

CONTRÔLE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE : CORRIGÉ

Tout objet électronique (smartphone, tablette, ordinateur, calculatrice, etc.) interdit.

Tout document papier autorisé.

1. PLUS COURT CHEMIN DANS UNE GRILLE

Question 1. *Donner pour chaque sommet v de la Figure ?? la longueur minimale d'un s - v chemin (utiliser pour cela la copie du graphe donnée en fin de contrôle, où l'on indiquera cette longueur à proximité du sommet en question). Inutile de justifier la réponse.*

2. FLOW-SHOP EN 'Y'

Question 2. *Proposer une borne inférieure de $FS(P)$ pour le cas particulier considéré et calculable en temps polynomiale et utilisant les matrices Q et R . Cette borne doit présenter un intérêt pratique (par exemple, la borne 0 est formellement correcte, mais sans intérêt pratique).*

Toute solution réalisable du problème pour P contient une solution réalisable pour Q et une solution réalisable pour R . On a donc $FS(P) \geq \max(FS(Q), FS(R))$.

Question 3. *Calculer la borne de la Question 2 pour la matrice P donnée par (??).*

En appliquant l'algorithme de Johnson sur Q et sur R , on obtient :

$$FS(Q) = 29 \quad \text{and} \quad FS(R) = 29.$$

Question 4. *Proposer un ordonnancement pour la matrice P donnée par (??) à moins de 10% de l'optimum (justifier la qualité de la solution). Pour l'ordonnancement, donner l'ordre des tâches sur chaque machine, mais inutile de donner les instants de début des opérations.*

Johnson sur les 5 premières tâches donne un ordonnancement 2, 1, 5, 3, 4.

Johnson sur les 5 dernières tâches donne un ordonnancement 7, 9, 10, 8, 6.

En entrelaçant ces deux solutions, on obtient l'ordre : 2, 7, 1, 9, 5, 10, 3, 8, 4, 6, dont le makespan est 31.

Comme $2/29 = 6,90\%$, on est donc à moins de 10% de l'optimum.

3. PRODUCTION DISCRÈTE

Question 5. Montrer que $((s_{it}), (y_{it}))$ est une solution réalisable de ce problème si et seulement si (y_{it}) satisfait :

$$\begin{cases} s_{it} = \left(\sum_{u=1}^t y_{iu} \right) - \left(\sum_{u=1}^t d_{iu} \right) + s_{i0} & \forall i \in [n], \forall t \in [T] \\ \sum_{u=1}^t y_{iu} \geq \left\lceil \left(\sum_{u=1}^t d_{iu} \right) - s_{i0} \right\rceil & \forall i \in [n], \forall t \in [T] \\ \sum_{i=1}^n y_{it} \leq 1 & \forall t \in [T] \\ y_{it} \in \{0, 1\} & \forall i \in [n], \forall t \in [T]. \end{cases}$$

Si $((s_{it}), (y_{it}))$ est une solution réalisable de ce problème, alors on a

$$s_{it} = s_{i0} - \sum_{u=1}^t d_{iu} + \sum_{u=1}^t y_{iu}$$

pour tout $t \in [T]$. Cela implique que

$$\sum_{u=1}^t y_{iu} \geq \sum_{u=1}^t d_{iu} - s_{i0}$$

pour tout $i \in [n]$ et tout $t \in [T]$. Comme le terme de gauche est nécessairement entier, on a l'implication dans un sens.

Pour la réciproque, il suffit de voir que la seconde inégalité implique que $s_{it} \geq 0$ pour tout i, t .

Question 6. Proposer un programme linéaire en nombres entiers équivalent au programme (??) et n'utilisant que les variables (y_{it}) .

$$\begin{aligned} \text{(Q)} \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left(h_{it} \sum_{u=1}^t y_{iu} + q_{it} y_{it} \right) \\ & \text{s.c.} \quad \sum_{u=1}^t y_{iu} \geq \left\lceil \left(\sum_{u=1}^t d_{iu} \right) - s_{i0} \right\rceil \quad \forall i \in [n], \forall t \in [T] \\ & \quad \sum_{i=1}^n y_{it} \leq 1 \quad \forall t \in [T] \\ & \quad y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n], \forall t \in [T]. \end{aligned}$$

Question 7. Montrer que ce graphe permet de modéliser le programme (Q) sous la forme d'un problème de b-flot. On indiquera pour chaque sommet la valeur de b correspondante et pour chaque arête les capacités et le coût unitaire.

On pose $b(t^*) = +1$, $b(p) = -T$ et $b(\cdot) = 0$ pour les autres sommets.

