Ecole des Ponts ParisTech
Département GCC

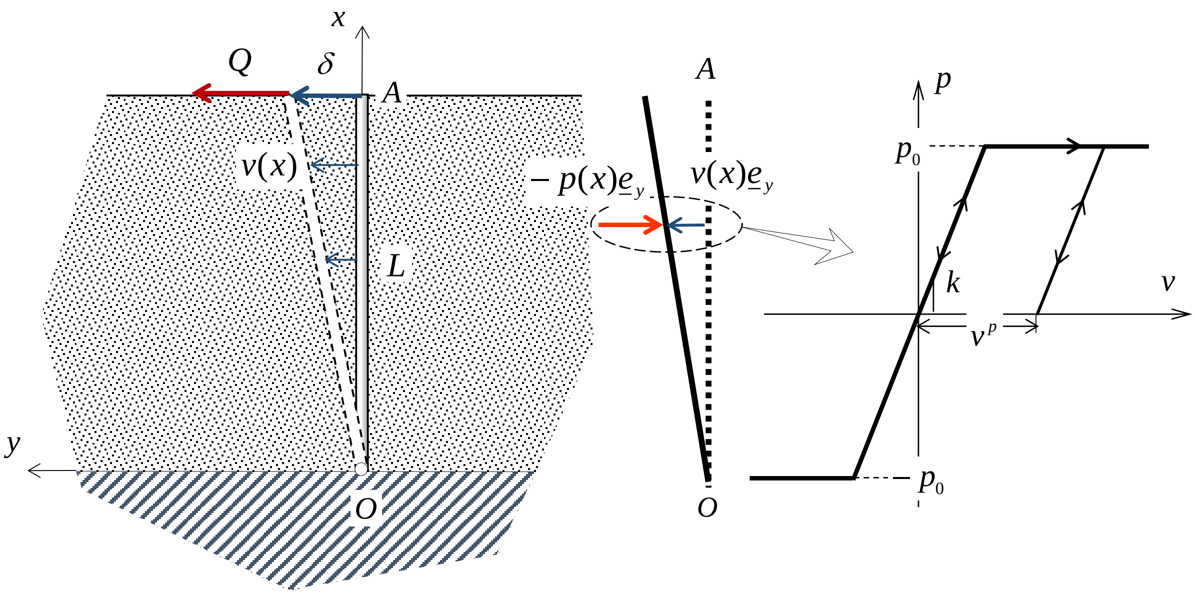
13 avril 2017

Cours de Plasticité : contrôle des connaissances

Durée : 3h00

Tous documents et notes de cours autorisés
Le sujet comporte deux problèmes indépendants

Problème n°1 *(3 pts/8)* ***3,25***



(a) (b)

Figure 1

On se propose d'analyser le comportement d'une inclusion de type pieu placée au sein d'un massif de sol, et sollicitée latéralement en tête, comme schématisé sur la figure 1(a). On suppose que l'extrémité inférieure O du pieu est en contact avec un substratum rigide par l'intermédiaire d'une *rotule fixe* qui empêche tout déplacement horizontal, mais annule le moment. Le pieu de longueur $OA=L$ peut être considéré comme *indéformable*, de sorte que son mouvement est un mouvement de rotation, le déplacement horizontal au point d'abscisse x, compté positivement selon Oy, étant donné par :

$$v(x) = \delta x / L \tag{1}$$

où $\delta = v(L)$ est le déplacement en tête du pieu.

L'action du massif de sol sur le pieu est modélisée par une *densité linéique horizontale d'efforts*, notée $-p(x)\underline{e}_y$, reliée au déplacement horizontal du pieu $v(x)$ par une loi élastique parfaitement plastique caractérisée par une raideur élastique k et un seuil plastique p_0, comme indiqué sur la figure 1(*b*). Le pieu est soumis à une charge ponctuelle horizontale $Q\underline{e}_y$ appliquée au point A et croissant progressivement à partir d'un *état initial naturel* ($p(x)$=0 pour Q=0).

