Calcul ELS en section fissurée
Précontrainte partielle – Corrigé de l'exercice

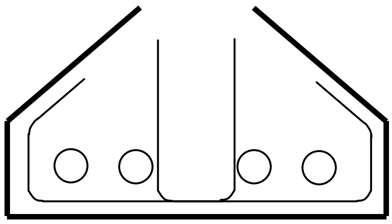
- <u>Moments en service</u>. Combinaison quasi permanente $M_{qp} = 8{,}00$ MNm
  M min sous combinaisons fréquentes et caractéristiques = M_{qp}
  M max sous combinaison fréquente $M_{Mfréq} = 12{,}68$ MNm
  M max sous combinaison caractéristique $M_{Mk} = 15{,}80$ MNm

- <u>Valeur minimale de P :</u> $\sigma \geq 0$ sous combinaison quasi permanente (EN 1992-2 tableau 7.101 N)

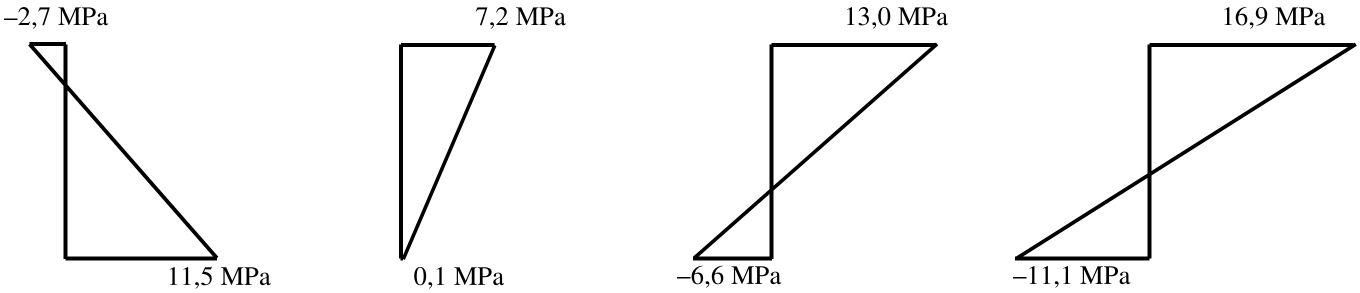
$\Rightarrow P_d \geq \dfrac{M_{qp}}{\rho v + v' - d'}$ qui vaut 4,37 MN si $d' = 2\phi_g$ (0,14 m) et 4,29 MN si $d' = 1{,}5\phi_g$ (0,105 m)

Ici $P_d = P_{kinf} = 0{,}9P_m$ avec 4 câbles, $P_{kinf} = 4{,}32$ MN, on peut placer ces quatre câbles sur un seul lit, donc d' = 0,105 m et les quatre câbles conviennent.

$P_m = 4{,}80$ MN $P_d = 4{,}32$ MN $e_0 = -(v' - d') = -1{,}234$ m $A_p = 4{,}2.10^{-3}$ m^2



- <u>Vérification des contraintes</u> Calcul en section <u>non</u> fissurée



P_{kinf} seul $P_{kinf} + M_{qp}$ $P_{kinf} + M_{Mfreq}$ $P_{kinf} + M_{Mcar}$

Les tractions dépassent f_{cteff} (le plus souvent égal à f_{ctm}) sous combinaisons fréquentes et caractéristiques. Un calcul en section fissurée est nécessaire (EN 1992-1-1 clause 7.1 (2))

- <u>Calcul en section fissurée</u> Coefficients d'équivalence $n_p = 5{,}57$ (E_p/E_{cm})
  $n_s = 5{,}71$ (E_s/E_{cm})

Calcul préliminaire : σ_{cpd} : contrainte dans le béton au niveau de l'armature de précontrainte sous combinaison quasi permanente.

$$\sigma_{cpd} = \frac{P_d}{A_c} + \left(Pe_0 + M_{qp}\right)\frac{e_0}{I} = \frac{\sigma d' + \sigma' d}{h}$$

Si $\mathbf{P_d = P_{kinf}}$ ($\sigma_{pd} = 1029$ MPa)	$\sigma_{cpd} = 0{,}52$ MPa	$\Rightarrow$	$\Delta'\sigma_p = n_p\sigma_{cpd} = 2{,}9$ MPa $\cong 3$ MPa $\Delta'P = 0{,}01$ MN $P_d + \Delta'P = 4{,}33$ MN
Si $\mathbf{P_d = P_m}$ ($\sigma_{pd} = 1143$ MPa)	$\sigma_{cpd} = 1{,}60$ MPa	$\Rightarrow$	$\Delta'\sigma_p = n_p\sigma_{cpd} = 9$ MPa $\Delta'P = 0{,}04$ MN $P_d + \Delta'P = 4{,}84$ MN

