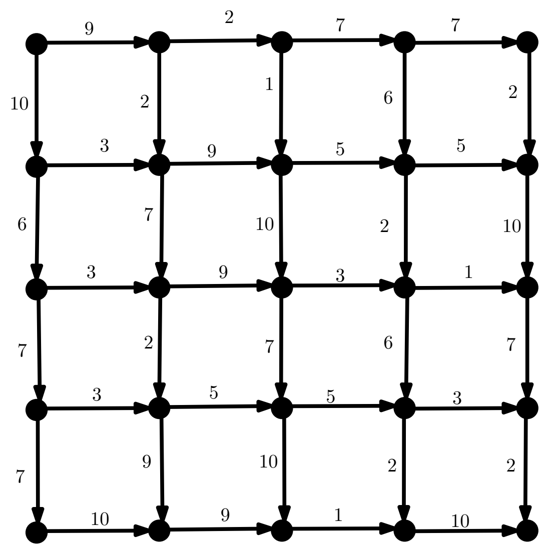
CONTRÔLE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

Le contrôle est noté sur 30*, mais la note sera laissée sur* 20*. Le barème indiqué est approximatif.*

1. Plus court chemin dans une grille – 3 points



Question 1. *Donner pour chaque sommet v de la Figure 1 la longueur minimale d'un s-v chemin (utiliser pour cela la copie du graphe donnée en fin de contrôle, où l'on indiquera cette longueur à proximité du sommet en question). Inutile de justifier la réponse.*

2. Flow-shop en 'Y' – 4 points

Dans cet exercice, on identifie les instances du problème flow-shop à n tâches $T_1, \ldots, T_n$ et m machines $M_1, \ldots, M_m$ devant être visitées dans cet ordre avec les matrices de réels positifs ou nuls $P = (p_{ji})$ à n lignes et m colonnes. L'entrée p_{ji} est le temps que doit passer la tâche T_j sur la machine M_i. On note alors $\mathrm{FS}(P)$ la valeur optimale du makespan.

On s'intéresse au cas particulier de flow-shop à 3 machines où toute tâche a un temps de passage nul sur l'une des machines M_2 ou M_3. La matrice P des temps de passage a donc 3 colonnes et est telle que $p_{j2}p_{j3} = 0$ pour tout $j \in [n]$.

Date: 1er février 2017.

Notons Q (resp. R) la matrice à deux colonnes obtenue lorsqu'on supprime la troisième colonne (resp. deuxième colonne) de P :

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \vdots & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{13} \\ \vdots & \vdots \\ p_{j1} & p_{j3} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n3} \end{pmatrix}$$

Question 2. *Proposer une borne inférieure de* $\mathrm{FS}(P)$ *pour le cas particulier considéré calculable en temps polynomiale et utilisant les matrices* Q *et* R. *Cette borne doit présenter un intérêt pratique (par exemple, la borne* 0 *est formellement correcte, mais sans intérêt pratique).*

Considérons le cas particulier pour $n = 10$ et les valeurs numériques suivantes des temps de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Question 3. *Calculer la borne de la Question 2 pour la matrice* P *donnée par* (1).

Question 4. *Proposer un ordonnancement pour la matrice* P *donnée par* (1) *à moins de* 25% *de l'optimum, et si possible à moins de* 10% *de l'optimum. Justifier dans tous les cas la qualité de la solution proposée. Pour l'ordonnancement, donner l'ordre des tâches sur chaque machine, mais inutile de donner les instants de début des opérations.*

3. Production discrète – 6 points

On considère une ligne de montage produisant différentes références. Le nombre de ces références est noté n et ces dernières sont identifiées avec les éléments de $[n]$. Cette ligne doit satisfaire une demande sur T périodes de temps. Le stockage de références en vue de la satisfaction ultérieure de la demande est possible et l'on dispose d'ailleurs d'un stock initial (possiblement nul) de chaque référence. La particularité de ce problème est que la ligne ne peut produire au plus qu'une référence par période de temps, et que la quantité produite est toujours unitaire. Le coût a deux composantes : coût de stockage et coût d'activation. On note h_{it} le coût de stockage unitaire de la référence i sur la période t et q_{it} le coût d'activation de la production de la référence i sur la période t. La demande pour la référence i sur la période t est note d_{it}. Ces paramètres h_{it}, q_{it} et d_{it} sont tous des réels positifs ou nuls.