1. Equilibre *0,25*

Ecrire *l'équilibre global en moment* par rapport à O du pieu soumis à l'effort $Q\underline{e}_y$, et à la distribution d'efforts $-p(x)\underline{e}_y$ exercés par le massif. En déduire l'équation reliant Q à la distribution $p(x)$.

2 Phase de comportement élastique *1*

Reporter l'expression de v donnée par (1) dans la loi de comportement en *phase élastique* de l'interaction sol-pieu **(**$p(x)=kv(x)$), puis dans l'équation d'équilibre établie en **1**. En déduire la relation entre l'effort Q et le déplacement δ, ainsi que l'expression de $p(x)$ en fonction du chargement Q et calculer la *limite d'élasticité* Q^e en fonction de p_0 et L.

3. Phase élastoplastique *2*

On fait l'hypothèse que la plastification du sol ($p=p_0$) se propage à partir du premier point de plastification, la zone inférieure, de hauteur αL ($0<\alpha<1$), demeurant élastique ($p<p_0$), comme indiqué sur la figure 2.

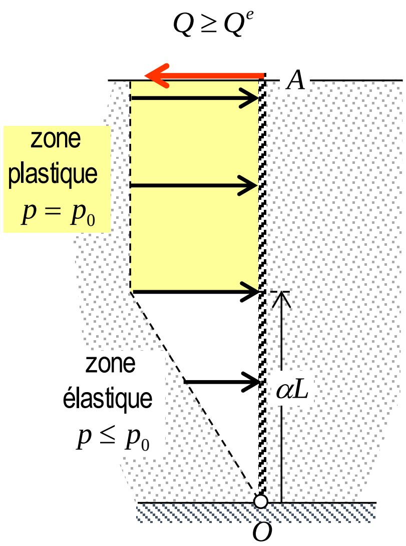


Figure 2

0,5 *3.1.* Déterminer en écrivant l'équilibre du système la valeur de l'effort Q en tête de pieu en fonction de p_0, L et α.

0,75 *3.2.* Calculer le paramètre α en fonction de δ, p_0 et k en écrivant que le critère de plasticité $p=p_0$ est atteint en $x=\alpha L$, c'est-à-dire en limite supérieure de la zone élastique, et en déduire l'expression de Q en fonction de δ.

0,5 *3.3.* La loi de comportement relative à l'interaction sol-pieu s'écrivant en vitesse :

$$\dot{v}^e$$
$$\dot{v} = \dot{p} / k + \dot{v}^p \qquad (2)$$

on vérifiera que cette loi, et en particulier la règle d'écoulement plastique, est bien satisfaite en zone plastique ($\alpha L \leq x \leq L$).

0,25 *3.4.* Calculer la charge limite Q^l et montrer que cette valeur est atteinte de façon asymptotique. Décrire le mécanisme de ruine plastique correspondant.

Corrigé

1. Equilibre

L'équilibre en *moment* par rapport à O du pieu permet de relier l'effort Q à la distribution des efforts exercés par le sol le long de ce même pieu :

$$M_O = QL - \int_0^L x p(x) \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \int_0^L \frac{x}{L} p(x) \mathrm{d}x} \qquad \text{(C1)}$$

2 Phase de comportement élastique

L'équation de comportement élastique écrite sous la forme :

$$p(x) = kv(x) = k\delta x / L \qquad \text{(C2)}$$

et reportée dans l'équation d'équilibre (C1) donne :

$$\boxed{Q = \int_0^L k \frac{\delta}{L^2} x^2 \mathrm{d}x = k\delta \frac{L}{3}} \qquad \text{(C3)}$$

d'où :

$$\boxed{p(x) = 3Q \frac{x}{L^2}} \qquad \text{(C4)}$$

Le critère de plasticité est donc atteint en *tête du pieu* (x=L), d'où la *limite d'élasticité* :

$$p(x = L) = p_0 \Rightarrow \boxed{Q^e = p_0 \frac{L}{3} \quad \text{et} \quad \delta^e = \frac{p_0}{k}} \qquad \text{(C5)}$$

