

Exercice 2:

On considère le réseau atomique plan ci-dessous. Pour simplifier l'analyse nous supposons qu'un atome n'a d'interactions qu'avec ses plus proches voisins. L'énergie interne d'interaction entre deux atomes est la suivante en fonction de la distance interatomique r .

$$U = U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{r} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{r} \right)^7 \right)$$

$$e = 1,6 * 10^{-19} C$$

$$\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} Fm^{-1}$$

$$a_0 = 3 * 10^{-10} m$$

On suppose qu'il n'y a pas d'agitation (thermique).

On allonge le réseau dans les directions \underline{e}_x ou \underline{e}_y .

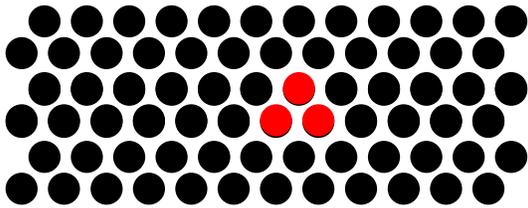
Au repos, la distance inter atomique est uniforme et vaut a_0 .

Après déformation le réseau est caractérisé par deux paramètres

a la distance interatomique pour les atomes situés sur une droite parallèle à \underline{e}_x

b la distance interatomique pour les atomes en « oblique »

Question 1: Calculez, en fonction de a et b , l'énergie interne d'un « triangle » constitué de trois atomes (voir figure)



Attention, il ne faut compter que la moitié de l'énergie d'interaction entre chaque couple d'atomes, l'autre moitié comptant pour le triangle adjacent.

Question 2: On impose dans cette question la valeur de a en allongeant le réseau suivant \underline{e}_x .

a) **Déterminez**, en fonction de a_0, e, ϵ_0, a , la valeur de b qui minimise l'énergie interne du « triangle », donc l'énergie surfacique du réseau.

b) **Commentez** en faisant le lien avec ν_{yx} le coefficient de Poisson transverse sous

allongement longitudinal d'un matériau cristallin lorsque $\epsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0} \ll 1$.

c) **Exprimez** $W(\epsilon_x)$ la densité volumique d'énergie interne dans le cas des petites

déformations $\epsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0} \ll 1$ sous la forme $W(\epsilon_x) = Cste + \frac{1}{2} E_l \epsilon_x^2$ où E_l est le module

longitudinal du matériau et **donnez** l'expression de E_l

Question 3: On impose dans les questions suivantes la valeur de $h(a,b) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = h$ en

allongeant le réseau suivant $\underline{e}_y \cdot \left(h(a_0, a_0) = h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 \right)$

a) **Déterminez**, en fonction de a_0, e, ε_0, h , les valeurs de a et b qui minimisent l'énergie interne du « triangle », donc l'énergie surfacique du réseau sous la contrainte (mathématique)

$$C(a,b) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - h = 0.$$

On notera F le multiplicateur de Lagrange de cette contrainte pour des raisons qui apparaîtront plus loin.

On écrira les équations dans le cas général puis on résoudra sous les hypothèses

simplificatrices $\varepsilon_x = \frac{a-a_0}{a_0} \ll 1$ et $\varepsilon_b = \frac{b-a_0}{a_0} \ll 1$, $\varepsilon_y = \frac{h-h_0}{h_0} \ll 1$.

b) **Commentez** en faisant le lien avec ν_{xy} le coefficient de Poisson longitudinal sous allongement transverse d'un matériau cristallin, puis **comparez** avec la valeur trouvée lorsque l'élongation est imposée suivant \underline{e}_x et **commentez** ce résultat en faisant une conjecture sur les symétries du matériau.

Question 4:

On considère un matériau cristallin constitué d'un empilement de plans atomiques parallèles, identiques à celui étudié ci-dessus. La distance entre ces plans (mesurée suivant \underline{e}_z la normale aux plans) est c .

On se place dans le cas d'une élongation imposée suivant \underline{e}_y (Cf. question 3)

a) En identifiant le sens physique de F , le multiplicateur de Lagrange dans la question 3, et en vous plaçant dans une hypothèse de petites déformations, ($\varepsilon_x = \frac{a-a_0}{a_0} \ll 1$ et

$\varepsilon_b = \frac{b-a_0}{a_0} \ll 1$, $\varepsilon_y = \frac{h-h_0}{h_0} \ll 1$), **donnez au premier ordre**, la relation entre σ_y la force

surfacique de traction sur le matériau (nécessaire pour allonger celui-ci dans la direction \underline{e}_y) et F .

b) En exploitation les équations de la question 3, **donnez la relation** (linéaire en première approximation) entre le multiplicateur de Lagrange F et la déformation ε_y .

c) **Déduisez** en une expression du module d'Young du matériau cristallin dans la direction transversale \underline{e}_y .

Question 5:

On reste dans la situation des questions 3 et 4.

a) **Exprimez** en fonction de ε_y la densité volumique d'énergie interne $W(\varepsilon_y)$ dans le matériau sous la forme $W(\varepsilon_y) = Cste + \frac{1}{2} E_t \varepsilon_y^2 \dots$

b) **Retrouvez** l'expression du module transversal trouvée à la question 4.