Tournées

CERMICS,
ENPC

A. Parmentier

19 décembre 2018

Grossièrement on peut subdiviser les problèmes de tournées en deux catégories.

1. on veut parcourir tous les sommets : c'est le problème du voyageur de commerce ;
2. on veut parcourir toutes les "arêtes" : c'est le problème du postier.

De plus on peut décliner les problèmes selon que l'on a affaire à un graphe orienté ou à un graphe non orienté.

Lequel est le plus difficile ?

Sommaire de la partie

1. Voyageur de commerce

1.1 Problème et complexité

1.2 Algorithme exact pour le voyageur de commerce : branch-and-cut

1.3 Recherche locale

2. Problème du postier

3. Problèmes à plusieurs véhicules

4. Exercices

École des Ponts ParisTech

Problème du voyageur de commerce

Données. Graphe $G = (V, E)$, fonction de coût $d : E \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver une chaîne fermée C passant par tous les sommets telle que $\sum_{e \in C} d(e)$ minimum.

Formulation équivalente

On peut vérifier que ce problème est équivalent à celui-ci

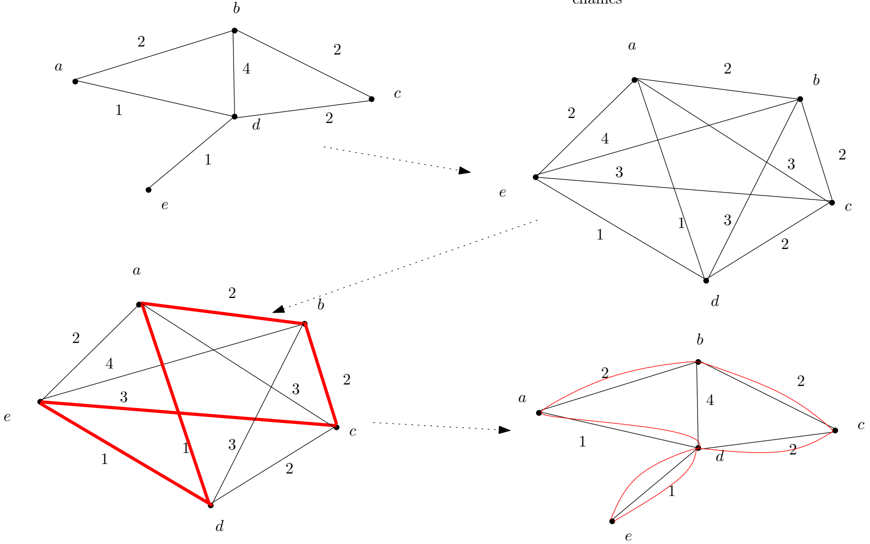
PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

Données. Graphe complet $K_n = (V, E)$, fonction de coût $c : E \to \mathbb{R}_+$ telle que $c(uv) + c(vw) \geq c(uw)$ pour tous sommets u, v, w.

Tâche. Trouver un cycle hamiltonien C passant par tous les sommets tel que $\sum_{e \in C} c(e)$ minimum.

Pourquoi ?

Graphe complet des plus courtes chaînes



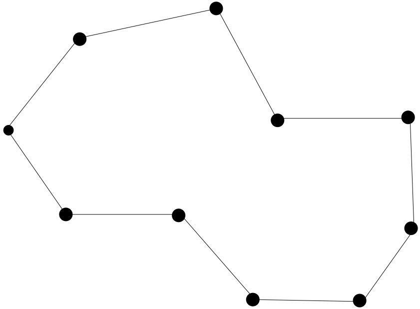
Théorème

Le problème du voyageur de commerce est **NP***-difficile.*

Metric TSP

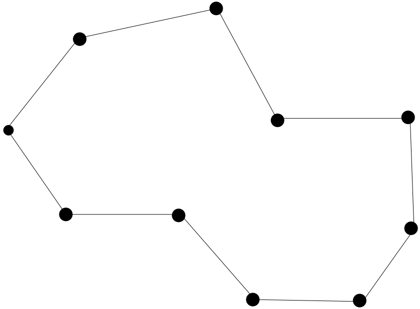
Metric TSP : $c(uv)$ is the euclidean distance.

