CONTRÔLE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1. Production chimique

Une usine de produits chimiques fabrique 6 types de produits notés A, B, C, D, E et F. Cette production se fait à partir de 3 composants, notés I, II et III. Dans le tableau suivant est indiqué le prix de vente d'un m^3 de chaque type, ainsi que la quantité de chaque composant présente dans chaque produit.

Produits	Prix de vente k€	Composant I %	Composant II %	Composant III %
A	2	10	40	50
B	4	20	30	50
C	5	30	30	40
D	7	40	40	20
E	8	50	30	20
F	10	60	30	10

Cela signifie par exemple que la production de 4 m^3 de produit B requiert 0.8 m^3 de constituant I, 1.2 m^3 de constituant II et 2 m^3 de constituant III, et rapporte 16k€.

Question 1. *Sachant que l'usine dispose de* $100\,\mathrm{m}^3$ *de chacun des constituants, écrire le programme linéaire modélisant le problème de la maximisation de la recette.*

Question 2. *Sans résoudre le programme linéaire, expliquer pourquoi l'usine n'a pas intérêt à fabriquer les produits A, C et E.*

Question 3. *L'usine a maintenant l'opportunité de choisir la quantité de chacun des constituants pour sa production, sous la contrainte que la quantité totale des trois constituants n'excède pas* $300\,\mathrm{m}^3$*. Ecrire le programme linéaire modélisant la maximisation du bénéfice, sachant que le coût d'achat d'un* m^3 *d'un quelconque des composants est* 1k€.

2. Production de pneus

On considère une usine de pneus sur un certain horizon, divisé en m périodes. Les pneus sont produits à l'aide de moules. Les moules, placés sur des supports adaptés, peuvent être changés en début de période. Il y a k types de moules. On suppose la demande connue sur l'horizon, i.e. que pour chaque période, on connaît le nombre minimum de moules de chaque type nécessaire pour assurer la production attendue. On connaît aussi pour chaque période le nombre total de moules de chaque type qui seront disponibles. Les coûts proviennent des opérations de placement des moules.

Date: 27 janvier 2016.

Les notations sont les suivantes. Le nombre de supports est n, i.e. qu'à tout instant, on ne peut avoir strictement plus de n moules en place. Le nombre minimum (resp. maximum) de moules de type i pouvant être en place sur la période j est noté r_{ij} (resp. d_{ij}). Enfin, le coût de placement d'un moule de type i est c_i.

Juste avant la première période, il y a déjà des moules en place et on note p_i le nombre de moules en place du type i. L'objectif de ce problème est de trouver la politique de placement des moules qui minimise le coût sur l'horizon considéré, tout en satisfaisant les contraintes énoncées. On supposera dans tout le problème que les paramètres p_i, r_{ij}, d_{ij} et c_i sont strictement positifs, et que les p_i, r_{ij} et d_{ij} sont de plus entiers.

L'objet de ce problème est de proposer deux approches possibles pour résoudre ce problème, l'une par la programmation linéaire en nombres entiers, l'autre par les flots. Les deux approches sont indépendantes.

2.1. **Formulation du problème comme un programme linéaire mixte.** On introduit la variable x_{ij} qui modélise le nombre de moules de type i en place sur la période j pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$. On étend cette variable à $i = 0$ et $j = 0$ en définissant x_{0j} comme étant le nombre de supports non-utilisés sur la période j et x_{i0} comme étant le nombre de moules de type i en place juste avant la première période (on a donc la contrainte triviale $x_{i0} = p_i$ pour $i = 1, \ldots, k$). On introduit aussi la variable y_{ij} qui est le nombre de moules de type i supplémentaires ajoutés en début de période j à ceux déjà en place. Si on n'en place pas ou si on en retire, y_{ij} est nul.

Question 4. *Ecrire la fonction objectif du problème.*

Question 5. *Ecrire l'égalité qui lie n et les x_{ij}, pour $i = 0, \ldots, k$.*

Question 6. *Ecrire les inégalités qui lient la variable x_{ij} et respectivement r_{ij} et d_{ij}, pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$.*

Question 7. *Ecrire l'égalité qui lie la variable y_{ij} aux variables x_{ij-1} et x_{ij} pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$. (Attention, cette égalité n'est pas linéaire, cf définition de y_{ij}).*

Question 8. *En utilisant les égalités et les inégalités écrites aux questions précédentes, et en les complétant si nécessaire, écrire le problème sous la forme d'un programme mathématique, à ce stade non-linéaire à cause de la contrainte liant la variable y_{ij} aux variables x_{ij-1} et x_{ij}.*

Question 9. *Transformer ce programme mathématique en un programme linéaire en nombres entiers équivalent.*

2.2. **Formulation du problème comme un problème de b-flot de coût minimum.** La construction de cette partie du problème s'appuie sur le graphe dont les sommets sont :

