

# Mécanique linéaire de la rupture

## Introduction aux éléments finis étendus



École des Ponts

Daniel Weisz-Patrault

Ecole des Ponts

18 Mars 2020

# Objectifs

- Rappels des Elements Finis
- Principes de base de la X-FEM
- Culture générale sur les méthodes numériques
- Critère énergétique de propagation
- Méthodes locales (endommagement, modèles à gradient) pas abordées

# Plan de le séance

- 1 Rappels
- 2 Eléments finis étendus : X-FEM
- 3 Propagation

# Plan de le séance

- 1 Rappels
- 2 Eléments finis étendus : X-FEM
- 3 Propagation

# Rappels

- **Formulation variationnelle**
- Méthode des éléments finis

# Formulation variationnelle

- $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  : domaine à l'instant  $t$
- $\partial\Omega$  : frontière à l'instant  $t$
- $\partial\Omega_T$  : frontière où l'on impose le vecteur contrainte
- $\partial\Omega_u$  : frontière où l'on impose les déplacement

$$\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u \text{ and } \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_u = \emptyset$$

# Formulation variationnelle

- Espace des vitesses généralisées cinématiquement admissibles

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{V} : (\underline{x}, t) \in \Omega_t \times \mathbb{R}_+ \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) / \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u, \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^d(\underline{x}, t) \right\}$$

- Espace des vitesses virtuelles cinématiquement admissibles

$$\mathcal{C}^* = \{ \underline{V}^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}^*(\underline{x}) / \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u, \underline{u}^*(\underline{x}, t) = 0 \}$$

- Espace des vitesses rigidifiantes

$$\mathcal{C}_R^* = \{ \underline{V}_R^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}_T + \underline{\omega} \cdot \underline{x}, \forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 / \forall \underline{\omega} \in \mathcal{M}_3^{as} \}$$

# Formulation variationnelle

- Puissance des efforts extérieurs

$$PVE(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \underline{\rho f} \cdot \underline{V}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$PVI(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} (\underline{F} \cdot \underline{V}^* - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}[\underline{V}^*]) d\Omega$$

- Puissance des efforts d'accélération

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \underline{\rho \underline{\gamma}} \cdot \underline{V}^* d\Omega$$

- $\underline{\underline{\gamma}}$  champ d'accélération réel.

# Formulation variationnelle

- Condition de cohérence

La puissance intérieure d'un mouvement rigide est nulle

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \quad / \quad PVI(\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}) = 0$$

- D'où

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as}$$

$$\int_{\Omega_t} (\underline{F} \cdot (\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}}) \, d\Omega = 0$$

- D'où

$$\underline{F} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}} \, d\Omega = 0$$

- Tenseur anti-symétrique/symétrique

$$\underline{F} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{M}_3^s$$

# Formulation variationnelle

- Puisque  $\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique on introduit le taux de déformation

$$\underline{\underline{d}}^*(\underline{V}^*) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}[\underline{V}^*] + {}^t\underline{\underline{\nabla}}[\underline{V}^*])$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$PVI(\underline{V}^*) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega$$

- Lien entre les contraintes et les variables cinématiques

$$\text{Comportement : } \underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{d}}, \dots)$$

- On cherche  $\underline{V} \in \mathcal{C}$  telle que pour  $\underline{\underline{\sigma}}$  vérifiant le comportement :

$$\boxed{\forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^* \quad PVI(\underline{V}^*) + PVE(\underline{V}^*) = PVA(\underline{V}^*)}$$

# Formulation variationnelle

- Principe des puissances virtuelles :  $\underline{V} \in \mathcal{C}$  telle que  $\forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^*$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{V}^* \, dS - \int_{\Omega_t} \rho \underline{\gamma} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega$$

- Théorème de la divergence  $\int_{\Omega_t} \underline{\text{div}} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{V}^*] \, d\Omega = \int_{\Omega_T} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{V}^* \, dS$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_T} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{V}^* \, dS - \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}} [\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{V}^* \, d\Omega$$

- Equations fortes du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\text{div}} [\underline{\underline{\sigma}}] = \rho \underline{\gamma} - \rho \underline{f} & \text{sur } \Omega_t \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T} & \text{sur } \partial\Omega_T \\ \underline{u} = \underline{u}^d & \text{sur } \partial\Omega_u \end{array} \right.$$

