

Acoustique

Cours 1

D. Duhamel

Plan

1. Introduction à l'acoustique

1. Introduction
2. Analyse fréquentielle
3. Niveaux sonores
4. Autres caractéristiques d'une onde sonore

2. Equations de l'acoustique

1. Equations de base
2. Conditions aux limites
3. Energie acoustique
4. Solutions élémentaires

3. Rayonnement acoustique

1. Piston
2. Sphère

4. Guides d'onde

1.1 Introduction

Repères historiques

Assyriens
650 avant J.C.



Joueur à 2 flûtes
Italie 470 avant J.C.

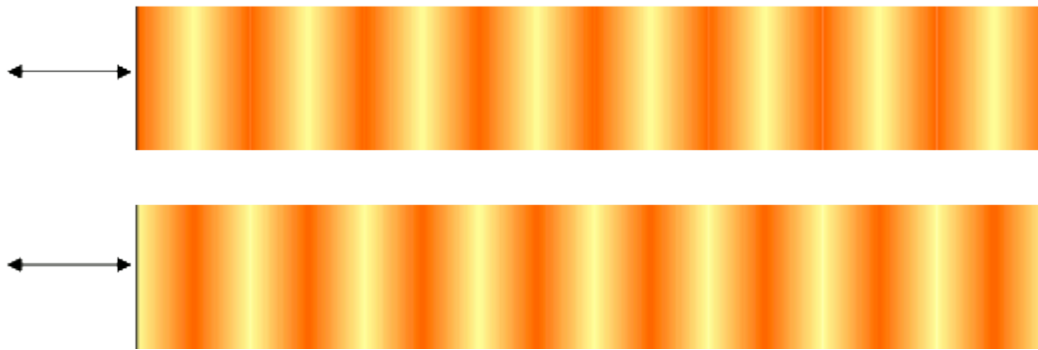


Amphithéâtre grec d'épidaure



Nature d'une onde sonore

Qu'est ce que le son ?



Petite perturbation d'un fluide :
fluctuation du niveau de pression en fonction du temps

Dans un tube contenant un gaz ou un fluide, une onde
acoustique crée des sections de densités variables.

La figure présente la densité à deux instants différents.

Les particules se déplacent et oscillent dans la direction de propagation autour de leurs positions de repos (pas de mouvement net du fluide) :

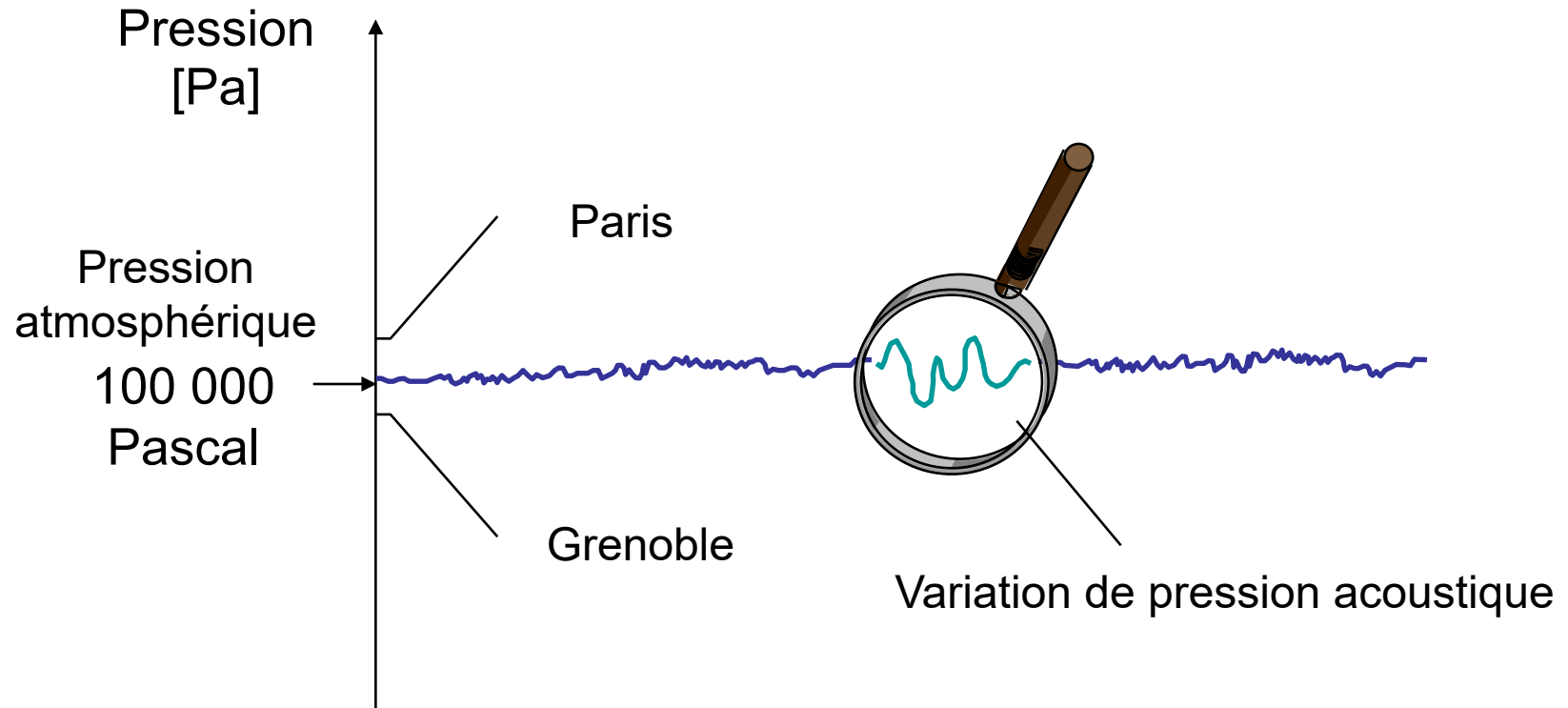
Onde de compressibilité

Onde longitudinale

Vitesse de propagation différente de la
Vitesse du mouvement des particules

1.2 Niveaux Sonores

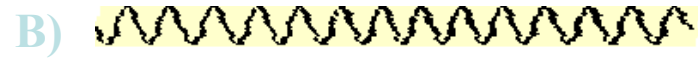
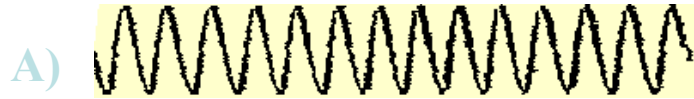
Amplitude de la pression sonore



**Amplitude des ondes
acoustiques : 0.00002Pa à 100Pa**

Amplitude

Amplitude = Valeur de la pression maximale



- On mesure le niveau de pression en Pascal par des microphones
- Les niveaux varient sur une gamme très étendue : 10^{-5} à 100 Pa
- Echelle logarithmique

$$L = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0}$$

avec

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad (\text{seuil audition})$$

dB – décibel

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} \text{ dB re } 20 \mu\text{Pa}$$

