

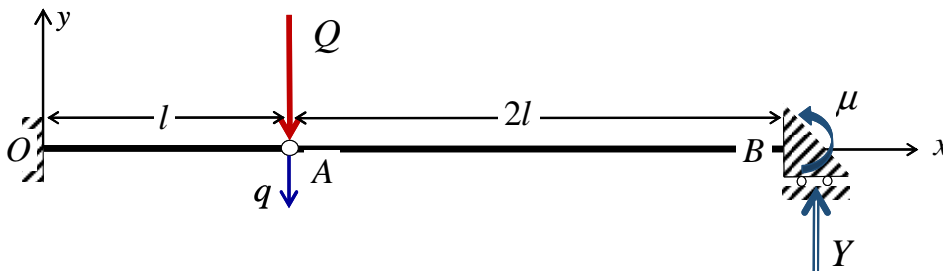
Cours de Plasticité : contrôle des connaissances

Durée : 2h30

Tous documents et notes de cours autorisés.
Le sujet comporte deux problèmes indépendants

Problème n°1 (7 points)

Evolution élastoplastique d'une poutre en flexion



Une poutre droite est constituée de deux tronçons OA et AB de longueurs respectives l et $2l$ reliées entre elles au point A par une articulation *sans frottement* (moment nul) comme indiqué sur la figure. L'appui O est un encastrement fixe, tandis l'appui B est un encastrement mobile. On désigne par Y la réaction verticale de l'appui B et par μ le moment d'encastrement en ce même point. Cette structure est soumise à l'action d'une charge concentrée verticale d'intensité Q comptée positivement vers le bas appliquée à l'articulation A .

1. Equilibre statique.

Justifier par un raisonnement d'équilibre statique la relation $\mu = -2lY$. Donner l'expression du moment fléchissant M en tout point x de la structure en fonction de Q , Y , l et x ($0 \leq x \leq 3l$) et en déduire le *degré d'hyperstaticité* du problème. Représenter sur la figure les diagrammes de moments fléchissants statiquement admissibles.

2. Comportement élastique

La structure est *élastique* homogène de raideur en flexion égale à EI en tout point. Son état initial étant naturel, calculer l'énergie élastique de flexion $W^*(Q, Y)$ et en déduire par

application du *théorème du potentiel minimum* que $Y=Q/9$. Déterminer le diagramme des moments fléchissants en phase élastique. Donner l'expression du déplacement q du point A en fonction de Q , l et EI et représenter l'allure de la déformée de la structure.

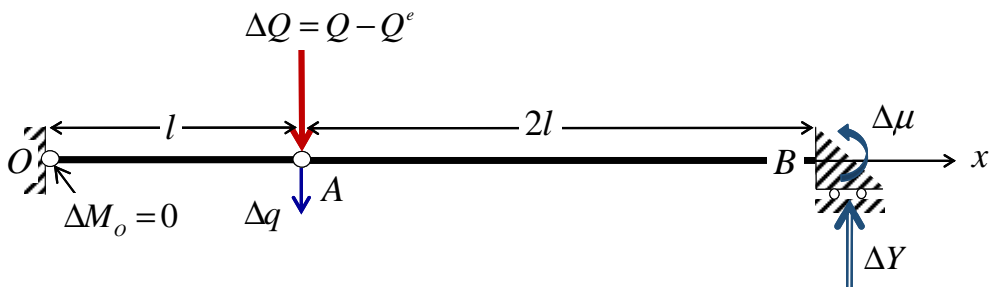
3. Comportement élastoplastique

3.1. Limite d'élasticité.

La poutre obéit à un comportement élastique parfaitement plastique, de moment limite en flexion (positive ou négative) égal à m . Indiquer quelle est la section qui plastifie en premier et en déduire la valeur de la limite d'élasticité Q^e ainsi que la valeur correspondante q^e du déplacement du point A et le diagramme des moments fléchissants associé.

3.2 Phase élastoplastique.

Posant $Q = Q^e + \Delta Q$ avec $\Delta Q \geq 0$, on se propose de résoudre le *problème isostatique associé* représenté sur la figure ci-dessous, dans lequel l'encastrement en O a été remplacé par une *articulation sans frottement*.



Calculer ΔY et $\Delta \mu$ en fonction de ΔQ , tracer le diagramme des moments fléchissants ΔM puis donner l'expression de l'énergie élastique de flexion $W^*(\Delta Q)$ associée à ce diagramme. En déduire la relation entre $\Delta q = q - q^e$ et ΔQ en phase élastoplastique. La *règle d'écoulement plastique* est-elle bien vérifiée à l'encastrement O ?

4. Charge limite et courbe charge-déplacement

4.1. Jusqu'à quelle valeur de Q la phase de comportement élastoplastique précédente est-elle valable ? Montrer que cette valeur représente bien la *charge limite* Q^l et décrire le *mécanisme d'écoulement plastique libre* correspondant.