Le programme linéaire mixte modélisant ce problème est le suivant.

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(h_{it}s_{it} + q_{it}y_{it}) & \\
\text{s.c.} & s_{it} = s_{i(t-1)} - d_{it} + y_{it} & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T] \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{it} \leq 1 & \forall t \in [T] \\
 & s_{it} \in \mathbb{R}_+ & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T] \\
 & y_{it} \in \{0,1\} & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T].
\end{array}
$$

La variable s_{it} représente le niveau de stock en fin de période t. Pour $t = 0$, c'est le stock initial de la référence i. La variable y_{it} vaut 1 si et seulement si la référence i est produite en période t.

Question 5. *Montrer que* $\big((s_{it}),(y_{it})\big)$ *est une solution réalisable de ce problème si et seulement si* (y_{it}) *satisfait :*

$$
\begin{cases}
s_{it} = \left(\displaystyle\sum_{u=1}^{t} y_{iu}\right) - \left(\displaystyle\sum_{u=1}^{t} d_{iu}\right) + s_{i0} & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T] \\
\displaystyle\sum_{u=1}^{t} y_{iu} \geq \left\lceil \left(\displaystyle\sum_{u=1}^{t} d_{iu}\right) - s_{i0} \right\rceil & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T] \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{it} \leq 1 & \forall t \in [T] \\
y_{it} \in \{0,1\} & \forall i \in [n],\ \forall t \in [T].
\end{cases}
$$

Question 6. *Proposer un programme linéaire en nombres entiers équivalent au programme* (P)*, n'utilisant que les variables* (y_{it}) *et dont les termes constants dans les contraintes sont tous des entiers.*

Considérons le graphe défini de la manière suivante (illustré sur la Figure 1). Les sommets sont formés

- des couples (i,t) pour $i \in \{0\} \cup [n]$ (on ajoute une référence "fictive" 0) et $t \in [T+1]$ (on ajoute une période "finale")
- de sommets t^* pour $t \in [T]$,
- d'un sommet puits p.

Les arcs sont

- les couples $\big((i,t),(i,t+1)\big)$ pour $i \in \{0\} \cup [n]$ et $t \in [T]$
- les couples $\big(t^*,(i,t)\big)$ pour $i \in \{0\} \cup [n]$ et $t \in [T]$
- les couples $\big((i,T+1),p\big)$ pour $i \in \{0\} \cup [n]$.

Question 7. *Montrer que ce graphe permet de modéliser le programme de la question 6 sous la forme d'un problème de b-flot. On indiquera pour chaque sommet la valeur de b correspondante et pour chaque arête les capacités et le coût unitaire.*

Question 8. *Le programme* (P) *peut-il se résoudre en temps polynomial ? Justifier la réponse donnée.*

$\dots$

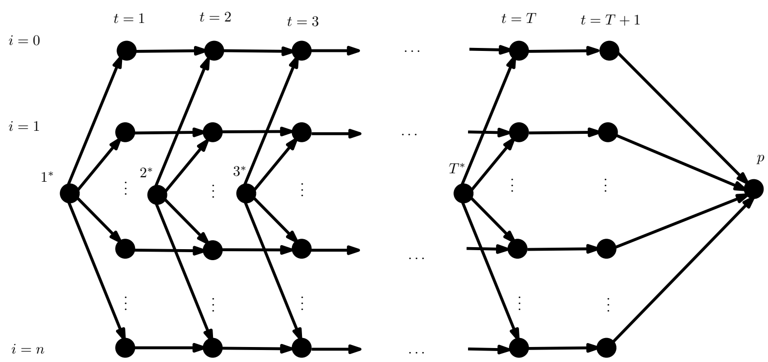


FIGURE 1. Le graphe de la question 7.

4. Couverture par les arêtes et surveillance de musée

4.1. **Préliminaires théoriques – 7 points.** Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est une *couverture par les arêtes* si tout sommet $v \in V$ est incident à au moins une arête de F. Noter qu'une telle couverture existe si et seulement si G est sans sommet isolé. On note $\rho(G)$ la cardinalité minimale d'une couverture par les arêtes de G. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *stable* si aucune arête de G n'est incidente à deux sommets distincts de S. On note $\alpha(G)$ la cardinalité maximale d'un stable de G.

La première question est indépendante des trois suivantes.

Question 9. *Prouver que*

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

et montrer que cette inégalité peut être stricte.