# Formulation variationnelle

- **Réciproque** : on multiplie les équations fortes par  $\underline{V}^* \in \mathcal{C}^*$
- Intégration sur  $\Omega_t$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\text{div}} [\underline{\sigma}] \cdot \underline{V}^* \, d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho (\underline{\gamma} - \underline{f}) \cdot \underline{V}^* \, d\Omega$$

- Théorème de la divergence ( $\underline{V}^* = 0$  sur  $\partial\Omega_u$ )

$$\int_{\Omega_t} \underline{\text{div}} [\underline{\sigma}] \cdot \underline{V}^* \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_T} \underbrace{(\underline{\sigma} \cdot \underline{n})}_{\underline{T}} \cdot \underline{V}^* \, dS - \int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{d}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega$$

- On cherche donc  $\underline{V} \in \mathcal{C}$  telle que  $\forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^*$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{d}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{V}^* \, dS - \int_{\Omega_t} \rho \underline{\gamma} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega$$

# Rappels

- Formulation variationnelle
- Méthode des éléments finis

# Méthode des éléments finis

- Recherche de solutions approchées
- Méthode des éléments finis
  - (i) Formulation faible (ou variationnelle)
  - (ii) Méthode d'approximation (de Galerkin)
  - (iii) Interpolation sur un maillage

# Méthode des éléments finis

## Formulation faible

- $\underline{V} \in \mathcal{C}$  solution **si et seulement si**  $\forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^*$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{V}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{V}^* \, dS - \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{V}^* \, d\Omega$$

## Méthode d'approximation de Galerkin

- Problème :  $\mathcal{C}$  de dimension infinie
- Projection de  $\mathcal{C}$  sur un espace de **dimension finie**

$$\mathcal{C}_A = p(\mathcal{C})$$

# Méthode des éléments finis

## Maillage

- Espace particulier  $\mathcal{C}_A$
- Découpage de  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$
- Fonctions continues et polynômiales par morceaux de degré  $n$

$$\mathbb{P}_n \left[ (\Omega_e)_{1 \leq e \leq N_e} \right] = \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0(\Omega_t, \mathbb{R}^3) / \forall (x, y, z) \in \Omega_e \\ f(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n f_{ijk} x^i y^j z^k \\ i+j+k \leq n \end{array} \right\}$$

# Méthode des éléments finis

## Maillage

- Espace des vitesses généralisées **approchées**

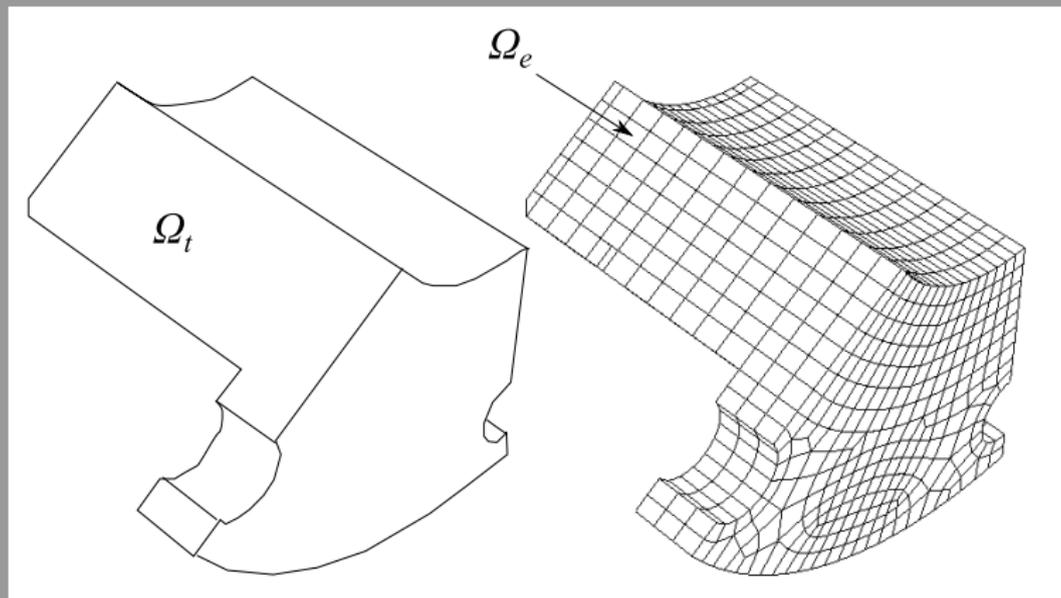
$$\mathcal{C}_A = \left\{ \underline{V} \in \mathbb{P}_n : (\underline{x}, t) \in \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e \times \mathbb{R}_+ \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) / \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^d(\underline{x}, t) \right\}$$

