

8. Torsion d'un arbre cylindrique

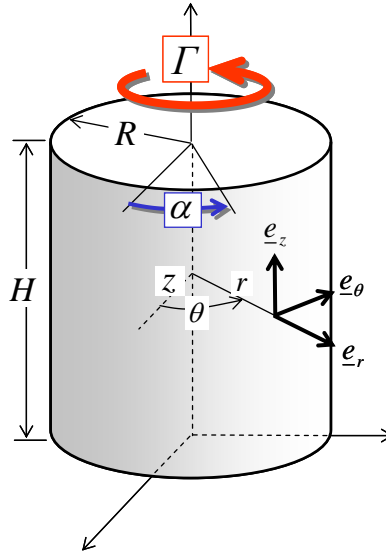


Figure 27

Un solide ayant la forme d'un cylindre circulaire de hauteur H et de rayon R (figure ci-dessus), est constitué d'un matériau homogène et isotrope obéissant à une loi de comportement *élastique linéaire* (coefficients de Lamé λ et μ), *parfaitement plastique standard*, le critère de plasticité étant celui de *von Mises* dont la fonction de charge s'écrit

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} - k \leq 0 \quad (4.236)$$

Ce solide est soumis à un *processus de chargement* défini par les données suivantes :

◇ face *inférieure* du cylindre *encastrée* :

$$\underline{\underline{\xi}}^d(r, \theta, z = 0; t) = 0 \quad (4.237)$$

◇ face *supérieure* soumise à une rotation d'angle $\alpha(t)$ autour de l'axe Oz du cylindre :

$$\underline{\underline{\xi}}^d(r, \theta, z = H; t) = \alpha(t) r \underline{e}_\theta \quad (4.238)$$

◇ surface *latérale libre d'effort* :

$$\underline{\underline{T}}^d(r = R, \theta, z; t) = 0 \quad (4.239)$$

◇ les *forces de volume* sont nulles.

8.1. Phase élastique.

L'état initial du cylindre étant *naturel* ($\underline{\underline{\sigma}} = 0$ pour $\alpha(t = 0) = 0$), on augmente progressivement l'angle de rotation $\alpha(t)$. Le champ de déplacement solution de ce problème d'évolution en *phase élastique* est alors donné par :

$$\underline{\underline{\xi}}(r, \theta, z; t) = \alpha(t) r \frac{z}{H} \underline{e}_\theta \quad (4.240)$$

qui est bien cinématiquement admissible, tandis que le champ de contrainte solution est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r, t) \{ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \} \quad (4.241)$$

avec

$$\tau(r, t) = \mu \alpha(t) \frac{r}{H} \quad (4.242)$$

L'effort et le moment résultants appliqués sur la face supérieure du cylindre sont :

$$\underline{F} = \int_{S(z=H)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau(r, t) \underline{e}_\theta r dr d\theta = \underline{0} \quad (4.243)$$

$$\underline{\Gamma}_O = \int_{S(z=H)} (r \underline{e}_r) \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z) dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mu \alpha(t) \frac{r^3}{H} \underline{e}_z dr d\theta = \mu \alpha(t) \frac{\pi R^4}{2H} \underline{e}_z \quad (4.244)$$

d'où la valeur du *couple de torsion* :

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \mu \alpha(t) \frac{\pi R^4}{2H}} \quad (4.245)$$

Le critère de plasticité s'écrit en tout point :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s}} - k = |\tau(r; t)| - k \leq 0 \quad \forall r \in [0, R] \quad (4.246)$$

soit

$$\left| \mu \alpha(t) \frac{r}{H} \right| - k \leq 0 \quad \forall r \in [0, R] \quad (4.247)$$

La contrainte de cisaillement étant maximale sur le *pourtour du cylindre* ($r=R$), le critère γ est donc atteint en premier lieu. Les valeurs correspondantes de l'angle et du couple de torsion sont :

$$\boxed{\alpha^e = \frac{kh}{\mu R} \quad , \quad \Gamma^e = \frac{k\pi R^3}{2}} \quad (4.248)$$

8.2. Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au delà de la limite d'élasticité ($\alpha \geq \alpha^e$), la solution en déplacement est toujours recherchée sous la forme (4.240), tandis que le champ de contrainte est de la forme (4.241) avec :

$$\tau(r,t) = \begin{cases} k \frac{r}{\rho(t)} & 0 \leq r \leq \rho(t) \\ k & \rho(t) \leq r \leq R \end{cases} \quad (4.249)$$

c'est-à-dire que le cylindre est décomposé en un *noyau élastique* de rayon ρ et une *couronne circulaire plastique*, comme schématisé sur la figure 28.