Pour les arcs $((i, t), (i, t+1))$: coût unitaire = h_{it} ; capacité inférieure = $\lceil \sum_{u=1}^t d_{iu} - s_{i0} \rceil$; capacité supérieure = $+\infty$.

Pour les arcs $(t^*, (i, t))$: coût unitaire = q_{it} ; capacité inférieure = 0 ; capacité supérieure = 1

Pour les arcs $((i, T+1), p)$: coût unitaire = 0 ; capacité inférieure = 0 ; capacité supérieure = $+\infty$.

Question 8. *Le programme (??) peut-il se résoudre en temps polynomial ? Justifier la réponse donnée.*

Oui, car les questions précédentes montrent qu'il est équivalent à un problème de b -flot.

4. COUVERTURE PAR LES ARÊTES ET SURVEILLANCE DE MUSÉE

4.1. Préliminaires théoriques. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $F \subseteq E$ est une *couverture par les arêtes* si tout sommet $v \in V$ est incident à au moins une arête de F . Noter qu'une telle couverture existe si et seulement si G est sans sommet isolé. On note $\rho(G)$ la cardinalité minimale d'une couverture par les arêtes de G . Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *stable* si aucune arête de G n'est incidente à deux sommets distincts de S . On note $\alpha(G)$ la cardinalité maximale d'un stable de G .

Question 9. *Prouver que*

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

et montrer que cette inégalité peut être stricte.

Soit S un stable et F une couverture par les arêtes. Tout sommet de S est incident à une arête de F distincte. Donc $|S| \leq |F|$.

Le triangle montre que l'inégalité peut être stricte.

Question 10. *Soit M un couplage. Montrer que si G est sans sommet isolé, alors on peut trouver en temps polynomial une couverture par les arêtes contenant M et de cardinalité $|V| - |M|$.*

Notons U les sommets non couverts par une arête de M . Pour chacun d'eux, on ajoute arbitrairement une arête à M . On obtient ainsi une couverture de cardinalité $|M| + |U|$. Il suffit alors de noter que $|U| = |V| - 2|M|$ pour conclure (la construction étant clairement polynomiale une fois M donné).

Question 11. *Soit F une couverture par les arêtes. Montrer que si G est sans sommet isolé, alors tout couplage M maximal pour l'inclusion contenu dans F est de cardinalité supérieure ou égale à $|V| - |F|$.*

Soit M un couplage maximal pour l'inclusion contenu dans F . Le nombre de sommets non couverts par M est égal à $|V| - 2|M|$. Chacun d'eux est contenu dans une arête de $F \setminus M$ distincte (car M étant maximal, deux sommets non couverts par M ne peuvent être incidents à la même arête de $F \setminus M$). Donc $|V| - 2|M| \leq |F \setminus M|$, d'où on tire $|V| - |M| \leq |F|$, qui se réécrit sous la forme demandée.

Question 12. *Conclure des questions 10 et 11 que*

— *si G est sans sommet isolé, alors*

$$\rho(G) + \nu(G) = |V|.$$

— *si G est biparti et sans sommet isolé, une couverture par les arêtes de cardinalité minimale peut être calculée en temps polynomial.*

En choisissant un couplage de cardinalité maximale, la question 10 assure que $\rho(G) \leq |V| - \nu(G)$. En choisissant une couverture par les arêtes de cardinalité minimale, la question 11 assure que $\nu(G) \geq |V| - \rho(G)$. D'où le premier point.

Le second point s'obtient en remarquant que si M est un couplage de cardinalité maximale (que l'on peut trouver en temps polynomial dans un graphe biparti), la question 10 montre que l'on peut construire en temps polynomial une couverture par les arêtes de cardinalité $\rho(G)$.

4.2. Application à la surveillance de musée.

Question 13. *Montrer que ce problème se ramène au problème de calcul d'une couverture par les arêtes de cardinalité minimale dans un graphe bien choisi.*

Les salles sont les sommets et les portes les arêtes.

Question 14. *Supposons que toutes les salles soient rectangulaires, de mêmes dimensions et orientation. On ne suppose pas pour autant que les portes sont toutes situées de la même manière sur le contour des salles.*

Montrer qu'alors le problème de surveillance peut se résoudre en temps polynomial (l'input étant supposé de taille le nombre total de salles et de portes).

Dans ce cas, il est aisé de voir que le graphe est biparti : considérons les lignes horizontales et verticales portées par les murs ; franchir une telle ligne est équivalent à franchir une porte ; dans un parcours fermé, chaque ligne est franchie deux fois ; tout parcours fermé franchi donc un nombre pair de portes ; tout cycle du graphe est de longueur paire.