3. Phase élastoplastique

3.1. L'équation d'équilibre (C1) donne :

$$\boxed{Q} = \int_0^{\alpha L} x\left(p_0 \frac{x}{\alpha L}\right)\mathrm{d}x + \int_{\alpha L}^{L} x p_0 \mathrm{d}x = p_0 \frac{L}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \boxed{= p_0 \frac{L}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)} \qquad \text{(C6)}$$

3.2. Le critère de plasticité étant atteint en haut de la zone élastique, on peut écrire :

$$p_0 = kv(x = L) = k\alpha\delta \Rightarrow \alpha = \frac{p_0}{k\delta} = \frac{\delta^e}{\delta}$$

et donc en reportant cette relation dans (C6) :

$$\boxed{Q = p_0 \frac{L}{2}\left(1 - (p_0 / k\delta)^2 / 3\right) = \frac{3Q^e}{2}\left(1 - \left(\delta^e / \delta\right)^2 / 3\right)} \qquad \text{(C7)}$$

3.3. La loi de comportement (2) s'écrit en zone plastique :

$$\alpha L \leq x \leq L : \; p = p_0 \Rightarrow \dot{v} = \overbrace{\frac{\dot{p}_0}{k}}^{=0} + \dot{v}^p = \frac{x}{L}\dot{\delta} \qquad \text{(C8)}$$

de sorte que la *règle d'écoulement plastique* ($p = p_0, \dot{p} = 0 \rightarrow \dot{v}^p \geq 0$) est bien vérifiée puisque, en vertu de (C7), $\dot{\delta} \geq 0$ si $\dot{Q} \geq 0$.

3.4. La *charge limite* est obtenue lorsque la zone plastique s'étend sur toute la longueur du pieu, c'est-à-dire lorsque α s'annule, c'est-à-dire asymptotiquement lorsque $\delta \rightarrow \infty$:

$$\boxed{Q^l = \lim_{\alpha = 0} Q(\alpha) = \lim_{\delta \to \infty} Q(\delta) = p_0 \frac{L}{2} = \frac{3Q^e}{2}} \qquad \text{(C9)}$$

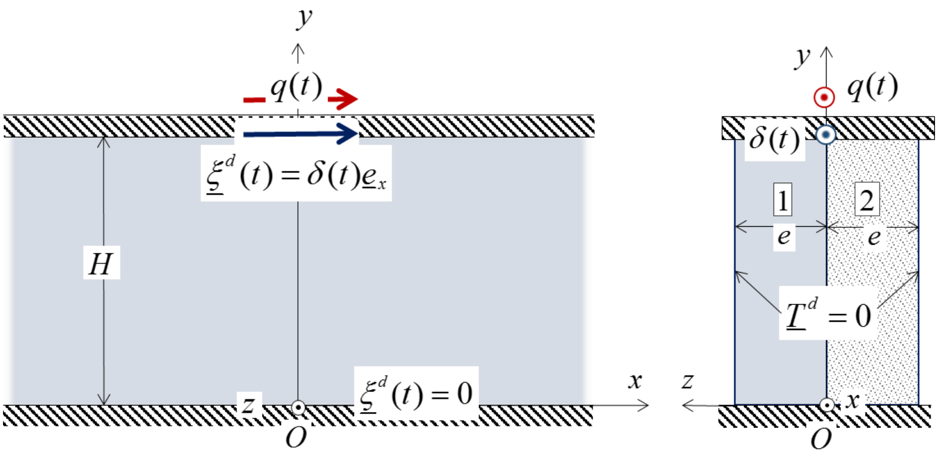
Le mécanisme d'écoulement plastique libre est un mouvement de rotation (pivotement) du pieu autour de sa pointe :

$$0 \leq x \leq L : \; p = p_0, \dot{p} = 0 \rightarrow \dot{v} = \dot{v}^p = \frac{x}{L}\dot{\delta} \geq 0 \qquad \text{(C10)}$$

