

# Ségrégations socio-spatiales: Modèle(s) de Schelling – et autre(s)

Julien Randon-Furling

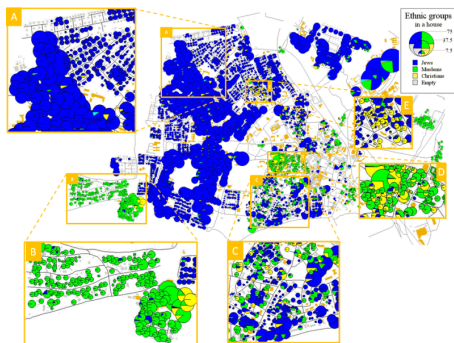
SAMM, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, France

Cours *Économie des Villes et des Territoires*  
(Resp. Annick Vignes)  
École des Ponts ParisTech

Lundi 11 & Lundi 18 mars 2019

- 1 Modèle multi-agents de Schelling
- 2 Une variante du modèle de Schelling
- 3 Un modèle du modèle de Schelling
- 4 En partant de données réelles
- 5 Quelques outils statistiques
- 6 Vers de nouveaux indices de ségrégation
- 7 Ségrégation multi-échelle

# Introduction



Ref : Hatna et Benenson, *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 15 (1) 6 (2012)

- Diversité de motifs
- Micro/macro
- Facteurs clés : intolérance, discrimination, prix, ... ?

## Modèle de Schelling

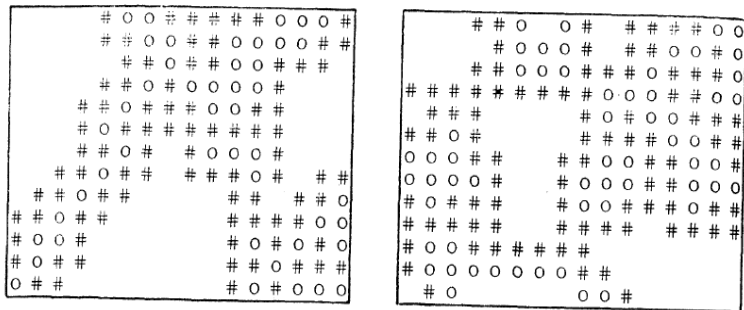


Fig. 17

Ref : T.C. Schelling, *Jour. Math. Soc.* 1 (1971)

- grille  $L \times L$ , densité d'occupation  $\rho$ .
- "satisfaction" des agents :  $N_d \leq T(N_d + N_s)$ , avec  $T$  la "tolérance".
- Observation : ségrégation possible même avec  $T$  élevé

## Modèle de Schelling

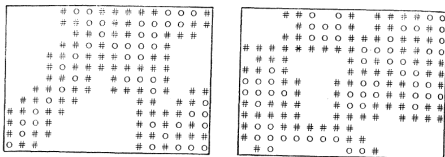


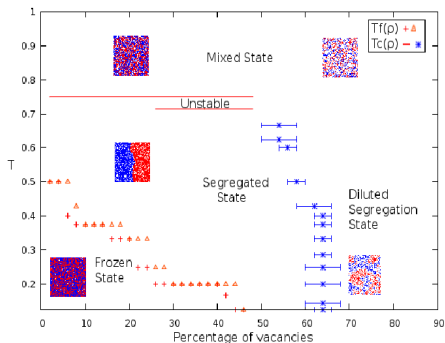
Fig.17

- grille  $L \times L$ , densité d'occupation  $\rho$ .
- "satisfaction" des agents :  $N_d \leq T(N_d + N_s)$ , avec  $T$  la "tolérance".
- Dynamique = règle d'examen des agents et règle de déplacement
- Indice de ségrégation :

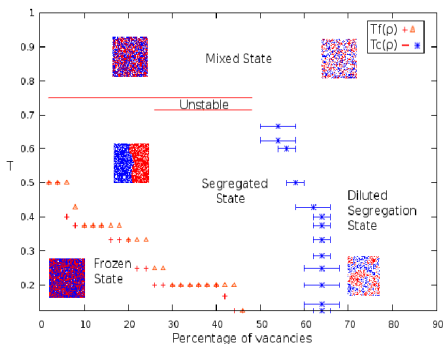
$$S = \frac{2}{(L^2(1 - \rho))^2} \sum_{\{C\}} n_C^2,$$

avec  $n_C$  la taille de l'amas  $C$ .