- <u>Section d'acier nécessaire sous combinaison caractéristique</u>

$\sigma_s \leq 0{,}8 f_{yk} = 400$ MPa avec $P_d = P_{kinf}$

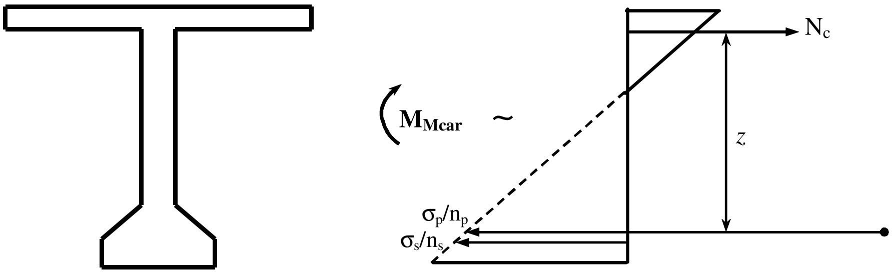
$\sigma_p \leq 0{,}8 f_{pk} = 1488$ MPa avec $P_d = P_m$ $\Delta''\sigma_p \leq 1488 - \sigma_{pm} - \Delta'\sigma_p = 336$ MPa

En première approche, on peut supposer que $d_p = d_s$ et donc $\sigma_s = \Delta''\sigma_p n_s/n_p$

Les deux conditions de dimensionnement s'écrivent alors :

avec $P_\mathrm{d} = P_\mathrm{kinf}$:	$\sigma_\mathrm{s} = 0{,}8\,f_\mathrm{yk} = 400$ MPa	$\Delta''\sigma_\mathrm{p} = 390$ MPa	$\sigma_\mathrm{p} = 1422$ MPa
avec $P_\mathrm{d} = P_\mathrm{m}$:	$\sigma_\mathrm{p} = 0{,}8\,f_\mathrm{pk} = 1488$ MPa	$\Delta''\sigma_\mathrm{p} = 336$ MPa	$\sigma_\mathrm{s} = 345$ MPa

L'équilibre de la section est représenté ci-dessous, $\mathrm{N_c}$ représentant la résultante des contraintes du béton comprimé.



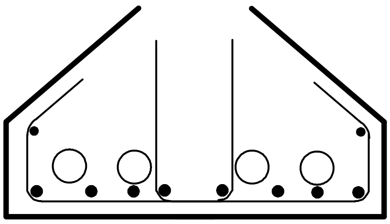
L'équilibre des efforts s'écrit : $\begin{cases} N_c - A_p\sigma_p - A_s\sigma_s = 0 \\ \left(A_p\sigma_p + A_s\sigma_s\right)z = M_{Mcar} \end{cases}$

La section d'acier passif doit donc respecter : $\boxed{A_s\sigma_s \geq \dfrac{M_{Mcar}}{z} - A_p\sigma_p}$ les contraintes

étant égales à leurs valeurs maximales, soit $\sigma_\mathrm{p} = 1488$ MPa et $\sigma_\mathrm{s} = 345$ MPa ($P_\mathrm{d} = P_\mathrm{m}$).

soit $\sigma_\mathrm{s} = 400$ MPa et $\sigma_\mathrm{p} = 1422$ MPa ($P_\mathrm{d} = P_\mathrm{k,inf}$)

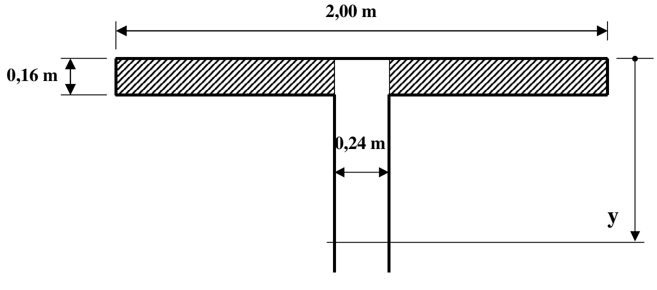
On prend : $z = d_\mathrm{p} - 0{,}15$ m $= 2{,}25$ m (valeur très approximative à ce stade). On obtient alors avec la première condition : $A_\mathrm{s}\sigma_\mathrm{s} \geq 0{,}77$ MN et donc $A_\mathrm{s} \geq 22{,}4$ cm^2
avec la seconde condition : $A_\mathrm{s}\sigma_\mathrm{s} \geq 1{,}05$ MN et donc $A_\mathrm{s} \geq 26{,}2$ cm^2 soit environ 8 HA20, que l'on dispose de la manière suivante



On a ainsi :
$d_\mathrm{p} = 2{,}39$ m
$d_\mathrm{s} = 2{,}44$ m
$A_\mathrm{s} = 2{,}51.10^{-3}$ m^2
(les deux aciers de plus petit diamètre placés dans les angles supérieurs ne sont pas pris en compte)

La section en place est un peu plus faible que la valeur calculée, mais le bras de levier est plus important.

