

Flexion élastoplastique d'une plaque

On considère un élément de plaque assimilé à un solide parallélépipédique de largeur l , d'épaisseur $2h$ et d'extension infinie dans la direction Oz transversale à la figure, représenté sur la figure 1, constitué d'un matériau homogène *élastique isotrope* (module d'Young E , coefficient de Poisson ν), *parfaitement plastique standard*, le critère de plasticité étant celui de *Tresca* de cohésion égale à C :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leq 0 \quad (1)$$

avec $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ contraintes principales.

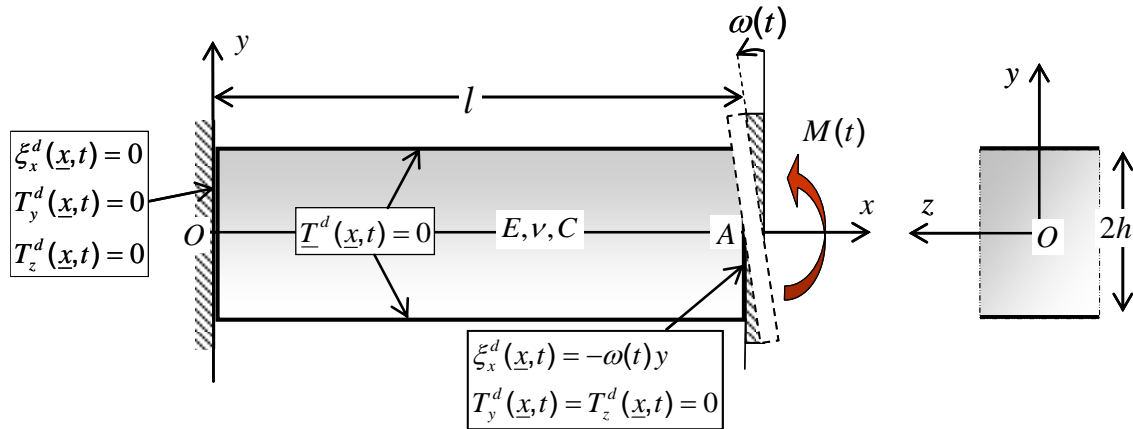


Figure 1. Flexion élastoplastique d'une plaque : données du problème

Cet élément de plaque est soumis à un processus de chargement caractérisé par le jeu de données suivant :

- ✓ forces de volume nulles :

$$\underline{F}^d(\underline{x}, t) = 0 \quad (2)$$

- ✓ faces horizontales *libres de contrainte* :

$$\underline{T}^d(x, y = \pm h, z, t) = 0 \quad (3)$$

- ✓ section origine $\Sigma(x = 0)$ en contact *sans frottement* avec un plan *fixe* :

$$\xi_x^d(x = 0, y, z, t) = 0, \quad T_y^d(x = 0, y, z, t) = T_z^d(x = 0, y, z, t) = 0 \quad (4)$$

✓ section extrémité $\Sigma(x=l)$ en contact *sans frottement* avec un poinçon *indéformable* auquel on impose une rotation $\omega(t)$ autour de l'axe Az :

$$\xi_x^d(x=l, y, z, t) = -\omega(t)y, \quad T_y^d(x=l, y, z, t) = T_z^d(x=l, y, z, t) = 0 \quad (5)$$

L'expression de la *puissance des efforts extérieurs par unité de longueur selon Oz*, s'exerçant sur cet élément de plaque dans un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacements du problème, s'écrit alors :

$$P_e(\underline{\xi}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi} \, da + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi} \, d\Omega = \overbrace{\left(- \int_{-h}^{+h} y \sigma_{xx} \, dy \right)}^M \dot{\omega} \quad (6)$$

faisant ainsi apparaître le moment M *par unité de longueur le long de Oz* autour de l'axe Az , des efforts appliqués par le poinçon sur la section extrémité $\Sigma(x=l)$, dit *moment de flexion*, comme *l'unique paramètre de chargement* du système. La *vitesse généralisée associée* n'est autre que la vitesse de *rotation* $\dot{\omega}$ de ce même poinçon.