Metric TSP : $\boldsymbol{c(uv)}$ is the euclidean distance.

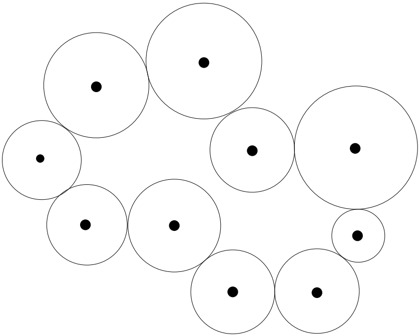


Explain why this tour is optimal.

Metric TSP : $c(uv)$ is the euclidean distance.



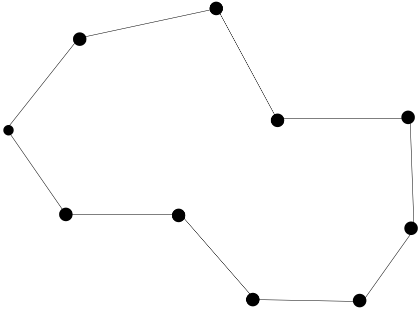
Explain why this tour is optimal.



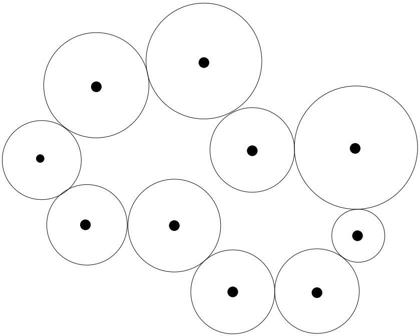
In any tour, the distance from v to its neighbors is non-smaller

Metric TSP

Metric TSP : $c(uv)$ is the euclidean distance.



Explain why this tour is optimal.



In any tour, the distance from v to its neighbors is non-smaller

Metric-TSP is NP-hard

Donner un polyhèdre dont les solutions entières sont les cycles Hamiltoniens.

Donner un polyhèdre dont les solutions entières sont les cycles Hamiltoniens.

Proposition

Les vecteurs d'incidences des cycles hamiltoniens sont exactement les vecteurs solutions de

$$\begin{aligned} x_e &\in \{0,1\} && \forall e \in E, \\ \sum_{e\in\delta(v)} x_e &= 2 && \forall v \in V, \\ \sum_{e\in\delta(X)} x_e &\geq 2 && \forall X \subseteq V,\ X \neq \emptyset, V. \end{aligned}$$

Résoudre le problème du voyageur de commerce, c'est donc résoudre le programme

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{e\in E} c(e)x_e & \\
\text{s.c.} & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E, \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 2 & \forall v \in V, \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(X)} x_e \geq 2 & \forall X \in \mathcal{C},
\end{array}
\qquad \text{(P)}
$$

où $\mathcal{C} = \{X \subseteq V : X \neq \emptyset, V\}$.

Peut-on résoudre ce PLNE frontalement avec un solveur ?

Résoudre le problème du voyageur de commerce, c'est donc résoudre le programme

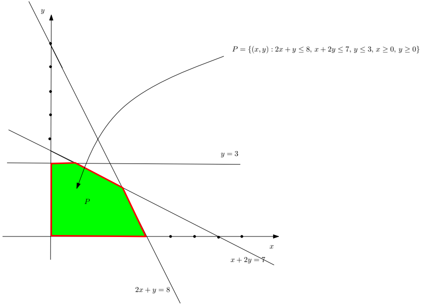
$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{e\in E} c(e)x_e & \\
\text{s.c.} & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E, \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 2 & \forall v \in V, \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta(X)} x_e \geq 2 & \forall X \in \mathcal{C},
\end{array}
\qquad (\mathrm{P})
$$

où $\mathcal{C} = \{X \subseteq V : \; X \neq \varnothing, V\}$.

Peut-on résoudre ce PLNE frontalement avec un solveur ?

Nombre de contraintes exponentiel $\rightarrow$ branch-and-cut ou *génération de ligne*

Seulement les contraintes définissant le sommet de la solution optimale sont requises en programmation linéaire.



Quel algorithme proposez vous pour résoudre un PL avec un nombre exponentiel de contraintes ?

