

# Thermodynamique de la progression d'une fissure

## Puissance dissipée en tête de fissure



École des Ponts

Daniel Weisz-Patrault

Master AMMS

26 Février 2020

# Objectifs généraux

- Culture générale
- Concepts fondamentaux pour les matériaux fissurés
- Méthodes de calcul
- Prédiction de la résistance résiduelle
- Durée de vie

# Objectifs de le séance

- Construction thermodynamique
- Notion de singularité mobile
- Dissipation en tête de fissure
- Notion d'intégrale de contour invariante

# Plan de le séance

- 1 Equation locale des bilans
- 2 Thermodynamique du processus de déformation
- 3 Thermodynamique d'une fissure qui se propage

# Plan de le séance

- 1 Equation locale des bilans
- 2 Thermodynamique du processus de déformation
- 3 Thermodynamique d'une fissure qui se propage

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- Equations de bilan locales

# Conservation de la masse

- $\rho$  : masse volumique /  $\Omega_t$  : domaine dans la configuration actuelle

$$M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Conservation de la masse

$$\dot{M}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS = 0$$

- Théorème de la divergence

$$\dot{M}(t) = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x}, t) + \mathbf{div} [\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)] \right) d\Omega = 0$$

- Vrai  $\forall \Omega_t$  : conservation locale de la masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x}, t) + \mathbf{div} [\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)] = 0$$

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- **Dérivée matérielle locale**
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- Equations de bilan locales

# Dérivée matérielle locale

- Le vecteur position  $\underline{X}$  dans la configuration de référence.
- Le vecteur position  $\underline{x}(\underline{X}, t)$  dans la configuration actuelle.
- Soit  $g(\underline{x}, t)$  une fonction.

$$\dot{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}, t) + \frac{\partial g}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

- D'où :

$$\dot{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\nabla}g(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$$

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- **Equations de bilan globale**
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- Equations de bilan locales

# Equations de bilan globale

- Soit  $G(t)$  une grandeur attachée à une quantité de matière.
  - Masse
  - Quantité de mouvement
  - Energie totale
- On définit les apports  $A_G$
- On définit la production interne  $P_G$
- La variation temporelle  $\dot{G}$  en suivant la matière :

$$\dot{G} = A_G + P_G$$

- Exemple pour la masse  $M(t)$  :

$$A_M = P_M = 0 \text{ et } \dot{M} = 0$$

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- **Equations de conservation globales**
- Dérivée matérielle globale
- Equations de bilan locales

# Equations de conservation globales

- Pas de production

$$P_G = 0$$

- D'où :

$$\dot{G} = A_G + \cancel{P_G}$$

- Exemple de conservations
  - Masse : même en cas de transport
  - Quantité de mouvement : équilibre
  - Energie totale : premier principe de la thermodynamique

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- **Dérivée matérielle globale**
- Equations de bilan locales

# Dérivée matérielle globale

- Soit  $G(t)$  une grandeur attachée à une quantité de matière.

$$G(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Dérivation temporelle

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t)] d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS$$

- Théorème de la divergence

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t)] + \operatorname{div} [\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)] \right) d\Omega$$

# Dérivée matérielle globale

- Calcul des termes

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\underline{x}, t)g(\underline{x}, t)] = g \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\rho(\underline{x}, t)g(\underline{x}, t)\underline{v}(\underline{x}, t)] &= \frac{\partial [g\rho v_j]}{\partial x_j} = g \frac{\partial [\rho v_j]}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \rho v_j \\ &= g \operatorname{div} [\rho \underline{v}] + \rho \nabla g \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

- Rassemblement des termes

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \left( \underbrace{g \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \underline{v}] \right)}_0 + \rho \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial t} + \nabla g \cdot \underline{v} \right)}_{\dot{g}} \right) d\Omega$$

- Finalement

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) d\Omega$$

# Equation locale des bilans

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- **Equations de bilan locales**

# Equations de bilan locales

- Apport extérieur  $A_G$  décomposé
- Terme **volumique** et un terme **surfaccique**

$$A_G = \int_{\Omega_t} a_G^V(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} a_G^S(\underline{x}, t) dS$$

- Production interne  $P_G$  est généralement **volumique**

$$P_G = \int_{\Omega_t} p_G(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Variation temporelle de  $G$

$$\dot{G} = A_G + P_G$$

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) d\Omega$$

# Equations de bilan locales

- D'où

$$\int_{\Omega_t} (\rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t)) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} a_G^S(\underline{x}, t) \, dS$$

- Il existe  $\underline{a}_G^S$  tel que

$$a_G^S(\underline{x}, t) = \underline{a}_G^S(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)$$

- Flux extérieurs  $\underline{a}_G^S$

$$\int_{\Omega_t} (\rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t)) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{a}_G^S(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \, dS$$

- Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega_t} (\rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t) - \operatorname{div} [\underline{a}_G^S(\underline{x}, t)]) \, d\Omega = 0$$

# Equations de bilan locales

- Pour tout  $\Omega_t$  :

$$\int_{\Omega_t} (\rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t) - \text{div} [\underline{a}_G^S(\underline{x}, t)]) \, d\Omega = 0$$

- Forme locale de l'équation de bilan

$$\rho(\underline{x}, t) \dot{g}(\underline{x}, t) = a_G^V(\underline{x}, t) + p_G(\underline{x}, t) + \text{div} [\underline{a}_G^S(\underline{x}, t)]$$

- Exemple : bilan de la quantité de mouvement

- $g(\underline{x}, t) \equiv \underline{v}(\underline{x}, t)$
- $\dot{g}(\underline{x}, t) \equiv \underline{\gamma}(\underline{x}, t)$  (accélération)
- $a_G^V(\underline{x}, t) \equiv \underline{f}(\underline{x}, t)$
- $\underline{a}_G^S(\underline{x}, t) \equiv \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  (contrainte)
- $p_G(\underline{x}, t) = 0$  (conservation)

$$\rho(\underline{x}, t) \underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}, t) + 0 + \text{div} [\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)]$$

# Plan de le séance

- 1 Equation locale des bilans
- 2 Thermodynamique du processus de déformation
- 3 Thermodynamique d'une fissure qui se propage

# Thermodynamique du processus de déformation

- **Rappel du principe des puissances virtuelles**
- Equation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

# Rappel du principe des puissances virtuelles

- Espace des vitesses généralisées

$$\mathcal{C} = \{ \underline{V} : (\underline{x}, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}_+ \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \}$$

- Espace des vitesses virtuelles

$$\mathcal{C}^* = \{ \underline{V}^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}^*(\underline{x}) \}$$

- Espace des vitesses rigidifiantes

$$\mathcal{C}_R^* = \{ \underline{V}_R^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{x}, \forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 / \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \}$$

# Rappel du principe des puissances virtuelles

- Puissance des efforts extérieurs

$$PVE(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \underline{\rho f} \cdot \underline{V}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$PVI(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} (\underline{F} \cdot \underline{V}^* - \underline{\sigma} : \underline{\nabla} [\underline{V}^*]) d\Omega$$

- Puissance des efforts d'accélération

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \underline{\rho \gamma} \cdot \underline{V}^* d\Omega$$

- $\underline{\gamma}$  champ d'accélération réel.