4.2. Tracer l'allure de la courbe charge-déplacement dans le plan Q - q pour toutes les phases de chargement.

* *
*
*

Corrigé du problème n°1

1. Equilibre statique

L'équilibre en moment par rapport au point A du tronçon de poutre AB donne immédiatement :

$$M_A = \mu + 2lY = 0 \rightarrow \mu = -2lY$$

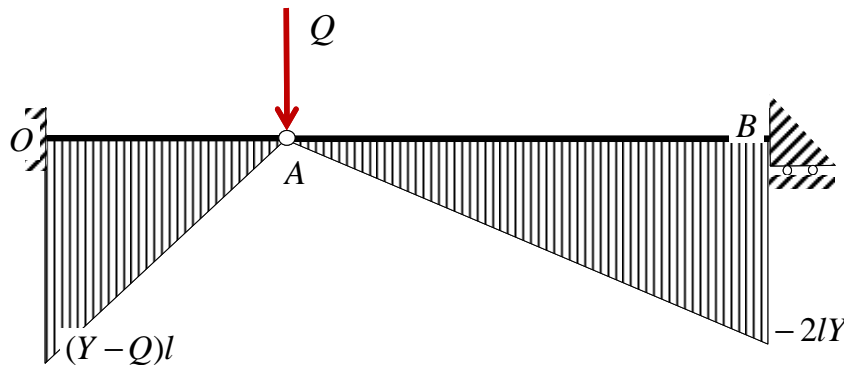
d'où l'expression du moment fléchissant au point x de la poutre :

$$\text{sur } OA \ (0 \leq x \leq l) : M(x) = \mu + Y(3l - x) - Q(l - x) = (Y - Q)(l - x)$$

$$\text{sur } AB \ (l \leq x \leq 3l) : M(x) = \mu + Y(3l - x) = Y(l - x)$$

avec les valeurs particulières :

$$M_o = M(x=0) = (Y - Q)l \text{ et } M_B = M(x=3l) = \mu = -2lY$$



Les diagrammes de moments fléchissants *statiquement admissibles* avec le chargement Q (représentés sur la figure ci-dessus) dépendent d'une seule inconnue hyperstatique Y . Le problème est donc *hyperstatique d'ordre un*.

2. Comportement élastique

Le calcul de l'énergie élastique de flexion associée à un diagramme statiquement admissible quelconque, s'écrit compte tenu des expressions ci-dessus :

$$W^*(Q, Y) = \frac{1}{2EI} \int_0^{3l} M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \left[(Y - Q)^2 \int_0^l (l - x)^2 dx + Y^2 \int_l^{3l} (l - x)^2 dx \right]$$

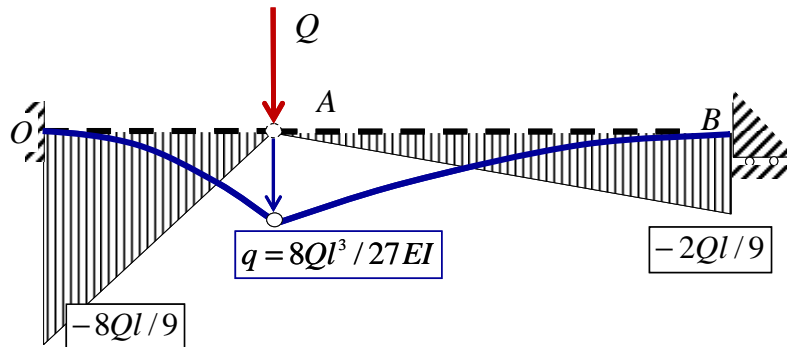
soit tous calculs faits :

$$W^*(Q, Y) = \frac{l^3}{6EI} [(Y - Q)^2 + 8Y^2]$$

La valeur de l'inconnue hyperstatique correspondant à la solution élastique du problème s'obtient grâce au *théorème du potentiel minimum* :

$$\frac{\partial W^*}{\partial Y} = \frac{l^3}{6EI} [2(Y - Q) + 16Y] = 0 \rightarrow Y = Q/9$$

d'où le diagramme de moments fléchissants en phase élastique :



Le *théorème de Castigliano* permet alors de calculer le déplacement q du point d'application A de la charge :

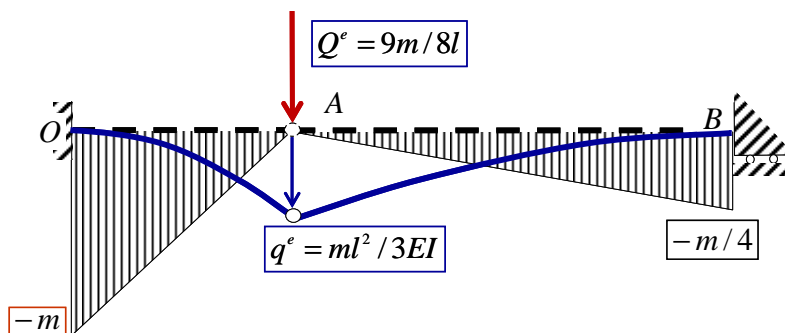
$$q = \frac{\partial W^*}{\partial Q} (Q, Y = Q/9) = \frac{8Ql^3}{27EI}$$

L'allure de la déformée (amplifiée pour des raisons de visibilité) est représentée sur la figure ci-dessus.

