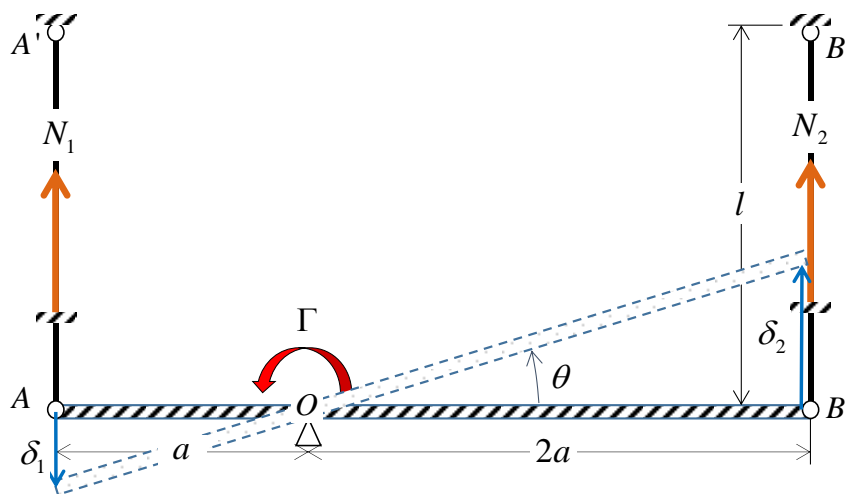


Cors de Plasticité : contrôle des connaissances

Durée : 2h00

*Tous documents et notes de cours autorisés
Le sujet comporte deux problèmes indépendants*

Problème n°1 (3,5 points/8)



On considère une structure constituée de deux barres verticales AA' et BB' de même longueur l reliées entre elles par une barre AB indéformable pouvant pivoter librement autour d'un appui fixe O comme indiqué sur la figure et à laquelle on vient appliquer un couple d'intensité Γ . Chacune des barres, numérotées respectivement 1 et 2, obéit à un comportement élastique (module ES) parfaitement plastique de limite d'élasticité en traction-compression égale à L .

La structure étant dans un état initial naturel ($N_1=N_2=0$ pour $\Gamma=0$), on fait croître progressivement le chargement Γ à partir de la valeur nulle.

1. Comportement élastique.

1.1. Expliquer d'où vient la relation d'équilibre :

$$\Gamma + (2N_2 - N_1)a = 0 \quad (1)$$

et établir les relations entre la rotation θ de la barre de liaison AB et les allongements δ_1 et δ_2 des barres verticales.

1.2. En déduire, en utilisant la loi de comportement élastique des barres 1 et 2, la valeur des efforts et des allongements dans chacune de ces barres en fonction du chargement Γ et établir la relation :

$$\Gamma = 5ES \frac{a^2}{l} \theta \quad (2)$$

1.3. Indiquer quelle est la barre qui plastifie en premier et en déduire la *limite d'élasticité* Γ^e de la structure.

2. Phase élastoplastique ($\Gamma \geq \Gamma^e$) et charge limite

2.1. Déterminer les efforts dans la structure en supposant que la barre entrée en plasticité le demeure et en déduire les valeurs des allongements des barres ainsi que de la rotation θ . On vérifiera la règle d'écoulement plastique dans la barre plastifiée.

2.2. Calculer la *charge limite* Γ^l de la structure et décrire le *mécanisme d'écoulement plastique libre* associé. Tracer la courbe (Γ, θ) .

Corrigé

1. Comportement élastique

1.1. L'écriture de l'équilibre *en moment par rapport à l'appui O* de la barre AB sous l'action des différents efforts qui lui sont appliqués (N_1, N_2 et Γ , le moment de la réaction d'appui en O étant nul), donne :

$$\Gamma + N_2(2a) - N_1a = 0 \quad (C1)$$

qui représente la seule équation d'équilibre. Le problème est donc *hyperstatique d'ordre 1*.