# Rappel du principe des puissances virtuelles

- Condition de cohérence

La puissance intérieure d'un mouvement rigide est nulle

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \quad / \quad PVI(\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}) = 0$$

- D'où

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as}$$

$$\int_{\Omega_t} (\underline{F} \cdot (\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}}) \, d\Omega = 0$$

- D'où

$$\underline{F} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}} \, d\Omega = 0$$

- Tenseur anti-symétrique/symétrique

$$\underline{F} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{M}_3^s$$

# Rappel du principe des puissances virtuelles

- Puisque  $\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique on introduit le taux de déformation

$$\underline{\underline{d}}^*(\underline{\underline{V}}^*) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}[\underline{\underline{V}}^*] + {}^t\underline{\underline{\nabla}}[\underline{\underline{V}}^*])$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$PVI(\underline{\underline{V}}^*) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{\underline{V}}^*) \, d\Omega$$

- Principe des puissances virtuelles

$$\forall \underline{\underline{V}}^* \in \mathcal{C}^* \quad PVI(\underline{\underline{V}}^*) + PVE(\underline{\underline{V}}^*) = PVA(\underline{\underline{V}}^*)$$

# Thermodynamique du processus de déformation

- Rappel du principe des puissances virtuelles
- Equation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

# Equation de conservation de l'énergie totale

- **Postulat**

Il existe une énergie totale  $E_T$  attachée à la quantité de matière.

- L'énergie totale comprend l'énergie cinétique  $E_C$
- On appelle énergie interne  $E_I$  la différence entre  $E_T$  et  $E_C$  :

$$E_T = E_C + E_I$$

- **Postulat** : Premier principe de la thermodynamique

L'énergie totale se conserve.  
La production d'énergie totale est nulle.

$$P_{E_T} = 0$$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{E}_T = \dot{E}_C + \dot{E}_I = A_{E_T}$$

- L'apport extérieur  $A_{E_T}$  comprend la puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesses réel

$$P_{EXT} = PVE(\underline{v}(\underline{x}, t))$$

- La différence entre  $A_{E_T}$  et  $P_{EXT}$  est appelée apport de chaleur  $Q$

$$A_{E_T} = P_{EXT} + Q$$

- On écrit

$$\dot{E}_C + \dot{E}_I = P_{EXT} + Q$$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- Energie cinétique attaché à la quantité de matière

$$E_C(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{E}_C(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{\gamma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Accélération  $\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{v}}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\nabla}[\underline{v}] \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$
- Puissance des efforts d'accélération

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{\gamma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{V}^*(\underline{x}) d\Omega$$

- Puissance des efforts d'accélération dans le champ de vitesses réel  
 $P_{ACC} = PVA(\underline{v}(\underline{x}, t))$

$$\dot{E}_C = P_{ACC}$$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- Apports d'énergie totale

$$\dot{E}_C + \dot{E}_I = P_{EXT} + Q$$

- Dérivée matérielle de l'énergie cinétique

$$\dot{E}_C = P_{ACC}$$

- Puissance des efforts intérieurs dans le champ de vitesses réel

$$P_{INT} = PVI(\underline{v}(\underline{x}, t))$$

- Principe des puissance virtuelles

$$P_{INT} + P_{EXT} = P_{ACC}$$

- Bilan d'énergie interne

$$\dot{E}_I = -P_{INT} + Q$$

- Apports d'énergie interne  $Q$
- Production d'énergie interne  $-P_{INT}$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- **Postulat** : il existe une densité massique d'énergie interne

$$E_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) e_I(\underline{x}, t) d\Omega \quad \text{et} \quad \dot{E}_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{e}_I(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$P_{INT} = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega$$

- Apport de chaleur volumique et surfacique

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} r(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS$$

- Théorème de la divergence

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} (r(\underline{x}, t) d\Omega - \text{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)]) dS$$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- Densité massique d'énergie interne

$$\dot{E}_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{e}_I(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$P_{INT} = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega$$

- Apport de chaleur volumique et surfacique

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} (r(\underline{x}, t) d\Omega - \text{div} [q(\underline{x}, t)]) dS$$

- Bilan d'énergie interne

$$\dot{E}_I = -P_{INT} + Q$$

- Forme locale du bilan d'énergie interne

$$\int_{\Omega_t} (\rho(\underline{x}, t) \dot{e}_I(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) - r(\underline{x}, t) + \text{div} [q(\underline{x}, t)]) d\Omega = 0$$

# Equation de conservation de l'énergie totale

- Forme locale du premier principe de la thermodynamique

$$\rho(\underline{x}, t) \dot{e}_I(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) - r(\underline{x}, t) + \mathbf{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)] = 0$$

# Thermodynamique du processus de déformation

- Rappel du principe des puissances virtuelles
- Equation de conservation de l'énergie totale
- **Equation de bilan d'entropie**
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

# Equation de bilan d'entropie

- **Postulat**

Il existe une grandeur scalaire appelé entropie  $S$ .  
Elle mesure le “désordre” du système de particules.  
Nombre d'**arrangements microscopiques possibles**  
correspondant à l'état **macroscopique**

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- $A_S$  apport d'entropie
- $P_S$  production d'entropie
- **Postulat** : Second principe de la thermodynamique

La production d'entropie est positive

$$P_S \geq 0$$

# Equation de bilan d'entropie

- **Postulat** : il existe une densité massique d'entropie

$$S(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) s(\underline{x}, t) d\Omega \quad \text{et} \quad \dot{S}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) d\Omega$$

- **Postulat** : la production d'entropie est volumique

$$P_S(t) = \int_{\Omega_t} p_S(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Second principe de la thermodynamique

$$P_S(t) \geq 0$$

- Forme locale du second principe de la thermodynamique

$$p_S(\underline{x}, t) \geq 0$$

# Equation de bilan d'entropie

- Apport extérieur d'entropie  $A_S$
- Apport de chaleur  $Q$
- Agitation moléculaire au niveau microscopique
- Pour le même apport de chaleur, l'augmentation du désordre sera moindre si le matériau est déjà chaud et ses molécules très agitées.
- **Postulat**

Il existe une température absolue  $T(\underline{x}, t)$  telle que l'apport extérieur d'entropie est égal à l'apport de chaleur divisé par la température absolue

- Terme volumique et surfacique

$$\frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \quad \text{et} \quad - \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)}$$

# Equation de bilan d'entropie

- Apport extérieur d'entropie  $A_S$

$$A_S(t) = \int_{\Omega_t} \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} dS$$

- Théorème de la divergence

$$A_S(t) = \int_{\Omega_t} \left( \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} - \operatorname{div} \left[ \frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] \right) d\Omega$$

# Equation de bilan d'entropie

- Production d'entropie

$$P_S(t) = \int_{\Omega_t} p_S(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Apports d'entropie

$$A_S(t) = \int_{\Omega_t} \left( \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} - \operatorname{div} \left[ \frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] \right) d\Omega$$

- Dérivée matérielle

$$\dot{S}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- D'où

$$\int_{\Omega_t} \left( \rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) - \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} + \operatorname{div} \left[ \frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] - p_S(\underline{x}, t) \right) d\Omega = 0$$

# Equation de bilan d'entropie

- Calcul intermédiaire

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] &= \frac{\partial \left[ \frac{q_j(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right]}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{T(\underline{x}, t)} \frac{\partial q_j(\underline{x}, t)}{\partial x_j} - \frac{q_j(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)^2} \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\operatorname{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)]}{T(\underline{x}, t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \nabla T(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)^2} \end{aligned}$$

- Forme locale du bilan d'entropie

$$\rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) - \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} + \frac{\operatorname{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)]}{T(\underline{x}, t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \nabla T(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)^2} - p_S(\underline{x}, t) = 0$$

# Thermodynamique du processus de déformation

- Rappel du principe des puissances virtuelles
- Equation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Forme locale du bilan d'énergie interne

$$\rho(\underline{x}, t)\dot{\epsilon}_I(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) - r(\underline{x}, t) + \operatorname{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)] = 0$$