- Espace des vitesses virtuelles **approchées**

$$\mathcal{C}_A^* = \left\{ \underline{V}^* \in \mathbb{P}_n : \underline{x} \in \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e \mapsto \underline{V}^*(\underline{x}) / \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u, \underline{u}^*(\underline{x}, t) = 0 \right\}$$

# Méthode des éléments finis

## Maillage

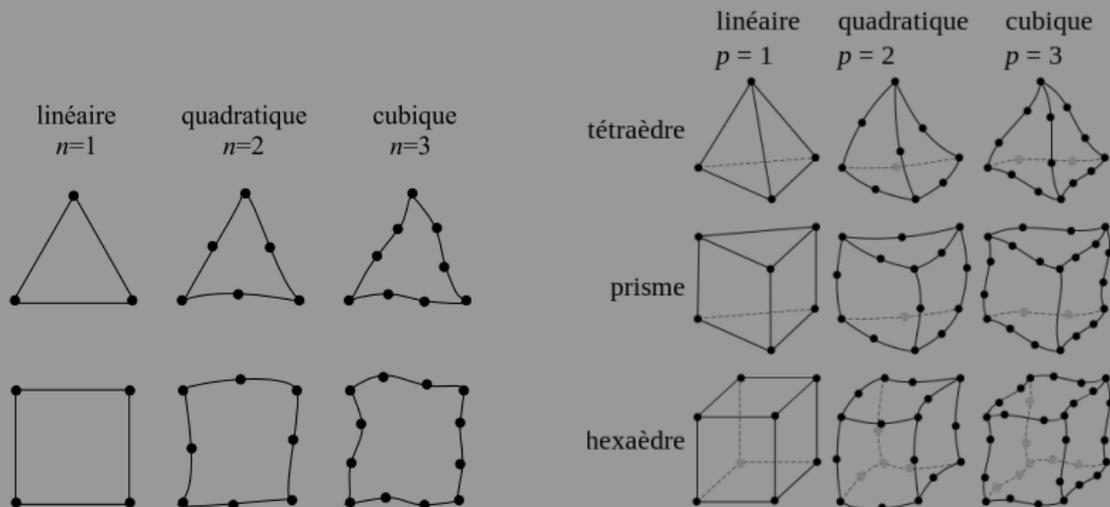


# Méthode des éléments finis

## Maillage

- Dimension :  $\dim [C_A] = N$

$$N = \text{Nombre de noeuds total} - \text{Nombre de noeuds bloqués}$$



# Méthode des éléments finis

## Explicitation d'une base

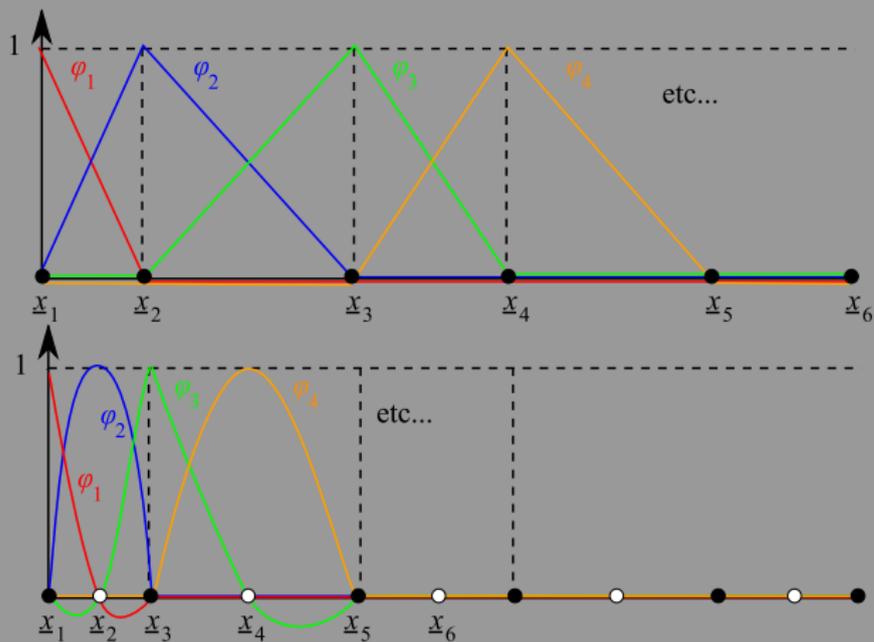
- Fonctions de  $\mathbb{P}_n$  valant 1 sur un noeud et 0 sur tous les autres