- $(i, 0')$ pour $i = 0, \ldots, k$
- (i, j) et (i, j') pour $i = 0, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$
- j^* pour $j = 1, \ldots, m$
- un sommets fictif t,

et les arcs sont

- $\big((i, j), (i, j')\big)$ pour $i = 0, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$
- $\big((i, j'), (i, j + 1)\big)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m - 1$
- $\big((i, j'), (j + 1)^*\big)$ pour $i = 0, \ldots, k$ et $j = 0, \ldots, m - 1$
- $\big(j^*, (i, j)\big)$ pour $i = 0, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, m$

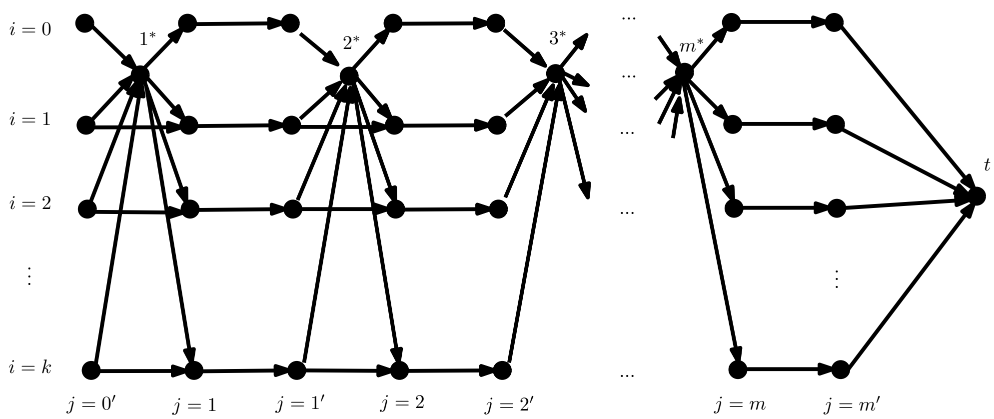

FIGURE 1. Le graphe de la question 10

- $\big((i,m'),t\big)$ pour $i=0,\ldots,k$.

Le graphe est illustré Figure 1.

Question 10. *Montrer que ce problème se résout comme un problème de b-flot de coût minimum sur ce graphe. Pour cela,*

— *on précisera pour chaque arc les capacités inférieures et supérieures et le coût, et pour chaque sommet la valeur de b correspondante,*
— *on indiquera la signification du flot sur chaque arc*
— *on justifiera le fait que résoudre le problème de b-flot permet de résoudre le problème de l'énoncé.*

Le problème peut donc se résoudre en temps polynomial, ce qui n'était pas forcément évident de prime abord.

3. Interception d'un commando

3.1. **Préliminaire : formulation du problème du plus court chemin comme programme linéaire.** Soit $D=(V,A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets particuliers de ce graphe, et des coûts $c_a>0$ définis pour tout $a\in A$. Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rll} \text{Max} & y_t & \\ \text{s.c.} & y_v - y_u \leq c_{(u,v)} & \forall (u,v)\in A \\ & y_s = 0. & \end{array} \tag{1}$$

L'objectif de cette sous-section est de démontrer que ce programme linéaire (de maximisation) a comme valeur optimale le coût minimum d'un s-t chemin. Notons P un tel s-t chemin de coût minimum.

Question 11. *Montrer que si on définit y_v comme le coût minimal d'un s-v chemin, on obtient une solution réalisable du programme* (1) *donnant comme valeur à la fonction objectif le coût de P.*

Réciproquement, soit $\boldsymbol{y}^*$ une solution optimale du programme (1). Notons $v_0,v_1,\ldots,v_\ell$ la suite des sommets visités par P (dans cet ordre ; on a donc $v_0=s$ et $v_\ell=t$).

Question 12. *Montrer par récurrence sur* i *que* $y^*_{v_i} \leq \sum_{j=1}^{i} c_{(v_{j-1},v_j)}$*, en déduire que* y^*_t *est inférieur ou égal au coût de* P*, et conclure.*

3.2. **Le problème.** Votre mission est de positionner des guetteurs en différents points d'une zone afin de repérer une intrusion d'un commando. On suppose que l'on dispose de k guetteurs. L'ensemble des mouvements possibles dans la zone est modélisé par un graphe orienté $D = (V, A)$. Les sommets représentent les positions que peut occuper le commando, et les arcs représentent les mouvements possibles qu'il peut faire. On note s le sommet représentant l'entrée de la zone et t le sommet représentant sa sortie.

Soit X l'ensemble des positions possibles pour les guetteurs. On note $p_{a,i}$ la probabilité de repérer le commando s'il passe sur l'arc a lorsqu'on a un ou plusieurs guetteurs en $i \in X$. On supposera dans toute la suite que $0 \leq p_{a,i} < 1$ pour tout a et tout i. Choisir les positions des guetteurs, c'est choisir un sous-ensemble $Y \subseteq X$ tel que $|Y| \leq k$.

Supposons que l'ensemble Y des positions des guetteurs ait été choisi.

Question 13. *Soit* P *un* s*-*t *chemin élémentaire suivi par le commando. Justifier que la probabilité que le commando se fasse repérer est (sous une hypothèse d'indépendance naturelle)*

$$1 - \prod_{a \in A(P)} \prod_{i \in Y} (1 - p_{a,i}).$$

Soit P^Y un s-t chemin qui minimise la probabilité que le commando se fasse repérer (lorsque les positions des guetteurs sont les positions dans Y).