3. Comportement élastoplastique

3.1. La *limite d'élasticité* correspond à la valeur du chargement pour laquelle le moment fléchissant en O atteint le moment limite en flexion négative :

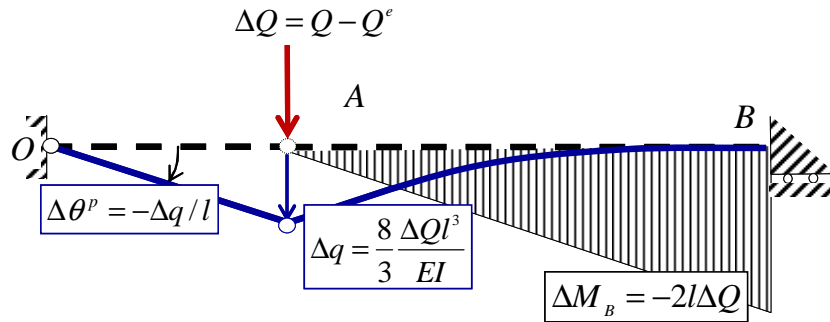
$$M_o(Q^e) = -8Q^e l / 9 = -m \rightarrow Q^e = 9m / 8l$$



3.2. Les moments fléchissants ΔM dans la *structure isostatique associée* étant nuls en O et A, il vient immédiatement :

$$\Delta Y = \Delta Q \text{ et } \Delta M_B = \Delta \mu = -2l\Delta Q$$

d'où le diagramme des moments fléchissants représenté ci-dessous :



Le calcul de l'énergie élastique de flexion relative au problème isostatique associé donne :

$$W^*(\Delta Q) = \frac{1}{2EI} \int_0^{3l} \Delta M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_l^{3l} \Delta Q^2 (l-x)^2 dx = \frac{4l^3}{3EI} \Delta Q^2$$

d'où en appliquant encore une fois le théorème de Castigliano :

$$\Delta q = \frac{dW^*}{d(\Delta Q)} = \frac{8l^3}{3EI} \Delta Q$$

Il s'ensuit que le tronçon de poutre OA subit durant cette phase une rotation identique à la discontinuité de rotation purement plastique à l'encastrement O (siège d'une rotule plastique), égale à :

$$\Delta \theta^p = -\Delta q/l = -\frac{8l^2}{3EI} \Delta Q$$

de sorte que la règle d'écoulement plastique est bien vérifiée :

$$\dot{\theta}^p = -\frac{8l^2}{3EI} \dot{Q} \leq 0 \quad \text{pour } M_o = -m, \dot{M}_o = 0$$

4. Charge limite et courbe charge-déplacement

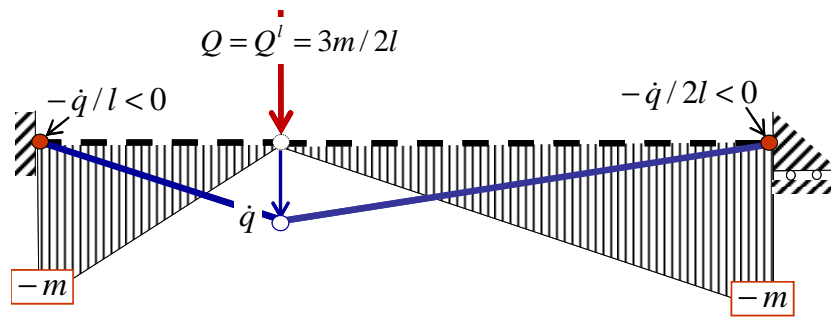
4.1. La charge limite est obtenue lorsque le moment à l'encastrement B atteint sa limite en flexion négative :

$$M_B(Q = Q^l) = \underbrace{M_B(Q = Q^e)}_{-m/4} + \underbrace{\Delta M_B(\Delta Q = Q^l - Q^e)}_{-2l(Q^l - 9m/8l)} = -m$$

