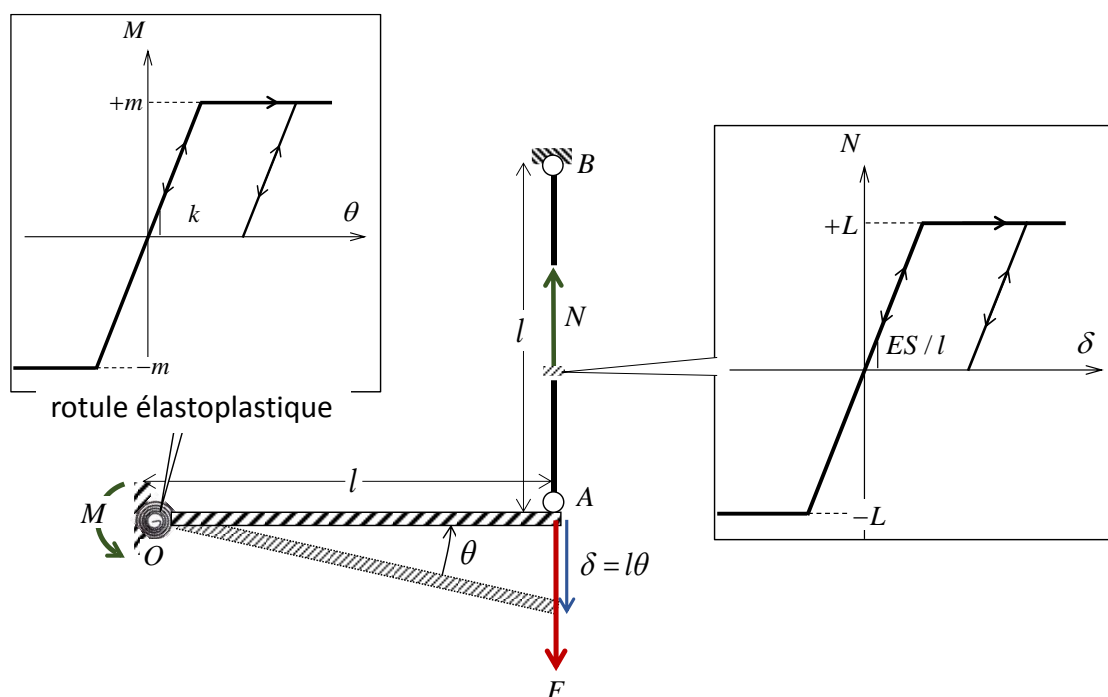


Cours de Plasticité : contrôle des connaissances

Durée : 3h00

Tous documents et notes de cours autorisés
Le sujet comporte deux problèmes indépendants

Problème n°1 : structure avec rotule élastoplastique (3 pts/8)



Un barreau horizontal *rigide* OA de longueur l est relié à un point fixe B par l'intermédiaire d'une barre verticale AB de même longueur l . La loi de comportement de cette barre est *élastique parfaitement plastique*, caractérisée par le diagramme de droite de la figure ci-dessus où N désigne l'effort dans la barre et δ son allongement.

L'extrémité gauche du barreau est reliée au point fixe O par une *rotule élastoplastique* dont le diagramme de comportement est représenté sur la partie gauche de la figure, reliant le moment M exercé par l'appui sur le barreau à l'angle θ égal à l'opposé de la rotation de ce même barreau à partir de sa position initiale horizontale (voir figure). On désigne par k la *raideur élastique* de cette rotule et par m sa *limite d'élasticité* en flexions positive et négative.

La structure est soumise à un chargement caractérisé par l'application au point A d'un effort vertical d'intensité F (comptée positivement vers le bas) croissant progressivement à partir d'une valeur nulle.

1. Ecrire l'équilibre en moment par rapport au point O du barreau et en déduire la relation entre le chargement F appliqué, l'effort N dans la barre AB , le moment M exercé par la rotule sur le barreau et la longueur l de ce dernier. Quel est le degré d'hyperstaticité de ce problème ?

2. Phase de comportement élastique et limite d'élasticité

L'état initial de la structure étant naturel ($N(F=0)=0$, $M(F=0)=0$), le comportement de la structure reste dans un premier temps élastique :

$$N = ES\delta / l, \quad M = k\theta = k\delta / l \quad (1)$$

2.1. En déduire, en utilisant les relations de comportement (1) et l'équation d'équilibre global établie en 1., la relation entre le chargement F et l'angle $\theta = \delta / l$ du barreau, ainsi les efforts intérieurs N et M/l en fonction de F .

