

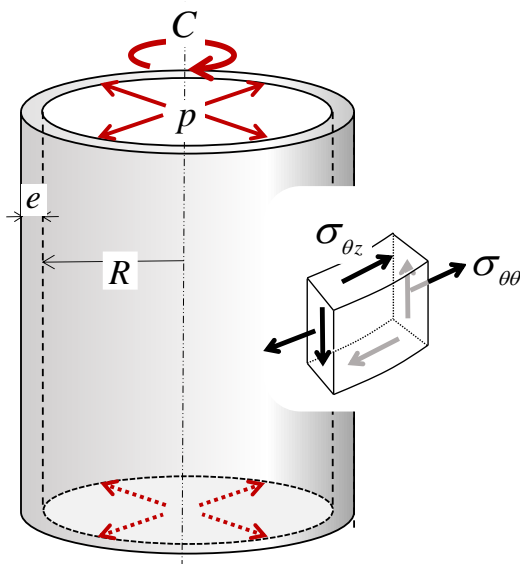
Cours de Plasticité : contrôle des connaissances

Durée : 3h00

Tous documents et notes de cours autorisés

Le sujet comporte deux exercices et un problème indépendants

Exercice n°1 (1,5 pts/8)



Un tube circulaire est soumis à une pression interne  $p$  et à un couple de torsion  $C$ , aucun effort n'étant exercé selon l'axe  $Oz$  du tube. Compte tenu du fait que son épaisseur  $e$  est *petite* devant le rayon  $R$  ( $e \ll R$ ), on admettra (sans le démontrer) que l'état de contrainte en tout point de l'épaisseur du tube s'écrit en composantes dans le repère cylindrique local (voir figure) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{r,\theta,z} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \cong 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{avec } \sigma_{\theta\theta} = p \frac{R}{e} \text{ et } \sigma_{\theta z} = \frac{C}{2\pi R^2 e}$$

Le matériau obéissant à un critère de plasticité de *von Mises* défini par :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{1/2} - k \leq 0 \quad (2)$$

écrire ce critère en fonction des composantes  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\theta z}$  et en déduire le *domaine d'élasticité* du tube dans le plan des *paramètres de chargement* ( $p, C$ ) que l'on exprimera sous la forme :

$$\left( \frac{p}{p_0} \right)^2 + \left( \frac{C}{C_0} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (3)$$

où l'on calculera  $p_0$  et  $C_0$  en fonction de  $k, R$  et  $e$ . Représenter ce domaine dans le plan ( $p, C$ ).

### Corrigé

Le déviateur de l'état de contrainte (1) s'écrit :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - 1/3(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{pmatrix} - 1/3 \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{\theta\theta}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{\theta\theta}/3 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & -\sigma_{\theta\theta}/3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = 1/2 [2\sigma_{\theta z}^2 + 6\sigma_{\theta\theta}^2/9] = \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2/3$$

et donc :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2/3)^{1/2} - k \leq 0$$

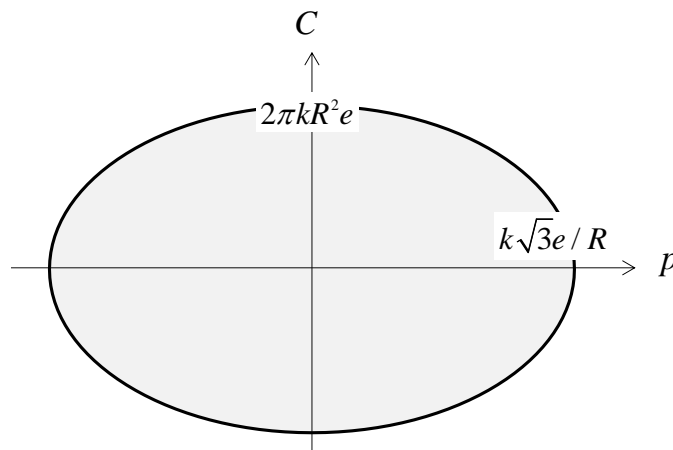
Remplaçant les contraintes par leurs expressions en fonction des paramètres de chargement du tube, il vient alors :