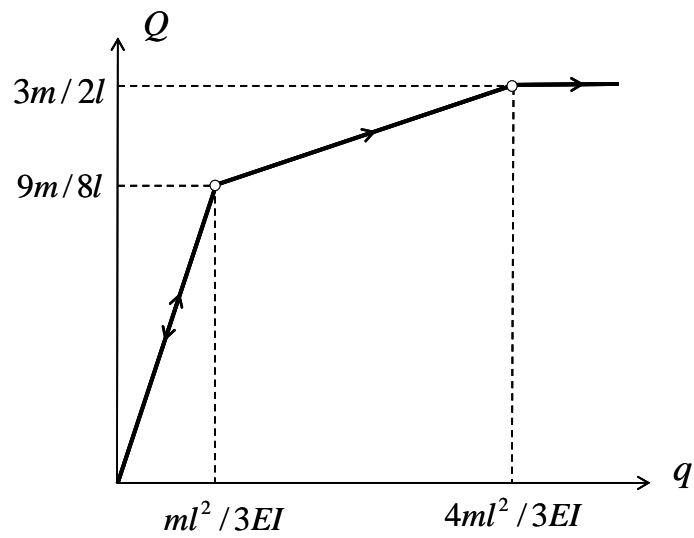
soit :

$$Q^l = 3m/2l$$

Le mécanisme d'écoulement plastique libre correspondant est représenté sur la figure ci-dessous. Les deux rotules plastiques situées en O et B sont négatives.



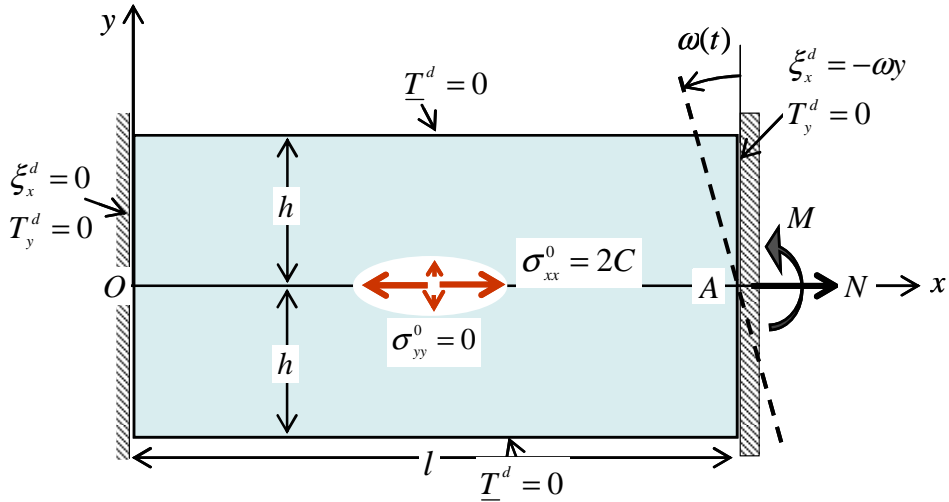
4.2. La courbe charge-déplacement qui traduit la réponse globale de la structure est représentée ci-après.



* *
*

Problème n°2 (13 points)

Plaque soumise à une sollicitation de traction et de flexion



Une plaque d'épaisseur $2h$, de largeur l et de longueur pouvant être considérée comme infinie dans la direction Oz , est soumise à un chargement de flexion défini par les conditions aux limites représentées sur la figure, où les forces de volume sont négligées. Le problème ainsi défini est un problème en *déformations planes* dans le plan Oxy . Cette plaque est constituée d'un matériau homogène obéissant à un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson nul ($\nu=0$), parfaitement plastique standard, le critère de plasticité étant celui de *Tresca*, de cohésion C .

L'*état initial* du solide étant caractérisé par le champ de contrainte homogène uniaxial défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\omega=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0 = 2C \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1)$$

on se propose de déterminer l'évolution élastoplastique de la plaque au fur et à mesure que l'on vient la fléchir, c'est-à-dire que l'on augmente progressivement l'angle ω à partir de zéro. On s'intéressera en particulier à l'évolution de l'*effort normal* et du *moment fléchissant* par rapport à l'axe Az (calculés par unité de longueur selon Oz) qui lui sont appliqués, respectivement définis par :

$$N = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xx}(x=l, y) dy, \quad M = - \int_{-h}^{+h} y \sigma_{xx}(x=l, y) dy \quad (2)$$

1. Etat initial. Montrer que le champ de contrainte initial (1) est *plastiquement* et *statiquement admissible*. Calculer l'effort normal N_0 et le moment fléchissant M_0 qu'il équilibre.

2. Solution dans la moitié inférieure de la plaque ($-h \leq y < 0$) : charge plastique

2.1. Faisant progressivement croître l'angle de rotation ω , la solution en *contrainte* dans cette zone est recherchée sous la forme :

$$\omega \geq 0: \underline{\underline{\sigma}}(-h \leq y < 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0 = 2C \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (3)$$

Vérifier que ce champ est plastiquement et statiquement admissible dans cette zone (on ne vérifiera pour l'instant aucune condition en $y=0$).

2.2. On propose de rechercher la solution en vitesse de déplacement sous la forme :

$$-h \leq y < 0: \dot{\xi}_x = -\dot{\omega} \frac{xy}{l}, \dot{\xi}_y = +\frac{\dot{\omega}}{2l}(x^2 + y^2), \dot{\xi}_z = 0 \quad (4)$$

Montrer que ce champ est cinématiquement admissible avec les conditions aux limites en déplacement données sur la moitié inférieure de la plaque et calculer le champ des taux de déformations totales \underline{d} , puis celui des taux de déformations plastiques \underline{d}^p grâce à la loi de comportement.