* *

*

Problème n°2 : cisaillement d'un bicouche *(5 pts/8)* 5,25



Une plaque bicouche de hauteur H, épaisseur totale $2e$ et de longueur supposée infinie selon la direction Ox est encastrée le long de son bord inférieur (y=0) et soumise à un déplacement uniforme $\delta\underline{e}_x$ sur son bord supérieur (y=H), la pesanteur étant négligée et les faces latérales situées dans les plans $z=\pm e$ étant *libres de contrainte*, comme indiqué sur la figure ci-dessus. On désigne par (λ_i, μ_i) les coefficients de Lamé du matériau constituant la couche n°i et par k_i sa limite d'élasticité (critère de plasticité parfaite de *von Mises*).

L'état initial du bicouche étant *naturel* (contrainte nulle en tout point pour $\delta(t$=0)=0), on fait progressivement croître le déplacement imposé δ.

1. Phase de comportement élastique *1,5*

0,75 *1.1.* Montrer que le champ de déplacement défini par :

$$\underline{\xi} = \delta \frac{y}{H} \underline{e}_x \tag{1}$$

est bien *cinématiquement admissible* pour le problème et calculer le champ de déformation correspondant, puis le champ de contrainte associé en tout point par la loi de comportement élastique de chaque couche, caractérisée par les coefficients (λ_i, μ_i).

0,5 *1.2.* Vérifier que ce champ de contrainte est *statiquement admissible* pour le problème et en déduire la valeur de la *densité linéique d'effort horizontal* qui s'exerce sur le *bord supérieur* du bicouche (voir figure), définie par :

$$q = \int_{-e}^{+e} \sigma_{xy}(x, y = H, z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

Tracer la courbe donnant q en fonction de δ/H et calculer sa pente en fonction de e, μ_1 et μ_2.

0,25 *1.3.* Montrer que l'une des deux couches entre en plasticité lorsque :

$$(\delta / H)^e = \min\{k_1/\mu_1 ; k_2/\mu_2\} \tag{3}$$

et en déduire la *limite d'élasticité* correspondante q^e.

2. Phase élastoplastique $(\delta \geq \delta^e)$ **2,5**

On suppose désormais que la *couche n°1 plastifie en premier* ($k_1/\mu_1 \leq k_2/\mu_2$).

0,5 *2.1.* La solution en déplacement étant toujours recherchée sous la forme (1), déterminer la solution en contrainte dans la couche n°2 qui reste *élastique*.

1,25 *2.2.* La solution en contrainte dans la couche n°1 est recherchée sous la forme du champ *homogène constant* suivant :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = k_1 \ \text{ autres } \sigma_{ij} = 0 \tag{4}$$

Montrer que le champ de contrainte obtenu en *2.1* pour la couche n°2 et donné par (4) pour la couche n°1 est *statiquement* et *plastiquement admissible*. La solution en vitesse est par ailleurs recherchée sous la forme :

$$\underline{U} = \dot{\underline{\xi}} = \dot{\delta} \frac{y}{H} \underline{e}_x \tag{5}$$

Montrer à partir de (4) et (5) que la *loi de comportement élastoplastique* :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{d}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \ \text{ avec } \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{d}}^p = \dot{\eta} \underline{\underline{s}} \ , \ \dot{\eta} \geq 0 \tag{6}$$

est bien satisfaite en tout point de la couche n°1. Conclure quant à la solution du problème en *phase élastoplastique*.

0,75 *2.3.* Calculer la valeur du *taux* de chargement $\dot{q}$ dans cette phase en fonction de e, μ_2 et $\dot{\delta}/H$ et tracer la courbe correspondante donnant q en fonction de δ/H.

3. Charge limite. ***0,5***

Jusqu'à quelle valeur de q, notée q^l, cette phase élastoplastique est-elle valable ? Que se passe-t-il si $q = q^l, \dot{q} = 0$? Décrire le *mécanisme d'écoulement plastique libre* associé à cette *charge limite*. Cette charge limite aurait-elle été modifiée si, les paramètres k_i restant inchangés, la couche n°2 avait plastifié en premier ? Même question dans le cas où le champ de contrainte initial n'est pas nul.