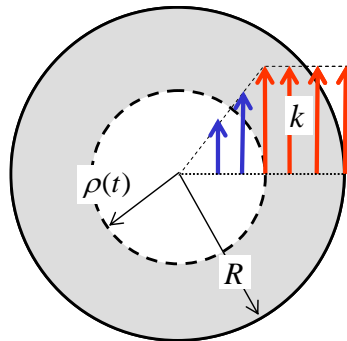


Figure 28

Le champ de déformation est donné, en tout point du cylindre, par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(r;t) = \frac{\alpha R}{2H} \cdot (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (4.250)$$

✓ Dans le *noyau central*, on retrouve, par la *loi de comportement élastique*, le champ de contrainte de la *phase élastique*:

$$\underline{\underline{\sigma}}(r; t) = \mu\alpha(t) \frac{r}{H} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (4.251)$$

et donc par comparaison avec (4.249) :

$$\boxed{\rho(t) = \frac{kH}{\mu\alpha(t)} = R \frac{\alpha^e}{\alpha(t)}} \quad (4.252)$$

✓ Dans la *couronne plastique* : $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{0}}$ d'où $\underline{\underline{d}}^e = \underline{\underline{0}}$ et donc :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^p \quad (4.253)$$

avec, compte tenu de l'expression du champ de déplacement

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\dot{\alpha}R}{2H} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (4.254)$$

ainsi que, en vertu de la *règle d'écoulement plastique* :

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{s}} = \dot{\lambda} k (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (4.255)$$

Par suite :

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{\dot{\alpha}R}{2Hk} \geq 0} \quad (4.256)$$

ce qui démontre la positivité du multiplicateur plastique.

Les champs de contrainte et de déplacement sont respectivement *statiquement* et *cinématiquement admissibles*, et sont associés en tout point par la loi de comportement élastoplastique. Ils représentent donc une solution du problème d'évolution élastoplastique, unique en ce qui concerne l'évolution en contrainte.

La valeur correspondante du *couple de torsion* appliqué sur le cylindre est donnée par :

$$\Gamma = \left(\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{kr^3}{\rho} dr d\theta + \int_\rho^R \int_0^{2\pi} kr^2 dr d\theta \right) = k\pi \left(\frac{2R^3}{3} - \frac{\rho^3}{6} \right) \quad (4.257)$$

soit en tenant compte de (4.252) :

$$\Gamma(\alpha) = 2 \frac{\pi k R^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^e}{\alpha} \right)^3 \right) \quad (4.258)$$