2.3. Montrer que la règle d'écoulement plastique est alors vérifiée en régime d'arrêt.

3. Solution dans la moitié supérieure de la plaque ($0 < y \leq +h$)

3.1. *Phase de décharge élastique.* Montrer que le champ de déplacement solution du problème dans cette zone est donné par :

$$\xi_x = -\omega \frac{xy}{l}, \xi_y = \omega \frac{x^2}{2l}, \xi_z = 0 \quad (5)$$

et calculer la solution en contrainte correspondante qui lui est associée par la loi de comportement élastique (avec contrainte initiale non nulle). Expliquer pourquoi cette solution de *décharge élastique* est valable tant que $\omega \leq \omega^e = 4Cl / Eh$. Que se passe-t-il à ce moment là ?

3.2. *Phase élastoplastique ($\omega \geq \omega^e$).* La moitié supérieure de la plaque est alors subdivisée en deux zones, respectivement plastique et élastique, où le champ de contrainte vaut :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} (2C - \omega Ey / l) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, & 0 \leq y \leq e \text{ (élastique)} \\ -2C \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, & e \leq y \leq h \text{ (plastique)} \end{cases} \quad (6)$$

Vérifier que ce champ de contrainte est statiquement et plastiquement admissible et qu'il se raccorde bien avec le champ (3) en partie inférieure. Ecrire que le critère de plasticité est atteint en $y=e$ dans la zone élastique et en déduire que $e / h = \omega^e / \omega$.

3.3. Montrer que le champ de vitesse défini par :

$$\dot{\xi}_x = -\dot{\omega} \frac{xy}{l}, \quad \dot{\xi}_y = \begin{cases} \dot{\omega} x^2 / 2l & 0 \leq y \leq e \\ \dot{\omega} (x^2 + y^2 - e^2) / 2l & e \leq y \leq h \end{cases}, \quad \dot{\xi}_z = 0 \quad (7)$$

représente une solution du problème en vitesse associée en tout point au champ de contrainte (6) par la loi de comportement élastoplastique. On vérifiera en particulier la règle d'écoulement plastique dans la zone plastique.

4. Trajet de chargement.

4.1. Représenter pour chacune des deux phases ($0 \leq \omega \leq \omega^e$ et $\omega \geq \omega^e$) le diagramme des contraintes $\sigma_{xx}(y)$ dans l'épaisseur de la plaque. Que devient ce diagramme dans le cas limite où $\omega \rightarrow +\infty$?

4.2. Montrer que l'effort normal et le moment fléchissant calculés par les relations (1) peuvent se mettre sous la forme :

$$N / 4Ch = n(\omega / \omega^e) \quad \text{et} \quad M / 2Ch^2 = m(\omega / \omega^e) \quad (10)$$

où l'on précisera pour chaque phase l'expression des fonctions sans dimensions n et m . On vérifiera en particulier que :

$$\begin{aligned} n(0) &= 1, & n(1) &= 1/2, & n(\omega / \omega^e \rightarrow \infty) &= 0 \\ m(0) &= 0, & m(1) &= 2/3, & m(\omega / \omega^e \rightarrow \infty) &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Tracer le trajet de chargement correspondant dans le plan (n, m) .

4.3. Décrire, sans faire aucun calcul, quel aurait été le trajet de chargement dans le cas d'un état initial *naturel* et déterminer notamment l'extrémité de ce trajet correspondant à la limite $\omega \rightarrow \infty$. Commenter le résultat.

* *

*

Corrigé du problème n°2

1. Etat initial

Le champ de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 2C \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ étant constant vérifie automatiquement l'équation d'équilibre sans forces de volume.

Il respecte toutes les *conditions aux limites en contrainte* du problème :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_y = \underline{T}^d = 0 \text{ en } y = \pm h \text{ et } \sigma_{yx} = T_y^d = 0 \text{ en } x = 0, l$$

Il est par ailleurs plastiquement admissible puisque le *critère de Tresca* est vérifié en tout point sous forme d'égalité :

$$\sigma_{xx}^0 = 2C = \sigma_I^0 > \sigma_{II}^0 = \sigma_{III}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 = 0 \rightarrow \sigma_I^0 - \sigma_{II}^0 = \sigma_I^0 - \sigma_{III}^0 = 2C$$

L'effort normal et le moment fléchissant équilibrés par un tel champ valent respectivement :

$$N_0 = \int_{-h}^{+h} 2C dy = 4Ch, \quad M_0 = - \int_{-h}^{+h} y 2C dy = 0$$

2. Solution dans la moitié inférieure de la plaque ($-h \leq y < 0$) : charge plastique

2.1. Le champ de contrainte (3) dans la moitié inférieure de la plaque étant identique au champ de contrainte initial (1), il vérifie automatiquement le critère de plasticité en tout point, l'équilibre sans forces de volume et les conditions aux limites en contrainte qui demeurent inchangées lorsque l'on fait croître l'angle ω .