$$(p_0 = 20 \mu\text{Pa} = 20 \times 10^{-6} \text{Pa})$$

Ex. 1: $p = 1 \text{ Pa}$

$$L_p = 20 \log \frac{1}{20 \times 10^{-6}}$$

$$= 20 \log 50\,000$$

$$= 94 \text{ dB}$$

Ex. 2: $p = 31.7 \text{ Pa}$

$$L_p = 20 \log \frac{31.7}{20 \times 10^{-6}}$$

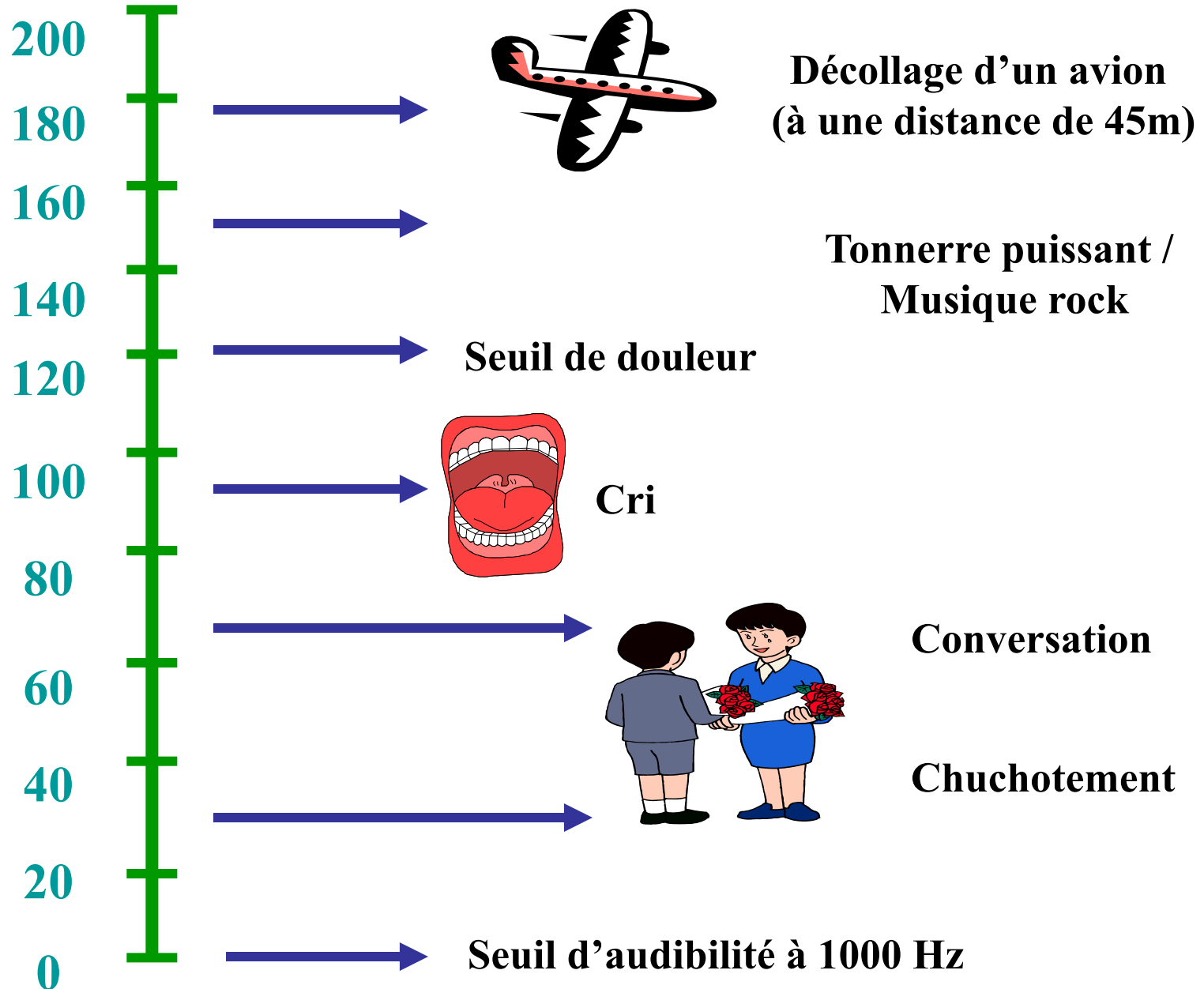
$$= 20 \log 1.58 \times 10^6$$

$$= 124 \text{ dB}$$

Exemples de sons à différentes amplitudes

- Référence 
- -1dB (x0.9) 
- -3dB (x0.7) 
- -10dB (x0.3) 
- -20dB (x0.1) 

L'ECHELLE DES DECIBELS



Niveau sonore de la voix à 1m

Effort vocal	dBA
Décontracté	53
Normal	58
Elevé	65
Fort	75
Crié	88

Addition de niveaux sonores

- Si deux sources sont cohérentes : addition des amplitudes

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

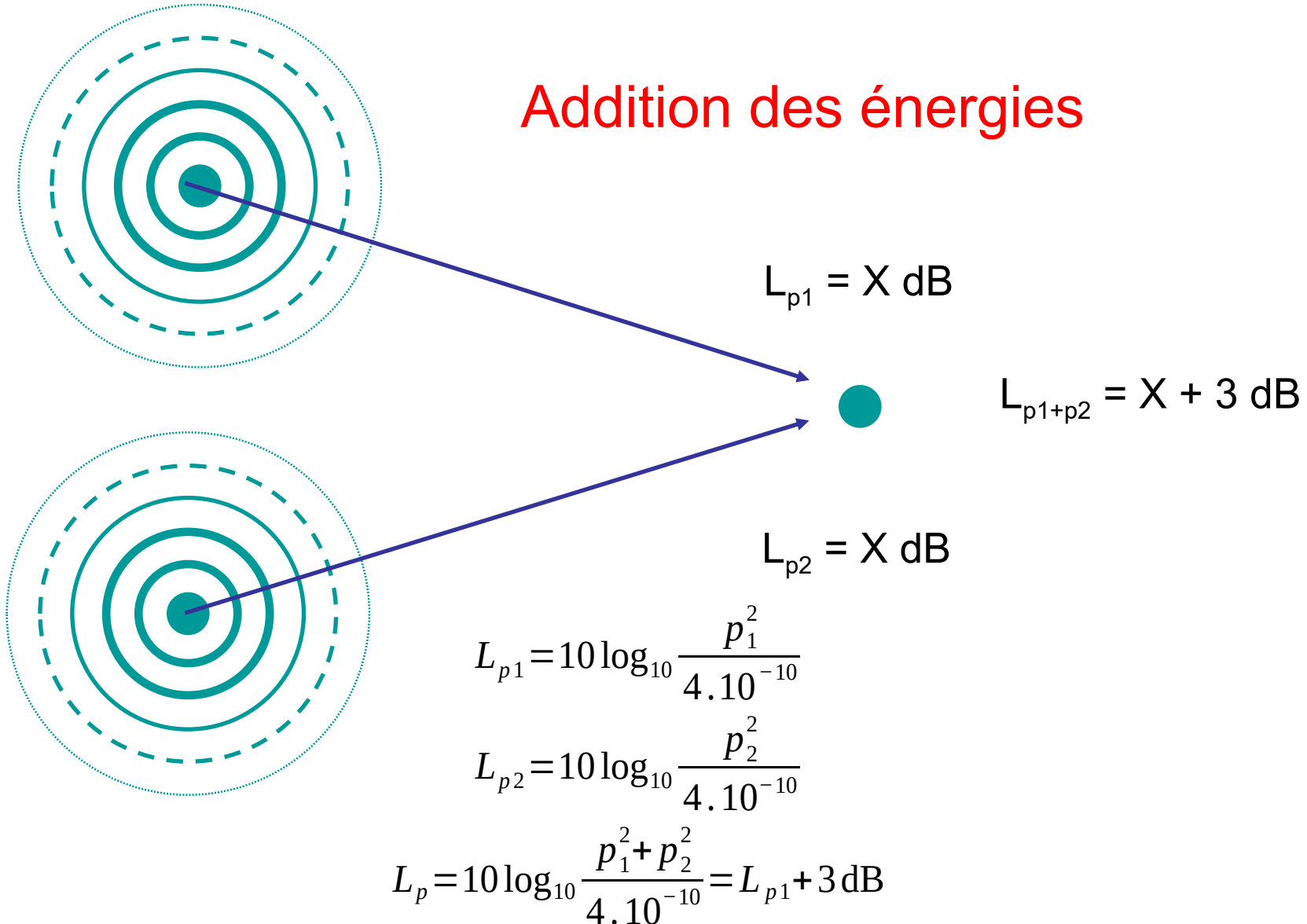
- Si deux sources sont incohérentes : addition des énergies

$$E(p^2(t)) = E(p_1^2(t)) + E(p_2^2(t))$$

$$\text{car } E(p_1(t)p_2(t)) = 0$$

Deux sources sonores incohérentes

Addition des énergies



1.3 Analyse fréquentielle

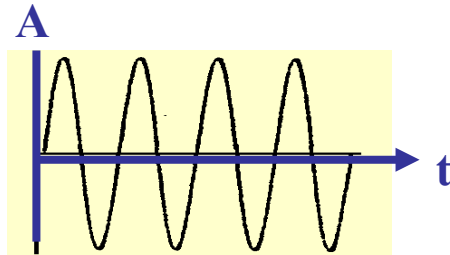
Exemples de sons à différentes fréquences