2.2. On suppose que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{L}{ES} < \frac{m}{k} \quad (2)$$

Montrer que la barre AB plastifie en premier. Calculer la limite d'élasticité F^e , la valeur correspondante de la rotation $\theta^e = \delta^e / l$, ainsi que celle des efforts intérieurs N et M/l . Tracer le diagramme correspondant à cette phase élastique dans le plan $(F, \theta = \delta / L)$

3. Phase de comportement élastoplastique $F = F^e + \Delta F$, $\Delta F \geq 0$ et charge limite

On fait l'hypothèse que la barre AB demeure plastifiée ($N = +L$, $\Delta N = 0$) tandis que le comportement de la rotule reste élastique.

3.1. Calculer par un raisonnement d'équilibre l'accroissement du moment dans la rotule ($\Delta M = M(F) - M(F^e)$) en fonction de ΔF , puis en utilisant le comportement élastique de cette dernière, celui de l'allongement relatif de la barre ($\Delta\delta / l = \delta(F) / l - \delta(F^e) / l$) en fonction de ΔF . La règle d'écoulement plastique de la barre est-elle vérifiée ?

3.2. Calculer la charge limite de la structure et décrire le mécanisme d'écoulement plastique libre associé. Compléter le diagramme dans le plan $(F, \theta = \delta / L)$.

4. Décharge de la structure ($F = F^l + \Delta F$, $\Delta F \leq 0$) et état résiduel ($\Delta F = -F^l$)

4.1. Partant de l'état de la structure associé à la charge limite :

$$F = F^l, \quad \theta = \theta^l, \quad N = L, \quad M = m$$

on vient décharger progressivement la structure à partir de cet état. Déterminer l'état de la structure au cours de cette phase de décharge, que l'on supposera élastique :

$$F = F^l + \Delta F (\leq 0), \quad \theta = \theta^l + \Delta\theta, \quad N = L + \Delta N, \quad M = m + \Delta M$$

puis l'état résiduel correspondant à la décharge totale ($\Delta F = -F^l$).

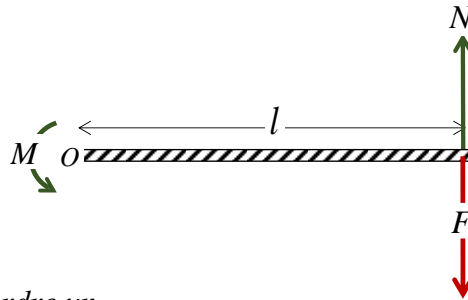
4.2. A quelle(s) condition(s) la décharge totale de la structure reste-t-elle élastique ?

5. Que se passe-t-il lorsque $\frac{L}{ES} = \frac{m}{k}$?

Corrigé

1. Le barreau étant soumis à l'action du chargement F , de l'effort N exercé par la barre AB et du moment M (par rapport à O) exercé par la rotule élastoplastique, l'équilibre global en moment par rapport à O du barreau s'écrit :

$$M + Nl - Fl = 0 \Rightarrow F = N + \frac{M}{l}$$



de sorte que la structure est *hyperstatique d'ordre un*.

2. Phase de comportement élastique et limite d'élasticité

2.1. L'incorporation des lois de *comportement élastique* (1) de la barre et de la rotule dans l'équation d'équilibre global donne immédiatement

$$F = N + \frac{M}{l} = ES \frac{\delta}{l} + \frac{k\theta}{l} = (ES + k/l) \frac{\delta}{l}$$

ainsi que :

$$N = \frac{ES}{ES + k/l} F \text{ et } \frac{M}{l} = \frac{k/l}{ES + k/l} F$$

2.2. La barre AB atteint sa *limite d'élasticité en traction* $+L$ pour la valeur suivante du chargement :

$$N = \frac{ES}{ES + k/l} F = +L \Rightarrow F^e = \frac{ES + k/l}{ES} L$$

tandis que la valeur correspondante du moment s'écrit :