## Diagramme de phase du Modèle de Schelling



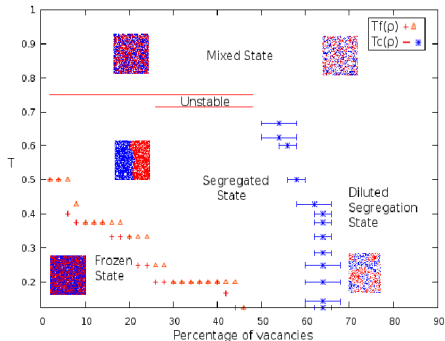
Ref : Gauvin et al., *European Physical Journal B*, 70, 293–304 (2009)



Ref : Gauvin et al., *European Physical Journal B*, 70, 293–304 (2009)

## Dynamique dans l'espace des phases

- Quel lien avec la *réalité* ?
- Quels sont les paramètres *réglables* ?
- $\rightsquigarrow$  Politique de la ville ?



Ref : Gauvin et al., *European Physical Journal B*, 70, 293–304 (2009)

## Dynamique dans l'espace des phases

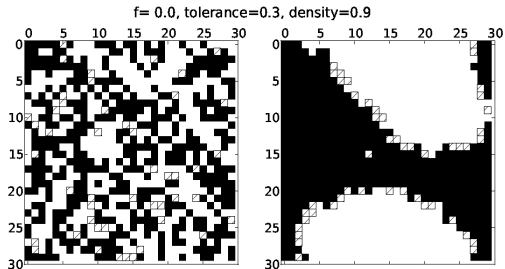
- Quel lien avec la *réalité* ?
- Quels sont les paramètres *réglables* ?
- $\rightsquigarrow$  Politique de la ville ?

## Perturber l'échelle *sociale*

- Agents pouvant passer de *A* à *B*
- Diagramme de phase ?  
*Déségrégation* ?
- $\rightsquigarrow$  rôle de la mobilité sociale ?
- $\rightsquigarrow$  rôle des logements sociaux ?



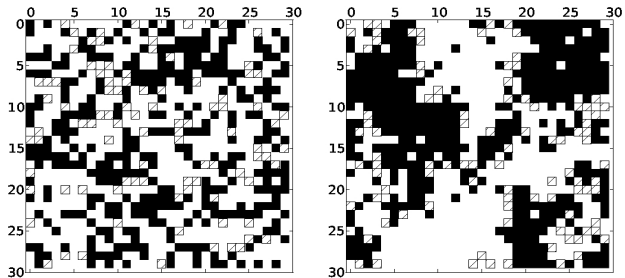
# Un système de Schelling avec agents *changeants*



Ref : Hazan and R-F, *European Physical Journal B* (2012)

# Un système de Schelling avec agents *changeants*

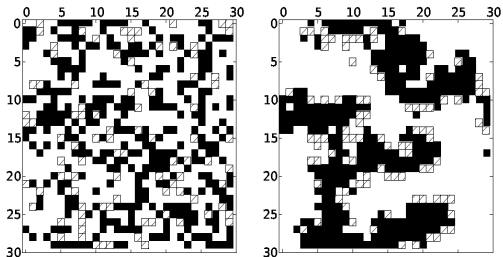
$f = 0.2$ , tolerance=0.3, density=0.9  
switching agents: active



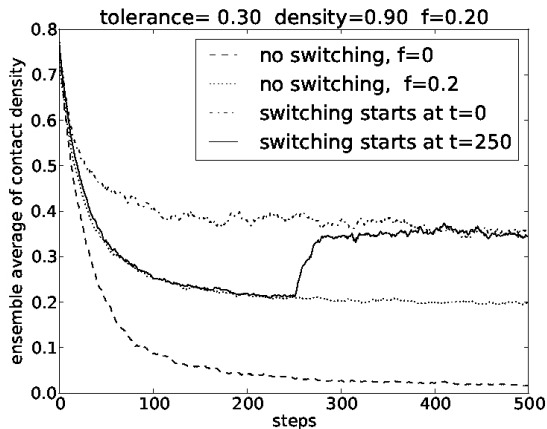
Ref : Hazan and R-F, *European Physical Journal B* (2012)

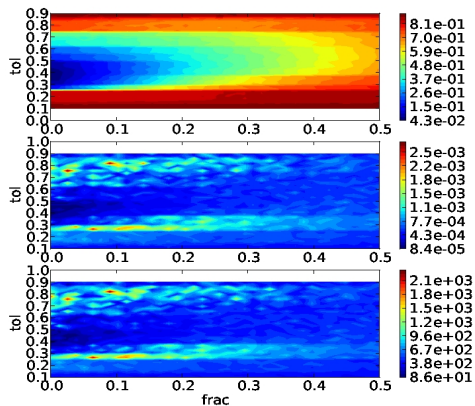
# Un système de Schelling avec agents *changeants*