- 100Hz 
- 500Hz 
- 1000Hz 
- 2000Hz 
- 5000Hz 
- 10000Hz 
- 15000Hz 

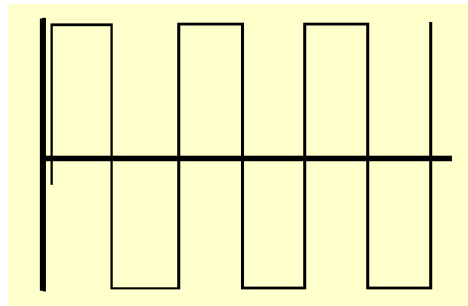
Les différents types de sons

Représentation temporelle

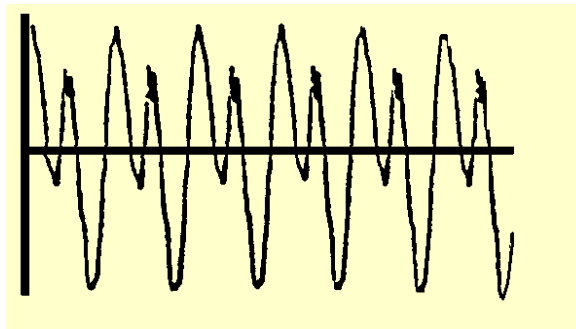
Son pur



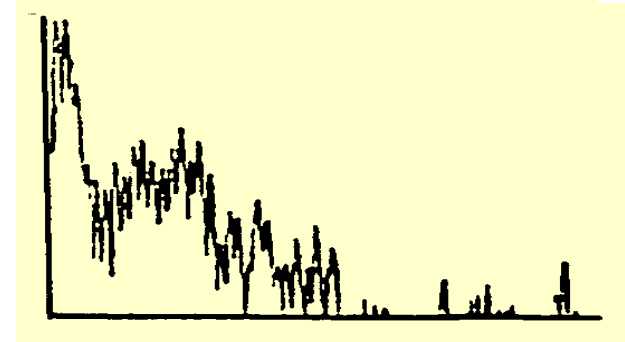
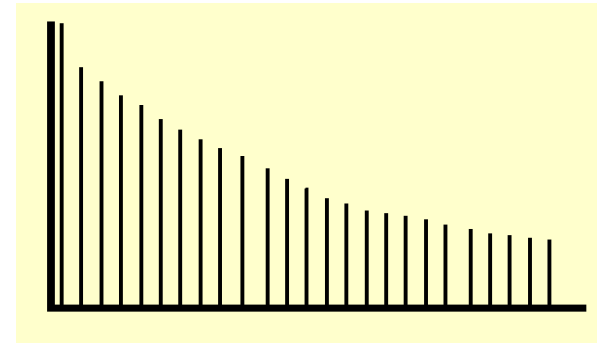
**Onde carré
Périodique**



**Voyelle /i/
Périodique**

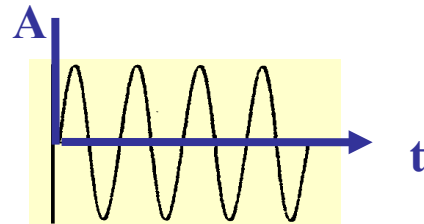


Représentation fréquentielle

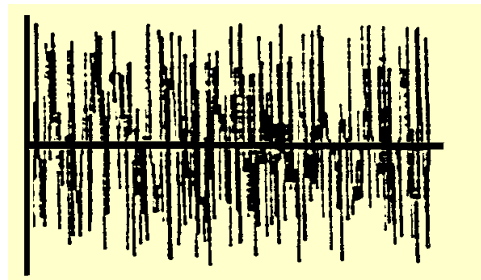


Représentation temporelle

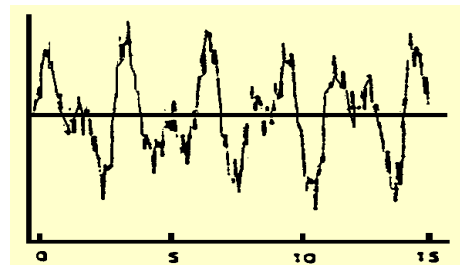
Son pur



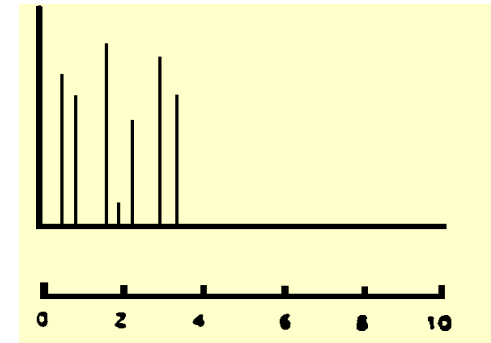
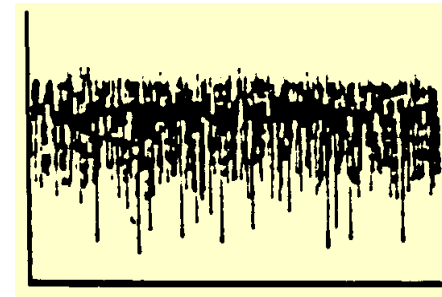
**Bruit blanc
Non périodique**