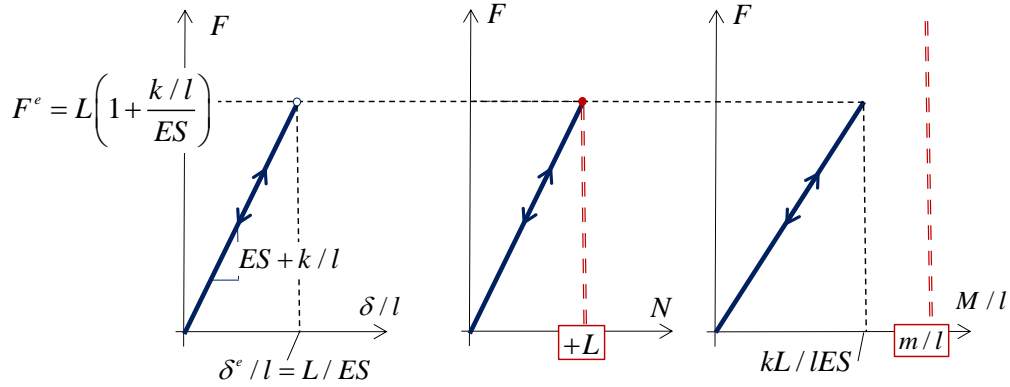
$$\frac{M(F = F^e)}{l} = \frac{k/l}{ES + k/l} F^e = k/l \frac{L}{ES}$$

soit en vertu de l'inégalité (2) :

$$M(F = F^e) < m$$

signifiant que la rotule reste *élastique*. F^e est donc bien la *limite d'élasticité* de la structure à laquelle est associée la rotation $\theta^e = \delta^e / l = L / ES$.

Cette phase élastique est représentée sur les diagrammes ci-dessous.



3. Phase de comportement élastoplastique et charge limite

3.1. L'équation d'équilibre du barreau donne en phase élastoplastique ($N=L$) :

$$F = L + \frac{M}{l} \Rightarrow \Delta F = \frac{\Delta M}{l}$$

soit en tenant compte du comportement élastique de la rotule :

$$\Delta F = \frac{\Delta M}{l} = \frac{k \Delta \delta}{l}$$

ce qui permet de vérifier que la règle d'écoulement plastique de la barre AB :

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}^e + \dot{\delta}^p = \Delta \dot{\delta} = \frac{l^2}{k} \dot{\Delta F} \geq 0, \text{ pour } N = +L, \dot{N} = 0$$

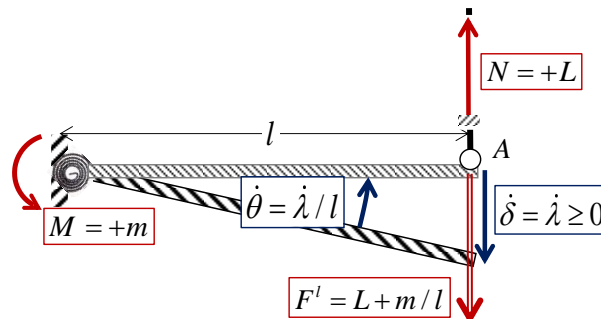
3.2. La charge limite correspond à la plastification de la rotule $M=+m$:

$$F^l = L + \frac{m}{l}$$

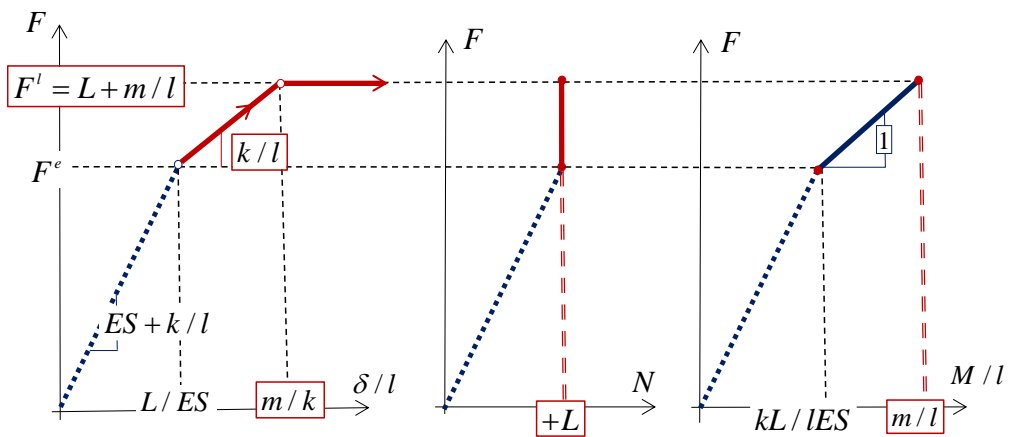
Elle est atteinte lorsque la rotation du barreau atteint la valeur $\theta^l = \delta^l / l = m / k$. Cette charge limite est associée au mécanisme d'écoulement plastique libre suivant :

$$N = +L, \dot{N} = 0: \dot{\delta} = \dot{\delta}^p = \dot{\lambda} \geq 0$$

$$M = +m, \dot{M} = 0: \dot{\theta} = \dot{\theta}^p = \dot{\lambda} / l \geq 0$$



La phase élastoplastique jusqu'au chargement limite est représentée sur les diagrammes ci-dessous.