- Forme locale du bilan d'entropie

$$\rho(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t) - \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} + \frac{\operatorname{div} [\underline{q}(\underline{x}, t)]}{T(\underline{x}, t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \nabla T(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)^2} - p_S(\underline{x}, t) = 0$$

- Elimination de  $r(\underline{x}, t)$  très difficile à connaître

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\epsilon}_I - T\dot{s}) - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} = T p_S$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Définition de la densité massique d'énergie libre

$$\Psi(\underline{x}, t) = e_I(\underline{x}, t) - T(\underline{x}, t)s(\underline{x}, t)$$

- Dérivée matérielle

$$\dot{\Psi}(\underline{x}, t) = \dot{e}_I(\underline{x}, t) - \dot{T}(\underline{x}, t)s(\underline{x}, t) - T(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t)$$

- Combinaison des bilans d'énergie interne et d'entropie

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{e}_I - T\dot{s}) - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} = T p_S$$

- Equation des bilans pour toute évolution **possible**

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} = T p_S$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- La production d'entropie  $p_S \geq 0$  caractérise l'**irréversibilité** du processus
- $Tp_S$  homogène à une puissance appelée **puissance dissipée volumique**

$$D(\underline{x}, t) = T(\underline{x}, t)p_S(\underline{x}, t)$$

- Equation des bilans pour toute évolution **possible**

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{d}}} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{\underline{\underline{\underline{q}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\nabla}}} T}{T} = D$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Transformation

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$$

- Gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{X}, t)]$$

- Variation de volume

$$J = \det [\underline{\underline{F}}] = \frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x}, t)}$$

- $\rho_0$  masse volumique dans la configuration de référence

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Expression du gradient de la vitesse  $\underline{v}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\Phi}}(\underline{\Phi}^{-1}(\underline{x}, t), t)$

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}_{\underline{x}} [\underline{v}(\underline{x}, t)] &= \underline{\nabla}_{\underline{x}} \left[ \dot{\underline{\Phi}}(\underline{\Phi}^{-1}(\underline{x}, t), t) \right] \\ &= \underline{\nabla}_{\underline{X}} \left[ \dot{\underline{\Phi}}(\underline{X}, t) \right] \cdot \underline{\nabla}_{\underline{x}} \left[ \underline{\Phi}^{-1}(\underline{x}, t), t \right] \\ &= \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\end{aligned}$$

- Taux de déformation

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \left( \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} + {}^t \underline{F}^{-1} \cdot {}^t \underline{\dot{F}} \right)$$

- Terme élastique

$$\underline{\sigma} : \underline{d} = \underline{\sigma} : \underline{\nabla}_{\underline{x}} [\underline{v}] = \text{tr} \left[ \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \right] = \text{tr} \left[ \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{F}} \right]$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} \left( {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \right)$$

- Taux de déformation de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{\dot{\Delta}}} = \frac{1}{2} \left( {}^t \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}} + {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}} \right) = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

- Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}$$

- On obtient les termes d'énergie élastique massiques

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}}{2\rho} = \frac{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{\Delta}}}}{2\rho_0}$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Ecriture de l'équation des bilan dans la configuration de référence

$$J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \left( \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{q \cdot \nabla T}{T} \right) \cdot \underline{\underline{F}} = J T p_S$$

- Calcul

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \text{tr} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}] = \text{tr} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}}] = \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} : {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}}$$

- D'où

$$\underbrace{J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{\Pi}}} : \underbrace{{}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{\dot{\Delta}}}} - \underbrace{J\rho}_{\rho_0} \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{\overbrace{J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot q}^{q_0} \cdot \overbrace{\nabla T \cdot \underline{\underline{F}}}^{\nabla_X T}}{T} = \underbrace{J T p_S}_{T p_{S_0}}$$

- Equation des bilans dans la configuration de référence

$$\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{\Delta}}} - \rho_0 \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{q_0 \cdot \nabla_X T}{T} = T p_{S_0}$$

# Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Second principe de la thermodynamique

$$T p_S = D \geq 0$$

- Inégalité de Clausius Duhem

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right)}_{D_I} - \underbrace{\frac{\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\nabla} T}{T}}_{D_T} = D \geq 0$$

- $D_I$  : dissipation intrinsèque
- $D_T$  : dissipation thermique
- Dans la configuration de référence

$$\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\Delta}} - \rho_0 \left( \dot{\Psi} + \dot{T}s \right) - \frac{\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\nabla}_X T}{T} \geq 0$$

# Plan de le séance

- 1 Equation locale des bilans
- 2 Thermodynamique du processus de déformation
- 3 Thermodynamique d'une fissure qui se propage

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- **Singularité mobile**
- Point mobile dans la configuration de référence
- Équation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure
- Intégrale invariante en hyperélasticité

# Singularité mobile

- L'égalité suivante est-elle toujours vraie ?

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(u, t) du \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(u, t) du$$

- Soit  $a : t \in ]0, 1[ \mapsto a(t) \in ]0, 1[$ .
- Notion de **singularité mobile**

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \ln(|u - a(t)|) du \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{-a'(t)}{u - a(t)} du$$

- **Calcul avec singularité mobile.**

$$G_\epsilon(t) = \int_0^{a(t)-\epsilon} \ln(a(t) - u) du + \int_{a(t)+\epsilon}^1 \ln(u - a(t)) du$$

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- D'où

$$G_\epsilon(t) = (1 - a(t)) \ln(1 - a(t)) + a(t) \ln(a(t)) - 1 - 2\epsilon [\ln(\epsilon) - 1]$$

- Limite  $\epsilon \rightarrow 0$

$$G_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (1 - a(t)) \ln(1 - a(t)) + a(t) \ln(a(t)) - 1 = G(t)$$

- Dérivation

$$\begin{aligned} G'_\epsilon(t) &= -a'(t) \ln(1 - a(t)) + a'(t) \ln(a(t)) \\ &= a'(t) \ln\left(\frac{a(t)}{1 - a(t)}\right) \end{aligned}$$

- $G'_\epsilon(t)$  converge uniformément sur chaque compact

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

## Théorème

Si  $G_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} G(t)$  et  $G'_\epsilon(t)$  converge uniformément alors

$$\begin{array}{l} G'(t) \text{ existe et} \\ G'_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} G'(t) \end{array}$$

- Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{a(t)-\epsilon} \frac{-a'(t)}{u-a(t)} du + \int_{a(t)+\epsilon}^1 \frac{-a'(t)}{u-a(t)} du \\ &= -a'(t) \left[ \ln(\epsilon) - \ln(a(t)) + \ln(1-a(t)) - \ln(\epsilon) \right] \\ &= a'(t) \ln \left( \frac{a(t)}{1-a(t)} \right) \end{aligned}$$

# Singularité mobile

- Autre exemple avec **singularité mobile**

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{u - a(t)} du \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{a'(t)}{(u - a(t))^2} du$$

- **Calcul avec singularité mobile.**

$$\begin{aligned} G_\epsilon(t) &= \int_0^{a(t)-\epsilon} \frac{1}{u - a(t)} du + \int_{a(t)+\epsilon}^1 \frac{1}{u - a(t)} du \\ &= \cancel{\ln(\epsilon)} - \ln(a(t)) + \ln(1 - a(t)) - \cancel{\ln(\epsilon)} \\ &= -\ln\left(\frac{a(t)}{1 - a(t)}\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} G(t) \end{aligned}$$