$$\left( \left( \frac{C}{2\pi R^2 e} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{pR}{e} \right)^2 \right)^{1/2} - k \leq 0$$

soit encore :

$$\left( \frac{p}{p_0} \right)^2 + \left( \frac{C}{C_0} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad \text{avec } p_0 = k\sqrt{3}e/R \quad \text{et } C_0 = 2\pi kR^2 e$$

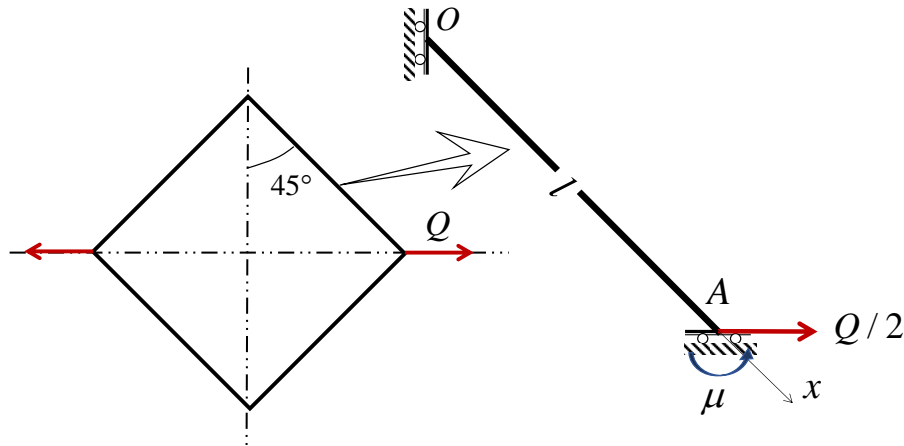
Le domaine d'élasticité correspondant est représenté sur la figure ci-dessous. Il s'agit d'un domaine elliptique de demi-axes  $p_0$  et  $C_0$ . Il convient de noter que si le critère (2) est un critère de *plasticité parfaite* (sans écrouissage), la frontière de ce domaine est également le lieu des *chargements limites*.



\* \*

\*

## Exercice n°2 (2,5 pts/8)



Une structure ayant la forme d'un carré est constituée par l'assemblage de quatre poutres de même longueur  $l$ . Elle est soumise à deux forces opposées d'intensité  $Q$  comme indiqué sur la figure. Compte tenu des symétries du problème, le calcul d'une telle structure peut se ramener à celle d'une seule poutre  $OA$  inclinée à  $45^\circ$ , ses extrémités étant reliées aux plans horizontal et vertical de symétrie par des *encastremets mobiles*.

1. Expliquer pourquoi la réaction d'appui verticale en  $A$  est nulle et calculer le moment fléchissant  $M$  en un point  $x$  de la poutre en fonction du chargement  $Q$  et du moment d'encastrement  $\mu$  en  $A$  que l'on prendra comme *inconnue hyperstatique*.
2. La poutre étant *élastique*, de *rigidité en flexion*  $EI$ , et dans un *état initial naturel*, calculer l'*énergie élastique de flexion* définie par :

$$W^*(Q, \mu) = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(Q, \mu; x) dx$$

puis déterminer la valeur de  $\mu$  en utilisant de *théorème du potentiel minimum* et la valeur  $q$  du déplacement du point  $A$  en fonction de  $Q$ ,  $l$  et  $EI$ , en utilisant le *théorème de Castigliano*. Donner l'*allure* de la déformée élastique.