$$\forall 1 \leq i \leq N, \varphi_i \in \mathbb{P}_n \text{ et } \varphi_i(\underline{x}_j) = \delta_{ij}$$

# Méthode des éléments finis

## Explicitation d'une base

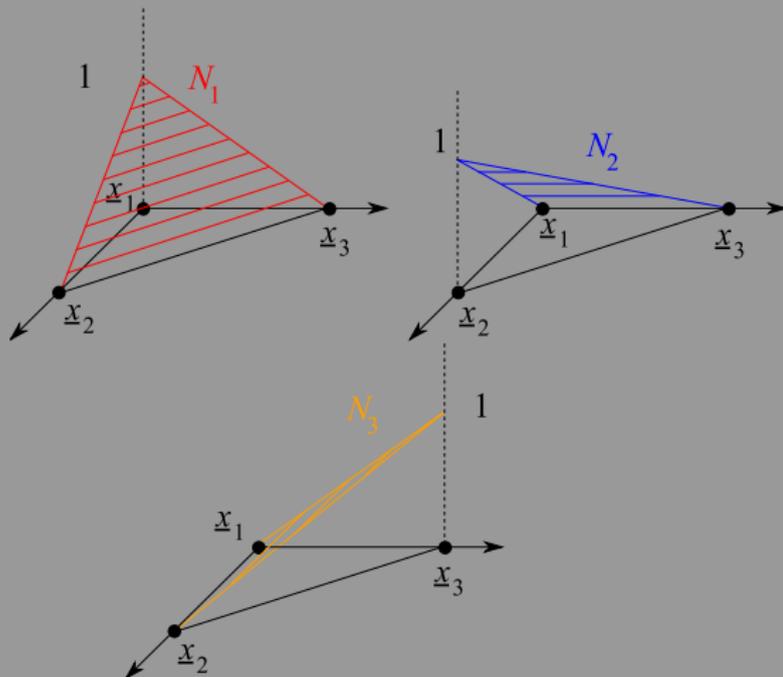
- Exemple 1D,  $n = 1$  et  $n = 2$



# Méthode des éléments finis

## Fonction de forme

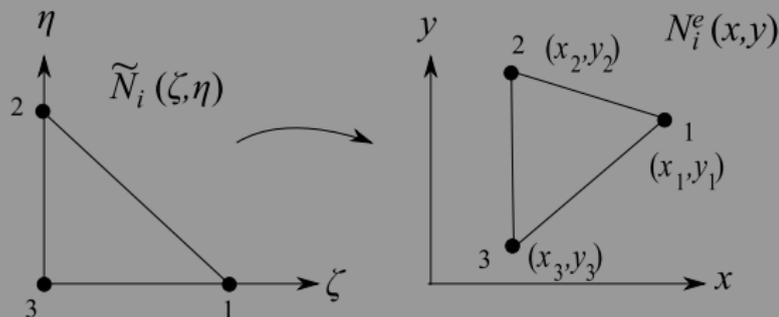
- Restriction :  $N_i^e = \varphi_i|_{\Omega_e}$