$f=0.2$ , tolerance=0.3, density=0.9  
switching agents: present but inactive

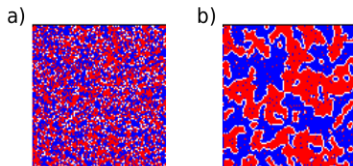


Ref : Hazan and R-F, *European Physical Journal B* (2012)

Un système de Schelling avec agents *changeants*Ref : Hazan and R-F, *European Physical Journal B* (2012)

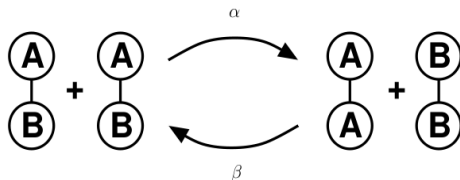
Un système de Schelling avec agents *changeants*Ref : Hazan and R-F, *European Physical Journal B* (2012)

## Un système de Schelling avec agents *changeants*



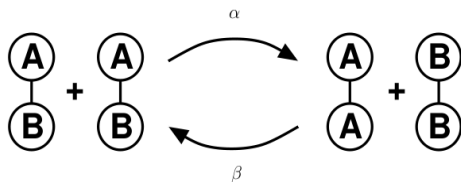
**Figure 1.** Example of simulation results obtained on a  $100 \times 100$  lattice, with tolerance  $T = 0.3$ , occupation density  $\rho = 0.9$  and fraction of switching agents  $f = 0$  (a) and  $f = 0.12$  (b). In both cases, the non-switching population is split evenly between the two types (represented here as red and blue), and simulations run from an initial configuration which is well mixed, i.e. the system is initially in a state of low segregation. In case (a), the dynamics quickly reaches a frozen state: agents are not happy with their location but cannot find a vacant site where they would be happy, so the system tends to remain in a configuration similar to its initial, well-mixed one. In case (b), the presence of switching agents “de-freezes” the situation, leading to a new final steady-state.

## Un modèle du modèle de Schelling : le modèle de Rogers-MacKane



- La grille est “abstraite” : simplement  $\frac{N}{2}$  paires
- La satisfaction d'un agent au site  $i$  est  $u$  si son unique voisin est du même type,  $v$  sinon ( $u > v$ )
- Lien avec la grille, matrice de transfert :  $T_{ij}(\sigma) = \frac{1}{N^2} (1 - s_i) s_j^{(i,j)}$

## Un modèle du modèle de Schelling : le modèle de Rogers-MacKane



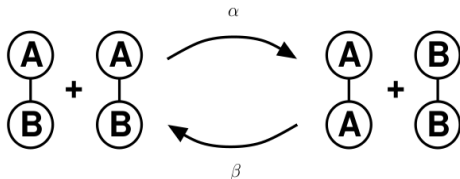
- Évolution temporelle de la densité d'interface (fraction de paires inhomogènes), dans la limite  $N$  grand :

$$\frac{dx}{dt} = \beta(1 - x(t))^2 - \alpha x(t)^2, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

avec  $\beta = 2(1 - u)v$ ,  $\alpha = 2(1 - v)u$



## Un modèle du modèle de Schelling : le modèle de Rogers-MacKane



- Évolution temporelle de la densité d'interface (fraction de paires inhomogènes), dans la limite  $N$  grand :

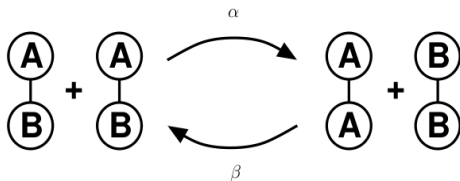
$$\frac{dx}{dt} = \beta(1 - x(t))^2 - \alpha x(t)^2, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

avec  $\beta = 2(1 - u)v$ ,  $\alpha = 2(1 - v)u$

- Densité d'interface au temps  $t$  :

$$x(t) = \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \alpha \tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}{2\sqrt{\alpha\beta} + (\alpha + \beta) \tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}$$

## Un modèle du modèle de Schelling : le modèle de Rogers-MacKane



- Évolution temporelle de la densité d'interface (fraction de paires inhomogènes), dans la limite  $N$  grand :

$$\frac{dx}{dt} = \beta(1 - x(t))^2 - \alpha x(t)^2, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

avec  $\beta = 2(1 - u)v$ ,  $\alpha = 2(1 - v)u$

- Densité d'interface au temps  $t$  :

$$x(t) = \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \alpha \tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}{2\sqrt{\alpha\beta} + (\alpha + \beta)\tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}$$