Génération de ligne pour un programme linéaire (P) avec un ensemble $\mathcal{C}$ de taille exponentielle.

1. Initialiser $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$ d'une taille tractable.
2. Résoudre (P) avec uniquement les contraintes $\widetilde{\mathcal{C}}$
3. Identifier la contrainte la plus violée
   - S'il existe une telle contrainte, l'ajouter $\widetilde{\mathcal{C}}$
   - Sinon, on a la solution optimale

Le problème d'identification de la contrainte la plus violée est appelé problème de *séparation* (pricing en anglais)

Quel est le lien avec le pricing dans l'algorithme du simplexe ?

Génération de lignes.

Génération de ligne pour un programme linéaire (P) avec un ensemble $\mathcal{C}$ de taille exponentielle.

1. Initialiser $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$ d'une taille tractable.
2. Résoudre (P) avec uniquement les contraintes $\widetilde{\mathcal{C}}$
3. Identifier la contrainte la plus violée
   - S'il existe une telle contrainte, l'ajouter $\widetilde{\mathcal{C}}$
   - Sinon, on a la solution optimale

Le problème d'identification de la contrainte la plus violée est appelé problème de *séparation* (pricing en anglais)

Quel est le lien avec le pricing dans l'algorithme du simplexe ?

Interprération algébrique

Lien avec le simplex dual : ajouter un contrainte violée revient à faire entrer une variables dans la base duale.

Séparer les contraintes

Idée principale : on suppose que l'on dispose d'un algorithme $\mathcal{A}$ qui résout

SÉPARATION DES CONTRAINTES POUR TSP

Données. Vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{E}}$.

Tâche. Renvoie 'oui' si $\boldsymbol{x}$ satisfait toutes les contraintes $\sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2$ pour $X \in \mathcal{C}$. Si non, renvoie $X' \in \mathcal{C}$ tel que $\sum_{e \in \delta(X')} x_e < 2$.

On fait un branch-and-bound. Pour résoudre la relaxation linéaire de (P) :
On choisit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

1. On résout

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e) x_e & \\
\text{s.c.} & 0 \leq x_e \leq 1 & \forall e \in E, \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \forall v \in V, \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 2 & \forall X \in \mathcal{C}'.
\end{array}$$

   Cela donne une solution $\bar{x}$.
2. On applique $\mathcal{A}$ sur $\bar{x}$.
   - Si ‘oui’, alors on continue le branch-and-bound (*on a résolu la relaxation linéaire de* (P)).
   - Si non, on retourne en 1. en ajoutant le X' obtenu par $\mathcal{A}$ à $\mathcal{C}'$.

Proposer un algorithme de séparation polynomial pour le TSP

Séparation pour TSP

Proposer un algorithme de séparation polynomial pour le TSP

L'algorithme $\mathcal{A}$ de séparation des contraintes pour le TSP :

Mettre $\bar{x}_e$ comme capacité de e, pour $e \in E$.

A s fixé : calculer pour tout t dans $V \setminus \{s\}$ une s-t coupe de capacité minimum.

Si l'une de ces coupes $\delta(X')$ a une capacité < 2, alors

$$X' \in \mathcal{C} \text{ et } \sum_{e \in \delta(X')} \bar{x}_e < 2.$$

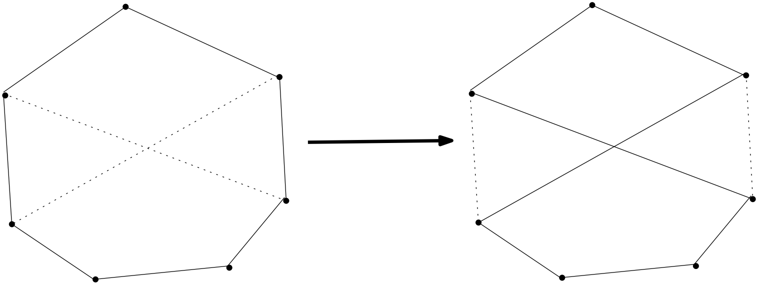
Proposer un voisinage pour le TSP

Proposer un voisinage pour le TSP

Voisinage $\mathbf{2}$-OPT : le plus classique. Deux cycles hamiltoniens $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C'}$ sont voisins s'ils diffèrent d'exactement deux arêtes $|\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{C'}| = |\boldsymbol{C'} \setminus \boldsymbol{C}| = \mathbf{2}$.