4. Décharge totale ***0,75***

Le déplacement δ ayant juste atteint sa valeur δ^l correspondant à l'entrée en plastification de la couche n°2, on fait alors décroître le chargement correspondant de la valeur q^l jusqu'à l'annuler. Montrer que cette décharge totale est *élastique* et déterminer les champs de contrainte et de déplacements *résiduels*. Représenter dans le plan (q-δ/H) l'ensemble du *cycle charge-décharge*.

Que se passe-t-il dans le cas où $k_1 / \mu_1 = k_2 / \mu_2$?

Corrigé

1. Phase de comportement élastique

1.1. Le champ de déplacement (1) est bien *cinématiquement admissible* puisque :

$$\underline{\xi}(y=0) = \underline{\xi}^d = 0 \; ; \; \underline{\xi}(y=H) = \underline{\xi}^d = \delta \underline{e}_x \tag{C1}$$

le champ de déformation correspondant s'écrivant :

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\delta}{2H} \quad \text{autres } \varepsilon_{kl} = 0 \tag{C2}$$

tandis que le champ de contrainte associé par la loi de comportement élastique vaut dans chaque couche :

$$i=1,2 : \quad \underline{\underline{\sigma}}_i = \lambda_i \overbrace{(\mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})}^{=0}\underline{\underline{1}} + 2\mu_i \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i & 0 \\ \tau_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau_i = \mu_i \frac{\delta}{H} \tag{C3}$$

1.2. Le champ (C3), homogène *« par morceaux »*, est bien *statiquement admissible*, car :

- il satisfait dans chaque couche l'*équation d'équilibre* sans forces de volume ($\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} = 0$) ;
- il respecte les *conditions aux limites* sur les faces latérales du bicouche :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1.\underline{e}_z = \underline{\underline{\sigma}}_2.(-\underline{e}_z) = \underline{T}^d = 0 \tag{C4}$$

- la condition de *continuité du vecteur-contrainte* à travers l'interface $z=0$ entre couches est bien respectée :

$$(\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2).\underline{e}_z = 0 \tag{C5}$$

Il équilibre le *chargement linéique* :

$$\boxed{q = \int_{-e}^{+e} \sigma_{xy}(z)\mathrm{d}z = \int_{-e}^{0} \tau_2 \mathrm{d}z + \int_{0}^{+e} \tau_1 \mathrm{d}z = (\mu_1 + \mu_2) e \frac{\delta}{H}} \tag{C6}$$

La courbe donnant le chargement q en fonction de δ/H est une demi-droite issue de l'origine et de pente égale à $(\mu_1 + \mu_2)e$ (voir figure en fin du corrigé).

1.3. Les contraintes élastiques dans les couches étant de trace nulle, elles sont égales à leurs déviateurs respectifs :

$$i=1,2: \quad \underline{\underline{\sigma}}_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i & 0 \\ \tau_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{s}}_i \tag{C7}$$

de sorte que le critère de plasticité de *von Mises* s'écrit :

$$i=1,2: \quad (1/2\underline{\underline{s}}_i : \underline{\underline{s}}_i)^{1/2} = |\tau_i| \leq k_i \tag{C8}$$

et la limite d'élasticité correspond à la plastification d'une première couche :

$$\mu_i \delta / H \leq k_i \Rightarrow (\delta / H)^e = \min\{k_1/\mu_1 ; k_2/\mu_2\} \tag{C9}$$

soit :

$$q^e = (\mu_1+\mu_2)e\left(\frac{\delta}{H}\right)^e = \min\{(1+\mu_2/\mu_1)ek_1 ; (1+\mu_1/\mu_2)ek_2\} \tag{C10}$$

Supposant que la *couche n°1 plastifie en premier* ($k_1/\mu_1 \leq k_2/\mu_2$), on obtient alors :

$$\boxed{\left(\frac{\delta}{H}\right)^e = \frac{k_1}{\mu_1} \quad \text{et} \quad q^e = \left(1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)ek_1} \tag{C11}$$