- Dérivation

$$G'_\epsilon(t) = -\frac{a'(t)}{a(t)(1 - a(t))}$$

# Singularité mobile

- $G_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} G(t)$  et  $G'_\epsilon(t)$  converge uniformément, donc

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{u - a(t)} du = - \frac{a'(t)}{a(t)(1 - a(t))}$$

- Par contre

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{a'(t)}{(u - a(t))^2} du &= a'(t) \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{a(t)} + \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{1 - a(t)} \right) \\ &= - \frac{a'(t)}{a(t)(1 - a(t))} + \frac{2a'(t)}{\epsilon} \\ &\not\rightarrow - \frac{a'(t)}{a(t)(1 - a(t))} \end{aligned}$$

# Singularité mobile

- Avec singularités mobiles

$$G(t) = \int_{\Omega_t} g(\underline{x}, t) d\Omega$$

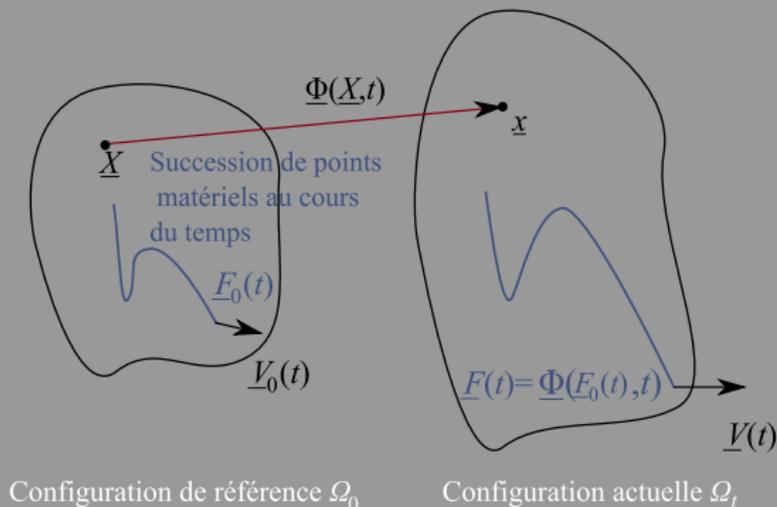
$$\dot{G}(t) \neq \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} g(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} g(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS$$

- Solution
  - Traitement en isolant la singularité
  - Paramètre  $\epsilon$
  - Utilisation du théorème des limites des dérivées

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- Singularité mobile
- **Point mobile dans la configuration de référence**
- Équation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure
- Intégrale invariante en hyperélasticité

# Point mobile dans la configuration de référence

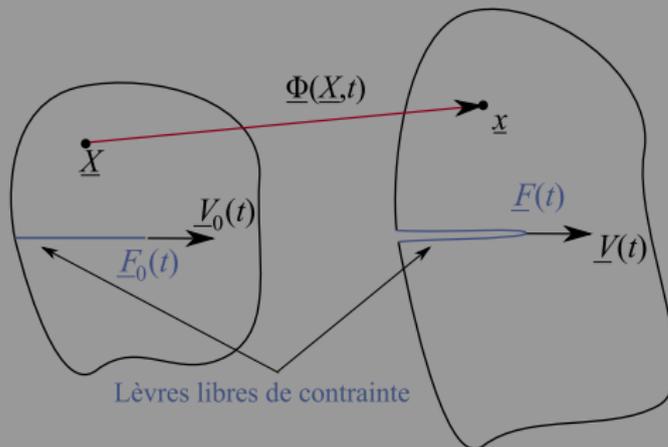


- Vitesse dans la configuration actuelle

$$\begin{aligned}\underline{V}(t) = \dot{\underline{F}}(t) &= \frac{\partial \Phi(\underline{F}_0(t), t)}{\partial t} + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{F}_0(t), t)] \cdot \dot{\underline{F}}_0(t) \\ &= \frac{\partial \Phi(\underline{F}_0(t), t)}{\partial t} + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{F}_0(t), t)] \cdot \underline{V}_0(t)\end{aligned}$$

# Point mobile dans la configuration de référence

Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure



Configuration de référence  $\Omega_0$

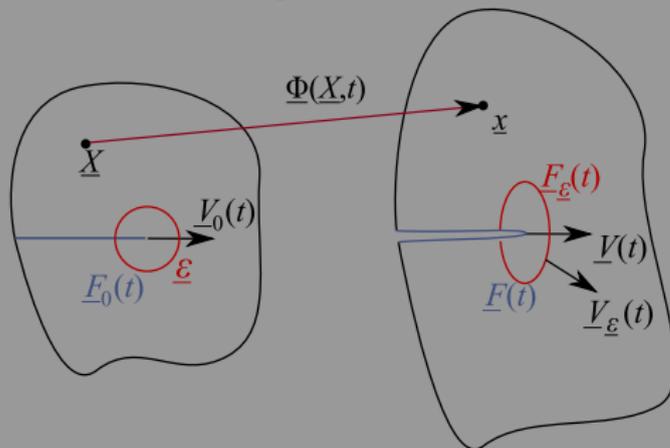
Configuration actuelle  $\Omega_t$

- Vitesse dans la configuration actuelle

$$\underline{V}(t) = \underbrace{\frac{\partial \Phi(\underline{F}_0(t), t)}{\partial t}}_{\frac{\partial \Phi(\underline{X}, t)}{\partial t} \text{ singulier en } \underline{F}_0(t)} + \underbrace{\underline{\nabla}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{F}_0(t), t)] \cdot \underline{V}_0(t)}_{\underline{\nabla}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{X}, t)] \text{ singulier en } \underline{F}_0(t)}$$

# Point mobile dans la configuration de référence

Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure



Configuration de référence  $\Omega_0$

Configuration actuelle  $\Omega_t$

- On pose :

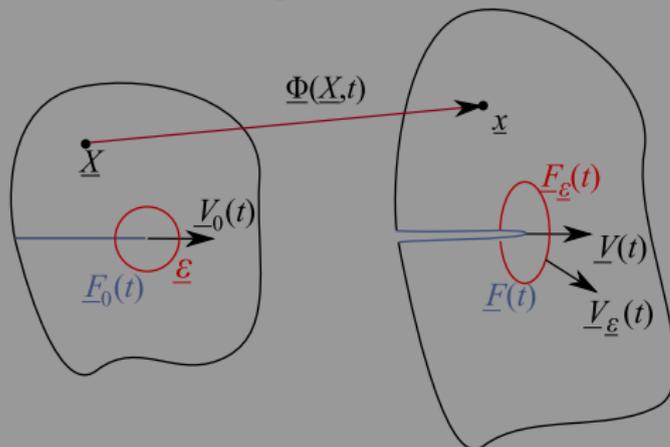
$$\underline{F}_{\underline{\epsilon}}(t) = \underline{\Phi}(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)$$

- On a

$$\underline{F}_{\underline{\epsilon}}(t) \xrightarrow{\underline{\epsilon} \rightarrow 0} \underline{F}(t)$$