Apériodique



Représentation fréquentielle

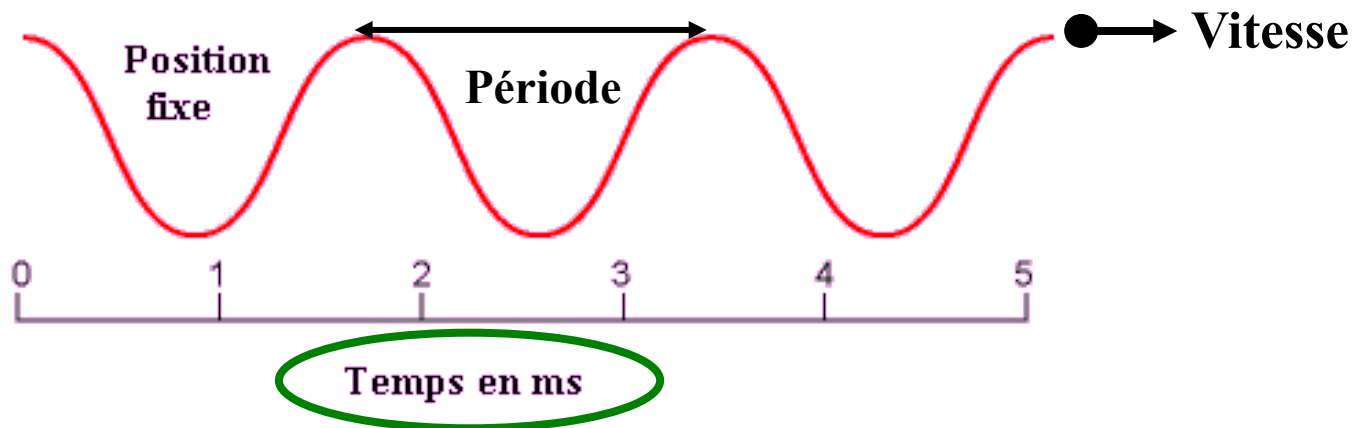


Différents types de sons

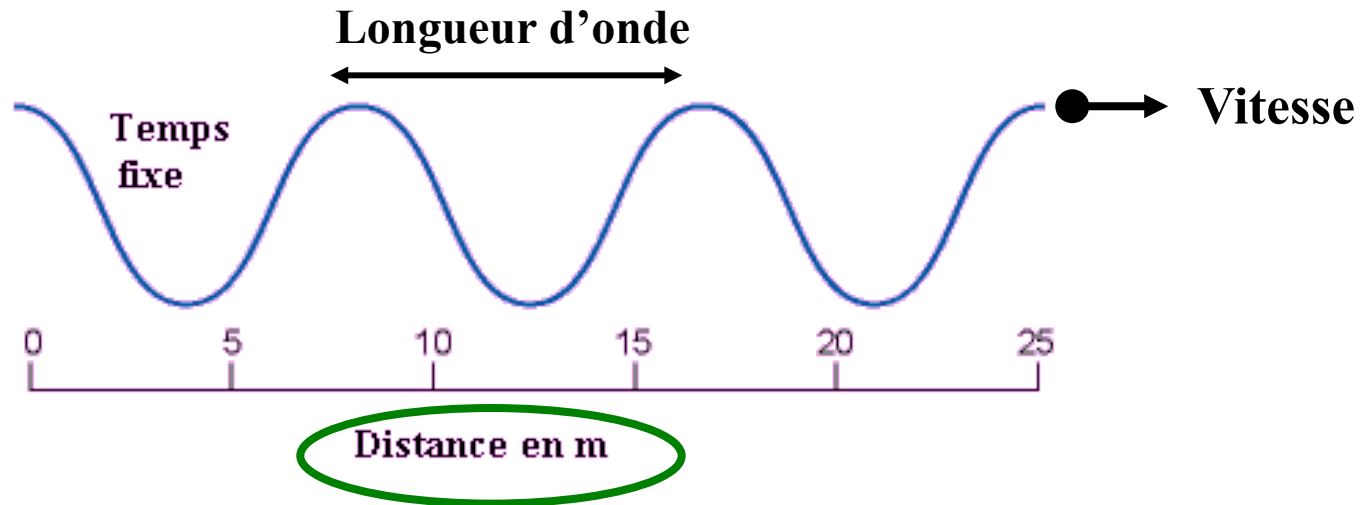
- Harmonique 1000Hz 
- Carrés 1000 Hz 
- Bruit blanc 
- Bruit rose 
- Musique 
- Avions 

1.4 Autres caractéristiques d'une onde sonore

- **Vitesse du son** : vitesse à laquelle la perturbation de pression se propage.
- **Période** : en un point, intervalle de temps entre le passage d'une même hauteur de son.



- **Longueur d'onde** : distance horizontale entre deux pics ou deux creux.



- 100Hz 🎵
- 500Hz 🎵
- 1000Hz 🎵
- 5000Hz 🎵

Quelques grandeurs et relations

1. Période T

2. Vitesse du son c (340m/s air, 1500m/s eau)

3. Fréquence $f = 1/T$

4. Longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$

5. Nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Son et vide

Voix dans l'hélium

Niveaux sonores

2. Equations de l'acoustique

2.1 Les équations de base

Equations de Navier-Stokes

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{r}$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\tilde{\rho} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right] = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \tilde{\sigma}_v + \tilde{\mathbf{f}}$$

- L'équation d'état du fluide reliant la pression au volume (isentropique)

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= f(\tilde{\rho}) \\ &= p_0 + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \right)_0 (\tilde{\rho} - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}^2} \right)_0 (\tilde{\rho} - \rho_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Linéarisation

$$\tilde{\rho}(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t)$$

$$\tilde{p}(x,t) = p_0 + p(x,t)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(x,t) = 0 + \mathbf{v}(x,t)$$

$$\tilde{r}(x,t) = 0 + r(x,t)$$

$$\tilde{f}(x,t) = 0 + f(x,t)$$

$$\rho \ll \rho_0$$

$$p \ll p_0$$

p_0 et ρ_0 Pression et masse volumique de l'atmosphère au repos

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

Linéarisation

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{r} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = r$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\tilde{\rho} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right] = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \tilde{\sigma}_v + \tilde{\mathbf{f}} \quad \longrightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

L'équation d'état du fluide reliant la pression au volume (isentropique)

$$\tilde{p} = f(\tilde{\rho}) = p_0 + \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \right)_0 (\tilde{\rho} - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}^2} \right)_0 (\tilde{\rho} - \rho_0)^2 + \dots \quad \longrightarrow \quad p = \rho c^2$$

Vitesse du son

- Dans l'air
 - $c=331$ m/s à 0°C
 - $c=343$ m/s à 20°C
- Dans l'eau
 - $c=1447$ m/s à 0°C
 - $c=1482$ m/s à 20°C
- Dans l'acier
 - $c=4512$ m/s

Equation des ondes

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{\partial r}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (-\nabla p + \mathbf{f})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Equation de Helmholtz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r}{\partial t} - \nabla f$$

Cas d'un signal harmonique avec $p(t) = \text{Re}(p e^{-i \omega t})$

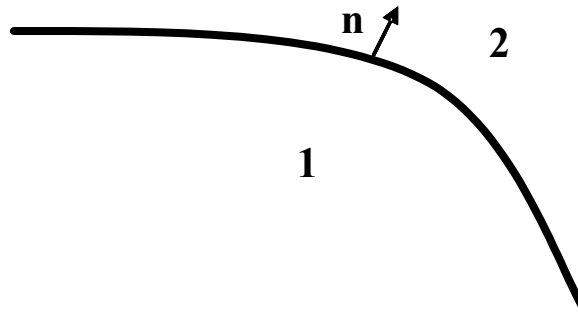
$$\Delta p + k^2 p = i \omega r + \nabla f$$

$k = \frac{\omega}{c}$ Nombre d'onde

$\omega = 2 \pi f$ pulsation

2.2 Conditions aux limites

Conditions d'interface entre deux milieux



Continuité de la vitesse normale

$$V_1 = V_2$$

($v_2=0$ si la surface 2 est rigide)

Continuité de la pression

$$p_1 = p_2$$

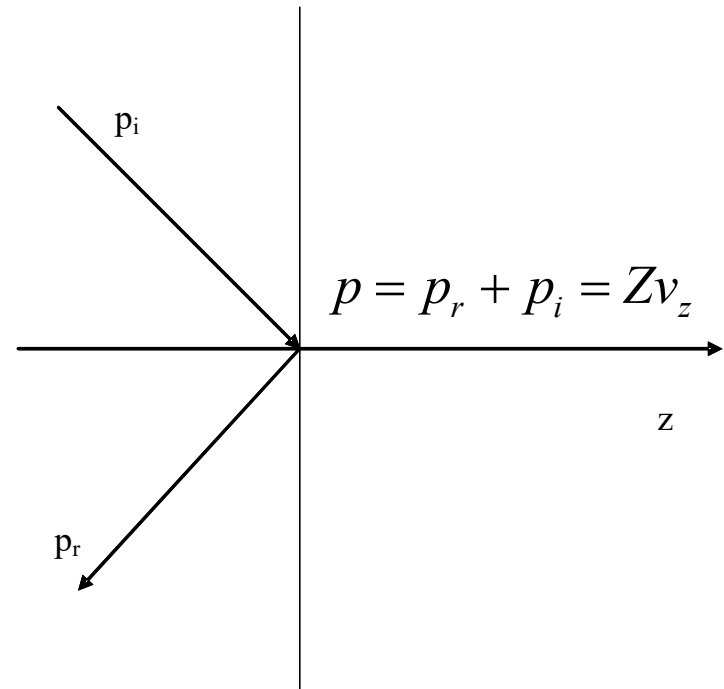
Impédance acoustique

Cas où le second milieu est mal connu et décrit seulement par une impédance

Dans ce cas la condition aux limites est

$$p = Zv$$

Avec Z donnée (mesurée)



Conditions de radiation

Pour un milieu infini

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ quand } r \rightarrow \infty$$

(pour la convention $e^{-i\omega t}$ et en 3D)

- L'énergie va de la source vers l'infini (et non l'inverse)
- Condition aux limites pour les milieux infinis