2. Phase élastoplastique $(\delta \geq \delta^e)$

2.1. La solution dans la couche n°2 qui reste *élastique* s'écrit tout comme en phase élastique :

$$\underline{\xi}_2 = \delta \frac{y}{H} \underline{e}_x \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \mu_2 \frac{\delta}{H} \tag{C12}$$

2.2. Le champ de contrainte défini par (4) dans la couche n°1 *plastique* et par (C12) dans la couche n°2 *élastique* est bien *statiquement admissible* car vérifiant l'équation d'équilibre dans chaque couche, les conditions de faces latérales libres de contrainte, ainsi que la continuité du vecteur-contrainte au travers de l'interface de séparation en couches. Ce champ est par ailleurs plastiquement admissible dans la couche n°1 puisque $|\tau_1| = k_1$.

Le champ de vitesse donné par (5), identique dans les deux couches, est par ailleurs bien cinématiquement admissible. Le taux de déformation associé, également homogène, vaut alors :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\dot{\delta}}{2H} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C13}$$

Or le *taux de déformation élastique* dans la couche n°1 est nul :

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{1+\nu_1}{E_1} \overset{=0}{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\mathrm{tr}\, \overset{=0}{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_1}) = 0 \tag{C14}$$

le *taux de déformation plastique* vaut :

$$\underline{\underline{d}}^{p} = \underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\delta}}{2H}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C15}$$

Il vérifie donc la *règle d'écoulement plastique*, puisque de la forme :

$$\underline{\underline{d}}^{p} = \frac{\dot{\delta}}{2H}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\eta}\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\eta}\underline{\underline{s}}_1 \tag{C16}$$

le *multiplicateur plastique* étant positif ou nul :

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{\delta}}{2k_1 H} \geq 0 \tag{C17}$$

Ce qui achève de montrer que le champ de contrainte (4) et le champ de vitesse (5) dans la couche n°1 associés à la solution dans la couche élastique n°2 constitue la solution du problème d'évolution en phase élastoplastique.

2.3. Le *taux* de chargement $\dot{q}$ en *phase élastoplastique* vaut alors en vertu de (2) :

$$\dot{q} = \int_{-e}^{+e} \dot{\sigma}_{xy}(z)\mathrm{dz} = \int_{-e}^{0} \mu_2 \frac{\dot{\delta}}{H}\mathrm{dz} + \int_{0}^{+e} \overset{=0}{\dot{k}_1}\,\mathrm{dz} = \mu_2 e \frac{\dot{\delta}}{H} \tag{C18}$$

la pente de la courbe donnant, dans cette phase, le chargement q en fonction de δ/H étant égale à $\mu_2 e$ (voir schéma ci-dessous). L'équation de cette courbe s'écrit alors :

$$q = q^e + \mu_2 e \frac{\delta - \delta^e}{H} \tag{C19}$$

3. Charge limite.

La solution précédente en phase élastoplastique est valable jusqu'au moment où le critère de plasticité est atteint dans la couche n°2, soit :

$$\mu_2 \frac{\delta}{H} \leq k_2 \Rightarrow \frac{\delta}{H} = \left(\frac{\delta}{H}\right)^l = \frac{k_2}{\mu_2} \tag{C20}$$

Les deux couches étant alors plastifiées, le chargement correspondant vaut :

$$\boxed{q^l = \int_{-e}^{0} k_2 \mathrm{dz} + \int_{0}^{+e} k_1 \mathrm{dz} = (k_1 + k_2)e} \tag{C21}$$

qui représente le *chargement limite* de la structure.