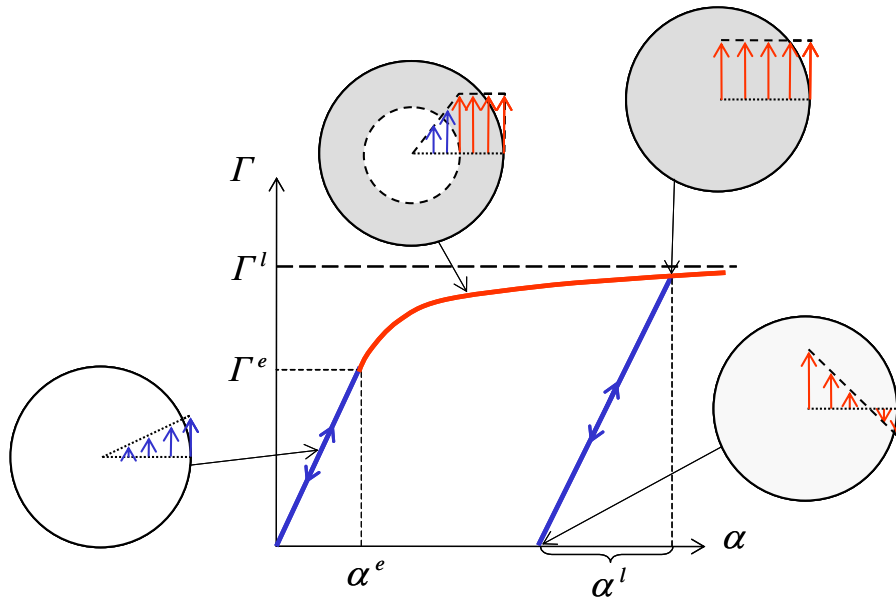


Figure 29

La courbe d'équation $\Gamma(\alpha)$ est représentée sur la figure 29. Le couple de torsion tend vers la valeur asymptotique

$$\Gamma^l = 2 \frac{\pi k R^3}{3} \quad (4.259)$$

lorsque l'angle α tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque le rayon ρ du noyau élastique tend vers 0, de sorte que tout le cylindre est plastifié. La *charge limite* (4.259) est donc atteinte de manière asymptotique.

8.3. Décharge ; état résiduel

Partant d'un état pour lequel le couple de torsion est pratiquement égal à la charge limite Γ^l , on fait décroître ce couple jusqu'à la valeur nulle (*décharge totale*). On fait l'hypothèse de la *décharge élastique* (hypothèse dont on vérifiera la validité par la suite) et on désigne par $\underline{\underline{\Delta\sigma^{el}}}$ le champ de contrainte élastique correspondant à l'application d'un couple $\Delta\Gamma = -\Gamma^l$.

Le champ de contrainte *résiduel* vaut alors (figure 30) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\sigma}}^l + \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} \quad (4.260)$$

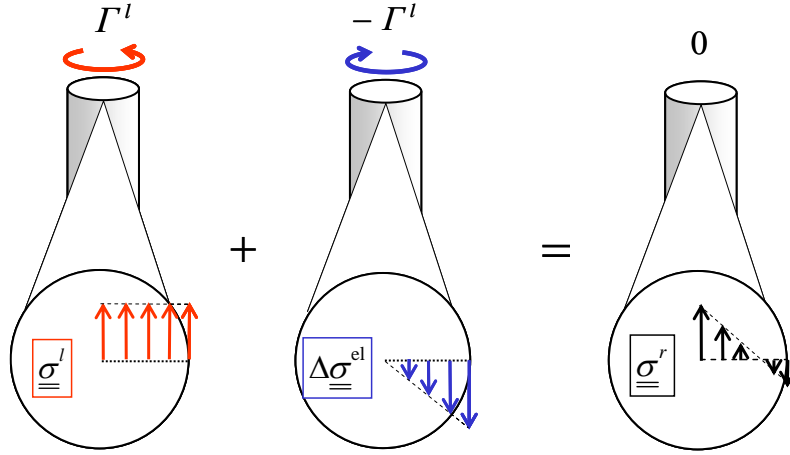


Figure 30

où $\underline{\underline{\sigma}}^l$ est le champ de contrainte correspondant à l'évolution en charge *élastoplastique* jusqu'à Γ^l :

$$\underline{\underline{\sigma}}^l = k (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta) \quad (4.261)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} &= -\mu\alpha^l \frac{r}{H} (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta) = -\Gamma^l \frac{2r}{\pi R^4} (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta) \\ &= -4 \frac{kr}{3R} (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta) \end{aligned} \quad (4.262)$$

d'où (figure 30) :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^r = k(1 - 4r/3R)(\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_z + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_\theta)} \quad (4.263)$$

On vérifie bien que ce champ de contrainte résiduel est en équilibre avec un couple de torsion nul : il s'agit d'un champ de contrainte *auto-équilibré*, ou d'*autocontrainte*.

Pour justifier l'hypothèse de décharge élastique, il faut enfin vérifier que ce champ de contrainte reste plastiquement admissible tout au long de la décharge :

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s}} - k = k \left| 1 - \frac{4r}{3R} \right| - k \leq 0 \quad \forall r \in [0, R] \quad (4.264)$$

(on remarquera que le critère est atteint en $r = 0$).