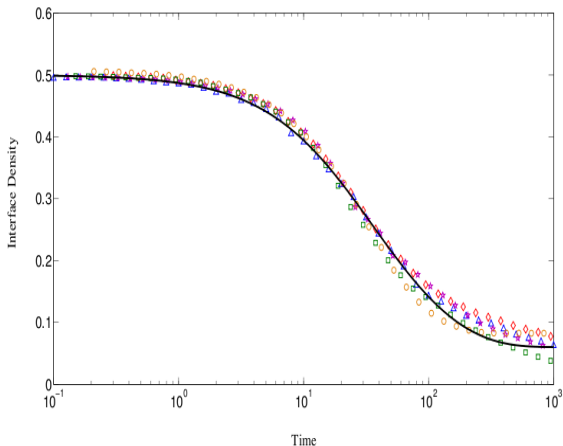
- Dans la limite  $t$  grand :

$$x(t) \rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha/\beta}}$$

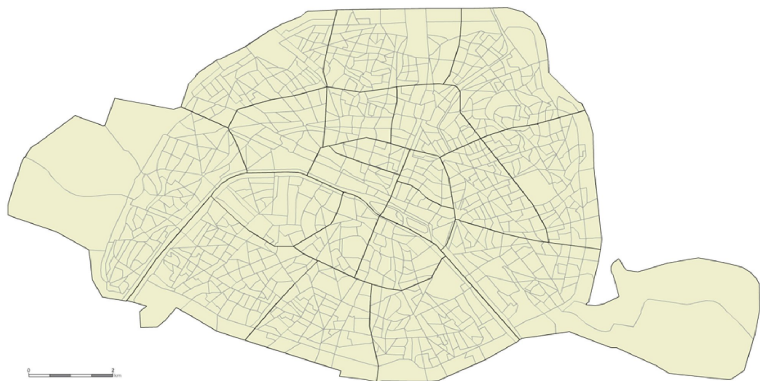
## Émergence de la ségrégation

- Densité d'interface au temps  $t$  :

$$x(t) = \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \alpha \tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}{2\sqrt{\alpha\beta} + (\alpha + \beta) \tanh(t\sqrt{\alpha\beta})}$$



## En partant des données : un exemple avec la ville de Paris



~ 1 000 IRIS (*Îlots regroupés pour l'information statistique*)

## Trois jeux de données

### Jeu 1 *Revenus* (sur 853 IRIS) :

- ▶ premier et neuvième déciles, médiane de la distribution,
- ▶ part des revenus du patrimoine,
- ▶ part des aides et des minimas sociaux.

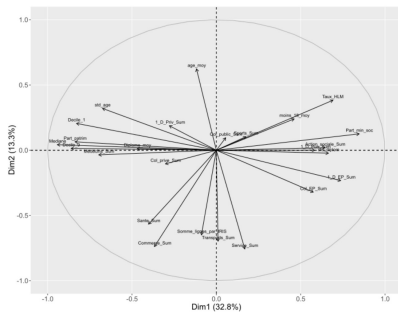
### Jeu 2 *Population* (sur 943 IRIS) :

- ▶ âge (moyenne et écart type),
- ▶ nombre de mineurs,
- ▶ niveau d'éducation (codé de 1 à 5, moyenne et écart type).

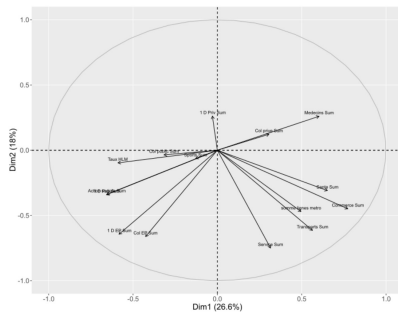
### Jeu 3 *Équipements, services, logements sociaux* (sur 980 IRIS) :

- ▶ taux de logement social,
- ▶ accès aux transports en commun,
- ▶ commerces,
- ▶ accès aux services de santé,
- ▶ équipements sportifs,
- ▶ établissements scolaires primaires et secondaires (dont REP, REP+)

## Ségrégation : à partir des données – pourquoi pas une ACP ?



(a)

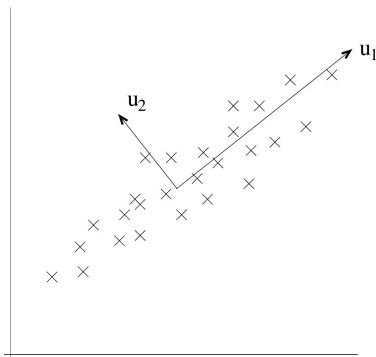


(b)

Fig. 1. PCA on all variables (a) and solely on the variables of set 3 (b).

Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

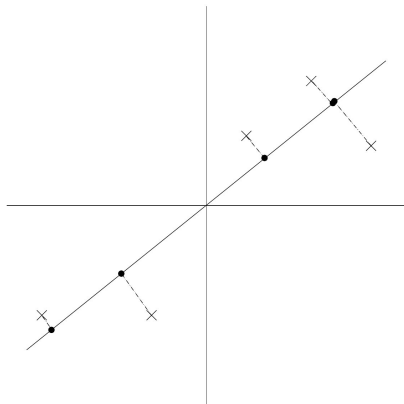
## Quelques outils statistiques : ACP



Ref : Lecture notes Andrew Ng

- Comment détecter les axes ?
- Comment calculer  $u_1$  et  $u_2$  ?
- Comment préserver un maximum de variance ( $\sim$  information) ?

## ACP

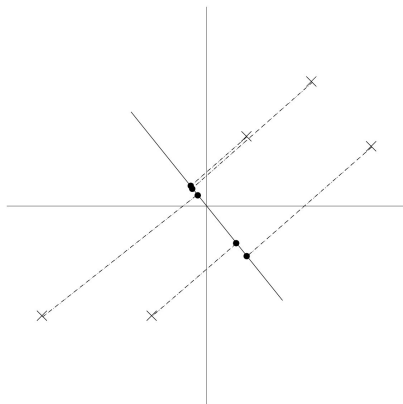


Ref : Lecture notes Andrew Ng

- Comment détecter les axes ?
- Comment calculer  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  ?
- Comment préserver un maximum de variance ( $\sim$  information) ?



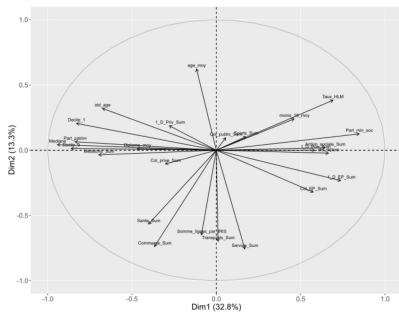
## ACP



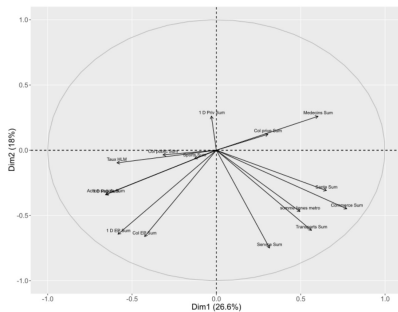
Ref : Lecture notes Andrew Ng

- Comment détecter les axes ?
- Comment calculer  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  ?
- Comment préserver un maximum de variance ( $\sim$  information) ?

# Ségrégation : à partir des données – pourquoi pas une ACP ?



(a)

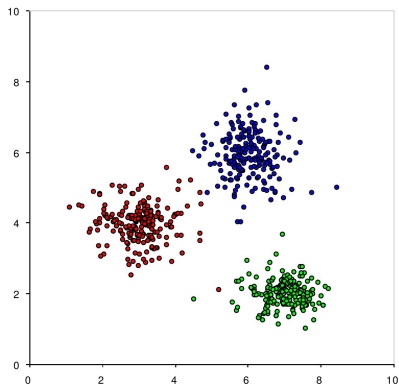


(b)

Fig. 1. PCA on all variables (a) and solely on the variables of set 3 (b).

Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

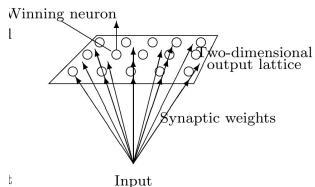
## Algorithme de Kohonen - cartes auto-organisées (SOM)



Ref : Lecture notes Roman Belavkin

- Comment détecter les amas / classes / groupes ?
- Comment classer automatiquement de nouvelles données ?

# Algorithme de Kohonen - cartes auto-organisées (SOM)



Ref : Lecture notes Roman Belavkin

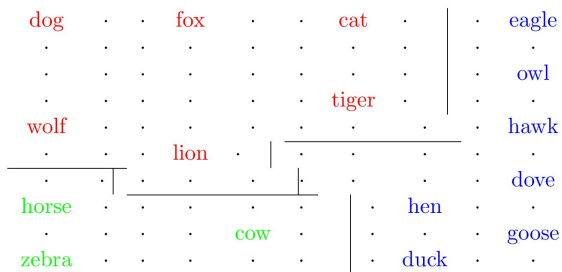
- Réseaux de “neurones”
- Apprentissage

## Algorithme de Kohonen - cartes auto-organisées (SOM)

	size			legs		hair, hooves, mane, feather				hunt, run, fly, swim			
	s	m	b	2	4								
dove	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
hen	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
duck	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
goose	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
owl	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
hawk	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
eagle	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
fox	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
dog	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
wolf	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
cat	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
tiger	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
lion	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
horse	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
zebra	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
cow	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Ref : Lecture notes Roman Belavkin