Question 14. *Montrer que* P^Y *est un* s*-*t *chemin* P *qui minimise* $\sum_{a \in A(P)} \gamma_a$*, avec*

$$\gamma_a = -\sum_{i \in Y} \ln(1 - p_{a,i}).$$

Le problème que vous souhaitez résoudre consiste à trouver l'ensemble Y tel que

$$1 - \prod_{a \in A(P^Y)} \prod_{i \in Y} (1 - p_{a,i})$$

est le plus grand possible : vous voulez choisir Y de manière à ce que le meilleur chemin pour le commando ait le plus grande probabilité possible de repérage.

Question 15. *En utilisant le résultat prouvé à la section 3.1, écrire un programme linéaire mixte (avec des variables entières et des variables réelles) qui modélise ce problème, en utilisant d'une part des variables réelles* $(y_v)_{v \in V}$ *et d'autre part des variables binaires* $(x_i)_{i \in X}$*, qui valent* 1 *si un ou plusieurs guetteurs sont positionnés en* i*, et* 0 *sinon.*

4. Choisir le trajet d'un remonte-pente

Une entreprise de travaux publics a obtenu le marché pour la construction d'un remonte-pente sur le flanc d'une montagne. Une telle construction consiste à placer des pylônes, parmi des emplacements potentiels, et y faire passer les câbles, de manière à relier une station au bas de la montagne à une station au haut de la montagne. On suppose que ces deux stations sont fixées. L'entreprise connaît les emplacements potentiels et on note V leur ensemble, auquel on adjoint deux emplacements s^{bas} et s^{haut} correspondant aux stations bas et haut. Les contraintes topographiques font que l'on peut ou pas faire se succéder deux pylônes à des emplacements u et v donnés : l'ensemble des couples $(u, v) \in V^2$ tels que v peut succéder directement à u est un ensemble connu noté A. On a donc un graphe orienté $D = (V, A)$ dans lequel on cherche un s^{bas}-s^{haut} chemin. L'entreprise cherchant à minimiser ses coûts, on cherche un s^{bas}-s^{haut} chemin de plus petit coût.

La particularité du problème ici est que le coût d'un chemin se calcule à l'aide d'une fonction f à valeur dans $\mathbb{R}_+$, définie sur les couples (a, a') d'arcs tels que la tête de a est la queue de a' (l'arc a arrive sur le sommet d'où part l'arc a'). Le coût d'un chemin décrit par la séquence de ses arcs $a_1, \ldots, a_\ell$, où $a_1 \in \delta^+(s^{bas})$ et $a_\ell \in \delta^-(s^{haut})$, est

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} f\big((a_i, a_{i+1})\big).$$

Question 16. *Montrer que ce problème se résout en temps polynomial. (Indication : on pourra par exemple montrer que ce problème revient à chercher un plus court chemin dans un autre graphe).*

5. Chercher l'arbre couvrant maintenant la fiabilité

On considère un graphe $G = (V, E)$, muni d'une fonction capacité $c : E \to \mathbb{R}_+$. La *fiabilité* dans le graphe G d'une paire u, v de sommets se définit comme

$$\phi_G(u, v) = \max_P \min_{e \in E(P)} c(e), \tag{2}$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des u-v chemins P de G, et où $E(P)$ représente l'ensemble des arêtes de P.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'on peut trouver en temps polynomial un arbre couvrant T de G tel que

$$\phi_T(u, v) = \phi_G(u, v) \qquad \forall u, v \in V.$$

On est capable donc de trouver un arbre dont la fiabilité est la même que celle du graphe de départ pour toute paire de sommets.

Soit $T^* = (V, F)$, avec $F \subseteq E$, un arbre couvrant maximisant la quantité $\sum_{e \in F} c(e)$.

Question 17. *Avec quel algorithme peut-on calculer en temps polynomial un tel arbre ?*

Prenons maintenant u et v dans V. Notons Q l'unique chaîne élémentaire dans T^* dont les extrémités sont u et v et soit f une arête de Q de capacité minimale parmi les arêtes de Q . Notons P une u-v chaîne élémentaire de G réalisant le maximum dans l'équation (2).

Si on retire f de T^*, on obtient deux composantes connexes, dont on note X_u et X_v les ensembles de sommets respectifs. X_u contient u et X_v contient v. La chaîne P reliant u et v, il existe donc au moins une arête de P dans $\delta(X_u)$ (i.e. il y a une arête de P qui a une extrémité dans X_u et l'autre dans X_v). Notons e une telle arête.

Question 18. *Montrer que si l'on retire f de T^* et qu'on lui ajoute e, on obtient encore un arbre.*

Question 19. *En utilisant la définition de T^*, en déduire que $c(f) \geq c(e)$, puis que $\phi_{T^*}(u, v) \geq \phi_G(u, v)$.*

Question 20. *Expliquer pourquoi on a par ailleurs $\phi_{T^*}(u, v) \leq \phi_G(u, v)$.*

Question 21. *Conclure.*