3. Montrer que les extrémités  $O$  et  $A$  de la poutre plastifient simultanément pour une valeur du chargement que l'on calculera en fonction de la limite d'élasticité en flexion  $M^p$  et de  $l$ . Montrer qu'il s'agit de la *charge limite*  $Q^l$  et décrire le *mécanisme d'écoulement plastique libre* correspondant.

### Corrigé

1. L'équilibre global de la poutre en *résultante* projetée sur la *direction verticale*, entraîne la nullité de la réaction d'appui en A, puisque la réaction en O et la charge Q sont purement horizontales. Il en résulte que le moment fléchissant en un point x de cette poutre s'écrit :

$$M(x) = \mu + \frac{Q}{2}(l-x)\sqrt{2}/2$$

2. Le calcul de l'énergie élastique de flexion donne :

$$W^*(Q, \mu) = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(Q, \mu; x) dx = \frac{1}{2EI} \left( \mu^2 l + \frac{Q}{\sqrt{2}} \mu l^2 + \frac{Q^2 l^3}{24} \right)$$

de sorte que le *théorème du potentiel minimum* s'écrit dans ce cas :

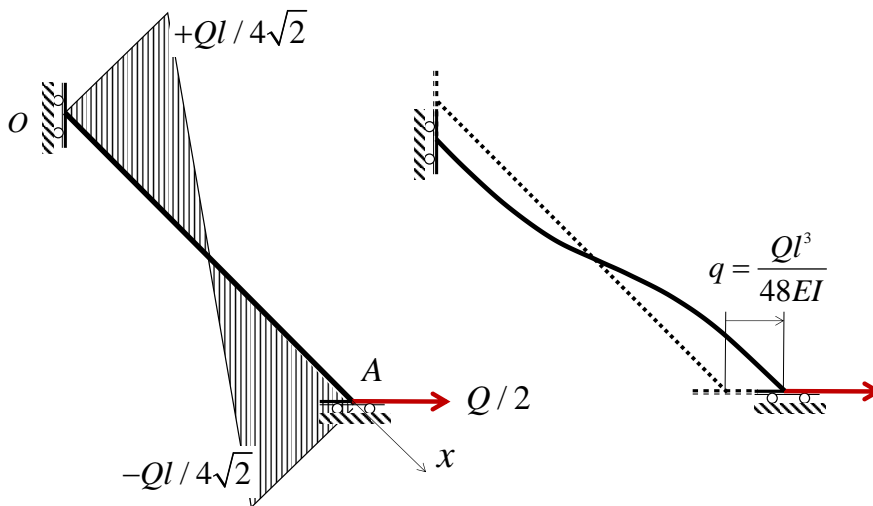
$$\frac{\partial W^*}{\partial \mu} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial \mu} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (\mu + Q(l-x)/2\sqrt{2}) dx = 0$$

soit :

$$\mu + Q(l^2 - l^2/2)/2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{Ql}{4\sqrt{2}}$$

D'où la distribution élastique de *moments fléchissants*, représentée sur la figure ci-dessous :

$$M(x) = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \left( \frac{l}{2} - x \right)$$



Le *théorème de Castigliano* permet alors de calculer le déplacement q de l'appui A :

$$q = \frac{dW^*}{d(Q/2)}(Q) = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{d(Q/2)} dx = \frac{Q}{4EI} \int_0^l (l/2 - x)^2 dx = \frac{Ql^3}{48EI}$$