- <u>Calcul des caractéristiques de la section fissurée homogénéisée</u>



On a : $B(y) = B_0 + by$ (i)
$S(y) = S_0 + by^2/2$ (ii)
$J(y) = J_0 + by^3/3$ (iii)

Où B_0, S_0 et J_0 sont les caractéristiques de la partie hachurée de la section (membrure) :
$B_0 = 0{,}2816$ m^2
$S_0 = 0{,}0225$ m^3
$J_0 = 0{,}0024$ m^4

Les expressions (i), (ii) et (iii) sont valables dans tous les cas où la section a une où plusieurs âmes d'épaisseur constante sur la hauteur, à condition que l'axe neutre passe dans l'âme. Le calcul de B_0, S_0 et J_0 peut être légèrement plus compliqué si la membrure n'est pas rectangulaire. On a alors intérêt à la décomposer en éléments rectangulaires ou triangulaires.

Avec les contributions des aciers :

$B^*_0 = B_0 + n_s A_s + n_p A_p$ $\qquad$ $B^*(y) = B^*_0 + by$

$S^*_0 = S_0 + n_s A_s d_s + n_p A_p d_p$ $\qquad$ $S^*(y) = S^*_0 + by^2/2$

$J^*_0 = J_0 + n_s A_s d_s^2 + n_p A_p d_p^2$ $\qquad$ $J^*(y) = J^*_0 + by^3/3$

Ici, on a : $A_p = 4{,}2.10^{-3}$ m² $\qquad A_s = 2{,}51.10^{-3}$ m² $\qquad n_p A_p = 0{,}0234$ m² $\qquad n_s A_s = 0{,}0143$ m²

Donc : $n_s A_s + n_p A_p = \Sigma n_j A_j = 0{,}0377$ m² $\qquad B^*_0 = 0{,}3193$ m²

$n_s A_s d_s + n_p A_p d_p = \Sigma n_j A_j d_j = 0{,}0908$ m³ $\qquad S^*_0 = 0{,}1133$ m³

$n_s A_s d_s^2 + n_p A_p d_p^2 = \Sigma n_j A_j d_j^2 = 0{,}2188$ m⁴ $\qquad J^*_0 = 0{,}2212$ m⁴

L'équation d'équilibre des moments : $\delta y B^*(y) - (y + \delta) S^*(y) + J^*(y) = 0$ s'écrit alors :

$$-by^3/6 + \delta by^2/2 + (\delta B^*_0 - S^*_0)y + J^*_0 - \delta S^*_0 = 0 \qquad (1)$$

Equation du troisième degré en y, qui possède au plus une racine dans l'intervalle $[0\ ;\ h]$

- <u>Combinaison caractéristique</u> avec $P_d = P_{k,inf}$

$\delta = d_p - M/N = 2{,}390 - 15{,}8/4{,}33 = -1{,}259$ m

(1) $\Rightarrow$ $-0{,}04\, y^3 - 0{,}1511\, y^2 - 0{,}5153\, y + 0{,}3638 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **$y = 0{,}589$ m**

donc : $B^*(y) = 0{,}4607$ m² et $S^*(y) = 0{,}1549$ m³

$K = N/[yB^*(y) - S^*(y)] = 37{,}18$ MPa/m (K : pente du diagramme des contraintes)

D'où : $\sigma_c = Ky = 21{,}9$ MPa (≤ 24 MPa)

$\sigma_s = n_s K(d_s - y) = 393$ MPa (≤ 400 MPa)

$\Delta''\sigma_p = n_p K(d_p - y) = 373$ MPa donc $\sigma_p = 1405$ MPa (≤ 1488 MPa)

- <u>Combinaison fréquente</u>

$\delta = dp - M/N = 2{,}390 - 12{,}68/4{,}33 = -0{,}538$ m

(1) $\Rightarrow$ $-0{,}04\, y^3 - 0{,}0646\, y^2 - 0{,}2853\, y + 0{,}2824 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **$y = 0{,}783$ m**

donc : $B^*(y) = 0{,}5073$ m² et $S^*(y) = 0{,}1870$ m³

$K = N/[yB^*(y) - S^*(y)] = 20{,}58$ MPa/m (K : pente du diagramme des contraintes)

D'où : $\sigma_c = Ky = 16{,}1$ MPa (≤ 24 MPa)

$\sigma_s = n_s K(d_s - y) = 195$ MPa (≤ 200 MPa)

En application de l'annexe nationale française, la contrainte dans les armatures, en MPa est inférieure à 1000 w_k (w_k en mm). La maîtrise de la fissuration est assurée.
On peut aussi calculer l'ouverture de fissure par la méthode de l'EN 1992-1-1, clause 7.3.4.