2.3 Energie acoustique

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) &= \mathbf{v} \cdot (-\nabla p + \mathbf{f}) \\ &= -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ &= -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{pr}{\rho_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial |\mathbf{v}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2 \rho_0 c^2} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{pr}{\rho_0} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{pr}{\rho_0}\end{aligned}$$

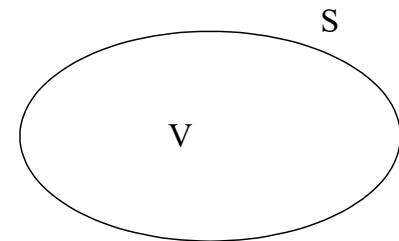
$$w = \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

Densité d'énergie acoustique

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{pr}{\rho_0}$$

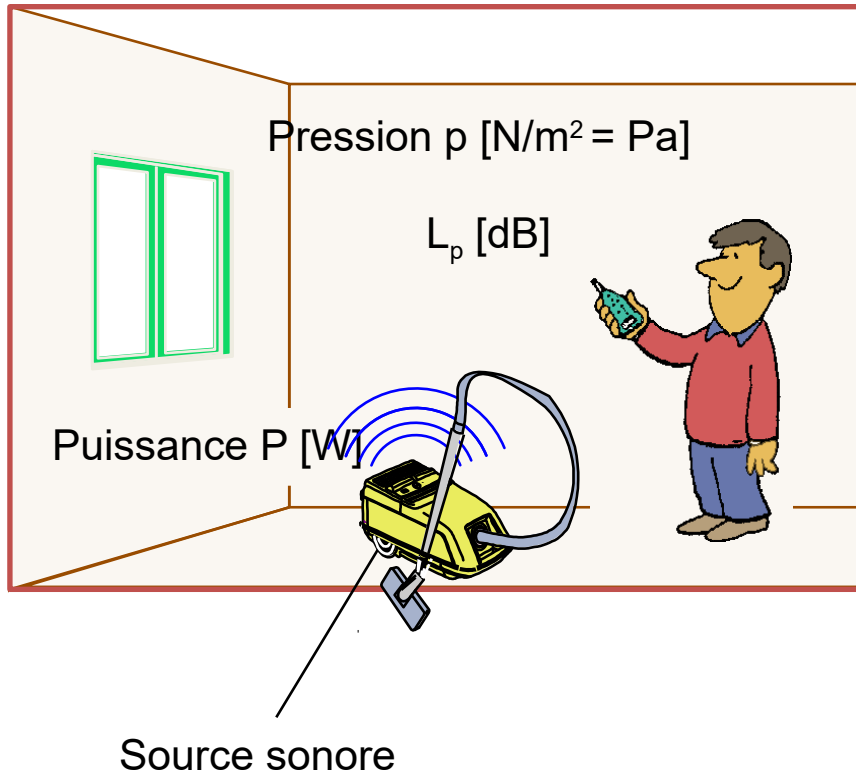
avec $\mathbf{I} = p\mathbf{v}$ Vecteur intensité acoustique

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dx + \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} ds = \int_V \left(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{pr}{\rho_0} \right) dx$$

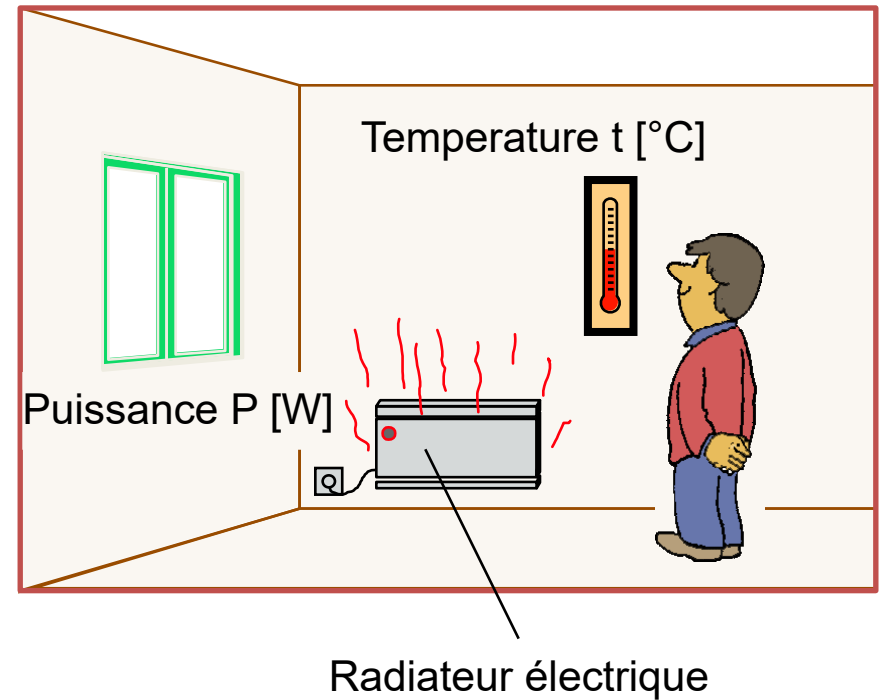


Bilan d'énergie

Pression et puissance



Analogie



- Niveau aussi défini à partir de la puissance acoustique de la source W_s (watts)
- Energie émise par la source pendant la durée T

$$E = T W_s$$

- Niveau sonore

$$L = 10 \log_{10} \frac{W_s}{W_0} \quad \text{avec} \quad W_0 = 10^{-12} W$$

- Intrinsèque à la source de bruit (ne dépend pas de la position)

- Niveau aussi défini à partir de l'intensité

$$I = \overline{p v} = \frac{1}{T} \int_0^T p v dt$$

$$W_s = \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} ds$$

- Niveau sonore

$$L = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{I}|}{I_0} \quad \text{avec}$$

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

- Pour une onde plane dans l'air

$$I = \frac{p^2}{\rho_0 c} \quad \text{avec} \quad \rho c \approx 400$$

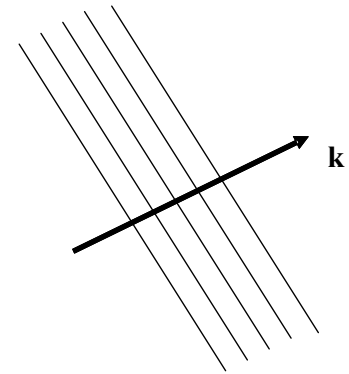
Définitions du niveau sonore équivalentes pour des ondes planes

2.4 Solutions élémentaires

Ondes planes 3D

$$\Delta p + k^2 p = 0$$

Une solution possible est $p(\mathbf{x}) = \text{Re}\left(p_0 e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}\right)$



$\mathbf{k}$ vecteur d'onde tel que $|\mathbf{k}|=k$

La solution en fonction du temps est $p(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\left(p_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}\right)$

Energie et intensité d'une onde plane

$$w = \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

En moyenne

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \right\rangle = \rho_0 \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle = \left\langle \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \right\rangle$$

car

$$p = Zv = \rho_0 cv \quad (\text{seulement pour l'onde plane})$$

Intensité

$$\langle I \rangle = \langle pv \rangle = \rho_0 c \langle v^2 \rangle = c \langle w \rangle$$

Source ponctuelle en dimension 1

$$p'' + k^2 p = -\delta(x - x_s)$$

- Solution générale

$$p(x) = A e^{ik(x-x_s)} + B e^{-ik(x-x_s)}$$

- Conditions de radiation

$$\begin{aligned} p(x) &= a e^{ik(x-x_s)} && \text{pour } x > x_s \\ p(x) &= b e^{-ik(x-x_s)} && \text{pour } x < x_s \end{aligned}$$

- Comportement en x_s

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ ik(a + b) &= -1 \end{aligned}$$

- Solution

$$p(x) = -\frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_s|}$$

Source ponctuelle en dimension 1 / Cas temporel

$$p'' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\delta(x - x_s) \delta(t)$$

- Transformation de Fourier

$$p'' + k^2 p = -\delta(x - x_s)$$

- Solution en fréquence

$$p(x) = -\frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_s|}$$

- Solution en temps

$$p(x, t) = \frac{c}{2} H(ct - |x - x_s|)$$

Sources ponctuelles en 2D et 3D

Solutions de $\Delta_{\mathbf{x}} p + k^2 p = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