Question 10. *Soit M un couplage. Montrer que si G est sans sommet isolé, alors on peut trouver en temps polynomial une couverture par les arêtes contenant M et de cardinalité $|V| - |M|$.*

Question 11. *Soit F une couverture par les arêtes. Montrer que si G est sans sommet isolé, alors tout couplage M maximal pour l'inclusion contenu dans F est de cardinalité supérieure ou égale à $|V| - |F|$.*

On rappelle que $\nu(G)$ est la cardinalité maximale d'un couplage de G.

Question 12. *Conclure des questions 10 et 11 que*
— *si G est sans sommet isolé, alors*

$$\rho(G) + \nu(G) = |V|.$$

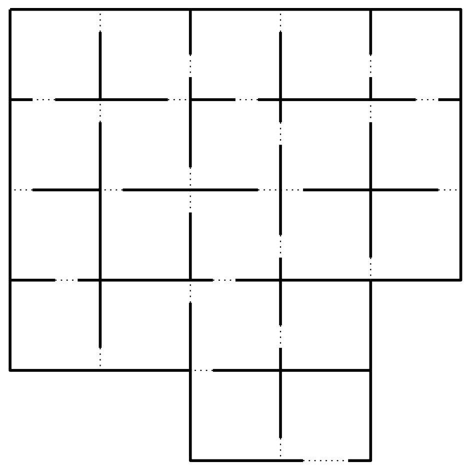


FIGURE 2. Un musée avec des salles carrées, de mêmes dimensions et orientation.

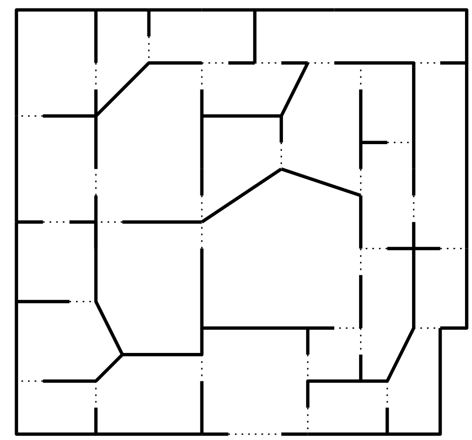


FIGURE 3. Un musée avec des salles convexes polygonales.

— *si G est biparti et sans sommet isolé, une couverture par les arêtes de cardinalité minimale peut être calculée en temps polynomial.*

4.2. **Application à la surveillance de musée – 5 points.** On considère un musée constituées de salles polygonales et convexes séparées par des portes. Une porte est toujours de taille non nulle et toujours située sur un unique côté d'une salle. Pour simplifier la discussion, on suppose que le musée est connexe (on peut passer de toute salle à toute autre salle) et qu'il y a au moins deux salles. On veut positionner un minimum de gardiens de manière à surveiller toutes les salles. Un gardien peut surveiller une salle depuis tout point de la salle. Lorsqu'il se situe à une porte entre deux salles, il peut alors surveiller les deux salles en entier (mais pas au-delà : pas de surveillance en "enfilade").

Question 13. *Montrer que ce problème se ramène au problème de calcul d'une couverture par les arêtes de cardinalité minimale dans un graphe bien choisi.*

Question 14. *Supposons que toutes les salles soient rectangulaires, de mêmes dimensions et orientation. On ne suppose pas pour autant que les portes sont toutes situées de la même manière sur le contour des salles.*

Montrer qu'alors le problème de surveillance peut se résoudre en temps polynomial (l'input étant supposé de taille le nombre total de salles et de portes).

Question 15. *Donner pour l'exemple de la figure 2 une solution optimale et pour celui de la figure 3 une solution à moins de 20% de l'optimum (justifier la qualité des solutions proposées).*

Attention : on placera les gardiens sur les copies de ces figures données en fin de contrôle.

5. Symétriser un voyageur de commerce asymétrique – 5 points

On se donne un graphe complet orienté à $n \geq 2$ sommets $\overrightarrow{K}_n = (V, A)$, i.e. $A = \{(u,v) \in V^2 : u \neq v\}$. On identifie V à $[n]$, ensemble des entiers de 1 à n. Pour tout arc (i,j), un poids $w_{ij} \in \mathbb{R}$ est donné. On note $W = (w_{ij})_{i,j\in[n]}$ la matrice ainsi obtenue, avec des 0 sur la diagonale. L'objectif de ce problème est de montrer que l'on peut ramener le problème du circuit hamiltonien de plus petit poids (dit également "voyageur de commerce asymétrique") au problème du cycle hamiltonien de plus petit poids dans le cas non-orienté (dit également "voyageur de commerce symétrique") en doublant le nombre de sommets.