2.2. Le champ de vitesse (4) est cinématiquement admissible avec les conditions aux limites en vitesse puisque :

$$\dot{\xi}_x(x=0) = \dot{\xi}_x^d = 0 \text{ et } \dot{\xi}_x(x=l) = \dot{\xi}_x^d = -\dot{\omega}y$$

Le champ des taux de *déformations totales* qui lui est associé s'écrit en composantes :

$$d_{xx} = -\dot{\omega} \frac{y}{l}, \quad d_{yy} = +\dot{\omega} \frac{y}{l} \text{ autres } d_{ij} = 0$$

de sorte que le champ des taux de *déformations élastiques* étant nul en vertu de la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{d}}^e = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E} = 0$$

le champ des taux de *déformations plastiques* est identique au champ des taux de déformations totales :

$$\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^e = \underline{\underline{d}} \rightarrow d_{xx}^p = -\dot{\omega} \frac{y}{l}, \quad d_{yy}^p = +\dot{\omega} \frac{y}{l} \text{ autres } d_{ij}^p = 0$$

2.3. La règle d'écoulement plastique est alors bien vérifiée puisqu'étant en *régime d'arête* :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma_I - \sigma_{II} = 2C, \quad \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = \sigma_I - \sigma_{III} = 2C \quad \text{avec} \quad \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{II} = \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{III} = 0$$

le taux de déformation plastique est nécessairement la forme :

$$d_I^p = d_{xx}^p = \dot{\lambda} + \dot{\mu}, \quad d_{II}^p = d_{yy}^p = -\dot{\lambda}, \quad d_{III}^p = d_{zz}^p = -\dot{\mu}, \quad \dot{\lambda}, \dot{\mu} \geq 0$$

ce qui est bien le cas du taux de déformation plastique calculé précédemment en 2.2. avec :

$$-h \leq y < 0: \dot{\lambda} = -\dot{\omega} \frac{y}{l} > 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mu} = 0.$$

3. Solution dans la moitié supérieure de la plaque ($0 < y \leq +h$)

3.1. *Phase de décharge élastique.* Le champ de déplacement (5) proposé est bien cinématiquement admissible avec les conditions aux limites en déplacement en $x=0$ et $x=l$. Le champ de déformation associé est uniaxial égal à :

$$\varepsilon_{xx} = -\omega \frac{y}{l}, \quad \text{autres} \quad \varepsilon_{ij} = 0$$

tandis que la loi de comportement élastique (avec contrainte initiale non nulle) conduit à l'expression suivante du champ de contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0 = E \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = (2C - \omega E y / l) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

dont on vérifie immédiatement qu'il est *statiquement admissible*. Il s'agit donc bien de la solution de *décharge élastique* dans cette moitié supérieure de la plaque tant que le critère de plasticité est vérifié en tout point de cette moitié supérieure :

$$0 < y \leq h: \text{Min}\{\sigma_{xx}(y) = 2C - \omega E y / l\} = \sigma_{xx}(y = +h) = 2C - \omega E h / l \geq -2C$$

c'est-à-dire tant que :

$$\omega \leq \omega^e = \frac{4Cl}{Eh}$$

La fibre supérieure ($y=+h$) *plastifie en compression* lorsque $\omega = \omega^e$.

3.2. Phase élastoplastique ($\omega \geq \omega^e$).

Le champ de contrainte (6) est bien statiquement admissible car il vérifie l'équation d'équilibre sans forces de volume, les conditions aux limites en contrainte, la continuité du vecteur-contrainte (nul) à la traversée du plan $y=e$ ainsi qu'à celle du plan $y=0$ où il se raccorde bien avec le champ (3).

Il vérifie par ailleurs de façon évidente le critère de plasticité aussi bien en zone plastique ($e < y \leq +h$) où le critère de plasticité est atteint en compression uniaxiale, qu'en zone élastique ($0 < y \leq e$). Ecrivant que ce critère est atteint dans cette dernière zone en $y=e$, il vient immédiatement :

$$\sigma_{xx}(y=e) = 2C - \omega E e / l = -2C$$

d'où la valeur de l'épaisseur e de la zone élastique :

$$e = \frac{4Cl}{\omega E} = \frac{\omega^e}{\omega} h \text{ pour } \omega \geq \omega^e$$

3.3. Le champ de vitesse défini par (7) étant bien cinématiquement admissible, car continu en $y=e$ et respectant les conditions aux limites en vitesse en $x=0$ et l , le champ des taux de déformation s'écrit :

$$d_{xx} = -\dot{\omega} \frac{y}{l}, \quad d_{yy} = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq e \\ +\dot{\omega} \frac{y}{l} & e \leq y \leq h \end{cases}, \quad \text{autres } d_{ij} = 0$$