4. Décharge de la structure et état résiduel

4.1. La phase de décharge étant supposée *élastique*, on peut utiliser les résultats de la question 2. en remplaçant F par ΔF :

$$F = L + \frac{m}{l} + \Delta F, \quad \theta = \frac{m}{k} + \frac{\Delta F}{ES + k/l},$$

$$N = L + \frac{ES}{ES + k/l} \Delta F, \quad M/l = m/l + \frac{k/l}{ES + k/l} \Delta F$$

d'où l'état résiduel :

$$\theta^r = \frac{m}{k} - \frac{L + m/l}{ES + k/l} = \frac{ES}{ES + k/l} \left(\frac{m}{k} - \frac{L}{ES} \right) \geq 0,$$

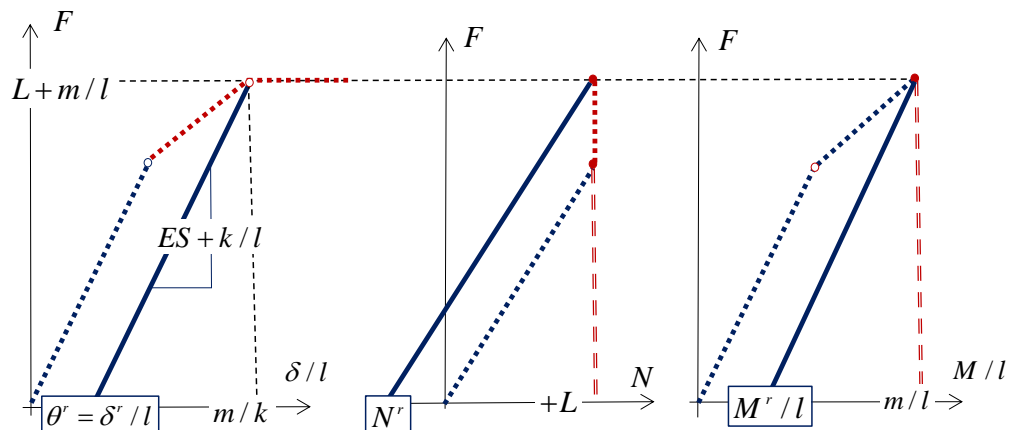
$$N^r = L + \frac{ES}{ES + k/l} (-m/l - L) = \frac{ESk/l}{ES + k/l} \left(\frac{L}{ES} - \frac{m}{k} \right) \leq 0$$

$$M^r/l = m/l + \frac{k/l}{ES + k/l} (-m/l - L) = \frac{ESk/l}{ES + k/l} \left(\frac{m}{k} - \frac{L}{ES} \right) \geq 0$$

On observe en particulier que :

$$N^r + M^r/l = 0$$

Ce qui signifie que les efforts résiduels $((N^r, M^r))$ sont *auto-équilibrés*.



4.2. Lors de la décharge la rotule reste toujours dans le *domaine élastique* puisque le moment *décroît* de la valeur limite $+m$ à une valeur résiduelle M' qui est positive ou nulle. En revanche la barre entrant en *compression*, il faut que l'effort résiduel de compression N' reste *supérieur à la limite d'élasticité en compression* $-L$:

$$N' = \frac{ESk/l}{ES + k/l} \left(\frac{L}{ES} - \frac{m}{k} \right) \geq -L$$

soit :

$$\left(\frac{m}{k} \geq \right) \frac{L}{ES} \geq \frac{m}{k} - \frac{k/l}{2k/l + ES}$$

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, la barre *plastifie en compression*.