Champ de pression en $\mathbf{x}$ produit par une source en $\mathbf{y}$

On montre que

En 3D
$$p(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

En 2D
$$p(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \quad H_0 = J_0 + iY_0$$

Source sphérique 3D

Equation des ondes en sphérique

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct)$$

Ondes divergente et convergente

Source monopolaire

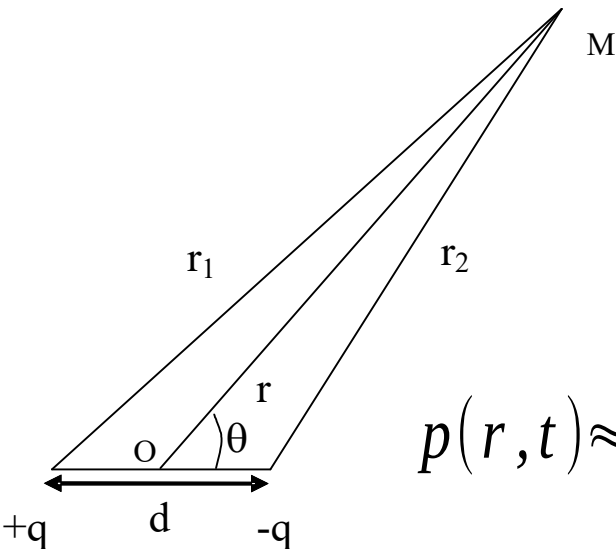
- Exemples:
 - Sphère pulsante
 - Haut-parleur avec baffle
 - Fluide turbulent traversant une petite ouverture

Source dipolaire

Équivalent à deux monopôles en opposition de phase

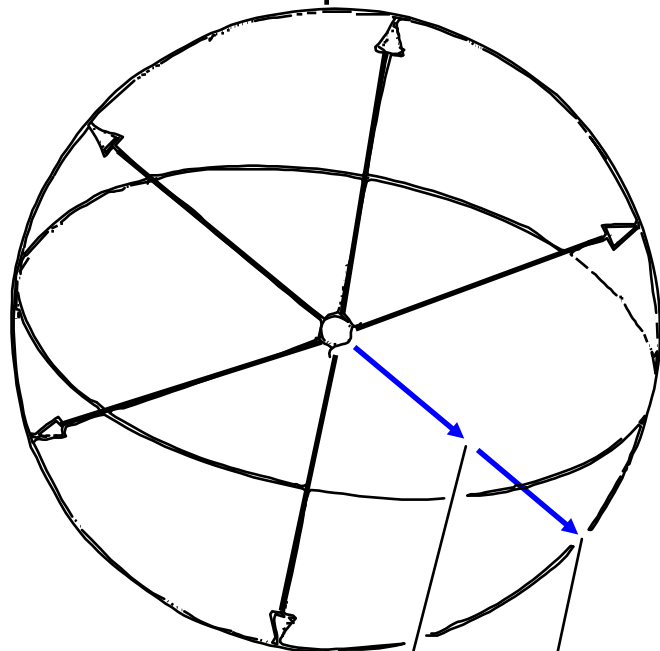
Exemples:

- haut-parleur sans baffle
- Pales d'une turbine
- Jets de fluide chaud dans un milieu froid



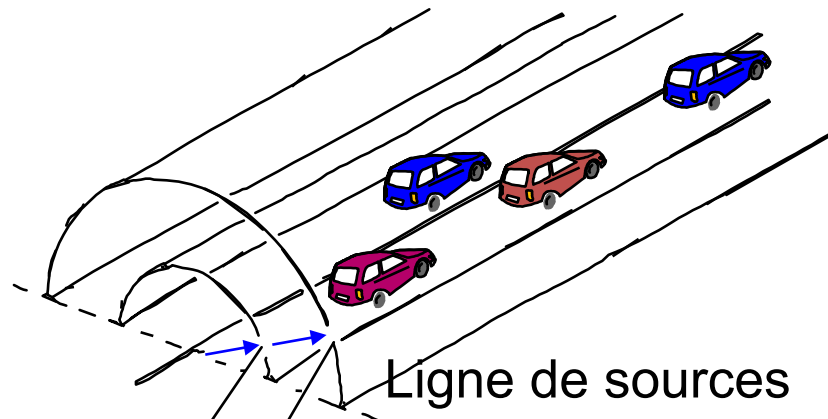
$$p(r, t) \approx \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4 \pi r} \frac{\partial q}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) dr$$