# Méthode des éléments finis

## Notion d'élément de référence

- Coordonnées réelles  $(x, y, z)$ , de calcul  $(\zeta, \eta, \xi)$



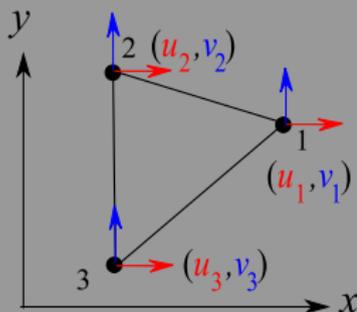
- Interpolation de la géométrie (sur un élément)

$$\begin{cases} x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_i \tilde{N}_i(\zeta, \eta) \\ y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^3 y_i \tilde{N}_i(\zeta, \eta) \end{cases}$$

# Méthode des éléments finis

## Notion d'élément de référence

- Coordonnées réelles  $(x, y, z)$ , de calcul  $(\zeta, \eta, \xi)$



- Interpolation des déplacements (sur un élément)

$$\begin{array}{l} u(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^3 u_i \tilde{N}_i(\zeta, \eta) \\ v(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^3 v_i \tilde{N}_i(\zeta, \eta) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i N_i^e(x, y) \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^3 v_i N_i^e(x, y) \end{array} \right.$$

# Méthode des éléments finis

## Ecriture matricielle par élément (triangulaire linéaire)

- Déplacements  $\underline{u}|_{\Omega_e}(x, y, z)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{N_e}}(x, y, z)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{\underline{u_e}}$$

# Méthode des éléments finis

## Ecriture matricielle par élément (triangulaire linéaire)

- Champ de vitesse virtuel  $\underline{V}_{|\Omega_e}^*(x, y, z)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & N_3^e \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{N_e}}(x, y, z)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1^* \\ V_1^* \\ W_1^* \\ U_2^* \\ V_2^* \\ W_2^* \\ U_3^* \\ V_3^* \\ W_3^* \end{pmatrix}}_{\underline{V}_e^*}$$

# Méthode des éléments finis

## Ecriture matricielle par élément (triangulaire linéaire)

- Taux de déformation virtuel  $d_{\equiv|\Omega_e}^*(x, y, z)$

$$d_{\equiv|\Omega_e}^*(x, y, z) = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \nabla_{\equiv} [N_{\equiv e}] + {}^t \nabla_{\equiv} [N_{\equiv e}] \right)}_{B_{\equiv e}(x, y, z)} \cdot V_{\equiv e}^*$$

# Méthode des éléments finis

## Discrétisation du PPV en quasi-statique

- $\underline{\underline{V}} \in \mathcal{C}_A$  solution si et seulement si pour  $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{d}}, \dots)$ ,  $\forall \underline{\underline{V}}^* \in \mathcal{C}_A^*$

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{\underline{V}}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega_t} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{V}}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{V}}^* \, dS$$

- Linéarité de l'intégrale

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^*(\underline{\underline{V}}^*) \, d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{V}}^* \, d\Omega + \int_{\Omega_e \cap \partial\Omega_T} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{V}}^* \, dS$$

- Projection sur l'espace d'approximation de dimension finie

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{B}}_e \cdot \underline{\underline{V}}_e^* \, d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{N}}_e \cdot \underline{\underline{V}}_e^* \, d\Omega + \int_{\Omega_e \cap \partial\Omega_T} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{N}}_e \cdot \underline{\underline{V}}_e^* \, dS$$

# Méthode des éléments finis

## Discrétisation du PPV en quasi-statique

- Projection sur l'espace d'approximation de dimension finie

$$\sum_{e=1}^{N_e} \underline{V}_e^* \cdot \int_{\Omega_e} \underline{B}_e : \underline{\sigma} \, d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{V}_e^* \cdot \underbrace{\left[ \int_{\Omega_e} \rho \underline{N}_e \cdot \underline{f} \, d\Omega + \int \underline{N}_e \cdot \underline{T} \, dS \right]}_{\underline{f}_e}$$

- Cas linéaire  $\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon} = \underline{C} : \underline{B}_e \cdot \underline{u}_e$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \underline{V}_e^* \cdot \underbrace{\left[ \int_{\Omega_e} \underline{B}_e : \underline{C} : \underline{B}_e \, d\Omega \right]}_{\underline{K}_e} \cdot \underline{u}_e = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{V}_e^* \cdot \underline{f}_e$$

# Méthode des éléments finis

## Assemblage

- Somme de produits matriciels

$$\sum_{e=1}^{N_e} {}^t \underline{V}_e^* \cdot \underline{K}_e \cdot \underline{u}_e = \sum_{e=1}^{N_e} {}^t \underline{V}_e^* \cdot \underline{f}_e$$

- **Assemblage** :  $[\underline{V}^*]$  valeurs aux noeuds sans répétition

$${}^t [\underline{V}^*] \cdot [\underline{K}] \cdot [\underline{u}] = {}^t [\underline{V}^*] \cdot [\underline{f}]$$

- Problème :  $[\underline{K}]$  **pas inversible**.

