Exercices “Flots et Coupes” : Correction

19 octobre 2016

1. C’est directement un problème de b-flot de coût minimum, dans le réseau de transport. Les entrepôts e sont des sommets sources avec $b(e) = o(e)$, les points de vente sont des sommets puits avec $b(v) = -d(v)$, et les autres sommets u du réseau sont affecté d’un $b(u) = 0$. La somme des b sur les sommets est bien nulle (condition pour l’application des algorithmes de b-flot). La capacité $u(a)$ est $+\infty$ pour chaque arc a (on peut supposer le réseau de transport surcapacitaire par rapport aux besoins de l’entreprise) et les coûts unitaires sont ceux de l’énoncé.
2. C’est un problème de b-flot sur un graphe biparti complet dont les sommets sont :
   — les tas i et un tas fictif i^*
   — les trous j et un trou fictif j^*,
   et dont tous les arcs vont des tas vers les trous. On pose $b(i) = s_i$ et $b(i^*) = \max(0, \sum_j t_j - \sum_i s_i)$. On pose de même $b_j = -t_j$ et $b(j^*) = \max(0, \sum_i s_i - \sum_j t_j)$. Le coût unitaire est d_{ij} sur l’arc (i, j) et 0 sur les arcs (i^*, j) et (i, j^*).
3. On définit le graphe orienté $D = (V, A)$ de la manière suivante. On construit d’abord un chemin élémentaire à n sommets, numérotés de 1 à n depuis la source jusqu’au puits (ces sommets représentent les villes, et les arcs les trajets successifs du bus). Ensuite, pour chaque couple d’entiers (i, j), avec $1 \leq i < j \leq n$, on introduit un sommet v_{ij} et on ajoute un arc (v_{ij}, i) et un arc (v_{ij}, j). Voilà pour le graphe.

   On met une capacité B sur les arcs (i, j) du chemin, et une capacité $+\infty$ sur les autres arcs. On met un coût nul partout, excepté sur les arcs (v_{ij}, i) pour lesquels on met un coût $-p_{ij}$. Enfin, on définit $b(v_{ij}) = d_{ij}$ pour tout $i < j$ et $b(j) = -\sum_{i=1}^{j-1} d_{ij}$ pour tout j. Le problème de l’énoncé est précisément le problème de b-flot de coût minimum sur ce graphe. L’équivalence des deux problèmes se prouve formellement comme suit.

   Etant donnée une solution au problème de l’énoncé, on construit une solution réalisable de même coût au problème de b-flot : sur un arc (v_{ij}, i) on met un flot égal au nombre de passagers montant en i et souhaitant se rendre en j ; sur un arc (v_{ij}, j) on met un flot égal au nombre de passagers souhaitant faire le trajet $i \to j$, mais ne montant pas dans le bus ; sur un arc $(i, i+1)$ on met le nombre de passagers dans le bus sur le trajet $i \to i+1$. On vérifie aisément que cela forme un b-flot de même coût.

   Réciproquement, étant donnée une solution au problème de b-flot (que l’on peut supposer entière car les paramètres de capacité et les b le sont), on construit une solution réalisable de même coût au problème de départ en faisant monter en i, pour chaque $j > i$, un nombre de passagers égal à la valeur du flot sur l’arc (v_{ij}, i). On ne dépasse pas la capacité du bus car sur l’arc $(i, i+1)$ on a bien alors le nombre total de passagers montés en i ou avant, diminué du nombre de passagers descendus en i (d’après la loi de Kirchoff). C’est donc une solution réalisable au problème de départ, et le coût est trivialement le même.
4. Quitte à ajouter un parti des non-affiliés, avec $u_k = +\infty$, on peut suppose que tout citoyen est membre d’un unique parti politique. On note C l’ensemble des clubs, I l’ensemble des citoyens et P l’ensemble des partis. On définit alors un graphe orienté $D = (V, A)$ de la manière suivante. On pose $V = C \cup I \cup P \cup \{t\}$, où t est un sommet additionnel représentant un puits. On introduit ensuite un

arc (c, i) pour tout citoyen i membre du club c (avec une capacité égale à 1) et un arc (i, p) pour tout citoyen i membre du parti p (avec une capacité égale à u_k). On met $b(c) = 1$ pour tout $c \in C$, $b(i) = 0$ pour tout $i \in I$, $b(p) = 0$ pour tout $p \in P$ et enfin $b(t) = -|C|$. Le problème de l'énoncé est alors exactement le problème d'existence d'un b-flot dans ce graphe. L'équivalence des deux problèmes se prouve formellement comme suit. `To be completed`(On utilise la propriété d'intégrité des flots).

5. Munissons chaque are de D d'une capacité 1. Le théorème d'intégrité combiné avec le théorème de décomposition des flots en chemins assure que le nombre maximum de s-t chemins arc-disjoints est égal à la valeur d'un flot maximum. D'autre part, un sous-ensemble d'arcs intersectant tout s-t chemin est un ensemble déconnectant s de t, et il est prouvé dans le cours qu'un tel ensemble minimum est une s-t coupe de capacité minimum. Le théorème max-flot min-coupe permet alors de conclure.