Par ailleurs, la rotation θ de la barre AB est reliée aux allongements des barres 1 et 2 par les équations :

$$\theta = \frac{-\delta_2}{2a} = \frac{\delta_1}{a} \Rightarrow \delta_2 = -2\delta_1 \quad (C2)$$

qui expriment la compatibilité géométrique des allongements des barres verticales.

1.2. Les lois de comportement des barres en *phase élastique* s'écrivent :

$$i = 1, 2 : \delta_i = \frac{lN_i}{ES} \quad (C3)$$

et donc en vertu des équations de compatibilité géométrique (C2) :

$$N_2 = -2N_1 \quad (C4)$$

Le système linéaire constitué des équations (C1) et (C4) a pour solution :

$$\boxed{N_1 = \frac{\Gamma}{5a} \rightarrow \delta_1 = \frac{\Gamma l}{5aES} \text{ et } N_2 = -\frac{2\Gamma}{5a} \rightarrow \delta_2 = -\frac{2\Gamma l}{5aES}} \quad (C5)$$

et donc en vertu de (C2) :

$$\theta = \frac{\delta_1}{a} = \frac{\Gamma l}{5a^2 ES} \rightarrow \boxed{\Gamma = 5ES \frac{a^2}{l} \theta} \quad (C6)$$

1.3. Les relations (C5) montrent que c'est la barre n°2 qui plastifie la première en *compression* pour une valeur du chargement telle que :

$$N_2 = -L = -\frac{2\Gamma^e}{5a} \rightarrow \boxed{\Gamma^e = 5 \frac{aL}{2}, \theta^e = \frac{Ll}{2aES}} \quad (C7)$$

qui n'est autre que la *limite d'élasticité* de la structure.

2. Phase élastoplastique et charge limite

2.1. La barre n°2 restant plastifiée en compression, l'équation d'équilibre (C1) permet de calculer l'effort dans la barre n°1 :

$$N_1 = \frac{\Gamma}{a} - 2L \quad (C8)$$

ainsi que son allongement purement *élastique* égal à :

$$\delta_1 = \frac{l}{ES} \left(\frac{\Gamma}{a} - 2L \right) \Rightarrow \boxed{\theta = \delta_1 / a = \frac{l}{aES} \left(\frac{\Gamma}{a} - 2L \right)} \quad (C9)$$

La relation de compatibilité géométrique (C2) permet alors de calculer l'allongement *total* de la barre n°2 :

$$\delta_2 = \frac{-2l}{ES} \left(\frac{\Gamma}{a} - 2L \right) \quad (C10)$$

permettant alors de vérifier la *règle d'écoulement plastique* de cette barre :

$$N_2 = -L, \dot{N}_2 = 0 \rightarrow \overset{=0}{\delta_2} = \delta_2^e + \delta_2^p = \frac{-2l\dot{\Gamma}}{aES} \leq 0 \quad (C11)$$

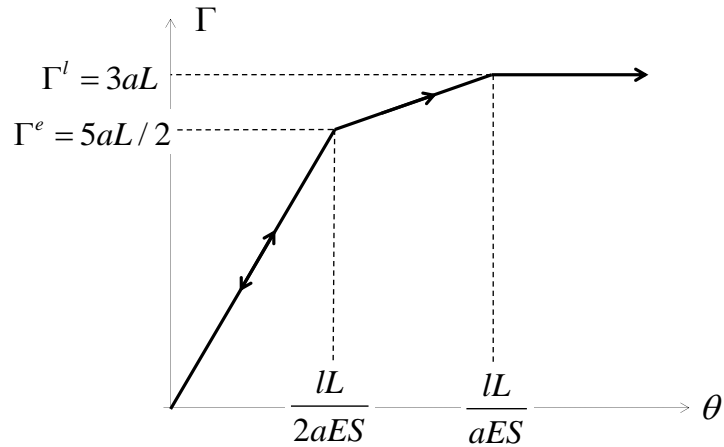
2.2. La *charge limite* de la structure est atteinte lorsque la barre n°1 plastifie en *traction*, soit d'après (C8) :

$$N_1 = \frac{\Gamma^l}{a} - 2L = +L \rightarrow \boxed{\Gamma^l = 3aL} \quad (C12)$$