# Méthode des éléments finis

## Réduction du système

- On cherche  $[\underline{K}]_R$  **inversible**
- Lignes : équations ' $0 = 0'$  car  $[\underline{V}^*]$  contient des 0 (sur  $\partial\Omega_u$ )
- Colonnes :  $[\underline{u}]$  connu sur les composantes où  $[\underline{V}^*]$  est nul
- Ces composantes connues sont mises dans le vecteur force

# Méthode des éléments finis

## Inversion du système

- Système après réduction  $\forall [\underline{V}^*]_R$

$${}^t [\underline{V}^*]_R \cdot [\underline{K}]_R \cdot [\underline{u}]_R = {}^t [\underline{V}^*]_R \cdot [\underline{f}]_R$$

- Simplification (car vrai pour tout  $[\underline{V}^*]_R$  ne s'annulant pas)

$$[\underline{u}]_R = [\underline{K}]_R^{-1} \cdot [\underline{f}]_R$$

# Méthode des éléments finis

## Démarche comportement non-linéaire

- Procédure incrémentale (incréments  $n$ )
- Incrément de chargement  $\Delta \underline{f}_e$  imposé
- On cherche l'incrément solution correspondant  $\Delta \underline{u}_k^e$
- Construction et assemblage d'un résidu

$$\sum_{e=1}^{N_e} \underline{V}_e^* \cdot \underbrace{\int_{\Omega_e} \left[ \underline{\underline{B}}_e : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_k^e + \Delta \underline{u}_k^e) - \left( \underline{f}_k^e + \Delta \underline{f}_e \right) \right] d\Omega}_{R_k^e(\Delta \underline{u}_k^e)} = 0$$

- Assemblage du résidu
- Annulation du résidu par Newton-Raphson
- Fait apparaître un module de rigidité tangente  $\underline{\underline{\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}}$
- A déterminer par un algorithme local

# Méthode des éléments finis

## Newton-Raphson

- Comment passer de l'incrément  $k - 1$  à  $k$  ?
- On connaît  $\Delta \underline{f}_e$
- On cherche l'incrément solution correspondant  $[\Delta \underline{u}_k]$
- Assemblage du résidu

$${}^t [\underline{V}^*] \cdot [\underline{R}_k] ([\Delta \underline{u}]) = 0$$

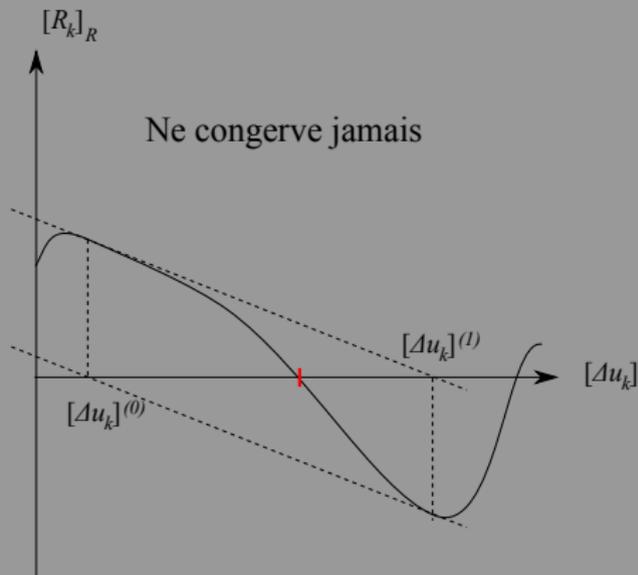
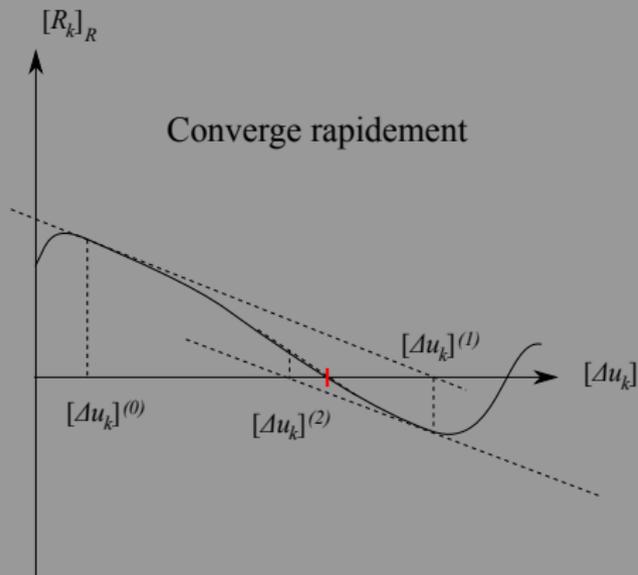
- Réduction pour enlever les equations  $0 = 0$