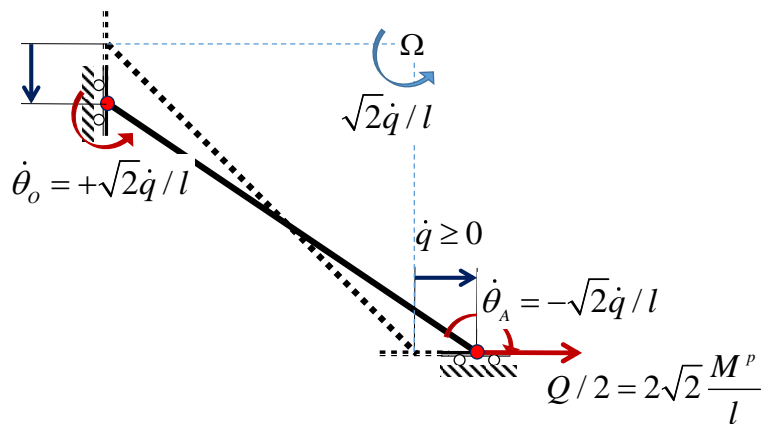
3. La limite d'élasticité correspond à la valeur du chargement pour laquelle le moment en  $O$  (respectivement en  $A$ ) atteint le moment limite en flexion positive (resp. négative) :

$$M(x=0) = \frac{Ql}{4\sqrt{2}} = -M(x=l) = M^p \Rightarrow Q^e = 4\sqrt{2} \frac{M^p}{l}$$

Il apparaît que cette limite d'élasticité n'est autre que la charge limite puisque pour  $Q = Q^e$  et  $\dot{Q} = 0$ , il existe un mécanisme d'écoulement plastique libre mettant en jeu une rotule plastique positive en  $O$  et négative en  $A$ , la poutre étant animée d'un mouvement de rotation autour du point  $\Omega$ . On a en effet (voir les notations de la figure ci-dessous) :

$$M_o = +M^p, \dot{M}_o = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_o = +\sqrt{2}\dot{q}/l \geq 0$$

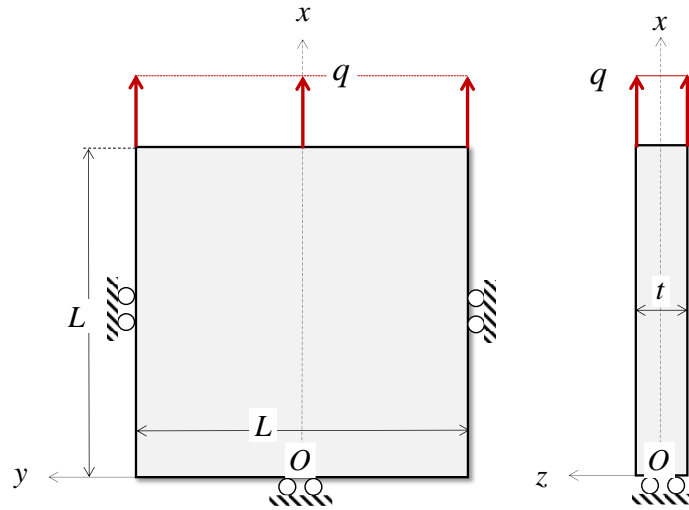
$$M_A = -M^p, \dot{M}_A = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_A = -\sqrt{2}\dot{q}/l \leq 0$$



\* \*  
\*

## Problème (4 pts/8)

### Comportement d'une plaque sous chargement de traction



Une plaque carrée (côté  $L$ ) d'épaisseur  $t$  est soumise à un chargement défini par les conditions aux limites suivantes (la pesanteur est négligée) :

- ✓ Faces  $z = \pm t/2$  libres de contrainte :  $\underline{T}^d = 0$ .
- ✓ Bords latéraux  $y = \pm L/2$  en contact lisse avec des plans fixes :  $T_x^d = T_z^d = 0$ ,  $\xi_y^d = 0$ .
- ✓ Bord inférieure  $x = 0$  :  $\xi_x^d = 0$ ,  $T_y^d = T_z^d = 0$ .
- ✓ Bord supérieure  $x = L$  soumis à une traction normale uniforme :  $\underline{T}^d = q\mathbf{e}_x$ ,  $q \geq 0$ .