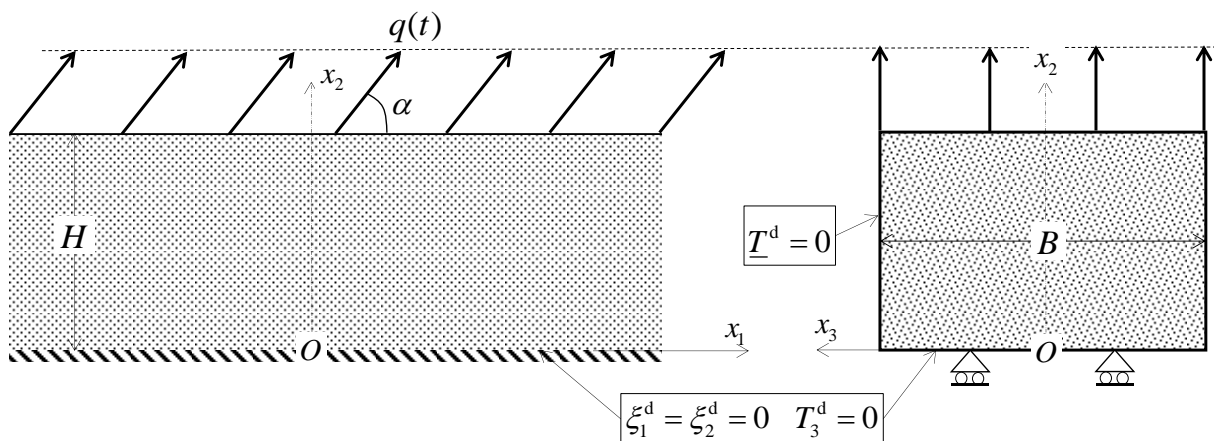
Il lui est associé le *mécanisme d'écoulement plastique libre* défini par :

$$\boxed{\begin{array}{l} N_1 = +L, \dot{N}_1 = 0 \rightarrow \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_1^p = \dot{\lambda} \geq 0 \\ N_2 = -L, \dot{N}_2 = 0 \rightarrow \dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_2^p = -2\dot{\lambda} \leq 0 \end{array}} \quad (C13)$$

La courbe (Γ, θ) est représentée sur la figure ci-dessous :



Problème n°2 (4,5 points/8)



Un bloc de section rectangulaire (hauteur H et largeur B) et de longueur infinie le long de l'axe Ox_1 , est constitué d'un matériau homogène élastique (module d'Young E et coefficient de Poisson nul : $\nu=0$) parfaitement plastique, obéissant à un critère de *von Mises* :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left\{ 1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right\}^{1/2} - k \leq 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - 1/3(\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (1)$$

Sa loi de comportement, formulée en vitesse, s'écrit alors avec les notations usuelles :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{E} + \underline{\underline{d}}^p \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{s}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2)$$

Ce bloc est soumis à un chargement défini comme suit (voir la figure) :

- ✓ Forces de volume nulles.
- ✓ Faces latérales $x_3 = \pm B/2$ libres de contrainte: $\underline{\underline{T}}^d = 0$.

✓ Plan *inférieur* $x_2 = 0$: $\xi_1^d = \xi_2^d = 0$, $T_3^d = 0$.

✓ Plan *supérieur* $x_2 = H$ soumis à une densité surfacique d'efforts *uniforme* définie par :

$$\underline{T}^d = q(t)(\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) \quad (3)$$

où $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ est l'inclinaison de cette densité d'efforts par rapport à l'horizontale, maintenue constante au cours de chargement.