En effet, maintenant *constant* le chargement à cette valeur ($q = q^l, \dot{q} = 0$), la solution en contrainte est également constante égale à :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \begin{pmatrix} 0 & k_i & 0 \\ k_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{s}}_i \Rightarrow \underline{\underline{d}}_i^p = \dot{\eta}_i \begin{pmatrix} 0 & k_i & 0 \\ k_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C22}$$

Le champ de vitesse associé, qui décrit le *mécanisme d'écoulement plastique libre* du bicouche, est égal à :

$$\underline{U} = \frac{\dot{\delta}}{H} y \underline{e}_x \Rightarrow \underline{\underline{d}} = \frac{\dot{\delta}}{2H} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C23}$$

d'où par identification de (C22) et (C23) et en tenant compte de ce que $\underline{\underline{d}}^e = 0$:

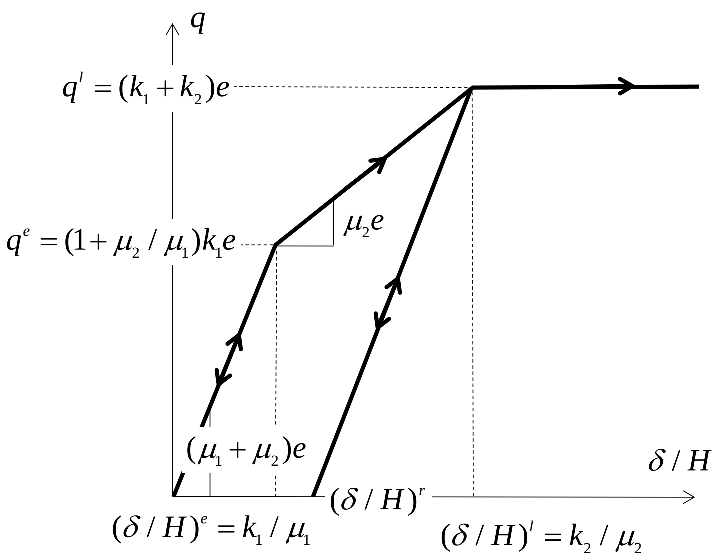
$$\dot{\eta}_i = \frac{\dot{\delta}}{2k_i H} \geq 0 \tag{C25}$$

La charge limite (C21), qui ne dépend que des *seuils plastiques k_i* et non pas des modules d'élasticité, resterait identique si la couche la couche n°2 avait plastifié en premier. Elle resterait également inchangée pour un état initial *non naturel*.

4. Décharge totale

En supposant que la décharge totale à partir du point (q^l-δ^l/H) reste *élastique* (voir figure diagramme ci-dessous), le *déplacement résiduel* vaut :

$$\frac{\delta^r}{H} = \frac{\delta^l}{H} - \frac{q^l}{(\mu_1 + \mu_2)} = \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-1} \left(\frac{k_2}{\mu_2} - \frac{k_1}{\mu_1}\right) \geq 0 \tag{C26}$$



Par ailleurs les *contraintes résiduelles* valent :

$$\tau_1^r = k_1 - \frac{\mu_1 q^l}{(\mu_2+\mu_1)e} = \left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)^{-1}\left(\frac{k_2}{\mu_2}-\frac{k_1}{\mu_1}\right) \geq 0$$
$$\tau_2^r = k_2 - \frac{\mu_2 q^l}{(\mu_2+\mu_1)e} = -\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)^{-1}\left(\frac{k_2}{\mu_2}-\frac{k_1}{\mu_1}\right) \leq 0 \tag{C27}$$

La décharge est donc bien élastique puisque la contrainte τ_1 décroît de la valeur k_1 à une valeur qui reste positive ou nulle, tandis que la contrainte τ_2 décroît de la valeur k_2 à une valeur négative mais qui reste supérieure à $-k_2$. En effet :

$$\tau_2^r - (-k_2) = -\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)^{-1}\left(\frac{k_2}{\mu_2}-\frac{k_1}{\mu_1}\right) + k_2 = \left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)^{-1}\left[\overbrace{\frac{k_1}{\mu_1}-\frac{k_2}{\mu_2}+k_2\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)}^{\frac{k_1+k_2}{\mu_1}>0}\right] \tag{C28}$$

Dans l'hypothèse où $k_1/\mu_1 = k_2/\mu_2$, les deux couches entrent *simultanément* en plasticité, la limite d'élasticité coïncide alors avec la charge limite et les contraintes résiduelles s'annulent.

*   *

*