On peut alors intégrer ce voisinage dans n'importe quel schéma de métaheuristique du type "recherche locale" (méthode tabou, recuit simulé,...).

Illustration



Sommaire de la partie

1. Voyageur de commerce

2. Problème du postier

3. Problèmes à plusieurs véhicules

4. Exercices

École des Ponts ParisTech

PROBLÈME DU POSTIER

Données. Graphe $G = (V, E)$, fonction de coût sur les arêtes $c : E \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver une chaîne fermée C passant par toutes les arêtes telle que $\sum_{e \in C} c(e)$ minimum.

Problème du postier

Données. Graphe $G = (V, E)$, fonction de coût sur les arêtes $c : E \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver une chaîne fermée C passant par toutes les arêtes telle que $\sum_{e \in C} c(e)$ minimum.

Théorème

C'est un problème polynomial.

PROBLÈME DU POSTIER ORIENTÉ

Données. Graphe orienté $G = (V, A)$, fonction de coût sur les arcs $c : A \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver un chemin fermé C passant par toutes les arcs telle que $\sum_{a \in C} c(a)$ minimum.

Proposer un algorithme polynomial pour résoudre le problème.

Problème du postier orienté

Données. Graphe orienté $G = (V, A)$, fonction de coût sur les arcs $c : A \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver un chemin fermé C passant par toutes les arcs telle que $\sum_{a \in C} c(a)$ minimum.

Proposer un algorithme polynomial pour résoudre le problème.

On définit des capacité $\ell(a) = 1$ et $u(a) = +\infty$, et $b(v) = 0$. On cherche un b-flot de coût minimum (dans ce cas $b = 0$ c'est une circulation)

Il y a un cas où c'est facile :

Théorème

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il possède au plus deux sommets de degré impair.

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si il n'a pas de sommet de degré impair.

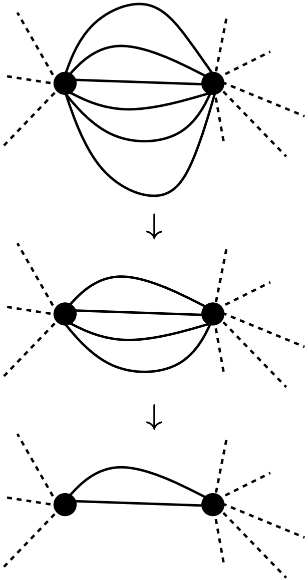
Un tel graphe est eulérien
Graphe eulérien : optimum = somme des coûts des arêtes.

Si le graphe n'est pas eulérien

Attention, on suppose $\boldsymbol{c_e \geq 0}$.

Lemme

Il existe un parcours du postier optimal qui passe au plus deux fois par chaque arête.



D'où la reformulation

PROBLÈME DU POSTIER

Données. Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction de coût sur les arêtes $c : E \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver $F \subseteq E$ tel que $\deg_F(v) = \deg_E(v) \mod 2$ pour tout $v \in V$, et tel que $\sum_{e \in F} c(e)$ soit minimal.

Comment reconstruit-on la tournée à partir de la solution ?

D'où la reformulation

PROBLÈME DU POSTIER

Données. Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction de coût sur les arêtes $c : E \to \mathbb{R}_+$.

Tâche. Trouver $F \subseteq E$ tel que $\mathbf{deg}_F(v) = \mathbf{deg}_E(v)$ mod **2** pour tout $v \in V$, et tel que $\sum_{e \in F} c(e)$ soit minimal.

Comment reconstruit-on la tournée à partir de la solution ?

Dans le graphe où on a 2 copies des arêtes de F : il existe un circuit Eulérien.

De quoi est composé un graphe F optimal ? A quel type de problème peut-on donc réduire ce problème ?

$F \subseteq E$ tel que $\deg_F(v) = \deg_E(v)$ mod 2 pour tout $v \in V$ et tel que $\sum_{e \in F} c(e)$ soit minimal

Si les $c(e) \geq 0$, un tel F est constitué de chaînes appariant les sommets de degré impairs de G.