1. Phase élastique et limite d'élasticité

Partant d'un état initial ($\omega(t=0)=0$) *naturel* $\underline{\underline{\sigma}}^0=0$, on fait progressivement croître la rotation ω du poinçon. La solution en déplacements est recherchée sous la forme :

$$\xi_x = -\frac{\omega}{l} xy, \quad \xi_y = \frac{\omega}{2l}(x^2 + \alpha y^2), \quad \xi_z = 0 \quad (7)$$

où α est pour l'instant une constante à déterminer, le champ (7) étant alors bien *cinématiquement admissible*, tandis que le champ de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\omega}{l} y(-\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (8)$$

Le champ de contrainte associé en tout point au champ (8) par la loi de comportement élastique vaut alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \frac{\omega}{l} y(\alpha - 1) \underline{1} + 2\mu \frac{\omega}{l} y(-\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (9)$$

Le champ de contrainte (9) vérifie bien les conditions aux limites en contrainte sur les sections extrémités. La condition aux limites de surface libre de contrainte sur les faces horizontales de la plaque s'écrit :

$$\underline{T}^d = \underline{\underline{\sigma}}(y = \pm h) \cdot (\pm \underline{e}_y) = \frac{\omega}{l} (\pm h) [\lambda(\alpha - 1) + 2\mu\alpha] (\pm \underline{e}_y) = 0 \quad (10)$$

permettant ainsi de déterminer la valeur de la constante α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (11)$$

et d'assurer ainsi que le champ (9) vérifie l'équation d'équilibre en l'absence de forces de volume ($\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$).

La solution *élastique* du problème en déplacement et en contrainte s'écrit finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\xi}} &= -\frac{\omega}{l} xy \underline{e}_x + \frac{\omega}{2l} \left(x^2 + \frac{\nu}{1-\nu} y^2 \right) \underline{e}_y \\ \underline{\underline{\sigma}} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\omega y}{l} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \end{aligned}} \quad (12)$$

où l'on utilisé les relations classiques :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad 2\mu = \frac{E}{(1+\nu)} \quad (13)$$

Le profil (linéaire) des contraintes σ_{xx} dans l'épaisseur de la plaque est représenté sur la figure 2(a). Le *moment fléchissant* correspondant vaut alors :

$$\boxed{M = -\int_{-h}^{+h} y \sigma_{xx} dy = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\omega}{l} = D\chi} \quad (14)$$

où $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ désigne le *module de rigidité en flexion* de la plaque et $\chi = \omega/l$ sa *déformation de courbure*.

Cette phase élastique est valable tant que le champ de contrainte (12) vérifie en tout point le critère de plasticité de *Tresca* (1), soit en tenant compte du fait qu'en tout point la contrainte σ_{zz} est *contrainte principale intermédiaire* :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2C = \left| \sigma_{xx} - \overbrace{\sigma_{yy}}^{=0} \right| - 2C \leq 0 \quad \text{soit} \quad |\sigma_{xx}| = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\omega}{l} |y| \leq 2C \quad \forall y \in [-h, +h] \quad (15)$$

c'est-à-dire tant que $\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \frac{\omega}{l} \leq 2C$ ou encore compte tenu de (14) :

$$M \leq M^e = \frac{4Ch^2}{3} \quad (16)$$

Cette valeur du moment de flexion représente la *limite d'élasticité initiale* du système. Elle correspond à la plastification en *compression* des points situés sur la face supérieure ($y=+h$) et en *traction* de ceux situés sur la face inférieure ($y=-h$) : figure 2(b).