Source ponctuelle



$r: L_p$

$2r: L_p - 6 \text{ dB}$

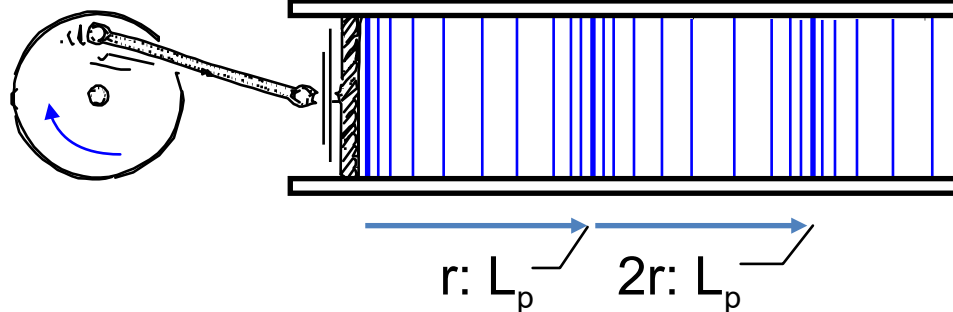


Ligne de sources

$r: L_p$

$2r: L_p - 3 \text{ dB}$

Onde plane



$r: L_p$

$2r: L_p$

Ondes planes et ponctuelles

Directivité d'une source

3. Rayonnement acoustique

Instruments de musique

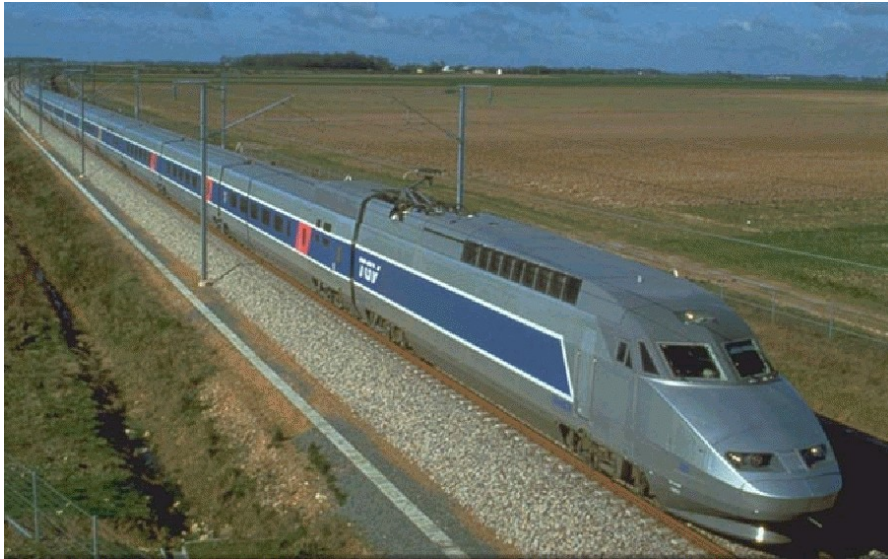


**Compréhension
des sources
sonores**

Machines, moteurs



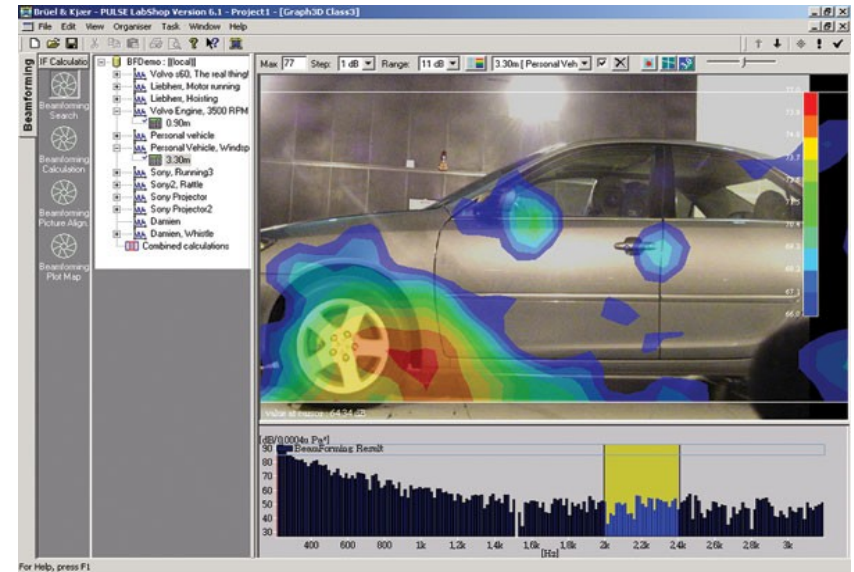
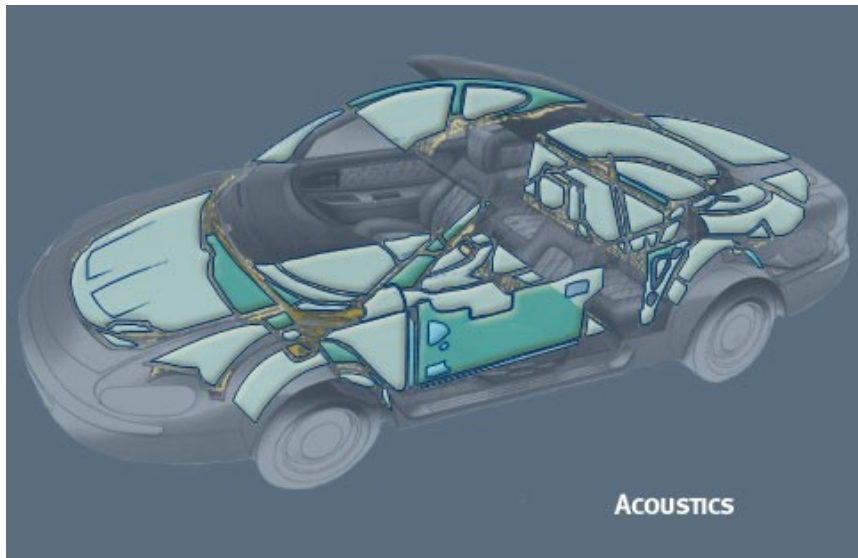
Train



Avion



Automobile



Problème de rayonnement

Trouver la pression dans le fluide telle que

En fréquence

$$\Delta p + k^2 p = 0 \text{ dans } \Omega_f$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i \rho_0 \omega v_0 \text{ sur } \partial \Omega_f$$

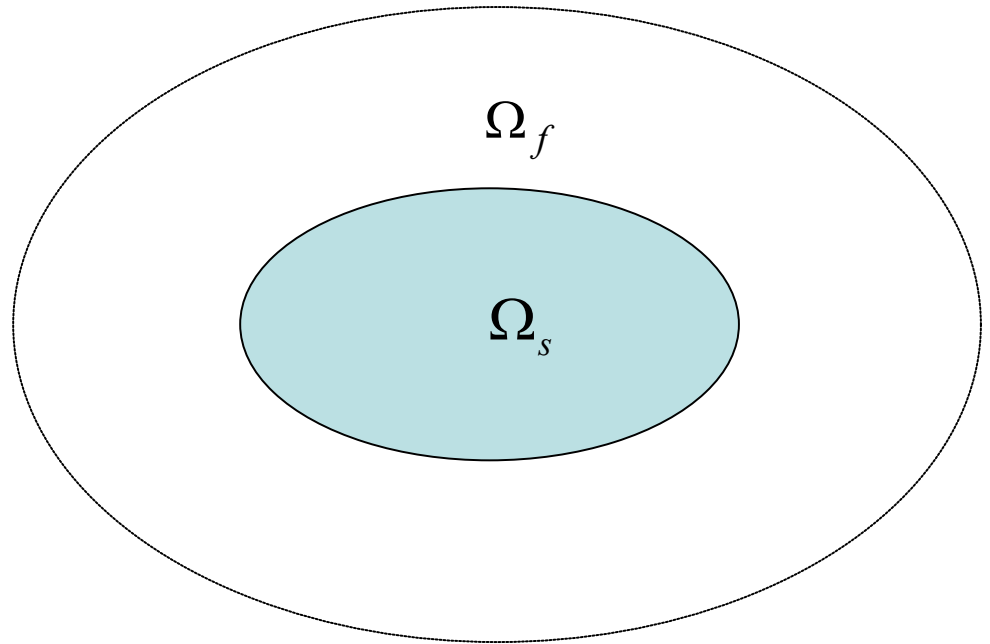
$$\frac{\partial p}{\partial n} - i k p = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ à l'infini}$$

En temps

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ dans } \Omega_f$$

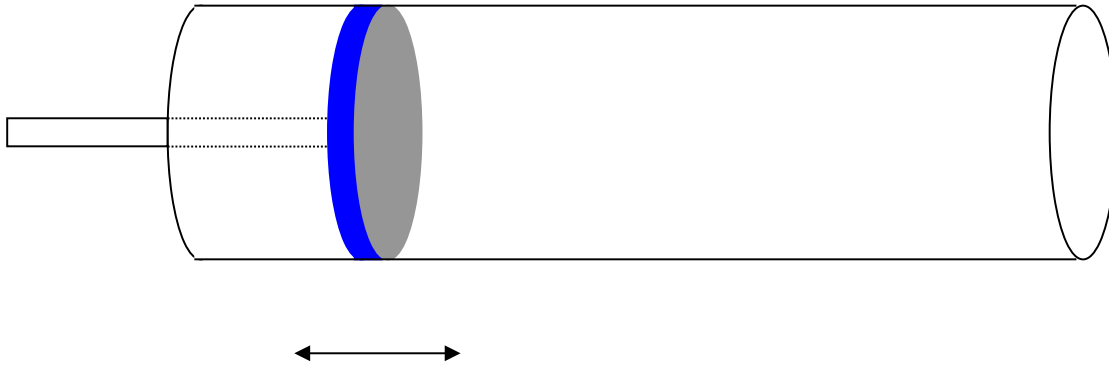
$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} \text{ sur } \partial \Omega_f$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ à l'infini}$$



Rayonnement d'un piston

- Pression uniforme
- Source mouvement du piston



$$v_p(t) = v_0 \cos(\omega t)$$

Le mouvement du piston est supposé donné par

$$v_p(t) = v_0 \cos(\omega t)$$

Mouvement du fluide

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Les pressions et vitesses sont données par

$$p(x, t) = \operatorname{Re} \left(P e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

$$v(x, t) = \operatorname{Re} \left(V e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

$$V = v_0$$

$$P = \rho_0 c v_0$$

En temps

$$p(x, t) = \rho_0 c v_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$v(x, t) = v_0 \cos(kx - \omega t)$$

Puissance rayonnée

$$\begin{aligned} P_{\text{uis}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c v_0 \cos(kx - \omega t) v_0 \cos(kx - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 c v_0^2 \\ &= \frac{1}{2} Z v_0^2 \end{aligned}$$

Cas d'une sphère avec une surface uniforme

Sphère vibrant uniformément sur sa surface : symétrie sphérique

$$p(r) = p(a) e^{ik(r-a)} \frac{a}{r}$$

La vitesse des points de la surface de la sphère est donnée par

$$-i \rho_0 \omega v + \frac{dp}{dr} = 0$$

$$v(r) = \frac{a p(a)}{i \rho_0 \omega r^2} (ikr - 1) e^{ik(r-a)}$$

Sur la surface de rayon a , nous avons

$$p(a) = \frac{i \rho_0 \omega a}{ika - 1} v(a)$$

La puissance rayonnée par la sphère de surface $S=4\pi r^2$ est donc

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} S \operatorname{Re}(p^* v) \\ &= \frac{1}{2} S \operatorname{Re}\left(\frac{-i \rho_0 \omega a}{-ika - 1} |v|^2\right) \\ &= \frac{1}{2} S |v|^2 \operatorname{Re}\left(i \rho_0 \omega a \frac{1 - ika}{1 + (ka)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} S |v|^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{2} S |v|^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}$$

- Le rayonnement est faible quand $ka < 1$ soit

$$a < \frac{\lambda}{2\pi}$$

- Le résultat est en fait bien plus général.
- Les objets de taille petite par rapport à la longueur d'onde rayonnent mal le son.