## Algorithme de Kohonen - cartes auto-organisées (SOM)

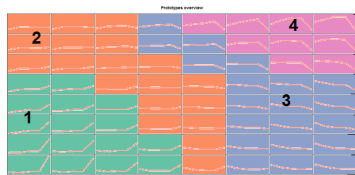


Ref : Lecture notes Roman Belavkin

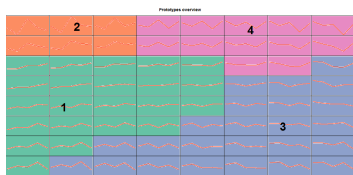
# Statistiques algorithmiques

- Visualisation de données multidimensionnelles
- Réduction de dimensionalité
- Réduction de bruit
- Classification non-supervisée et stochastique
- Prédiction de données manquantes

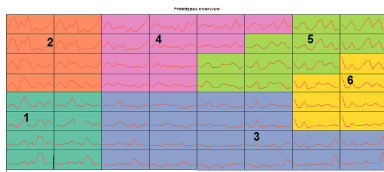
## Cartes de Kohonen pour les trois jeux de données



(a)



(b)



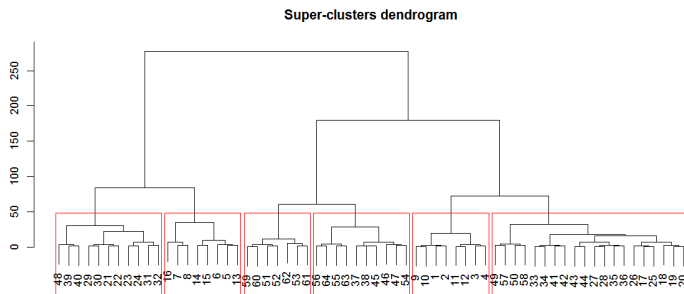
(c)

Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan WSOM+17 (2017)

Cartes de Kohonen pour les jeux 1 (figure a), 2 (b) et 3 (c) :  
64 classes regroupées en 4 à 6 amas par CAH → *typologie des quartiers*



# Dendrogramme du 3e jeu de données



Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

## Trois images de Paris



IRIS selon leur (super)classe pour le premier jeu de variables (Revenus)



IRIS selon leur (super)classe  
pour le premier jeu (Revenus)

Cluster	1st decile	Median income	9th decile	Revenue from assets
1	8173	18410	38317	9.5
2	9834	26567	56911	16
3	12542	32305	69360	21
4	13120	43152	124427	39
All	10672	28411	65309	19

Moyennes par classe  
(en euros pour les déciles, en pourcentage  
pour les parts)

## Trois images de Paris



Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

IRIS selon leur (super)classe pour le deuxième jeu de variables (Population)



IRIS selon leur (super)classe  
pour le deuxième jeu (Population)

Cluster	Age	Children per household	Education
1	39.2	0.31	2.7
2	40.4	0.74	2.6
3	44.4	0.32	2.7
4	46.4	0.48	2.2
All	42.6	0.37	2.6

Moyennes par classe  
(niveau d'éducation de pré-secondaire (1) à  
3e cycle (5))

## Trois images de Paris



Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

IRIS selon leur (super)classe pour le troisième jeu de variables (Équipements, services, logements sociaux)

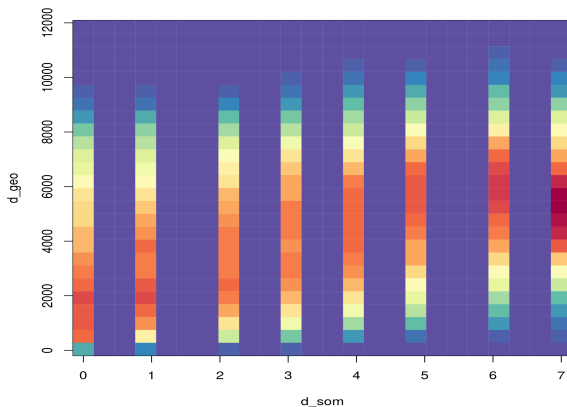


IRIS selon leur (super)classe  
pour le troisième jeu  
(Équipements, services, logements  
sociaux)

Cluster	Social housing	Medical doctors	EP schools	Shops	Public transport
1	7	269	0.36	267	6.8
2	3	262	0.70	637	13.1
3	12	160	0.95	203	6.5
4	8	153	3.63	430	12.1
5	26	108	9.26	194	6.3
6	75	122	3.77	138	5.3
All	18	173	2.77	288	8

Moyennes par classe  
(taux de HLM par IRIS, valeurs absolues  
par IRIS et ses 10 plus proches voisins ;  
transports publics : lignes dans un rayon de  
800 mètres).

