\chi^p(x) = \theta^p \delta_0(x) \quad (3.42)$$

d'où

$$G(Q'; Y') = \frac{l^3}{6EI_z}(8Y'^2 + Q'^2 - 5Y'Q') + (2Y' - Q')l\theta^p \quad (3.43)$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial Y'}(Q, Y(Q)) &= \frac{l^3}{6EI_z}(16Y(Q) - 5Q) + 2l\theta^p = 0 \quad (a) \\ q = \frac{\partial G}{\partial Q'}(Q, Y(Q)) &= \frac{l^3}{6EI_z}(2Q - 5Y(Q)) - l\theta^p \quad (b) \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'équation (3.44-a) combinée avec le fait que  $M(x=0) = l(2Y(Q) - Q) = -M^l$  (hypothèse de plastification en flexion négative de l'encastrement) permet alors de retrouver l'expression (3.18) de la rotation plastique

$$\theta^p = \frac{l^2}{4EI_z}(8M^l / 3l - Q) \quad (3.45)$$

Tenant compte de ce résultat, l'équation (3.44-b) fournit quant à elle l'équation de la courbe donnant le déplacement en fonction de la charge en phase élastoplastique

$$q = \frac{\partial G}{\partial Q'}(Q, Y(Q)) = \frac{l^3}{6EI_z}(2Q - 5Y(Q)) - l\theta^p = \frac{l^2}{EI_z}(Ql/6 - M^l/4) \quad (3.46)$$

• **Phase d'écoulement plastique libre.** Le champ de déformation plastique correspond à la formation de deux rotules plastiques localisées en  $O$  et  $A$ . Désignant par  $\theta^p$  et  $\varphi^p$  les discontinuités de rotation plastiques en ces points, la fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$G(Q'; Y') = \frac{l^3}{6EI_z}(8Y'^2 + Q'^2 - 5Y'Q') + (2Y' - Q')l\theta^p + Y'l\varphi^p \quad (3.47)$$

d'où par application de (3.38)

$$\frac{\partial G}{\partial Y'}(Q, Y(Q)) = \frac{l^3}{6EI_z}(16Y(Q) - 5Q) + 2l\theta^p + l\varphi^p = 0 \quad (a) \quad (3.48)$$

$$q = \frac{\partial G}{\partial Q'}(Q, Y(Q)) = \frac{l^3}{6EI_z}(2Q - 5Y(Q)) - l\theta^p \quad (b)$$

La première équation donne puisque  $Q = Q^l = 3M^l/l$  et  $Y(Q) = M^l/l$

$$2\theta^p + \varphi^p = -\frac{M^l l}{6EI_z} \Rightarrow \dot{\varphi}^p = -2\dot{\theta}^p \quad (3.49)$$

qui représente l'équation de *compatibilité géométrique*, reliant les rotations plastiques. La seconde équation conduit à l'expression du déplacement de la charge en phase d'écoulement plastique, en fonction de de la discontinuité de rotation plastique  $\theta^p \leq 0$  qui demeure arbitraire

$$q = -l\theta^p + \frac{M^l l^2}{6EI_z} \quad (3.50)$$

\*\*\*\*\*