1. Phase de comportement élastique.

Partant d'un *état initial naturel* (champ de contrainte nul en tout point pour $q(t=0)=0$), on augmente progressivement le chargement q .

1.1. Montrer que le champ de contrainte homogène défini par :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = q \cos \alpha, \quad \sigma_{22} = q \sin \alpha \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \quad (4)$$

est *statiquement admissible*.

1.2. Calculer le champ de déformation ε_{ij} associé au champ (4) par loi de comportement élastique, puis montrer que le champ de déplacement défini par

$$\xi_1 = 2\varepsilon_{12}x_2, \quad \xi_2 = \varepsilon_{22}x_2, \quad \xi_3 = 0 \quad (5)$$

est *cinématiquement admissible*. Conclure et donner l'expression du champ de déplacement en $x_2 = H$.

1.3. Montrer que la *limite d'élasticité* est égale à $q^e = \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{1+2\cos^2 \alpha}}$.

2. Phase élasto-plastique.

On poursuit le chargement *au-delà de la limite d'élasticité* ($q \geq q^e$) en considérant deux cas particuliers.

2.1. Cas $\alpha=0$ (cisaillement horizontal).

Montrer que dans ce cas la *limite d'élasticité* est égale à la *charge limite* pour laquelle apparaît un *mécanisme d'écoulement plastique libre* correspondant à un champ de vitesse de la forme :

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\delta}_1 x_2/H, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_3 = 0 \quad (6)$$

où δ_1 est le déplacement *horizontal* du plan $x_2 = H$. A quelle condition portant sur le signe de $\dot{\delta}_1$ le champ de vitesse (6) est-il bien associé au champ de contrainte par la loi de comportement (2) ? Tracer la courbe donnant la valeur du chargement q en fonction de δ_1 .

2.2. Cas $\alpha=\pi/2$ (traction verticale).

2.2.1. Le champ de contrainte en *phase élastoplastique* est recherché sous la forme :

$$\sigma_{11} = 2k \sin \varphi, \quad \sigma_{22} = 2k \sin(\varphi + \pi/3) = k(\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) \quad \text{autres} \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (7)$$

où φ est un paramètre angulaire variant entre 0 et $\pi/6$. Montrer que ce champ de contrainte est *statiquement admissible* (on donnera la valeur du chargement q qu'il équilibre) et vérifier qu'il est *plastiquement admissible*.

2.2.2. Le champ de vitesse dans cette même phase élastoplastique est recherché sous la forme suivante :

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\delta}_2 x_2 / H, \quad \dot{\xi}_3 = d_{33} x_3 \quad (8)$$

où δ_2 est le déplacement *vertical* du plan $x_2 = H$. Vérifier que ce champ est bien *cinématiquement admissible*, puis montrer que :

$$d_{11} = \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial x_1} = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} + \dot{\lambda}(2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (9)$$

et en déduire à partir de (7) l'expression du multiplicateur plastique en fonction de E , φ et $\dot{\varphi}$. Conclure quant à la *positivité* de ce dernier.

2.2.3. Donner l'expression de la loi de comportement (2) projetée sur l'axe vertical Ox_2 et en déduire grâce au résultat de la question précédente que :

$$\frac{\dot{\delta}_2}{H} = \frac{\dot{q}}{E} \left(1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2(\varphi + \pi/3)} \right) \quad (10)$$

Commenter ce résultat pour les valeurs particulières $\varphi=0$ et $\pi/6$. A quelles valeurs du chargement q correspondent ces deux cas particuliers ? Tracer l'*allure* de la courbe donnant q en fonction de δ_2 (il n'est pas demandé de donner l'équation de cette courbe dans sa partie élastoplastique).