# Point mobile dans la configuration de référence

Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure



Configuration de référence  $\Omega_0$

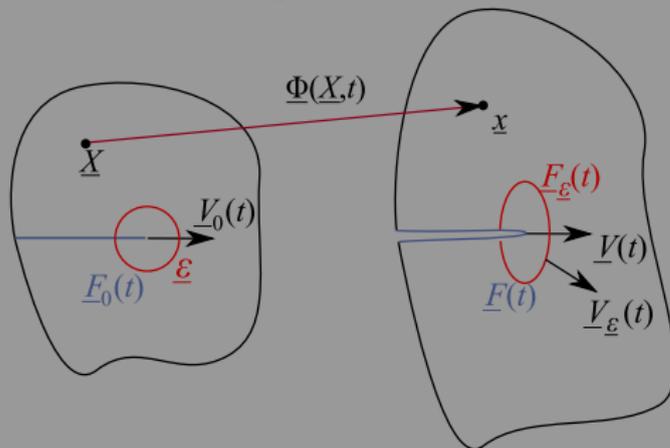
Configuration actuelle  $\Omega_t$

- On dérive :

$$\underline{V}_{\underline{\epsilon}}(t) = \dot{\underline{F}}_{\underline{\epsilon}}(t) = \frac{\partial \Phi(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)}{\partial t} + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\Phi(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)] \cdot \underline{V}_0(t)$$

# Point mobile dans la configuration de référence

Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure



Configuration de référence  $\Omega_0$

Configuration actuelle  $\Omega_t$

- $\dot{\underline{F}}_{\underline{\epsilon}}(t)$  est U.C sur chaque compact donc  $\underline{V}(t) = \dot{\underline{F}}(t)$  existe et

$$\underline{V}(t) = \lim_{\underline{\epsilon} \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)}{\partial t} + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\underline{\Phi}(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)] \cdot \underline{V}_0(t) \right]$$

# Point mobile dans la configuration de référence

- Champs **singuliers** en  $\underline{X} = \underline{F}_0(t)$

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} [\underline{\Phi}(\underline{X}, t)]$$

- Limite

$$\underline{V}(t) = \lim_{\underline{\epsilon} \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} [\underline{\Phi}(\underline{F}_0(t) + \underline{\epsilon}, t)] \cdot \underline{V}_0(t) \right]$$

- Champ **régulier** en  $\underline{X} = \underline{F}_0(t)$

$$\underline{v}(\underline{X}, t) + \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{V}_0(t) = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} [\underline{\Phi}(\underline{X}, t)] \cdot \underline{V}_0(t)$$

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- Singularité mobile
- Point mobile dans la configuration de référence
- **Équation de conservation de l'énergie totale**
- Equation de bilan d'entropie
- Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure
- Intégrale invariante en hyperélasticité

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Bilan d'énergie totale

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = P_{EXT} + Q$$

- Expressions dans la **configuration actuelle**

$$E_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) e_I(\underline{x}, t) d\Omega \quad / \quad E_C(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Expressions des dérivées à déterminer

$$\cancel{\dot{E}_I(t)} = \int_{\Omega_t} \underbrace{\rho(\underline{x}, t) \dot{e}_I(\underline{x}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega \quad / \quad \cancel{\dot{E}_C(t)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \underbrace{\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{x}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Bilan d'énergie totale

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = P_{EXT} + Q$$

- Expressions dans la **configuration de référence**

$$E_I(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega \quad / \quad E_C(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Expressions des dérivées à déterminer

$$\cancel{\dot{E}_I(t)} = \int_{\Omega_0} \underbrace{\rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega \quad / \quad \cancel{\dot{E}_C(t)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \underbrace{\rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- On travaille dans la configuration de référence

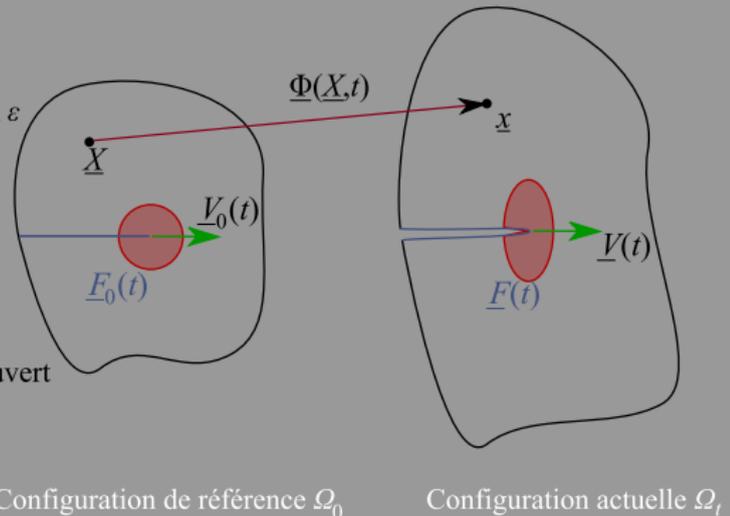
Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure

$B_\varepsilon$  Ensemble de particules de matière dans la boule de rayon  $\varepsilon$

$\hat{B}_\varepsilon$  Boule mobile de rayon  $\varepsilon$  se déplaçant à la vitesse  $\underline{V}_0(t)$

$\Omega_0^\varepsilon = \Omega_0 - B_\varepsilon$  Solide

$D_0^\varepsilon = \Omega_0 - \hat{B}_\varepsilon$  Domaine thermodynamique ouvert



- On travaille sur  $D_0^\varepsilon$  puis sur  $\Omega_0^\varepsilon$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- $\Omega_0^\epsilon$  domaine fermé indépendant du temps

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{g}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- $D_0^\epsilon$  domaine ouvert mobile

$$\dot{G}(t) = \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{g}(\underline{X}, t) d\Omega + \int_{\partial D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) g(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}^{D_0^\epsilon}(\underline{X}, t) d\Omega$$

$$\dot{G}(t) = \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{g}(\underline{X}, t) d\Omega - \int_{\partial \hat{B}_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) g(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- $\underline{N}(\underline{X}, t)$  normale sortante de  $\hat{B}_\epsilon$  donc rentrante pour  $D_0^\epsilon$
- $\hat{B}_\epsilon$  est la seule partie de  $D_0^\epsilon$  à avoir une vitesse

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Processus limite dans  $D_0^\epsilon$  **domaine ouvert mobile**

$$E_I(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega}_{E_I^\epsilon(t)}$$

$$E_C(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) d\Omega}_{E_C^\epsilon(t)}$$

- Si on a convergence uniforme de

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_I^\epsilon(t) &= \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega \\ \dot{E}_C^\epsilon(t) &= \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) d\Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{E}_I(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{E}_I^\epsilon(t) \\ \dot{E}_C(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{E}_C^\epsilon(t) \end{cases}$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Définition de la convergence uniforme de  $f_\epsilon(t)$  vers  $f(t)$

$$\forall \alpha > 0, \exists \epsilon_\alpha, \forall t > 0, \forall \epsilon < \epsilon_\alpha \Rightarrow |f_\epsilon(t) - f(t)| < \alpha$$

- Condition de Cauchy pour la convergence uniforme

$$\forall \alpha > 0, \exists \epsilon_\alpha, \forall \epsilon_1 > 0, \forall \epsilon_2 > 0, \forall t > 0$$

$$\epsilon_1 < \epsilon_\alpha \text{ et } \epsilon_2 < \epsilon_\alpha \Rightarrow |f_{\epsilon_1}(t) - f_{\epsilon_2}(t)| < \alpha$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- On a

$$D_{\epsilon_1} - D_{\epsilon_2} = \widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1}$$

- Soit  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon_1 > 0$  et  $\epsilon_2 > 0$

$$\dot{E}_I^{\epsilon_1}(t) - \dot{E}_I^{\epsilon_2}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1}} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega$$

$$= \int_{\widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1}} \rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) d\Omega + \int_{\partial(\widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1})} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

$$= \int_{\widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1}} (\rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) + \operatorname{div} [\rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t)]) d\Omega$$

$$= \int_{\widehat{B}_{\epsilon_2} - \widehat{B}_{\epsilon_1}} (\rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t)] \cdot \underline{V}_0(t)) d\Omega$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Régime permanent

$$\tilde{e}_I(\underline{X}, t) = \rho_0(\underline{X})e_I(\underline{X}, t) = \tilde{e}_I(\underline{X} - \underline{F}_0(t))$$