La plaque est constituée d'un matériau métallique obéissant à un comportement *élastique linéaire isotrope* (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu \geq 0$ ), parfaitement plastique (critère de Tresca de cohésion  $C$ ) avec règle d'écoulement associée. On rappelle que cette loi de comportement s'écrit en vitesse :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) \mathbf{1} + \underline{\underline{d}}^p \quad \text{où } \underline{\underline{d}}^p \text{ a les mêmes directions principales que } \underline{\underline{\sigma}} \quad (1)$$

avec  $d_i^p = \dot{\lambda} \geq 0$ ,  $d_{ii}^p = 0$ ,  $d_{iii}^p = -\dot{\lambda}$  pour  $\sigma_i \geq \sigma_{ii} \geq \sigma_{iii}$ ,  $\sigma_i - \sigma_{iii} = 2C$ ,  $\dot{\sigma}_i - \dot{\sigma}_{iii} = 0$

#### 1. Chargement à partir de l'état initial naturel

La plaque étant initialement dans un *état naturel* ( $\underline{\underline{\sigma}}=0$  pour  $q=0$ ), on vient progressivement augmenter le chargement  $q$ .

1.1. Phase de comportement élastique. Le champ de contrainte solution est recherché sous la forme :

$$\sigma_{xx} = q, \sigma_{yy} = \nu q, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0 \quad (2)$$

Vérifier que ce champ est bien *statiquement admissible* avec le chargement  $q$  et calculer le champ de déformation (homogène) associé par la *loi de comportement élastique*. Vérifier que ce dernier dérive du champ de déplacement *cinématiquement admissible* suivant :

$$\xi_x = \frac{1-\nu^2}{E}qx, \quad \xi_y = 0, \quad \xi_z = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}qz \quad (3)$$

Conclure quant à la solution du problème *en phase élastique*. Calculer la *limite d'élasticité*  $q^e$  en fonction de la cohésion  $C$  du matériau.

1.2. *Charge limite*. On se propose de montrer que pour  $q = q^e$  et  $\dot{q} = 0$  la solution en vitesse est un *mécanisme d'écoulement plastique libre* défini par :

$$U_x = \dot{\xi}_x = Dx, \quad U_y = \dot{\xi}_y = 0, \quad U_z = \dot{\xi}_z = -Dz \quad \text{avec } D \geq 0 \quad (4)$$

tandis que le champ de contrainte est donné par (2) avec  $q = q^e$ . Vérifier que ces champs sont respectivement *cinématiquement admissible* et *statiquement/plastiquement admissible* et montrer qu'ils sont bien associés en tout point par la loi de comportement (1). Quelle est alors la valeur de la *charge limite*  $q^l$  ?

1.3. Représenter la courbe donnant le chargement  $q$  en fonction de la déformation  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$  de la plaque et tracer le trajet de chargement dans le plan  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$ .

## 2. Chargement à partir d'un état initial précontraint

Le chargement est appliqué à partir de l'état initial :

$$\underline{\sigma}(q=0) = 2C\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \quad (5)$$

2.1. Vérifier que ce champ est *statiquement et plastiquement admissible* et montrer qu'il n'y a pas de phase élastique.

2.2. On recherche alors la solution *en contrainte* du problème d'évolution élastoplastique sous la forme

$$\sigma_{xx} = q, \quad \sigma_{yy} = 2C, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \quad (6)$$

et celle *en vitesse* sous la forme :

$$U_x = Dx, \quad U_y = 0, \quad U_z = D'z \quad \text{avec } D \text{ et } D' = \text{constantes.} \quad (7)$$

Vérifier le caractère *statiquement admissible* du champ de contrainte (6) et *cinématiquement admissible* du champ de vitesse (7). A quelle condition portant sur  $q$  le champ (6) est-il *plastiquement admissible* ? Calculer le champ des taux de déformations associé à (7) et déterminer les constantes  $D$  et  $D'$  en écrivant la loi de comportement en vitesse (1). On vérifiera que le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est positif ou nul et on donnera la relation entre  $\dot{q}$  et  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{xx}$ .