2.2.4 Que se passe-t-il lorsque $\varphi=\pi/6$?

Corrigé

1. Phase de comportement élastique.

1.1. Le champ de contrainte homogène défini par :

$$\boxed{\sigma_{12} = \sigma_{21} = q \cos \alpha, \quad \sigma_{22} = q \sin \alpha \quad \text{autres} \quad \sigma_{ij} = 0} \quad (C1)$$

vérifie bien évidemment l'équation d'équilibre sans forces de volume ($\text{div} \underline{\sigma} = 0$), ainsi que les différentes conditions aux limites en contrainte :

$$\begin{aligned}
x_2 = H : \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2 &= q(\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) = \underline{T}^d \\
x_2 = 0 : (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 &= T_3^d = 0 \\
x_3 = \pm B/2 : \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e}_3) &= \underline{T}^d = 0
\end{aligned} \tag{C2}$$

Il est donc bien *statiquement admissible* pour le problème.

1.2. En phase élastique le champ de déformation associé au champ (C1) par la loi de comportement s'écrit :

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{E} = \frac{q}{E} \cos \alpha, \quad \varepsilon_{22} = \frac{q}{E} \sin \alpha \quad \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0 \tag{C3}$$

Il dérive donc bien du champ de déplacement défini par

$$\boxed{\xi_1 = 2 \frac{q}{E} x_2 \cos \alpha, \quad \xi_2 = \frac{q}{E} x_2 \sin \alpha, \quad \xi_3 = 0} \tag{C4}$$

qui est bien *cinématiquement admissible* puisque :

$$\xi_1(x_2 = 0) = \xi_2(x_2 = 0) = 0 \tag{C5}$$

Il en résulte que les champs (C1) et (C4) constituent la *solution du problème en phase élastique*, le champ de déplacement en $x_2 = H$ ayant alors pour expression:

$$\boxed{\underline{\underline{\xi}}(x_2 = H) = \frac{q}{E} H (2 \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2)} \tag{C6}$$

1.3. Le *déviateur de contrainte* en tout point ayant pour expression:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - 1/3 q \sin \alpha \underline{1} = q \begin{pmatrix} -\sin \alpha / 3 & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & +2 \sin \alpha / 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha / 3 \end{pmatrix} \tag{C7}$$

il vient alors :

$$1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = 1/2 q^2 \left(\frac{6}{9} \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \right) = q^2 \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) \tag{C8}$$

d'où la *limite d'élasticité* définie par $(q^e)^2 \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right) = k^2$, soit :

$$\boxed{q^e = \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 2 \cos^2 \alpha}}} \tag{C9}$$

avec les cas particuliers :

$$\boxed{q^e(\alpha = 0) = k \quad \text{et} \quad q^e(\alpha = \pi/2) = k\sqrt{3}} \tag{C10}$$

2. Phase élasto-plastique.

2.1. Cas $\alpha=0$ (cisaillement horizontal).

Le champ de vitesse :

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\delta}_1 x_2 / H, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_3 = 0 \quad (C11)$$

est bien *cinématiquement admissible*, puisque $\dot{\xi}_1(x_2 = 0) = \dot{\xi}_2(x_2 = 0) = 0$. Le champ de *taux de déformation* associé qui s'écrit :

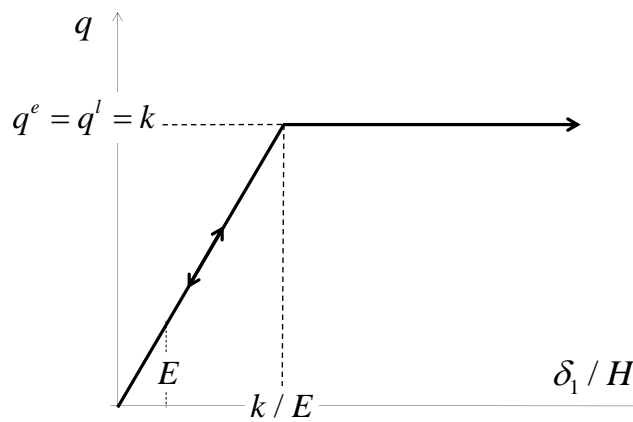
$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{\dot{\delta}_1}{2H} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (C12)$$

est alors bien associé au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} = k(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ qui équilibre le chargement $q=k$, par la loi de comportement élastoplastique. En effet :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \frac{\dot{\delta}_1}{2H} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\lambda} \overbrace{k(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)}^{\underline{\underline{s}}} \quad (C13)$$