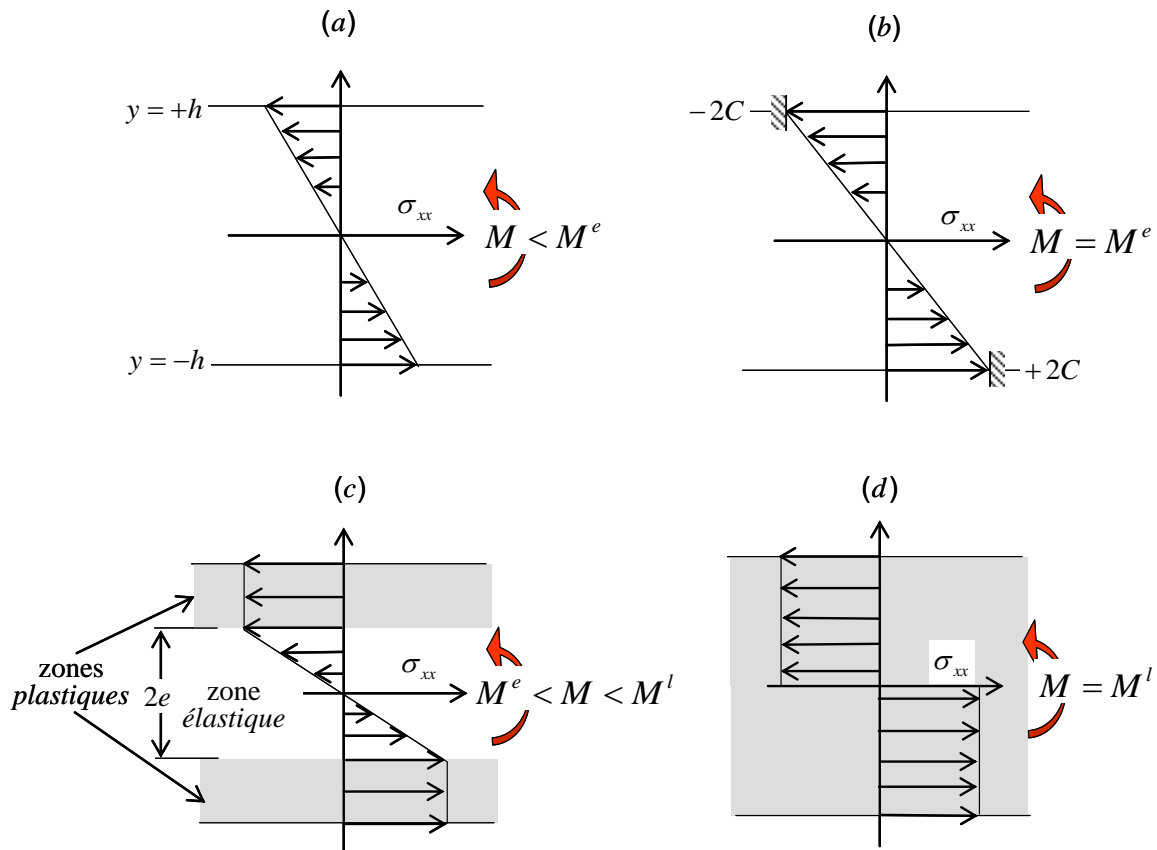


Figure 2. Diagrammes de contrainte dans les différentes phases d'évolution élastoplastique du problème de la flexion

2. Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité initiale du système, c'est-à-dire faisant croître le paramètre de chargement M au-delà de la valeur M^e , on fait l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que le champ de contrainte reste de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (17)$$

avec :

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -2C & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ -2C \frac{y}{e} & \text{si } -e \leq y \leq +e \\ +2C & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \text{ et } \sigma_{zz} = \nu \sigma_{xx} \quad (18)$$

c'est-à-dire que l'épaisseur de la plaque est subdivisée en trois parties : un «*noyau élastique*» d'épaisseur $2e$ situé entre les plans $y = \pm e$, et deux *zones plastiques* où le matériau a atteint sa limite d'élasticité en *compression* ($+e \leq y \leq +h$) et en *traction* ($-h \leq y \leq -e$) : voir figure 2(c). Ce champ est bien *statiquement admissible* avec les données en efforts du problème, équilibrant la valeur suivante du paramètre de chargement

$$M(e) = - \int_{-h}^{+h} y \sigma_{xx} dy = 2C \left[h^2 - \frac{e^2}{3} \right] \quad (19)$$

La valeur du moment de flexion varie entre la limite d'élasticité, correspondant à $e=h$ et une valeur maximale correspondant à la *plastification complète de la section* de la poutre ($e=0$: figure 2(d)) :

$$M^e = \frac{4}{3} Ch^2 = M(e=h) \leq M(e) \leq M(e=0) = 2Ch^2 = \frac{3}{2} M^e \quad (20)$$

3. Solution en zone élastique ($-e \leq y \leq +e$)

Elle correspond simplement à la solution *élastique* du problème de flexion d'une plaque d'épaisseur $2e$, donnée par les expressions (12) valables pour $-e \leq y \leq +e$, *le critère de plasticité étant atteint* en $y = \pm e$. Il vient alors immédiatement en comparant les deux expressions du champ de contrainte dans cette zone données respectivement par (12) et (18) :

$$e = \frac{2C(1-\nu^2)l}{\omega E} \quad (21)$$

L'expression de la loi *moment-courbure* en phase élastoplastique se calcule alors très simplement à partir de (19) et (21) ;

$$M(\chi = \omega/l) = 2Ch^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2C(1-\nu^2)}{Eh\chi} \right)^2 \right] \quad (22)$$

c'est-à-dire encore :

$$M(\chi = \omega/l) = \frac{3M^e}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi^e}{\chi} \right)^2 \right] \quad (23)$$

où :