5. Dans le cas où $\frac{L}{ES} = \frac{m}{k}$, la *limite d'élasticité* coïncide avec la *charge limite* :

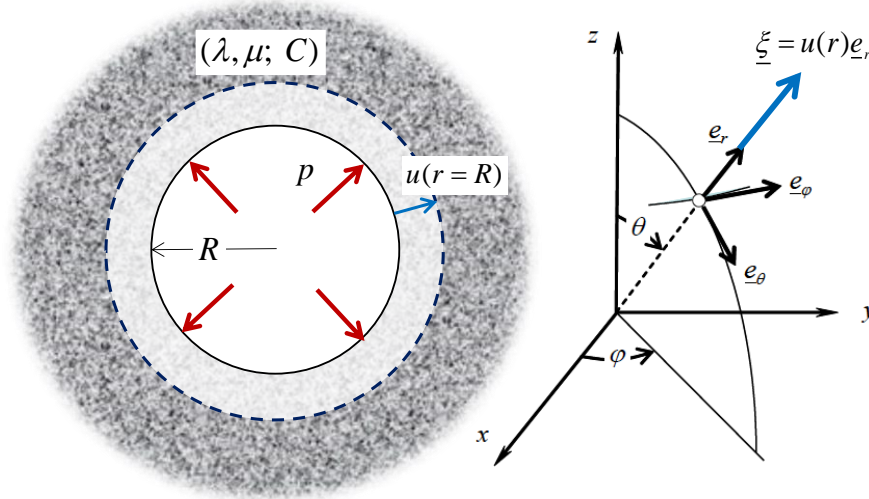
$$F^e = F^l = L + m/l$$

de sorte le comportement de la structure reste élastique jusqu'à l'apparition de la ruine plastique correspondant à la *plastification simultanée* de la barre et de la rotule. Les efforts résiduels restent par ailleurs nuls. Le *comportement global* de la structure est, dans ce cas particulier, de type *élastique parfaitement plastique*.

* *

*

Problème n°2 :
expansion d'une cavité sphérique dans un milieu infini
 (5 pts/8)



Un réservoir souterrain de stockage de gaz a la forme d'une cavité *sphérique* de rayon R , creusée dans un massif infini, soumise sur sa paroi à l'action d'une pression p augmentant progressivement à partir d'une valeur nulle lors de la mise en pression du réservoir (figure). Le massif est constitué d'une roche dont le comportement est modélisé comme un milieu continu *élastique* (coefficients de Lamé λ et μ) *parfaitement plastique standard* obéissant au critère de plasticité de *Tresca* de *cohésion* C :

$$\sigma_1 \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}, \quad f(\underline{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_{III} \leq 2C \quad (1)$$

La pesanteur est négligée et l'état *initial* du massif ($p=0$) est supposé *naturel* (champ de contrainte nul).

1. Phase comportement élastique et limite d'élasticité

On recherche la *solution en déplacement* sous la forme du champ de déplacement *radial* suivant, s'annulant à l'infini :

$$\underline{\xi}(r, \theta, \varphi) = u(r)\underline{e}_r, \quad \text{avec } u(r) = \frac{A}{r^2}, \quad A = \text{cte.} \quad (2)$$

1.1. Calculer à l'aide des *formules en coordonnées sphériques* (voir ci-dessous) le champ de déformation correspondant à (2), où l'on observera que $\text{tr} \underline{\varepsilon} = 0$, puis le champ de contrainte associé par la loi de comportement élastique linéaire.

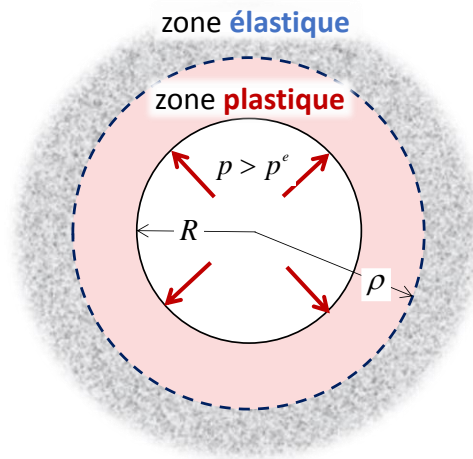
1.2. Montrer que ce champ vérifie l'*équation d'équilibre* (en l'absence de forces de volume) et déterminer la constante A en fonction de la pression p appliquée sur la paroi en écrivant la condition aux limites correspondante. Etablir la relation entre p et le *taux d'expansion* du réservoir défini par :

$$U = \frac{u(r=R)}{R} \quad (3)$$

En quel endroit apparaît la *première plastification* dans le massif? En déduire que la *limite d'élasticité* est égale à $p^e = 4C/3$.

2. Phase élastoplastique ($p = p^e + \Delta p$, $\Delta p \geq 0$)

Continuant à augmenter la pression au-delà de p^e , on fait l'hypothèse qu'il se forme une *zone plastique* située entre les rayons $r = R$ et $r = \rho$ (où ρ augmente avec le chargement), la massif demeurant élastique au-delà, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



2.1. Déterminer les champs de *contraintes* et de *déplacements* dans la *zone élastique* ($r \geq \rho$) en fonction de C , μ , r et ρ . On utilisera pour cela les expressions de ces champs en *phase élastique* (voir question 1.) en remplaçant R par ρ , et p par p^e .