2.3. Jusqu'à quelle valeur de  $q$  la solution précédente est-elle valable ? Montrer que cette valeur est la *charge limite* en mettant en évidence un *mécanisme d'écoulement plastique libre* correspondant à un champ de vitesse de la forme (4).

2.4. Montrer que la *décharge* à partir de la charge limite est *purement élastique*. Calculer les champs de contraintes et de déformations *résiduels* correspondant à la décharge *totale* de la plaque.

2.5. Représenter la courbe donnant le chargement  $q$  en fonction de la déformation  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$  le long du cycle charge-décharge de la plaque et tracer le trajet de chargement dans le plan  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$ .

### Corrigé

#### 1. Etat initial naturel

##### 1.1. Phase de comportement élastique.

Le champ de contrainte

$$\sigma_{xx} = q, \sigma_{yy} = \nu q, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0$$

est bien *statiquement admissible* avec le chargement  $q$ , puisqu'il vérifie toutes les conditions aux limites en contrainte sur les bords et les faces de la plaque, ainsi que l'équation d'équilibre en raison de son homogénéité. L'état initial étant naturel, le champ de déformation (homogène) associé par la *loi de comportement élastique* s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

soit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} q - \frac{\nu}{E} (1+\nu)q = \frac{1-\nu^2}{E} q$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} \nu q - \frac{\nu}{E} (1+\nu)q = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (1+\nu)q, \text{ autres } \varepsilon_{ij} = 0$$

qui peut s'intégrer immédiatement en :

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{x}} \Rightarrow \xi_x = \frac{1-\nu^2}{E} qx, \quad \xi_y = 0, \quad \xi_z = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} qz$$

Ce dernier champ de déplacement étant *cinématiquement admissible*, il constitue donc avec le champ de contrainte (2) la solution du problème en phase élastique.

Les *contraintes principales* étant :

$$q \geq 0, \nu \geq 0 \Rightarrow \sigma_I = \sigma_{xx} = q \geq \sigma_{II} = \nu q \geq \sigma_{III} = 0$$

la *limite d'élasticité*  $q^e$  est obtenue pour :

$$\sigma_I - \sigma_{III} = q \leq 2C \Rightarrow q^e = 2C$$

##### 1.2. Charge limite.



Le champ de contrainte :

$$\sigma_{xx} = q^e = 2C, \sigma_{yy} = 2\nu C, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0$$

est bien *statiquement admissible* et *plastiquement admissible*, tandis que le champ de vitesse (4) est *cinématiquement admissible*, le champ de taux de déformation associé s'écrivant :

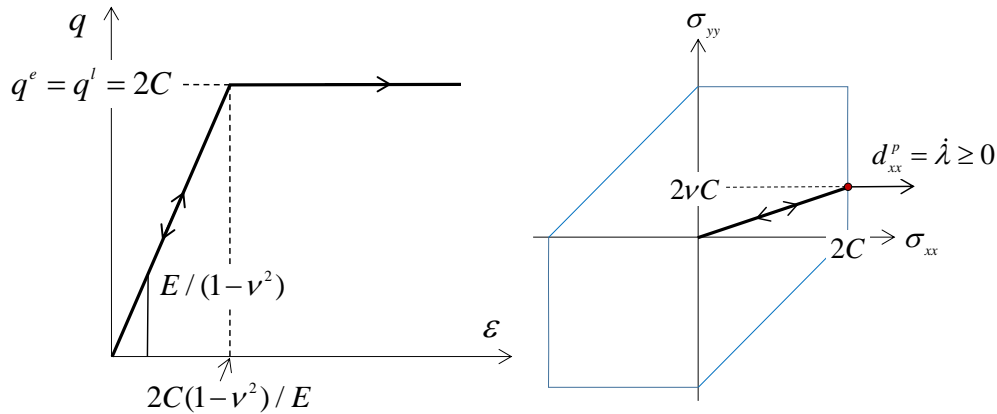
$$\underline{\underline{d}} = D(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$

Dans ces conditions, la loi de comportement (1) est bien vérifiée en tout point puisque :

$$\underline{\underline{d}} = \overbrace{\frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) \underline{\underline{1}}}^{=0} + \underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \text{ avec } \dot{\lambda} = D \geq 0$$

ce qui montre que le champ de vitesse (4) constitue bien un *mécanisme d'écoulement plastique libre* et que  $q^l = q^e = 2C$  est bien la charge limite.