$$[\underline{R}_k]_R ([\Delta \underline{u}_k]) = 0$$

- Chercher un point d'annulation d'une fonction vectorielle

# Méthode des éléments finis

## Newton-Raphson



# Méthode des éléments finis

## Newton-Raphson

- Initialisation :  $[\Delta \underline{u}_k]^{(0)}$ , puis annulation de la tangente en  $[\Delta \underline{u}_k]^{(i-1)}$

$$[\underline{R}_k]_R([\Delta \underline{u}_k]^{(i-1)}) + \frac{\partial [\underline{R}_k]_R(\Delta \underline{u})}{\partial \Delta \underline{u}} \cdot ([\Delta \underline{u}_k]^{(i)} - [\Delta \underline{u}_k]^{(i-1)}) = 0$$

$$[\Delta \underline{u}_k]^{(i)} = - \underbrace{\left( \frac{\partial [\underline{R}_k]_R(\Delta \underline{u})}{\partial \Delta \underline{u}} \right)^{-1}}_{\underline{\underline{K}}_T^{-1}} \cdot [\underline{R}_k]_R([\Delta \underline{u}_k]^{(i-1)}) + [\Delta \underline{u}_k]^{(i-1)}$$

- Résidu élémentaire

$$\sum_{e=1}^{N_e} t \underline{V}_e^* \cdot \underbrace{\int_{\Omega_e} \left[ t \underline{B}_e : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_k^e + \Delta \underline{u}_k^e) - (\underline{f}_k^e + \Delta \underline{f}_e^e) \right] d\Omega}_{R^e(\Delta \underline{u}^e)} = 0$$

# Méthode des éléments finis

## Newton-Raphson

- Rigidité tangente élémentaire

$$\underline{\underline{K}}_T^e = \int_{\Omega_e} \left[ {}^t \underline{\underline{B}}_e : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \Delta \underline{u}_k^e} (\underline{u}_k^e + \Delta \underline{u}_k^e) \right] d\Omega$$

$$\underline{\underline{K}}_T^e = \int_{\Omega_e} \left[ {}^t \underline{\underline{B}}_e : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \Delta \underline{u}_k^e} \right] d\Omega$$

- Approximation EF

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}}_e \cdot (\underline{u}_k^e + \Delta \underline{u}_k^e)$$

- Rigidité tangente élémentaire

$$\underline{\underline{K}}_T^e = \int_{\Omega_e} \left[ {}^t \underline{\underline{B}}_e : \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{B}}_e \right] d\Omega$$

# Méthode des éléments finis

## Module tangent equivalent

- Cf cours MPM élasto-plasticité HPP

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} - \underbrace{\left( \frac{\left( \underline{\underline{C}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \otimes \left( \underline{\underline{C}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)}{\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} - \frac{\partial f}{\partial p_{cum}}}} \right)}_{\underline{\underline{C}}^{eq}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (1)$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- Objectif savoir dans quelles mailles on plastifie
- Comment mettre à jour les variables plastiques
- Incrément  $k - 1$  on connaît tout
- Incrément  $k$  on connaît  $\Delta \underline{f}_e$  et  $[\Delta \underline{u}_k]^{(i)}$  (itération de NP)
- Loi d'écoulement de von Mises écrouissage isotrope