- D'où

$$\dot{\tilde{e}}_I(\underline{X}, t) = -\underline{\nabla}_{\underline{X}} [\tilde{e}_I(\underline{X} - \underline{F}_0(t))] \cdot \underline{V}_0(t)$$

- Dans ces conditions

$$\rho_0(\underline{X})\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\rho_0(\underline{X})e_I(\underline{X}, t)] \cdot \underline{V}_0(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{E}_I^{\epsilon_1}(t) - \dot{E}_I^{\epsilon_2}(t) = 0}$$

- En régime quasi-permanent

$$\rho_0(\underline{X})\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{\nabla}_{\underline{X}} [\rho_0(\underline{X})e_I(\underline{X}, t)] \cdot \underline{V}_0(t) \Rightarrow \text{régulier}$$

$$\boxed{\dot{E}_I^{\epsilon_1}(t) - \dot{E}_I^{\epsilon_2}(t) \rightarrow 0}$$

- Condition de Cauchy satisfaite

# Équation de conservation de l'énergie totale

- On a donc

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \dot{E}_I(t)$$

$$\dot{E}_C^\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) d\Omega \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \dot{E}_C(t)$$

- $D_0^\epsilon$  domaine ouvert mobile

$$\begin{aligned} \dot{E}_I^\epsilon(t) &= \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_C^\epsilon(t) &= \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \end{aligned}$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Sur  $D_0^\epsilon$  le bilan d'énergie total est

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) [\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t)] d\Omega - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ e_I(\underline{X}, t) + \frac{\underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t)}{2} \right] \rho_0(\underline{X}) \underline{V}_0 dS_0 \right]$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Sur  $\Omega_0^\epsilon$  on a

$$E_I^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) e_I(\underline{X}, t) d\Omega$$

$$E_C^\epsilon(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Dérivation sur  $\Omega_0^\epsilon$  domaine fixe sans singularité mobile

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) d\Omega$$

$$\dot{E}_C^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Ne converge plus uniformément car il n'y a plus les termes de surface

# Équation de conservation de l'énergie totale

- $D_0^\epsilon$  est ouvert : **apport d'énergie du au transfert de masse**

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) + \dot{E}_C^\epsilon(t) = P_{EXT}^\epsilon + Q^\epsilon + \text{Apport}$$

- $\Omega_0^\epsilon$  est fermé : **conserve sa masse**

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) + \dot{E}_C^\epsilon(t) = P_{EXT}^\epsilon + Q^\epsilon$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Force élémentaire de surface dans la configuration actuelle

$$d\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS$$

- Force élémentaire de surface dans la configuration de référence

$$d\underline{f}_0 = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{N} dS_0$$

- On peut démontrer que :

$$\underline{n} dS = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{N} dS_0$$

- Définition du gradient et transport des vecteurs élémentaires

$$\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X} = d\underline{x} \Rightarrow \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{f}_0 = d\underline{f}$$

- Tenseur de Piola-Kirchoff

$$\underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Différents tenseurs de contrainte représentant la force élémentaire de surface dans la configuration actuelle

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{N}} dS_0 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = d\underline{f}$$

- Tenseur de Boussinesq

$$\underline{\underline{B}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Pi}}$$

- Puissance des efforts extérieurs apportée à la boule  $B_\epsilon$

$$\begin{aligned} P_{EXT}^{B_\epsilon} &= \int_{\partial B_\epsilon^t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) dS \\ &= \int_{\partial B_\epsilon} \underline{\underline{B}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{N}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) dS_0 \end{aligned}$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- On a

$$\underline{n}dS = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{N}dS_0$$

- Chaleur surfacique apportée à la boule  $B_\epsilon$

$$\begin{aligned} Q^{B_\epsilon} &= - \int_{\partial B_\epsilon^t} \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS \\ &= - \int_{\partial \Omega_0^\epsilon} J \underline{q}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon} \underbrace{J \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{q}(\underline{X}, t)}_{\underline{q}_0(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \end{aligned}$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Simplifications
  - Pas de forces de volume
  - Lèvres de la fissure sont libres de contraintes
  - Pas d'apports volumique de chaleur
  - Lèvres de la fissure n'échangent pas de chaleur
- Apports d'énergie au solide  $\Omega_0^\epsilon$

$$P_{EXT}^\epsilon = P_{EXT} - \int_{\partial B_\epsilon} \underline{\underline{B}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) dS_0$$

$$Q^\epsilon = Q + \int_{\partial B_\epsilon} \underline{q}_0(\underline{X}, t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Bilan d'énergie totale sur la structure fissurée  $\Omega_0$

$$\dot{E}_I(t) + \dot{E}_C(t) = P_{EXT} + Q$$

- Bilan d'énergie totale sur  $\Omega_0^\epsilon$

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) + \dot{E}_C^\epsilon(t) = P_{EXT}^\epsilon + Q^\epsilon$$

- Dérivées sur  $\Omega_0^\epsilon$

$$\dot{E}_I^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) d\Omega$$

$$\dot{E}_C^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- On vient de montrer que

$$P_{EXT} = P_{EXT}^\epsilon + \int_{\partial B_\epsilon} \underline{B}(\underline{X}, t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) dS_0$$

$$Q = Q^\epsilon - \int_{\partial B_\epsilon} \underline{q}_0(\underline{X}, t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- On déduit que  $\forall \epsilon$

$$P_{EXT} + Q = P_{EXT}^\epsilon + Q^\epsilon + \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \left( {}^t \underline{B}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) - \underline{q}_0(\underline{X}, t) \right) dS_0$$

- Finalement  $\forall \epsilon$

$$\begin{aligned} \dot{E}_I(t) + \dot{E}_C(t) &= \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{e}_I(\underline{X}, t) d\Omega + \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t) d\Omega \\ &+ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \left( {}^t \underline{B}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) - \underline{q}_0(\underline{X}, t) \right) dS_0 \end{aligned}$$

- En prenant la limite on a

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) [\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t)] d\Omega + \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \left( {}^t \underline{B}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) - \underline{q}_0(\underline{X}, t) \right) dS_0 \right]$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Sur  $D_0^\epsilon$  le bilan d'énergie total est

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) [\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t)] \, d\Omega - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \left[ e_I(\underline{X}, t) + \frac{\underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t)}{2} \right] \rho_0(\underline{X}) \underline{V}_0 \, dS_0 \right]$$

- Sur  $\Omega_0^\epsilon$  le bilan d'énergie total est

$$\dot{E}_I + \dot{E}_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) [\dot{e}_I(\underline{X}, t) + \underline{v}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\gamma}(\underline{X}, t)] \, d\Omega + \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N}(\underline{X}, t) \cdot \left( {}^t \underline{B}(\underline{X}, t) \cdot \underline{v}(\underline{X}, t) - \underline{q}_0(\underline{X}, t) \right) \, dS_0 \right]$$

- On identifie  $\partial \hat{B}_\epsilon$  et  $\partial B_\epsilon$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ {}^t \underline{B} \cdot \underline{v} - \underline{q}_0 + \left( e_I + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \rho_0 \underline{V}_0 \right] \, dS_0 = 0$$

# Équation de conservation de l'énergie totale

- Champ régulier en  $\underline{X} = \underline{F}_0(t)$

$$\underline{v}(\underline{X}, t) + \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{V}_0(t)$$

- Donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} (\underline{v}(\underline{X}, t) + \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{V}_0(t)) \, dS_0 = 0$$

- On a au final

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \underline{q}_0 \cdot \underline{N} \, dS_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} + \rho_0 \left( e_I + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \right] \, dS_0 \right] \cdot \underline{V}_0$$

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- Singularité mobile
- Point mobile dans la configuration de référence
- Équation de conservation de l'énergie totale
- **Equation de bilan d'entropie**
- Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure
- Intégrale invariante en hyperélasticité

# Equation de bilan d'entropie

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- Expressions dans la **configuration actuelle**

$$S(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) s(\underline{x}, t) d\Omega$$

- Expressions des dérivées à déterminer

$$\cancel{\dot{S}(t)} = \int_{\Omega_t} \underbrace{\rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega$$

# Equation de bilan d'entropie

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- Expressions dans la **configuration de référence**

$$S(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Expressions des dérivées à déterminer

$$\cancel{\dot{S}(t)} = \int_{\Omega_0} \underbrace{\rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t)}_{\text{Singularités mobiles}} d\Omega$$

# Equation de bilan d'entropie

- On travaille dans la configuration de référence

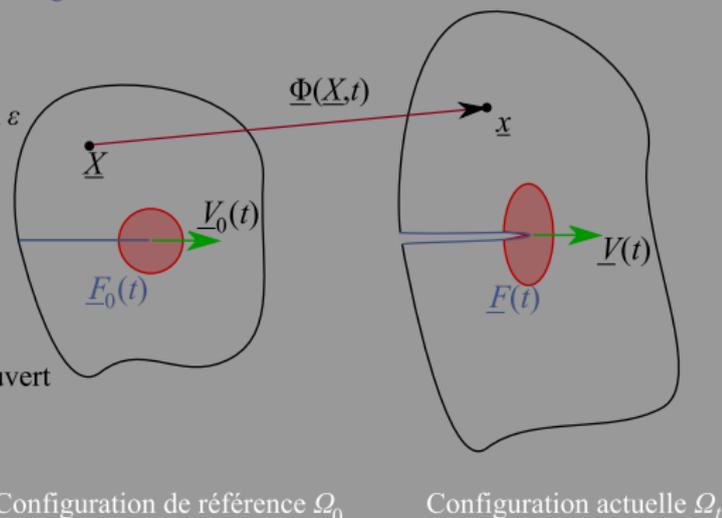
Points mobiles dans configuration de référence : l'extrémité de la fissure

$B_\varepsilon$  Ensemble de particules de matière dans la boule de rayon  $\varepsilon$

$\hat{B}_\varepsilon$  Boule mobile de rayon  $\varepsilon$  se déplaçant à la vitesse  $\underline{V}_0(t)$

$\Omega_0^\varepsilon = \Omega_0 - B_\varepsilon$  Solide

$D_0^\varepsilon = \Omega_0 - \hat{B}_\varepsilon$  Domaine thermodynamique ouvert



- On travaille sur  $D_0^\varepsilon$  puis sur  $\Omega_0^\varepsilon$

# Equation de bilan d'entropie

- $\Omega_0^\epsilon$  domaine fermé indépendant du temps

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{g}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- $D_0^\epsilon$  domaine ouvert mobile

$$\dot{G}(t) = \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{g}(\underline{X}, t) d\Omega - \int_{\partial \hat{B}_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) g(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- $\underline{N}(\underline{X}, t)$  normale sortante de  $\hat{B}_\epsilon$  donc rentrante pour  $D_0^\epsilon$
- $\hat{B}_\epsilon$  est la seule partie de  $D_0^\epsilon$  à avoir une vitesse

# Equation de bilan d'entropie

- Processus limite dans  $D_0^\epsilon$  **domaine ouvert mobile**

$$S(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) d\Omega}_{S^\epsilon(t)}$$

- On a convergence uniforme de

$$\dot{S}^\epsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Donc

$$\dot{S}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{S}^\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) d\Omega$$

# Equation de bilan d'entropie

- $D_0^\epsilon$  domaine ouvert mobile

$$\begin{aligned}\dot{S}^\epsilon(t) &= \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0\end{aligned}$$

- Donc

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right]\end{aligned}$$

# Equation de bilan d'entropie

- Sur  $\Omega_0^\epsilon$  on a

$$S^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Dérivation sur  $\Omega_0^\epsilon$  domaine fixe sans singularité mobile

$$\dot{S}^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega$$

- Ne converge plus uniformément car il n'y a pas les termes de surface

# Equation de bilan d'entropie

- Simplifications
  - Pas de forces de volume
  - Lèbres de la fissure sont libres de contraintes
  - Pas d'apports volumique de chaleur
  - Lèbres de la fissure n'échangent pas de chaleur
- On a :

$$\underline{n}dS = J^t \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{N}dS_0$$

- Apport d'entropie dans la boule  $B_\epsilon$

$$- \int_{\partial B_\epsilon^t} \frac{q(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS = - \int_{\partial B_\epsilon} \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

- Apport d'entropie dans  $\Omega_0^\epsilon$

$$A_S^\epsilon = A_S + \int_{\partial B_\epsilon} \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- Singularité mobile
- Point mobile dans la configuration de référence
- Équation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- **Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure**
- Intégrale invariante en hyperélasticité

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Bilan d'entropie sur  $\Omega_0$

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- Bilan d'entropie sur  $\Omega_0^\epsilon$

$$\dot{S}^\epsilon = A_S^\epsilon + P_S^\epsilon$$

- Apport d'entropie dans  $\Omega_0^\epsilon$

$$A_S^\epsilon - A_S = \int_{\partial B_\epsilon} \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

- Production d'entropie dans la boule

$$P_S - P_S^\epsilon = \dot{S} - \dot{S}^\epsilon + A_S^\epsilon - A_S$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Production d'entropie dans la boule

$$P_S - P_S^\epsilon = \dot{S} - \dot{S}^\epsilon + \int_{\partial B_\epsilon} \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0$$

- Dans  $D_0^\epsilon$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right] \end{aligned}$$

- Dans  $\Omega_0^\epsilon$

$$\dot{S}^\epsilon(t) = \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Production d'entropie en tête de fissure

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [P_S - P_S^\epsilon] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{D_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega \right. \\
 &\quad - \int_{\partial \hat{B}_\epsilon} \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \\
 &\quad - \int_{\Omega_0^\epsilon} \rho_0(\underline{X}) \dot{s}(\underline{X}, t) d\Omega \\
 &\quad \left. + \int_{\partial B_\epsilon} \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right]
 \end{aligned}$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Production d'entropie en tête de fissure

$$P_S^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [P_S - P_S^\epsilon]$$

- Une fissure qui progresse est une source d'entropie

$$P_S^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \left( \frac{q_0(\underline{X}, t)}{T(\underline{X}, t)} - \rho_0(\underline{X}) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \right) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right]$$

- Si la température en tête de fissure  $T(F_0(t), t)$  est bornée

$$P_S^{fiss} = \frac{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \left( q_0(\underline{X}, t) - \rho_0(\underline{X}) T(\underline{X}, t) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \right) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right]}{T(F_0(t), t)}$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Inégalité de Clausius Duhem

$$P_S^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [P_S - P_S^\epsilon] \geq 0$$

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = T(F_0(t), t) P_S^{fiss}$$

- D'où

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \left( \underline{q}_0(\underline{X}, t) - \rho_0(\underline{X}) T(\underline{X}, t) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \right) \cdot \underline{N}(\underline{X}, t) dS_0 \right]$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Puissance dissipée