Exemples de rayonnement

Rayonnement d'un objet à différentes fréquences

Directivité du rayonnement

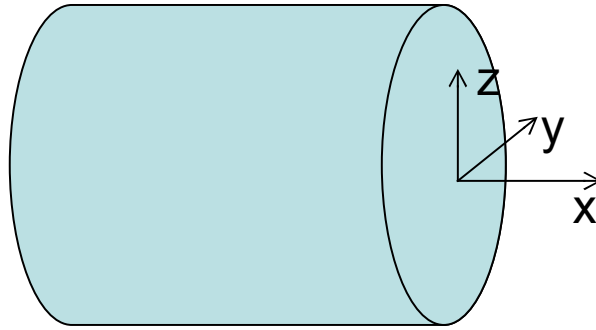
- Problème très important en pratique
- Difficile à calculer
- Besoin de méthodes numériques (EF ou Equation intégrale)

4.Guides d'ondes

Cas où une dimension est beaucoup plus grande que les autres



Problème : décrire la propagation dans le guide



Pour un guide de section uniforme, on cherche une solution de la forme

$$p(x, y, z) = a_n(x) \Psi_n(y, z)$$

p doit vérifier l'équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = 0$$

$$\frac{d^2 a_n}{dx^2} \Psi_n + a_n \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} \right) + k^2 a_n \Psi_n = 0$$

$$\frac{d^2 a_n}{dx^2} \Psi_n + a_n \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} \right) + k^2 a_n \Psi_n = 0$$

$$\frac{1}{a_n} \frac{d^2 a_n}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_n} \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} \right) + k^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} + \alpha_n^2 \Psi_n = 0$$

+ C.L. sur les bords du guide
(rigide)

$$\frac{d^2 a_n}{dx^2} + (k^2 - \alpha_n^2) a_n = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} + \alpha_n^2 \Psi_n = 0$$

+ C.L. sur les bords du
guide

Problème de calcul de valeurs propres et de
fonctions propres

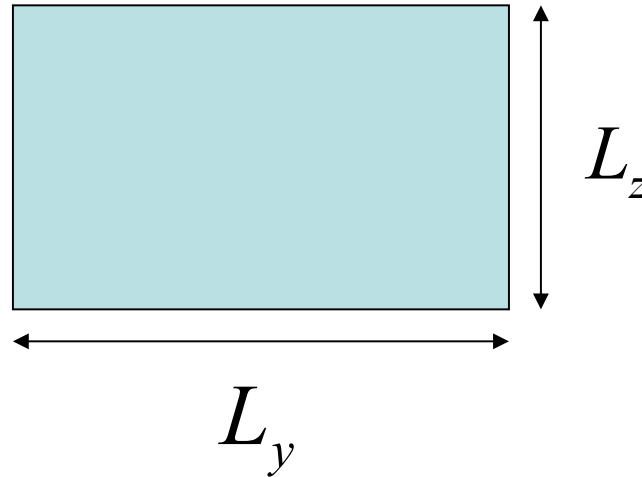
Solution : suite infinie de couples $(\alpha_n, \Psi_n(y, z))$

$$\alpha_n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{S} \iint \Psi_n(y, z) \Psi_m(y, z) dy dz = \delta_{nm}$$

orthonormée

Cas d'une section rectangulaire



$$\Psi_{nm}(y, z) = K_{nm} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L_z}\right)$$

$$\alpha_{nm}^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_z}\right)^2 \right]$$

Fréquence de coupure

$$\frac{d^2 a_{nm}}{dx^2} + (k^2 - \alpha_{nm}^2) a_{nm} = 0$$

$$a_{nm}(x) = e^{i\beta_{nm}x} \quad \text{si } \alpha_{nm}^2 < k^2$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \alpha_{nm}^2}$$

Mode propagatif

$$a_{nm}(x) = e^{-\beta_{nm}x} \quad \text{si } \alpha_{nm}^2 > k^2$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\alpha_{nm}^2 - k^2}$$

Mode évanescent

Seulement un nombre fini de modes propagatifs

Au moins un mode
propagatif si les
parois sont rigides

$$\alpha_0 = 0$$

$$\Psi_0 = 1$$

Onde plane

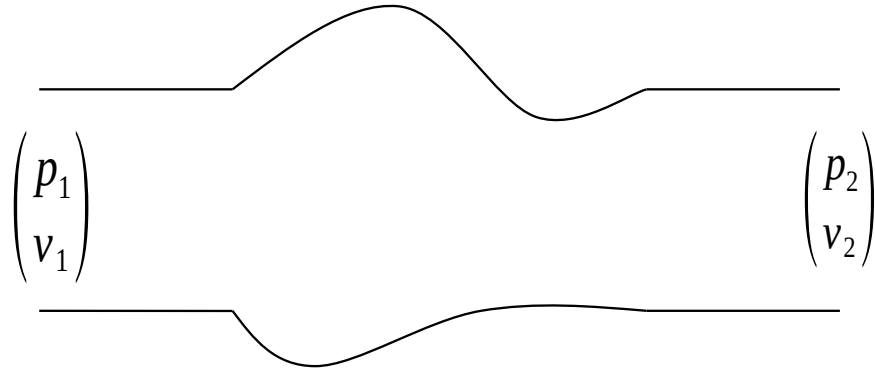
Pour un mode n donné,
ce mode est propagatif si
Il est évanescent sinon

$$\omega > \alpha_{nm} c$$

Fréquence de coupure

$$f_{nm} = \frac{1}{2\pi} \alpha_{nm} c$$

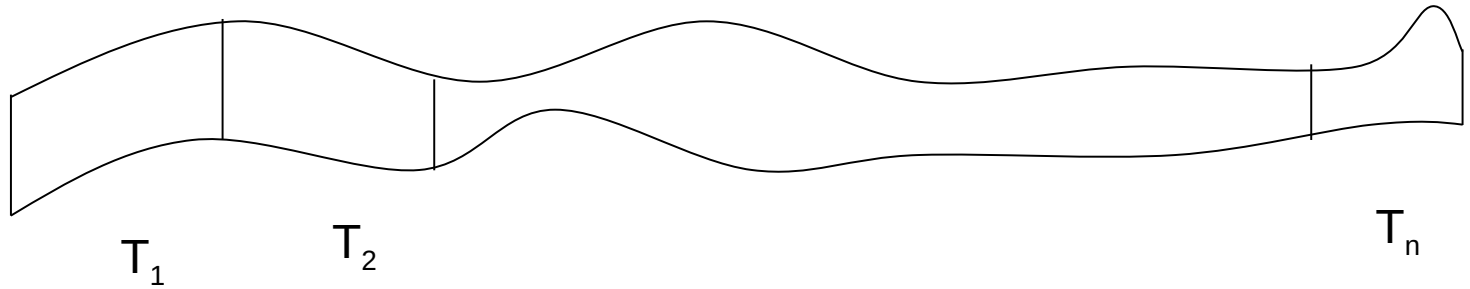
Cas d'une discontinuité



$$\begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = T_{21} \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

T_{21} matrice de transfert

Cas de guides complexes



$$T = T_n \cdots T_2 T_1$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Calcul du comportement de silencieux

Silencieux dissipatifs



FIN