$$\chi^e = 2C(1-\nu^2)/hE \quad \text{et} \quad M^e = 4Ch^2/3$$

désignent respectivement les valeurs de la courbure et du moment de flexion correspondant à la *limite d'élasticité initiale*. La figure 4 représente un tel **diagramme moment-courbure**, tracé dans le plan des variables adimensionnelles $(M/M^e, \chi/\chi^e)$, associé aux expressions (14) en phase élastique et (23) en phase élastoplastique. On remarque que le moment de flexion tend vers une valeur asymptotique égale à :

$$M^l = 3M^e/2 \quad (24)$$

correspondant à la *plastification totale* de la section de la poutre ($e \rightarrow 0$: figure 3(d)). Cette valeur n'est autre que la **charge limite**. Il convient d'observer que cette charge limite n'est atteinte qu'*asymptotiquement*, c'est-à-dire en théorie pour une valeur infinie de la courbure, pour laquelle on sortirait alors du cadre des petites perturbations. En pratique, la relation (23) montre par exemple que la valeur du moment est égale à près de 99% de la charge limite dès que $\chi = 5\chi^e$.

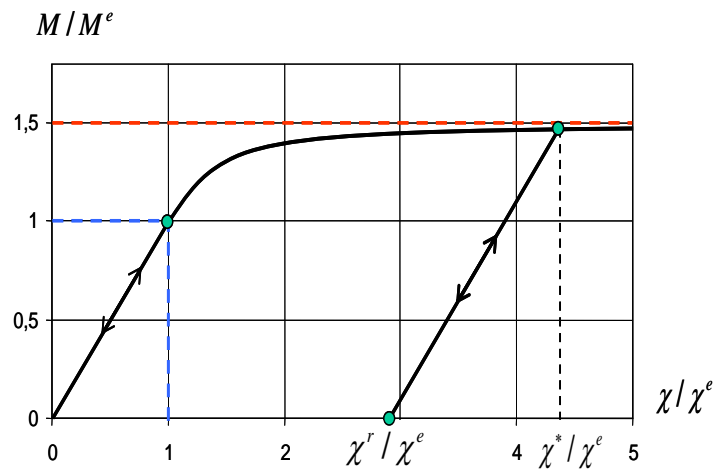


Figure 3. Diagramme «moment-courbure» d'une plaque en flexion elastoplastique

4. Solution dans les zones plastiques ($-h \leq y \leq -e$ et $+e \leq y \leq +h$)

Il nous reste à mettre en évidence la solution dans les *zones plastiques* situées de part et d'autre du *noyau élastique*, et plus particulièrement la *solution en vitesse*, le champ de contrainte étant constant, donné par les première et troisième lignes de (18). Nous allons démontrer que le champ de vitesse défini par

$$\dot{\xi}_x = -\frac{\dot{\omega}}{l} xy, \quad \dot{\xi}_y = \frac{\dot{\omega}}{2l}(x^2 + y^2 + \beta), \quad \dot{\xi}_z = 0 \quad (25)$$

où β est une constante à déterminer, constitue bien la *solution en vitesse* du problème. Ce champ est tout d'abord *cinématiquement admissible* avec les conditions aux limites en vitesse du problème caractérisées par la vitesse de rotation $\dot{\omega}$ du poinçon. Par ailleurs le champ *de taux de déformation* s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = -\frac{\dot{\omega}}{l} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{\dot{\omega}}{l} y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (26)$$

de sorte que comme nous allons le montrer, la loi de comportement élastoplastique est bien vérifiée. En effet, puisque dans ces zones $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0$, $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{d}}$ défini par (26) est bien de la forme

$$\underline{\underline{d}}^p = \begin{cases} \dot{\lambda}(-\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) & \text{si } +e \leq y \leq +h \\ \dot{\lambda}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) & \text{si } -h \leq y \leq -e \end{cases} \quad (27)$$

avec :

$$\dot{\lambda} = \dot{\omega} \frac{|y|}{l} \geq 0 \quad \text{car } \dot{\omega} \geq 0 \quad (27)$$

démontrant ainsi que la *règle d'écoulement plastique* est bien vérifiée.