La question 12 permet de conclure.

Question 15. *Donner pour l'exemple de la figure 1 une solution optimale et pour celui de la figure 2 une solution à moins de 20% de l'optimum (justifier la qualité des solutions proposées).*

Figure 1 : on a exhibé un stable de cardinalité 11 et une couverture par les arêtes de même cardinalité. La question 9 permet de conclure.

Figure 2 : on a exhibé un stable de cardinalité 11 et une couverture par les arêtes de cardinalité 12. La question 9 permet encore de conclure.

5. SYMÉTRISER UN VOYAGEUR DE COMMERCE ASYMÉTRIQUE

Question 16. *Montrer qu'il existe un cycle hamiltonien de K_{2n} de poids fini et possédant n arêtes de poids égal à $-M$.*

Par exemple, le cycle $1, n+1, 2, n+2, \dots, n, 2n$.

Question 17. *Montrer qu'un cycle hamiltonien de K_{2n} ne possède pas deux arêtes consécutives de poids $-M$.*

Les arêtes de poids $-M$ forment un couplage parfait du graphe K_{2n} : ce sont les arêtes de la forme $i(n+i)$.

Question 18. *Déduire des deux questions précédentes que la suite des sommets de K_{2n} visités par H est, à permutation circulaire près, nécessairement de la forme*

$$i_1, i_1 + n, i_2, i_2 + n, \dots, i_n, i_n + n,$$

où les i_k , pour $k \in [n]$, sont tous dans $[n]$.

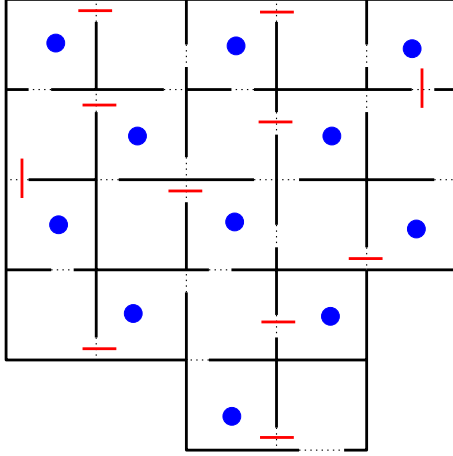


FIGURE 1. Un musée avec des salles carrées, de mêmes dimensions et orientation.

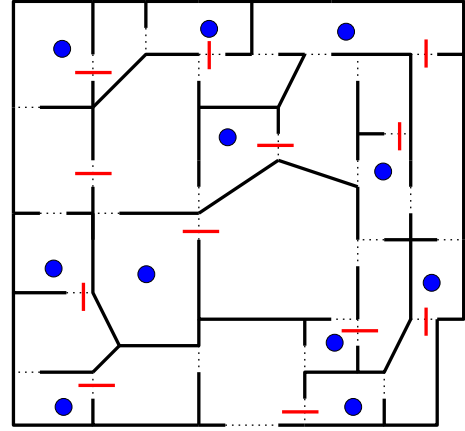


FIGURE 2. Un musée avec des salles convexes polygonales.

La question précédente implique qu'il y a au plus n arêtes de poids $-M$ dans le cycle hamiltonien. Comme M est très grand, un cycle hamiltonien de plus petit poids en contient le plus possible, à savoir n (qui est atteignable d'après la première question). Le cycle proposé consiste donc à visiter tour à tour les arêtes du couplage parfait.

Question 19. *En conclure que tout circuit hamiltonien optimal de $\vec{K}_n$ peut être transformé en temps linéaire en cycle hamiltonien optimal de K_{2n} , et réciproquement.*

Soit C^* un circuit hamiltonien optimal de $\vec{K}_n$ et soit H^* un cycle hamiltonien optimal de K_{2n} .

Notons $i_1, \dots, i_n$ les sommets visités par C^* (dans cet ordre). On peut alors construire un cycle hamiltonien de K_{2n} de la forme donnée à la question précédente et de poids $w(C^*) - nM$. Donc $\tilde{w}(H^*) \leq w(C^*) - nM$.

Réciproquement, soit H^* un cycle hamiltonien optimal de K_{2n} . La question précédente montre qu'il existe alors un circuit de $\vec{K}_n$ de poids $\tilde{w}(H^*) + nM$. Donc $\tilde{w}(H^*) + nm \geq w(C^*)$.

On a donc $w(C^*) = \tilde{w}(H^*) + nM$. Le même raisonnement montre que l'on peut construire en temps linéaire un circuit optimal à partir de H^* .