1.3. La courbe donnant le chargement  $q$  en fonction de la déformation  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$  de la plaque et le trajet de chargement dans le plan  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$  sont représentés sur la figure ci-dessous :



## 2. Etat initial précontraint

2.1. Le champ de contrainte uniaxial homogène (5) est un *champ d'autocontrainte* car vérifiant l'équation d'équilibre et les conditions aux limites associées à  $q=0$ . Il est par ailleurs *plastiquement admissible* puisque :

$$\sigma_I = \sigma_{yy} = 2C \geq \sigma_{II} = \sigma_{xx} = \sigma_{III} = \sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_I - \sigma_{III} = 2C$$

2.2. Le champ de contrainte (6) est bien *statiquement admissible* avec  $q$  et *plastiquement admissible* tant que  $\sigma_{xx} = q$  reste contrainte principale *intermédiaire* :

$$\sigma_I = \sigma_{yy} = 2C \geq \sigma_{II} = \sigma_{xx} = q \geq \sigma_{III} = \sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_I - \sigma_{III} = 2C$$

De même, le champ de vitesse (7) est *cinématiquement admissible* car respectant toutes les conditions aux limites en vitesse du problème. Le champ des taux de déformation totale s'écrit :

$$d_{xx} = D, d_{yy} = 0, d_{zz} = D'$$

L'écriture de la loi de comportement en vitesse donne alors :

$$d_{xx} = D = \frac{1+\nu}{E} \dot{q} - \frac{\nu}{E} \dot{q} = \frac{\dot{q}}{E} + d_{xx}^p, \quad d_{yy} = 0 = -\frac{\nu}{E} \dot{q} + d_{yy}^p, \quad \begin{matrix} =0 \\ =\dot{\lambda} \geq 0 \end{matrix}$$

$$d_{zz} = D' = -\frac{\nu}{E} \dot{q} + d_{zz}^p, \quad \text{autres } d_{ij} = 0, \quad \begin{matrix} =-\dot{\lambda} \end{matrix}$$

d'où :

$$\dot{\varepsilon} = d_{xx} = D = \frac{\dot{q}}{E}, \quad d_{yy} = 0, \quad d_{zz} = D' = -2\nu \frac{\dot{q}}{E} \quad \text{et } \dot{\lambda} = d_{yy}^p = \nu \frac{\dot{q}}{E} \geq 0 \quad \text{car } \nu \geq 0$$

2.3. La solution précédente est valable tant que  $\sigma_{xx} = q$  reste contrainte principale intermédiaire, c'est-à-dire tant que  $q \leq 2C$ . Pour  $q = 2C$  et  $\dot{q} = 0$ , on est en régime d'arête :

$$\sigma_I = \sigma_{yy} = \sigma_{II} = \sigma_{xx} = 2C > \sigma_{III} = \sigma_{zz} = 0$$

de sorte que le *taux de déformation plastique* est de la forme :

$$d_I^p = d_{yy}^p = \dot{\lambda}, \quad d_{II}^p = d_{xx}^p = \dot{\mu}, \quad d_{III}^p = d_{zz}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}), \quad \dot{\lambda}, \dot{\mu} \geq 0$$

et la loi de comportement devient dans ce cas :

$$d_{xx} = d_{xx}^p = \dot{\mu} \geq 0, \quad d_{yy} = 0 = d_{yy}^p = \dot{\lambda}, \quad d_{zz} = d_{zz}^p = -\dot{\mu}$$

Ce champ de taux de déformation dérive du champ de vitesse cinématiquement admissible suivant:

$$U_x = \dot{\mu}x, \quad U_y = 0, \quad U_z = -\dot{\mu}z$$

qui représente un mécanisme d'écoulement plastique libre associé à la *charge limite*  $q^l = 2C$ .