6. *(La solution n'est pas unique)* On construit le graphe $D = (V, A)$ avec un sommet s pour le dépôt, un sommet pour chaque o_i et chaque d_i et un sommet t pour la fin de journée. Les arcs sont les couples (s, o_i) et (o_i, d_i) pour toutes les courses i. On ajoute tous les couples (d_j, o_i) s'il est possible à un taxi de faire la course i après la course j (concrètement, si $h_i \geq t_j + \tau_{ji}$). Enfin, on ajoute l'arc (s, t). Les capacités sont les suivantes :
   - (s, o_i) : capacité supérieure $= +\infty$ et capacité inférieure $= 0$.
   - (o_i, d_i) : capacité supérieure $= +\infty$ et capacité inférieure $= 1$.
   - (d_j, o_i) : capacité supérieure $= +\infty$ et capacité inférieure 0.
   - (s, t) : capacité supérieure $= +\infty$ et capacité inférieure 0.

   Les coûts sont les suivants :
   - (s, o_i) : 0.
   - (o_i, d_i) : 0.
   - (d_j, o_i) : 0
   - (s, t) : 1.

   Enfin, on définit $b(s) = p = -b(t)$ et $b(o_i) = b(d_i) = 0$ pour toute course i.

   Le théorème d'intégrité combiné avec le théorème de décomposition des flots en chemins permet alors de vérifier que le problème de l'énoncé est équivalent au problème de b-flot de coût minimum dans ce graphe. Cela se prouve formellement comme suit. `To be completed`

7.

8. On considère le graphe biparti complet dont un côté est formé des lignes et l'autre des colonnes. On oriente les arêtes des colonnes vers les lignes. On ajoute un sommet source s avec un arc (s, i) pour chaque ligne i. On ajoute un sommet puits t avec un arc (j, t) pour chaque colonne j. On ajoute enfin un arc (s, t).

   On met sur chaque arc
   - (i, j) : une capacité inférieure égale à $\lfloor a_{ij} \rfloor$ et une capacité supérieure égale à $\lceil a_{ij} \rceil$,
   - (s, i) : une capacité inférieure égale à $\lfloor \sum_j a_{ij} \rfloor$ et une capacité supérieure égale à $\lceil \sum_j a_{ij} \rceil$,
   - (j, t) : une capacité inférieure égale à $\lfloor \sum_i a_{ij} \rfloor$ et une capacité supérieure égale à $\lceil \sum_i a_{ij} \rceil$,
   - (s, t) : une capacité inférieure égale à 0 et une capacité supérieure égale à 1.

   Posons $b(s) = \sum_{i,j} a_{ij} = -b(t)$ et $b(i) = b(j) = 0$ pour toute ligne i et toute colonne j.

   Remarquons maintenant que la fonction $f : A \to \mathbb{R}_+$ definie par $f(i, j) = a_{ij}$, $f(s, i) = \sum_j a_{ij}$, $f(j, t) = \sum_i a_{ij}$ et $f(s, t) = 0$ est un b-flot. Le théorème d'intégrité des flots assure alors qu'il existe un b-flot $g : A \to \mathbb{Z}$ sur le même graphe. On vérifie alors immédiatement que $g(i, j)$ est une matrice "arrondie" satisfaisant les conditions de l'énoncé (remarquons que l'on prouve plus : la somme totale des entrées de la matrice varie de moins d'une unité !).

9.

10.

11. — Considérons le graphe $D = (V, A)$ dont les sommets sont les blocs et pour lequel on a un arc (u, v) si $v \in Y_u$. Une solution du cas statique est un fermé de ce graphe et réciproquement tout fermé du graphe est une solution du cas statique.

- Si on met $u_a := +\infty$ pour tout $a \in A$, on a la propriété recherchée. En effet, soit $X \subseteq V$ tel que $\delta^+_{\tilde{D}}(X \cup \{s\})$ soit une s-t coupe de $\tilde{D}$ de capacité minimale. Aucune arête de A ne peut être dans cette coupe, sinon sa capacité serait $= +\infty$. Donc, si $u \in X$, tout successeur de u est encore dans X. Ce qui est précisément la définition de "fermé".
- On note $\bar{X} := V \setminus X$. Comme X est fermé, les seuls arcs qui vont jouer un rôle dans la coupe sont les arcs de la forme (s, v) avec $v \in \bar{X}$ et ceux de la forme (v, t) avec $v \in X$. On a donc

$$\sum_{a \in \delta^+_{\tilde{D}}(X \cup \{s\})} u_a = \sum_{v \in \bar{X} \cap V^+} c_v - \sum_{v \in X \cap V^-} c_v = \sum_{v \in V^+} c_v - \sum_{v \in X} c_v.$$

- Posons $C := \sum_{v \in V^+} c_v$.
  Soit X un fermé de D de valeur maximale η. D'après ce qui a été montré ci-dessus, on a alors une s-t coupe de $\tilde{D}$ de capacité $C - \eta$.
  Réciproquement, prenons une s-t coupe de $\tilde{D}$ de capacité minimale κ. D'après ce qui a été montré, l'ensemble X induit sur D est alors fermé et de valeur $C - \kappa$.
  On a donc : $C - \kappa = \eta$, et chercher une coupe minimale sur $\tilde{D}$ est équivalent à chercher un fermé maximum sur D. Comme chercher une coupe minimale se fait en temps polynomial, on sait résoudre le problème de manière efficace.