2.2. Le *champ de contrainte en zone plastique* ($R \leq r \leq \rho$) est recherché sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr}(r)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (\sigma_{rr}(r) + 2C)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi) \quad (4)$$

Vérifier que ce champ est *plastiquement admissible*, puis déterminer complètement la contrainte σ_{rr} , et donc le champ de contrainte en zone plastique, en fonction de p , R et r , en écrivant l'équation d'équilibre ainsi que la condition aux limites sur la paroi ($r=R$).

Ecrire la *continuité du vecteur-contrainte* au passage entre les zones élastique et plastique et en déduire que le « *rayon plastique* » vaut :

$$\rho = R \exp\left(\frac{p - p^e}{4C}\right) \quad (5)$$

2.3. On supposera maintenant pour simplifier que le matériau constituant le massif est *élastiquement incompressible* ($\lambda \rightarrow +\infty$ ou $\nu=1/2$). Expliquer alors pourquoi le champ de déplacement (radial et ne dépendant que de r) dans la zone plastique est nécessairement de la forme :

$$u(r) = \frac{K}{r^2} \quad (6)$$

où K est une constante que l'on déterminera en fonction de C , μ et ρ en écrivant la *continuité du déplacement* entre les zones élastique et plastique. En déduire la valeur du *taux d'expansion* U de la cavité défini par (3) en fonction de ρ , puis de la pression p (utiliser la relation (5)). Tracer la courbe donnant U en fonction de p en phase élastique, puis élastoplastique. Y-a-t' il une *charge limite* ?

2.4. Que reste-t-il à vérifier pour que les champs de contraintes et de déplacements ainsi calculés soient la solution du problème en phase élastoplastique ? Il n'est pas demandé d'effectuer cette vérification.

2.5. *Application numérique.*

Evaluer le taux d'expansion de la cavité par un *calcul élastique*, puis *élastoplastique*, pour le jeu de paramètres suivant (on prendra : $\exp(3) \cong 20$) :

$$\mu = 100 \text{ MPa}, C = 300 \text{ kPa}, p = 1,6 \text{ MPa}$$

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r} \cot \theta + \frac{\xi_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} \xi_\varphi \right) & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \frac{\xi_\varphi}{r} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho F_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}) + \rho F_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta} \cot \theta) + \rho F_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Corrigé

1. Phase élastique et limite d'élasticité

1.1. Le champ de déformation correspondant au champ de déplacement (1) s'écrit :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = -2 \frac{A}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = \frac{A}{r^3}, \quad \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0$$

d'où le champ de contrainte associé par la loi de comportement *élastique* (avec contrainte initiale nulle) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \text{ avec } \text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{A}{r^3}(-2+1+1) = 0$$

d'où :

$$\sigma_{rr} = -4\mu\frac{A}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\frac{A}{r^3}, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

1.2. Ce champ de contrainte vérifie bien les *équations d'équilibre* qui se réduisent ici à :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 12\mu\frac{A}{r^4} + \frac{2}{r}\left(-4\mu\frac{A}{r^3} - 2\mu\frac{A}{r^3}\right) = 0$$

Par ailleurs, la *condition aux limites en contrainte* sur la paroi qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r=R) \cdot \underline{\underline{n}} = p\underline{\underline{e}}_r \Rightarrow \sigma_{rr}(r=R) = -p$$

donne :

$$\sigma_{rr}(r=R) = -4\mu\frac{A}{R^3} = -p \Rightarrow A = \frac{pR^3}{4\mu}$$

La solution en déplacement est donc :

$$\underline{\underline{\xi}} = p\frac{R^3}{4\mu r^2}\underline{\underline{e}}_r$$

et celle en contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\frac{R^3}{r^3}\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + p\frac{R^3}{2r^3}(\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + \underline{\underline{e}}_\varphi \otimes \underline{\underline{e}}_\varphi)$$