La dernière vérification porte sur la *continuité* (ou *discontinuité plastique* éventuelle) entre zone élastique et plastiques à la traversée des plans d'équation $y = \pm e$, séparant le noyau élastique des zones plastiques. Considérant par exemple le plan $y = e$, la *discontinuité de vitesse* à travers ce plan vaut d'après (12) et (25) :

$$\left[\underline{\underline{\dot{\xi}}} \right] (y = e) = \underline{\underline{\dot{\xi}}}(y = e^+) - \underline{\underline{\dot{\xi}}}(y = e^-) = \frac{\dot{\omega}}{2l} \left(\beta + \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) e^2 \right) \underline{e}_y \quad (28)$$

L'annulation de cette *discontinuité de vitesse* impose alors :

$$\beta = e^2 \left(\frac{2\nu-1}{1-\nu} \right) \quad (29)$$

5. Analyse de la décharge ; état résiduel

On supposera ici pour simplifier que la décharge est effectuée à partir d'une valeur de la courbure χ^* pour laquelle la valeur correspondante du moment de flexion est pratiquement égale à la charge limite (figure 3), c'est-à-dire que la plaque est plastifiée dans toute son épaisseur (figure 2(d)). En vertu de (18), le champ de contrainte correspondant est

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{cases} -2C(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } 0 < y \leq +h \\ +2C(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (30)$$

Faisant l'hypothèse, vérifiable *a posteriori*, que cette phase de décharge est *entièrement élastique*, les calculs effectués en 1. demeurent valables à la condition de remplacer la valeur de M par celle de sa variation $\Delta M \leq 0$ à partir de $M = M^l$. La variation correspondante du champ de contrainte vaut ainsi compte tenu de (12) et (14) :

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}(M = -\Delta M) = -\frac{3\Delta M}{2h^3} y(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (31)$$

d'où en particulier le *champ de contrainte résiduel* obtenu pour une *décharge totale* ($\Delta M = -M^l$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\sigma}}^* + \frac{3M^l}{2h^3} y(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (32)$$

ou encore puisque $3M^l / 2h^3 = 3C / h$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \begin{cases} 2C\left(\frac{3y}{2h} - 1\right)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } 0 < y \leq +h \\ 2C\left(\frac{3y}{2h} + 1\right)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) & \text{si } -h \leq y < 0 \end{cases} \quad (33)$$

Le diagramme de contrainte correspondant est représenté sur la figure 4. Il s'agit d'un *champ d'autocontrainte*, c'est-à-dire équilibrant un moment de flexion *nul*. La *courbure résiduelle* est donnée par ;

$$\chi^r = \chi^* - \frac{M^l}{D} = \chi^* - \frac{3C}{Eh} \quad (34)$$

L'apparition de ces contraintes résiduelles est liée à l'*incompatibilité géométrique* du *champ des déformations plastiques* acquises lors de la phase de chargement jusqu'à $M(\chi^*) = M^l$.

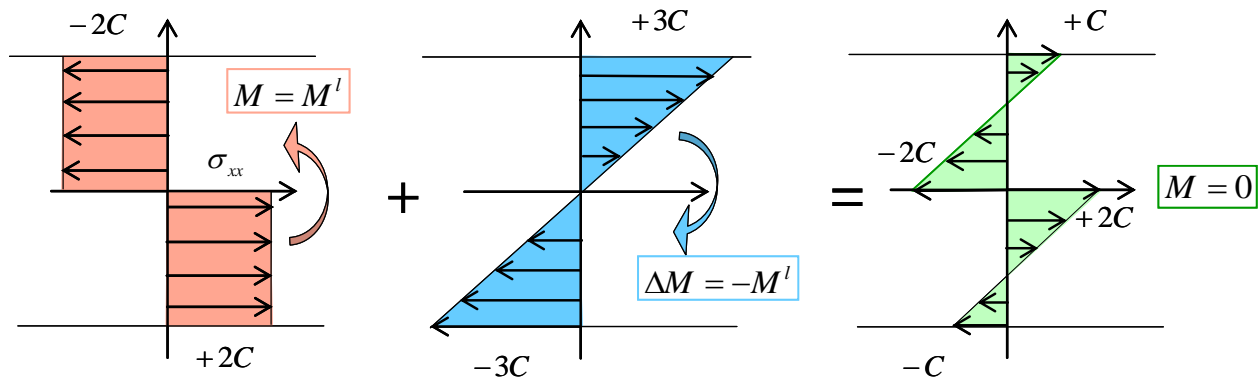


Figure 4. Décharge élastique totale de la plaque et diagramme des contraintes résiduelles

Remarque. La distribution des contraintes « hors-plan » $\sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx}$ équilibre un moment de flexion par unité de longueur selon Ox égal tout au long de l'évolution élastoplastique à :

$$M' = -\int_{-h}^{+h} y\sigma_{zz} dy = -\nu \int_{-h}^{+h} y\sigma_{xx} dy = \nu M \quad (35)$$

c'est-à-dire proportionnel au moment de flexion M . C'est ce moment qui permet de maintenir nulle la courbure de la plaque dans la direction transversale.