Il est bien associé en *zone élastique* au champ de contrainte (6) puisque :

$$0 < y \leq e: \underline{\underline{\sigma}} = (2C - \omega E y / l) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \rightarrow \underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}{E} = -\dot{\omega} \frac{y}{l} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

ainsi qu'en *zone plastique* :

$$e < y \leq +h: \underline{\underline{\sigma}} = 2C \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \rightarrow \underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{d}} - \frac{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}{E} = -\dot{\omega} \frac{y}{l} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \dot{\omega} \frac{y}{l} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

La règle d'écoulement plastique est bien vérifiée puisque :

$$e < y \leq +h$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} = \sigma_I - \sigma_{II} = 2C, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{xx} = \sigma_I - \sigma_{III} = 2C \quad \text{avec } \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{II} = \dot{\sigma}_I - \dot{\sigma}_{III} = 0$$

de sorte que le taux de déformation plastique est nécessairement la forme :

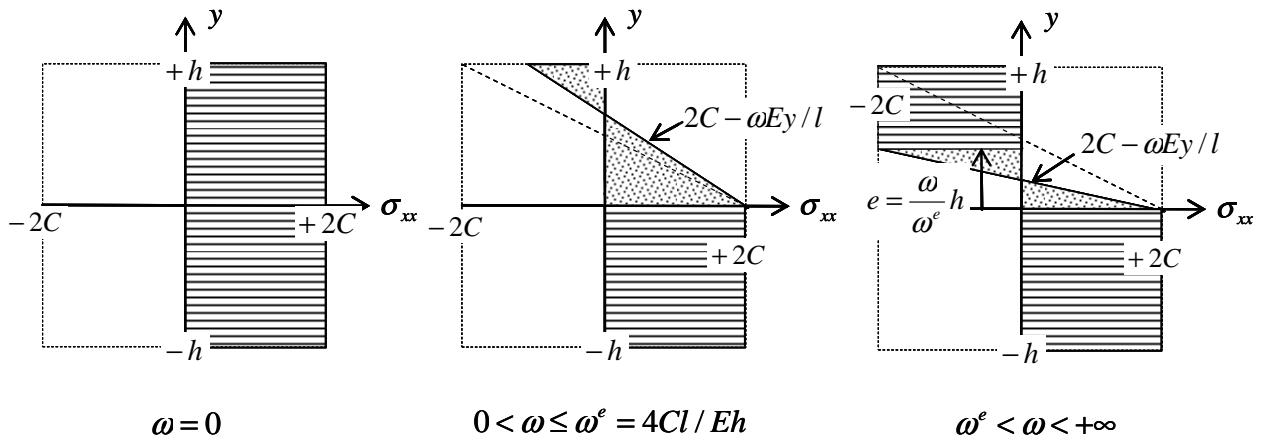
$$d_{III}^p = d_{xx}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}), \quad d_I^p = d_{yy}^p = \dot{\lambda}, \quad d_{II}^p = d_{zz}^p = \dot{\mu}, \quad \dot{\lambda}, \dot{\mu} \geq 0$$

avec dans le cas présent :

$$e < y \leq +h: \dot{\lambda} = \dot{\omega} \frac{y}{l} > 0 \text{ et } \dot{\mu} = 0.$$

4. Trajet de chargement.

4.1. Les diagrammes de contrainte $\sigma_{xx}(y)$ dans l'épaisseur de la plaque correspondant aux phases successives de chargement sont représentées sur la figure ci-dessous.



Dans le cas limite où la rotation du poinçon s'accroît indéfiniment ($\omega \rightarrow \infty$), ce diagramme correspond à la plastification totale de la plaque en traction (resp. compression) uniaxiale dans sa moitié inférieure (resp. supérieure).

4.2. Le calcul de l'effort normal N et du moment fléchissant M effectué à partir des relations (1) donne alors pour les deux phases :

◇ $0 \leq \omega / \omega^e \leq 1$:

$$N = \int_{-h}^0 2C dy + \int_0^{+h} (2C - \omega E y / l) dy = 4Ch - Eh^2 \omega / 2l = 4Ch \left(1 - \frac{\omega}{2\omega^e} \right)$$

$$M = - \int_{-h}^0 2C y dy + \int_0^{+h} \omega E y^2 / l dy = Eh^3 \omega / 3l = \frac{4}{3} Ch^2 \left(\frac{\omega}{\omega^e} \right)$$

soit :

$$0 \leq \omega / \omega^e \leq 1: n(\omega / \omega^e) = \frac{N}{4Ch} = 1 - \frac{\omega}{2\omega^e} \quad \text{et} \quad m(\omega / \omega^e) = \frac{M}{2Ch^2} = \frac{2\omega}{3\omega^e}$$