On observe que, conformément à un résultat général, la *charge limite est indépendante de l'état initial*.

2.4. Posant  $q = 2C - \Delta q$ ,  $\Delta q \geq 0$  et faisant l'hypothèse de décharge élastique, les champs de contrainte et de déformation s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2C - \Delta q, & \varepsilon_{xx} &= 2C/E - (1-\nu^2)\Delta q/E \\ \sigma_{yy} &= 2C - \nu\Delta q, & \varepsilon_{yy} &= 0 \\ \sigma_{zz} &= 0, & \varepsilon_{zz} &= -4\nu C/E + \nu(1+\nu)\Delta q/E \end{aligned}$$

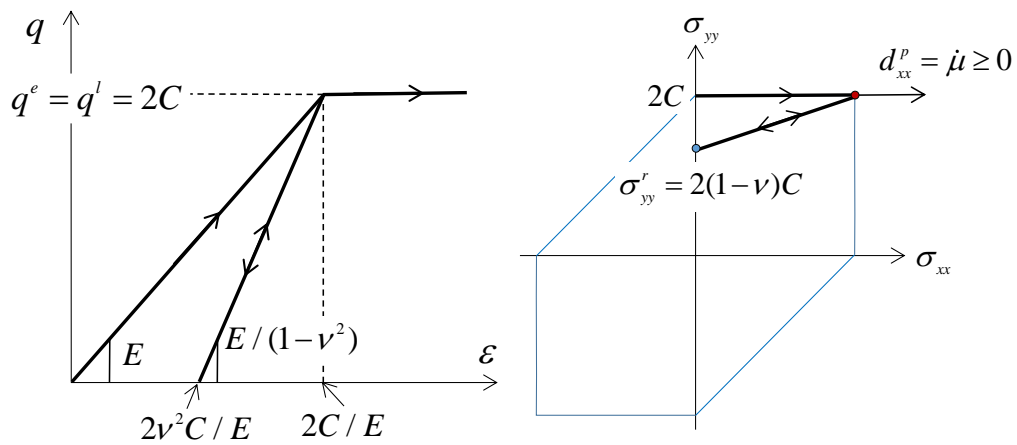
L'hypothèse de décharge élastique est bien vérifiée puisque :

$$0 \leq \nu \leq 1/2 \Rightarrow \sigma_I - \sigma_{III} = (2C - \nu\Delta q) - 0 \leq 2C$$

et l'état résiduel de la plaque correspondant à la *décharge totale* ( $\Delta q = 2C$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^r &= 0, & \varepsilon_{xx}^r &= 2\nu^2 C/E \\ \sigma_{yy}^r &= (1-\nu)2C, & \varepsilon_{yy}^r &= 0 \\ \sigma_{zz}^r &= 0, & \varepsilon_{zz}^r &= 2\nu(\nu-1)C/E \end{aligned}$$

2.5. La courbe donnant le chargement  $q$  en fonction de la déformation  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$  sur l'ensemble du cycle charge-décharge de la plaque et le trajet de chargement correspondant dans le plan  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$  sont représentés sur la figure ci-dessous :



*Remarque.*

Bien que correspondant à une partie parfaitement linéaire de la courbe, la phase de chargement n'est pas réversible, c'est-à-dire élastique, comme le montre clairement la phase de décharge clairement distincte de la phase de charge, hormis dans le cas particulier où  $\nu = 0$ .

\* \*

\*