La *positivité du multiplicateur plastique* $\dot{\lambda}$ est alors assurée (et donc la *règle d'écoulement plastique* vérifiée) si et seulement si $\dot{\delta}_1 \geq 0$, c'est-à-dire si le déplacement horizontal continue d'augmenter de manière indéfinie. Le champ de vitesse (C12) est donc bien un *mécanisme d'écoulement plastique libre* sous l'action du *chargement limite* $q^l=k$ maintenu constant.

La courbe (q - δ_1) est tracée ci-dessous :



2.2. Cas $\alpha=\pi/2$ (traction verticale).

2.2.1. Le champ de contrainte défini par :

$$\sigma_{11} = 2k \sin \varphi, \quad \sigma_{22} = 2k \sin(\varphi + \pi/3) = k(\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \quad (C14)$$

vérifie l'équation d'équilibre sans forces de volume et les différentes conditions aux limites en contrainte (C2). Il équilibre le chargement :

$$\boxed{q = \sigma_{22} = 2k \sin(\pi/3 + \varphi)} \quad (C15)$$

On a par ailleurs :

$$s_{11} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} = k \left(\sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi \right); \quad s_{22} = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}{3} = 2k \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi$$

$$s_{33} = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} = -k \left(\sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi \right)$$
(C16)

soit après calculs :

$$f(\underline{\sigma}) = \left\{ 1/2 \underline{s} : \underline{s} \right\}^{1/2} - k = \left\{ 1/2 (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) \right\}^{1/2} - k = 0$$
(C17)

de sorte que le champ de contrainte défini par (C14) est bien *statiquement et plastiquement admissible*.

2.2.2. Le champ de vitesse défini par :

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\delta}_2 x_2 / H, \quad \dot{\xi}_3 = d_{33} x_3$$
(C18)

est bien cinématiquement admissible car il vérifie les conditions aux limites (C5). La loi de comportement élastoplastique projetée sur la direction *horizontale* Ox_1 donne alors

$$d_{11} = \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial x_1} = 0 = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} + \dot{\lambda} \overbrace{(2\sigma_{11} - \sigma_{22})}^{s_{11}}$$
(C19)

permettant ainsi de calculer le *multiplicateur plastique* :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E(\sigma_{22} - 2\sigma_{11})} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3}E \cos(\pi/3 + \varphi)} \dot{\varphi}$$
(C20)

qui est bien *positif* puisque d'après (C15) φ est une fonction *croissante* de q .

2.2.3. La loi de comportement élastoplastique projetée sur la direction *verticale* Ox_1 s'écrit :

$$d_{22} = \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial x_2} = \frac{\dot{\delta}_2}{H} = \frac{\dot{\sigma}_{22}}{E} + \dot{\lambda}(2\sigma_{22} - \sigma_{11})$$
(C21)

soit après calculs et en tenant compte de (C20) :

$$\boxed{\frac{\dot{\delta}_2}{H} = \frac{\dot{q}}{E} \left(1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2(\varphi + \pi/3)} \right)}$$
(C22)

avec les valeurs particulières suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = 0: \quad q^e = k\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \dot{q} = E \frac{\dot{\delta}_2}{5H} \\ \varphi = \pi/6: \quad q^l = 2k \quad \text{et} \quad \dot{q} = 0 \end{array}}$$
(C23)

La courbe donnant le chargement de traction q en fonction du déplacement relatif δ_2/H est représentée sur la figure ci-dessous.