Trouver un tel F :

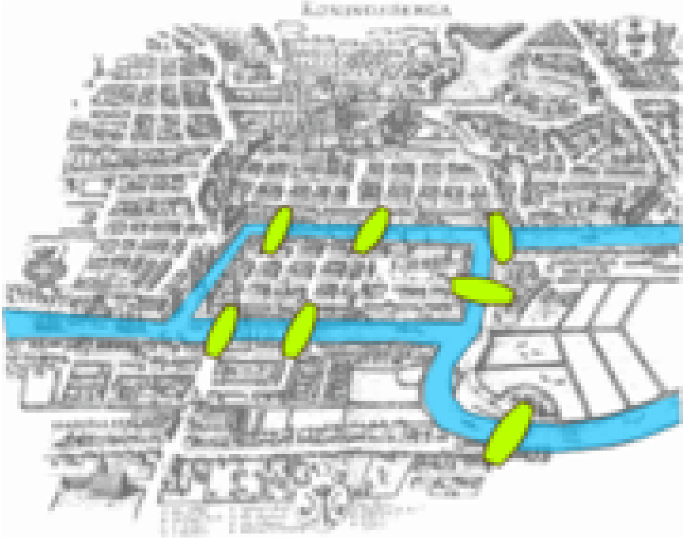
- soit J l'ensemble des sommets de degré impair de G,
- soit K le graphe complet sur J,
- on définit

  $$c(jj') = \text{ le coût de la chaîne de plus petit coût entre } j \text{ et } j'$$

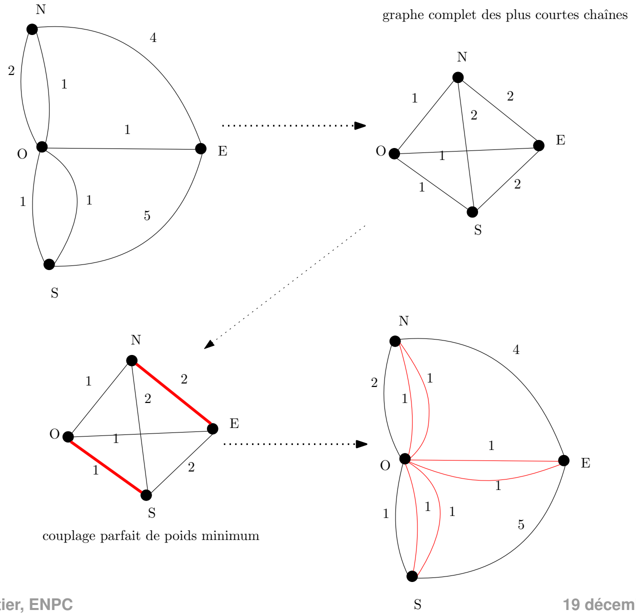
  sur chaque arête jj' de K,
- le couplage parfait de plus petit coût donne alors la solution.

Exemple : Retour sur les ponts de Königsberg

Euler, 1736.



Exemple : Retour sur les ponts de Königsberg



Sommaire de la partie

1. Voyageur de commerce

2. Problème du postier

3. Problèmes à plusieurs véhicules

4. Exercices

Pour aller plus loin

Problèmes de tournées à plusieurs véhicules.

Beaucoup plus difficile

Approches exactes à bases de PLNE : découpler pour obtenir un sous-problème par véhicule

- relaxation Lagrangienne
- génération de colonnes (pour traiter un nombre exponentiel de variables)

Sommaire de la partie

1. Voyageur de commerce

2. Problème du postier

3. Problèmes à plusieurs véhicules

4. Exercices

Un représentant de commerce doit visiter des clients situés en des villes différentes. Il a fixé un rendez-vous pour chacun de ses clients, i.e. pour tout client i, le représentant sait qu'il doit passer après l'instant a_i, mais avant l'instant b_i. Il souhaite optimiser sa tournée (et en passant vérifier que les contraintes ne sont pas contradictoires). On suppose qu'il sait le temps qu'il lui faut pour aller d'une ville à une autre. Proposer une formulation sous la forme d'un programme linéaire mixte (variables entières et continues), qui, contrairement au problème du voyageur de commerce usuel, ne contient pas un nombre exponentiel de contraintes.