# Vers de nouveaux indices de ségrégation

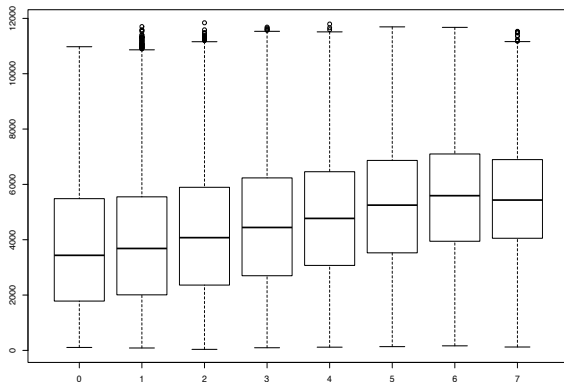


Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

Dispersion géographique des paires d'IRIS selon leur distance sur la carte de Kohonen



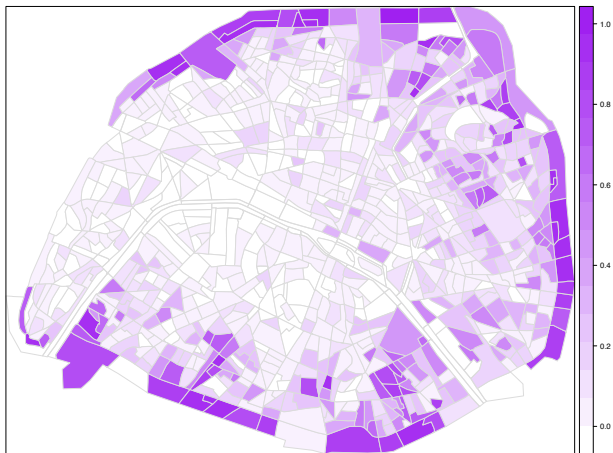
## Vers de nouveaux indices de ségrégation



Ref : Cottrell, Olteanu, Randon-Furling, Hazan *WSOM+17* (2017)

Dispersion géographique des paires d'IRIS selon leur distance sur la carte de Kohonen

## Au-delà des aspects locaux



Ref : Randon-Furling, Olteanu, Lucquiaud *Env. & Planning B* (2018)

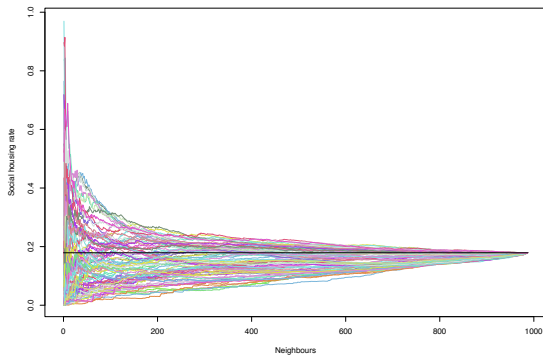
- taux de logement social très variable d'un point à l'autre
- distribution spatiale non uniforme

## *Modifiable Areal Unit Problem*

## Du MAUP à des trajectoires multi-échelles

- $N$  unités
- $G_n(i)$  =  $i$ -ième unité +  $(n - 1)$  plus proches
- $f_i(n)$  = valeur de la variable calculée sur  $G_n(i)$

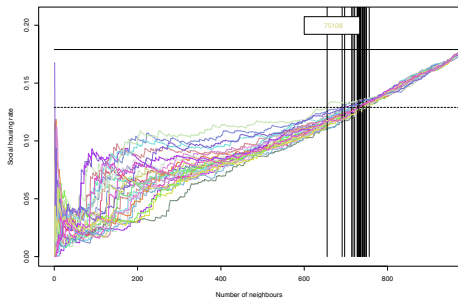
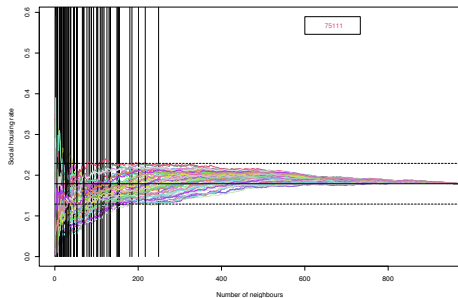
## Trajectoires multi-échelles



Ref : Randon-Furling, Olteanu, Lucquiaud *Env. & Planning B* (2018)

Trajectoires pour les taux de HLM, en partant de certains (10%) des 936 IRIS de Paris.  
La ligne continue donne la moyenne pour la ville (17.9%).