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{q}_0 \cdot \underline{N} - \rho_0(\underline{X}) T(\underline{X}, t) s(\underline{X}, t) \underline{V}_0(t) \cdot \underline{N} dS_0 \right]$$

- Source de chaleur

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \underline{q}_0 \cdot \underline{N} dS_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} + \rho_0 \left( e_I + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \right] dS_0 \right] \cdot \underline{V}_0$$

- Energie libre

$$\Psi(\underline{X}, t) = e_I(\underline{X}, t) - T(\underline{X}, t) s(\underline{X}, t)$$

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} + \rho_0 \left( \Psi + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \right] dS_0 \right] \cdot \underline{V}_0$$

# Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} + \rho_0 \left( \Psi + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} \right) \right] dS_0 \right]}_{\underline{g}(t)} \cdot \underline{V}_0(t)$$

- Finalement on écrit

$$D^{fiss} = \underline{g}(t) \cdot \underline{V}_0(t)$$

# Thermodynamique d'une fissure qui se propage

- Singularité mobile
- Point mobile dans la configuration de référence
- Équation de conservation de l'énergie totale
- Equation de bilan d'entropie
- Production d'entropie à l'extrémité d'une fissure
- **Intégrale invariante en hyperélasticité**

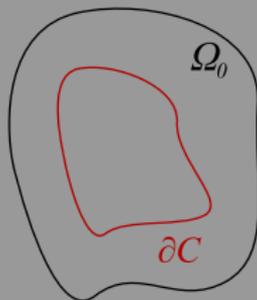
# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Hypothèses
  - Hyperélasticité : énergie libre volumique

$$\tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t)) = \rho(\underline{X})\Psi(\underline{X}, t)$$

- Quasi-statique
- Lèvres de la fissure libres de contraintes
- Vitesse  $\underline{V}_0(t)$  colinéaire à  $\underline{e}_1$
- Résultat à démontrer pour tout contour **fermé**  $\partial C$

$$\underline{g}(t) \cdot \underline{e}_1 = \left[ \int_{\partial C} \underline{N} \cdot [\rho_0 \Psi - {}^t \underline{B} \cdot \underline{F}] dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1 = 0$$



# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Premier terme

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{C}} \underline{N} \cdot (\rho_0 \Psi) \cdot \underline{e}_1 dS_0 &= \int_{\partial\mathcal{C}} \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t)) N_1(\underline{X}, t) dS_0 \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t))}{dX_1} d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t))}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t)}{\partial X_1} d\Omega\end{aligned}$$

# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Premier terme

$$\int_{\partial C} \underline{N} \cdot (\rho_0 \Psi) \cdot \underline{e}_1 dS_0 = \int_C \frac{\partial \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t))}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t)}{\partial X_1} d\Omega$$

- Hyperélasticité : contrainte de Piola-Kirchhoff

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t))}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} = \underline{\underline{\Pi}}$$

- Déformation de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\Delta}} = 1/2( {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} )$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}(\underline{X}, t)}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^t \underline{\underline{F}}}{\partial X_1} \cdot \underline{\underline{F}} + {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial X_1} \right)$$

- D'où

$$\boxed{\int_{\partial C} \underline{N} \cdot (\rho_0 \Psi) \cdot \underline{e}_1 dS_0 = \int_C \underline{\underline{\Pi}} : {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial X_1} d\Omega}$$

# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Second terme

$$\begin{aligned}\int_{\partial C} \underline{N} \cdot ({}^t \underline{B} \cdot \underline{F}) \cdot \underline{e}_1 dS_0 &= \int_{\partial C} \underline{e}_1 \cdot ({}^t \underline{F} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{N} dS_0 \\ &= \int_C \operatorname{div} [\underline{e}_1 \cdot {}^t \underline{F} \cdot \underline{B}] d\Omega\end{aligned}$$

- Or  $\underline{e}_1 = (\alpha_i)_i$  avec  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [\underline{e}_1 \cdot {}^t \underline{F} \cdot \underline{B}] &= \operatorname{div} \left[ \alpha_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_i} \cdot B_{jk} \right] = \operatorname{div} \left[ \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_1} B_{jk} \right] = \frac{\partial \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_1} B_{jk} \right)}{\partial X_k} \\ &= B_{jk} \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial (B_{jk})}{\partial X_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_k} \\ &= \underbrace{{}^t \underline{B}}_{\underline{\Pi} \cdot {}^t \underline{F}} : \frac{\partial}{\partial X_1} \underbrace{\nabla [\Phi]}_{\underline{F}} + \underbrace{\operatorname{div} [\underline{B}]}_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}\end{aligned}$$

# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Premier terme

$$\int_{\partial C} \underline{N} \cdot (\rho_0 \underline{\Psi}) \cdot \underline{e}_1 \, dS_0 = \int_C \underline{\Pi} : {}^t \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{F}}{\partial X_1} \, d\Omega$$

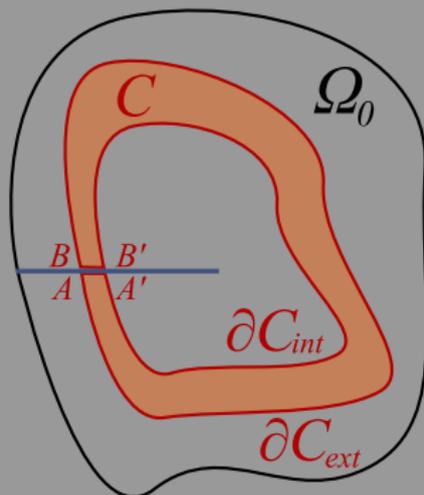
- Second terme

$$\int_{\partial C} \underline{N} \cdot ({}^t \underline{B} \cdot \underline{F}) \cdot \underline{e}_1 \, dS_0 = \int_C \underline{\Pi} \cdot {}^t \underline{F} : \frac{\partial \underline{F}}{\partial X_1} \, d\Omega$$

- Résultat : pour tout contour **fermé**  $\partial C$

$$\underline{g}(t) \cdot \underline{e}_1 = \left[ \int_{\partial C} \underline{N} \cdot [\rho_0 \underline{\Psi} - {}^t \underline{B} \cdot \underline{F}] \, dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1 = 0$$

# Intégrale invariante en hyperélasticité



- Contour fermé  $\partial C = AA' \cup \partial C_{int} \cup B'B \cup (-\partial C_{ext})$

$$\left[ \int_{\partial C} \underline{N} \cdot [\rho_0 \Psi - {}^t \underline{B} \cdot \underline{F}] \, dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1 = 0$$

- Sur  $AA'$  et  $BB'$

$$\underline{N} = 0 \underline{e}_1 + N_2 \underline{e}_2 \text{ et } \underline{B} \cdot \underline{N} = 0$$

# Intégrale invariante en hyperélasticité

- Dans une structure fissurée : **intégrale indépendante du contour dans la zone élastique**

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \left[ \int_{\partial C_{int}} \underline{N} \cdot [\rho_0 \Psi - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}}] \, dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1 \\ &= \left[ \int_{\partial C_{ext}} \underline{N} \cdot [\rho_0 \Psi - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}}] \, dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1\end{aligned}$$

- On peut retirer la limite dans l'expression de  $\underline{g} \cdot \underline{e}_1$

$$\underline{g} \cdot \underline{e}_1 = \left[ \int_{\partial B_\epsilon} \underline{N} \cdot \left[ - {}^t \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} + \rho_0 \left( \Psi + \frac{v \cdot v}{2} \right) \right] \, dS_0 \right] \cdot \underline{e}_1$$