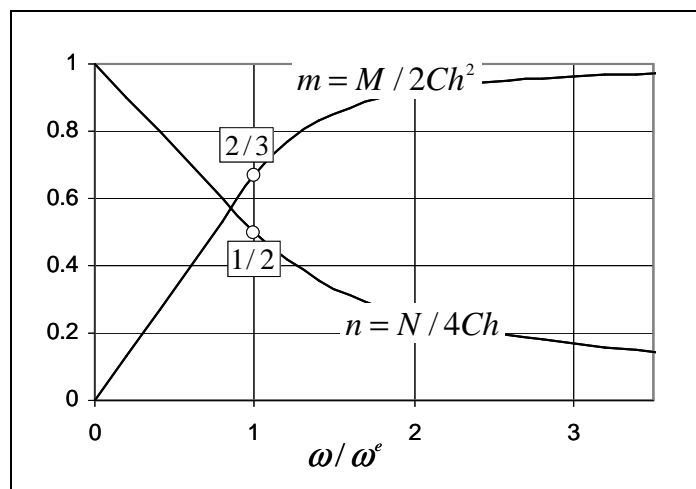
◇ $1 \leq \omega / \omega^e$:

$$N = \int_{-h}^0 2C dy + \int_0^{+e} (2C - \omega E y / l) dy + \int_{+e}^{+h} (-2C) dy = 2Ce = 2Ch \left(\frac{\omega^e}{\omega} \right)$$

$$M = - \int_{-h}^0 2C y dy + \int_{+e}^{+h} 2C y dy - \int_0^{+e} (2C y - \omega E y^2 / l) dy = 2C \left(h^2 - \frac{e^2}{3} \right) = 2Ch^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega^e}{\omega} \right) \right)$$

c'est-à-dire :

$$1 \leq \omega / \omega^e < +\infty: n(\omega / \omega^e) = \frac{N}{4Ch} = \frac{\omega^e}{2\omega} \quad \text{et} \quad m(\omega / \omega^e) = \frac{M}{2Ch^2} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega^e}{\omega} \right)^2$$



La figure ci-dessus représente les courbes donnant l'évolution de l'effort normal et du moment fléchissant (mis sous forme adimensionnelle) en fonction de la rotation

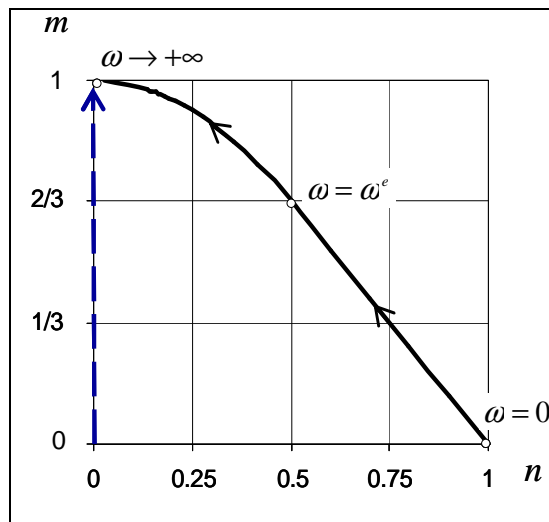
adimensionnelle du poinçon droit (proportionnelle à la courbure moyenne de la plaque fléchie).

On observe donc une décroissance progressive de l'effort normal et une augmentation corrélative du moment fléchissant lorsque l'on fait croître la rotation du poinçon c'est-à-dire la courbure moyenne de la plaque. On vérifie bien notamment que:

$$n(0) = 1, \quad n(1) = 1/2, \quad m(0) = 0, \quad m(1) = 2/3$$

tandis que le moment fléchissant tend asymptotiquement vers le *moment limite ultime* (charge limite en flexion pure), l'effort normal tendant vers la valeur nulle.

Le trajet de chargement correspondant dans le plan (n, m) est représenté ci-dessous : il est formé d'un segment de droite correspondant au trajet de chargement entre l'état initial et la valeur ω^e de la rotation du poinçon droit, auquel vient se raccorder un arc de parabole dont l'extrémité est atteinte asymptotiquement pour $\omega \rightarrow \infty$.



4.3. Dans l'hypothèse où l'on serait parti d'un *état initial naturel* (champ de contrainte nul et donc $n=m=0$), le diagramme des contraintes aurait été *antisymétrique* par rapport à $y=0$: $\sigma_{xx}(-y) = -\sigma_{xx}(+y)$ et donc l'effort normal nul, en tout point de trajet de chargement. Ce trajet (représenté en pointillés sur la figure) se réduit alors au segment joignant les points $(0,0)$ et $(0,1)$. Il convient en particulier de noter que la *charge limite en flexion pure* ($n=0, m=1$) est identique à celle obtenue au terme du trajet de chargement précédent, ce qui illustre bien l'indépendance de cette dernière vis-à-vis de ce trajet.

* *

*