Le *taux d'expansion* de la cavité vaut alors :

$$U = \frac{u(r=R)}{R} = \frac{p}{4\mu}$$

Les *contraintes principales* en tout point étant :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_I = \sigma_{II} = p\frac{R^3}{2r^3} \quad \text{et} \quad \sigma_{rr} = \sigma_{III} = -p\frac{R^3}{r^3}$$

le critère de plasticité de *Tresca* s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{pR^3}{2r^3} - \left(-\frac{pR^3}{r^3}\right) = \frac{3pR^3}{2r^3} \leq 2C$$

d'où il ressort que le critère de plasticité est atteint en premier sur la paroi ($r=R$). Par suite :

$$p^e = \frac{4C}{3}, \quad U^e = \frac{p^e}{4\mu} = \frac{C}{3\mu}$$

2. Phase élastoplastique

2.1. Zone élastique ($r \geq \rho$)

Observant que les champs en *zone élastique* ne sont autres que ceux correspondant à la *solution en limite d'élasticité* pour une cavité de rayon ρ , il suffit de reprendre les expressions des champs élastiques calculés en **1.** en remplaçant R par ρ , et p par p^e . Il vient alors :

$$r \geq \rho \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{C\rho^3}{3\mu r^2} \underline{\underline{e}}_r \\ \underline{\underline{\sigma}} = -4C \frac{\rho^3}{3r^3} \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + 2C \frac{\rho^3}{3r^3} (\underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + \underline{\underline{e}}_\varphi \otimes \underline{\underline{e}}_\varphi) \end{cases}$$

2.2. Champ de contrainte en zone plastique ($R \leq r \leq \rho$).

Le champ de contrainte (4) vérifie bien le critère de plasticité de *Tresca* en tout point :

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2C$$

tandis que l'équation d'équilibre donne :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2(\overbrace{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}^{-2C})}{r} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{4C}{r}$$

soit par intégration :

$$\sigma_{rr} = 4C \ln r + B$$

La condition aux limites en paroi permet alors de déterminer la constante d'intégration :

$$\sigma_{rr}(r=R) = 4C \ln R + B = -p \Rightarrow B = -p - 4C \ln R$$

d'où finalement :

$$R \leq r \leq \rho : \begin{cases} \sigma_{rr} = -p + 4C \ln \left(\frac{r}{R} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2C + 4C \ln \left(\frac{r}{R} \right) \end{cases}$$

La *continuité du vecteur-contrainte* au passage entre les zones élastique et plastique donne :

$$\overbrace{\sigma_{rr}(r=\rho^-)}^{\text{zone plastique}} = -p + 4C \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) = \overbrace{\sigma_{rr}(r=\rho^+)}^{\text{zone élastique}} = -p^e = -4C/3$$

soit :

$$\ln \left(\frac{\rho}{R} \right) = \frac{p - p^e}{4C} \Rightarrow \rho = R \exp \left(\frac{p - p^e}{4C} \right)$$

2.3. Le matériau étant *élastiquement* et *plastiquement* incompressible, on a à tout instant du trajet de chargement:

$$\begin{aligned} &=0 \quad =0 \\ \underline{\underline{\text{tr}}} d &= \underline{\underline{\text{tr}}} d^e + \underline{\underline{\text{tr}}} d^p = 0 \end{aligned}$$

soit par intégration par rapport au temps depuis l'état initial :

$$\underline{\underline{\text{tr}}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) = 0$$

et donc :

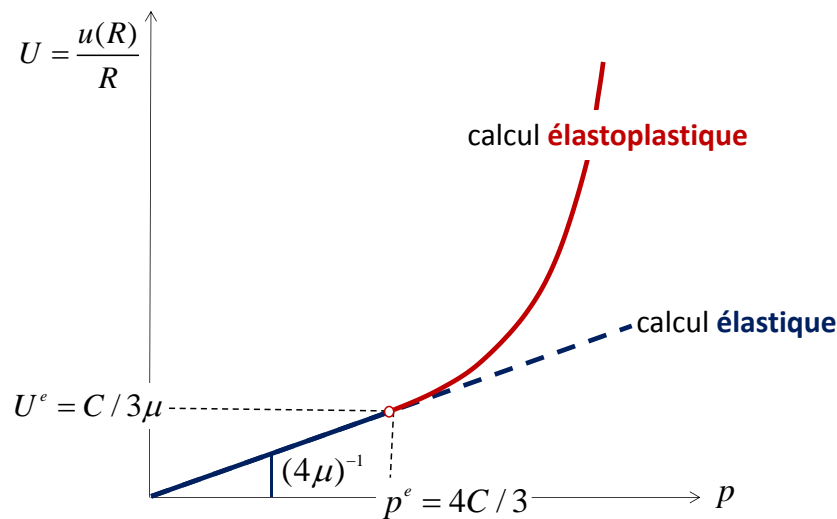
$$R \leq r \leq \rho: u(r) = \frac{K}{r^2}$$