On introduit les deux matrices suivantes :

- la matrice $\overline{W}$ qui est égale à W, sauf sur les termes diagonaux, qui sont tous égaux à $-M < 0$, où M est un nombre réel positif très grand [1]
- la matrice $U = (u_{ij})_{i,j\in[n]}$ dont tous les termes sont égaux à $+\infty$.

Soit alors

$$\widetilde{W} = (\widetilde{w}_{ij})_{i,j\in[2n]} = \begin{pmatrix} U & \overline{W} \\ \overline{W}^T & U \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice symétrique. Considérons le problème du cycle hamiltonien de plus petit poids sur le graphe complet non-orienté $K_{2n} = ([2n], E)$, le poids de l'arête $ij \in E$ étant $\widetilde{w}_{ij}$.

Question 16. *Montrer qu'il existe un cycle hamiltonien de K_{2n} de poids fini et possédant n arêtes de poids égal à $-M$.*

Question 17. *Montrer qu'un cycle hamiltonien de K_{2n} ne possède pas deux arêtes consécutives de poids $-M$.*

Soit H un cycle hamiltonien de plus petit poids de K_{2n}.

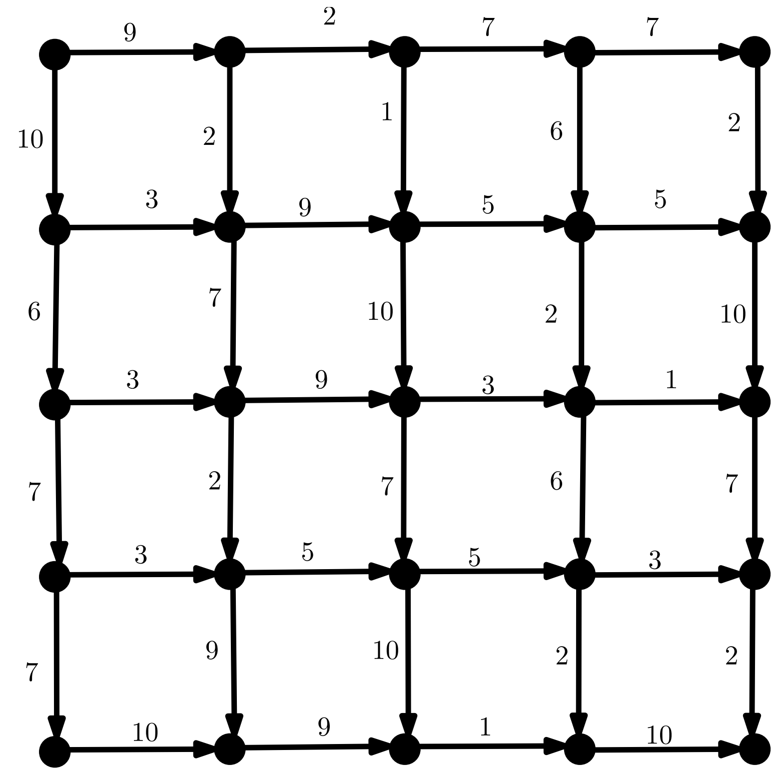
Question 18. *Déduire des deux questions précédentes que la suite des sommets de K_{2n} visités par H est, quitte à renverser l'ordre de parcours et à permutation circulaire près, nécessairement de la forme*

$$i_1, i_1 + n, i_2, i_2 + n, \ldots, i_n, i_n + n,$$

où les i_k, pour $k \in [n]$, sont tous dans $[n]$.

Question 19. *En conclure que tout circuit hamiltonien optimal de $\overrightarrow{K}_n$ peut être transformé en temps linéaire en cycle hamiltonien optimal de K_{2n}, et réciproquement.*

1. par exemple $M = 10 \sum_{i,j} |w_{ij}|$.



9
2
7
7
10
2
1
6
2
3
9
5
5
6
7
10
2
10
3
9
3
1
7
2
7
6
7
3
5
5
3
7
9
10
2
2
10
9
1
10