## Rayon de convergence

8<sup>e</sup> Arrondissement11<sup>e</sup> Arrondissement

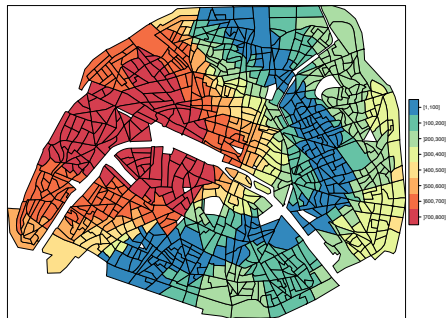
- Trajectoires pour le taux de HLM, en partant de chaque IRIS
- La ligne horizontale continue donne la moyenne pour la ville
- Les lignes pointillées correspondent à  $\pm 0.05$  autour de la moyenne
- Les droites verticales indiquent les **rayons de convergence** à  $\pm 0.05$

# Taux de HLM dans Paris

## Valeurs à l'IRIS



## Rayons de convergence



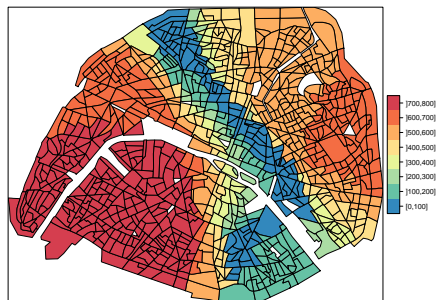
Ref : Randon-Furling, Olteanu, Lucquiaud *Env. & Planning B* (2018)

## Distribution des revenus dans Paris

Valeurs à l'IRIS



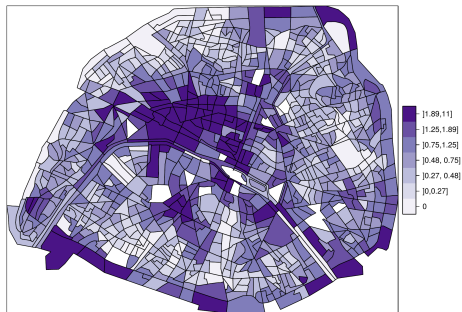
Rayons de convergence





# Densité du réseau ferré métropolitain à Paris

## Valeurs à l'IRIS



## Rayons de convergence



Ref : Randon-Furling, Olteanu, Lucquiaud *Env. & Planning B* (2018)

## Un modèle-zéro : marches aléatoires vers la moyenne

Urnes...

Traj. ville bien mélangée



Tirage urne bien mélangée  
(tirage sans remise)

## Un modèle-zéro : marches aléatoires vers la moyenne

### Urnes...

Traj. ville bien mélangée



Tirage urne bien mélangée  
(tirage sans remise)

### et Théorèmes du scrutin

Dépouillement d'une élection à 2 candidats :

- si A obtient  $p$  voix et B,  $q$  voix ( $p > q$ )
- Prob(A toujours devant B) ?

$$\Leftrightarrow \frac{p-q}{p+q} = 2\rho - 1 \quad \text{où } \rho = \frac{p}{p+q}$$

## Un modèle-zéro : marches aléatoires vers la moyenne

### Urnes...

Traj. ville bien mélangée



Tirage urne bien mélangée  
(tirage sans remise)

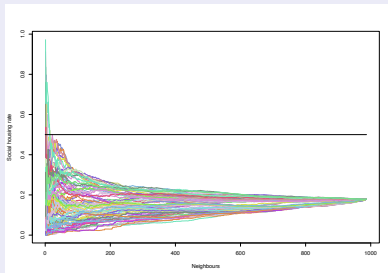
### et Théorèmes du scrutin

Dépouillement d'une élection à 2 candidats :

- si A obtient  $p$  voix et B,  $q$  voix ( $p > q$ )
- Prob(A toujours devant B) ?

$$\Leftrightarrow \frac{p-q}{p+q} = 2\rho - 1 \quad \text{où } \rho = \frac{p}{p+q}$$

## Marches non aléatoires vers la moyenne



$\Leftrightarrow$  si Paris était bien mélangée :  
64% de traj. toujours sous 0.5

$\Leftrightarrow$  en réalité :  
85% de traj. toujours sous 0.5