La condition de *continuité du déplacement* entre les zones élastique et plastique permet de déterminer la constante d'intégration :

$$\overbrace{u(r = \rho^-)}^{\text{zone plastique}} = \frac{K}{\rho^2} = \overbrace{u(r = \rho^+)}^{\text{zone élastique}} = \frac{C\rho}{3\mu} \Rightarrow K = \frac{C\rho^3}{3\mu}$$

soit :

$$R \leq r \leq \rho: u(r) = \frac{C\rho^3}{3\mu r^2}$$



Le *taux d'expansion* de la cavité vaut alors :

$$U = \frac{u(r=R)}{R} = \frac{C\rho^3}{3\mu R^3}$$

soit en vertu de (5) :

$$U = U^e \exp\left(\frac{p}{p^e} - 1\right), p \geq p^e = 4C/3, U^e = C/3\mu$$

La courbe donnant le *taux d'expansion* en fonction de la pression appliquée est représentée sur la figure ci-dessus. Elle appelle deux commentaires :

- l'*absence de charge limite*, la pression pouvant croître indéfiniment ;
- l'écart grandissant au fur et à mesure que la pression augmente au-delà de la limite d'élasticité, entre la prévision fournie par un *calcul élastique* (droite en pointillés sur la figure) et celle du calcul ici effectué prenant en compte la *plasticité* du massif. Le premier type de calcul peut conduire à *considérablement sous-estimer* l'expansion de la cavité.

2.4. Il reste à vérifier la *règle d'écoulement plastique* en tout point de la zone plastique. Compte tenu de l'expression du champ de déplacement en zone plastique établie précédemment :

$$R \leq r \leq \rho: u(r) = \frac{C\rho^3}{3\mu r^2} \Rightarrow \dot{u}(r) = \frac{C}{\mu} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \dot{\rho}$$

le *taux de déformation totale* s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{d\dot{u}}{dr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\dot{u}}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) = \frac{C}{\mu} \frac{\rho^2 \dot{\rho}}{\rho^3} (-2\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)$$

Par ailleurs le *taux de déformation élastique* est nul. En effet, en raison de l'*incompressibilité élastique* du matériau :

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{3}{2E} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \frac{1}{2E} (\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) \underline{\underline{1}}$$

soit puisque en zone plastique $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = -\dot{p} \underline{\underline{1}}$:

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{3}{2E} (-\dot{p} \underline{\underline{1}}) - \frac{1}{2E} (-3\dot{p}) \underline{\underline{1}} = 0$$

Il en résulte que le *taux de déformation plastique* s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{d}} = \frac{C}{\mu} \frac{\rho^2 \dot{\rho}}{\rho^3} (-2\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)$$

Or la *règle d'écoulement plastique* s'écrivant (*régime d'arête*) :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2C, \quad \dot{\sigma}_{\theta\theta} - \dot{\sigma}_{rr} = 0 \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2C, \quad \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} - \dot{\sigma}_{rr} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} d_{rr}^p = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu}) \\ d_{\theta\theta}^p = +\dot{\lambda} \geq 0 \\ d_{rr}^p = +\dot{\mu} \geq 0 \end{cases}$$

le *taux de déformation plastique* ainsi calculé est bien de cette forme avec :

$$\dot{\lambda} = \dot{\mu} = \frac{C}{\mu} \frac{\rho^2 \dot{\rho}}{\rho^3} \geq 0 \quad \text{car } \dot{\rho} \geq 0$$

2.5. *Application numérique.* Un calcul *élastique* donne immédiatement :

$$U^E = \frac{p}{4\mu} = \frac{1,6 \text{ MPa}}{4 \times 100 \text{ MPa}} = 0,4\%$$

tandis que le calcul *élastoplastique* conduit à l'évaluation suivante :

$$\begin{aligned} U^{EP} &= \frac{C}{3\mu} \exp\left(\frac{p}{4C/3} - 1\right) = \frac{0,3 \text{ MPa}}{3 \times 100 \text{ MPa}} \times \exp\left(\frac{1,6 \text{ MPa}}{4/3 \times 0,3 \text{ MPa}} - 1\right) \\ &= 0,1\% \times \exp(3) \cong 2\% \end{aligned}$$

c'est-à-dire à une valeur *cinq fois supérieure* à celle donnée par le calcul élastique.

* *

*