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{\underline{s}}{\sigma_Y(p_{cum})}$$

- Différences finis implicites

$$\frac{\underline{\varepsilon}_k^p - \underline{\varepsilon}_{k-1}^p}{\Delta t} = \frac{3}{2} \lambda \frac{\underline{s}_k}{\sigma_Y(p_{cum,k})}$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- Notation  $\Delta\lambda = \lambda \Delta t$
- Déformation plastique

$$\underline{\varepsilon}_{=k}^p = \underline{\varepsilon}_{=k-1}^p + \Delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{s}_k}{\sigma_Y(p_{cum,k})}$$

- Relation (cf cours elasto-plasticité HPP) :  $\dot{p}_{cum} \lambda$

$$p_{cum,k} = p_{cum,k-1} + \Delta\lambda$$

- Evolution elasto-plastique :  $\Delta\lambda \geq 0, f_k \leq 0, \Delta\lambda f_k = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k < 0 \text{ alors élastique} \Rightarrow \Delta\lambda = 0 \text{ et } \Delta\underline{\varepsilon}^p = 0 \\ f_k = 0 \text{ alors} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_k}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} \leq 0 \Rightarrow \Delta\lambda = 0 \text{ et } \Delta\underline{\varepsilon}^p = 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} > 0 \Rightarrow \Delta\lambda > 0 \text{ et } \Delta\underline{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f_k}{\partial \underline{\sigma}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- On pose  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}}_e : \Delta \underline{u}_{e,k}^{(i)}$  (connu itération de NP)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_k = \underline{\underline{\varepsilon}}_{k-1} + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Notation  $\underline{e}_k$  déviateur de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k$
- Test élastique** ( $\Delta \lambda = 0$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_{k-1}^p$ )

$$\underline{s}_k^{tr} = 2\mu(\underline{e}_k - \underline{\underline{\varepsilon}}_{k-1}^p)$$

$$f_k^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_k^{tr} : \underline{s}_k^{tr}} - \sigma_Y(p_{cum,k-1})$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- **Premier cas** :  $f_k^{tr} \leq 0$  on garde le test élastique
- **Deuxième cas** :  $f_k^{tr} > 0$  correction plastique  $\Delta\lambda > 0$

$$f_k = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_k^{tr} : \underline{s}_k^{tr}} - \sigma_Y(p_{cum,k}) = 0$$

- Réécriture

$$\begin{aligned} \underline{s}_k &= 2\mu(\underline{e}_k - \underline{\varepsilon}_k^p) \\ &= 2\mu(\underline{e}_k - \underline{\varepsilon}_{k-1}^p) - \underbrace{2\mu(\underline{\varepsilon}_k^p - \underline{\varepsilon}_{k-1}^p)}_{\Delta\underline{\varepsilon}^p} \end{aligned}$$

- D'où

$$\underline{s}_k = \underline{s}_k^{tr} - 2\mu\Delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{s}_k}{\sigma_Y(p_{cum,k})}$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- Cas général  $f_k = 0$  se résout par Newton-Raphson
- Cas écrouissage linéaire

$$\sigma_Y(p_{cum,k}) = \sigma_0(1 + \alpha p_{cum,k})$$

- D'où

$$\underline{s}_k^{tr} = \underline{s}_k \left( 1 + 2\mu \frac{3}{2} \frac{\Delta\lambda}{\sigma_Y(p_{cum,k})} \right)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_k^{tr} : \underline{s}_k^{tr}} = \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_k : \underline{s}_k}}_{\sigma_Y(p_{cum,k})} \left| 1 + 2\mu \frac{3}{2} \frac{\Delta\lambda}{\sigma_Y(p_{cum,k})} \right|$$

# Méthode des éléments finis

## Algorithme local d'intégration de la plasticité (ex simple)

- Cas écrouissage linéaire

$$\begin{aligned}\frac{\underline{s}_k^{tr}}{\sqrt{\frac{3}{2}\underline{s}_k^{tr}:\underline{s}_k^{tr}}} &= \frac{\underline{s}_k}{\sigma_Y(p_{cum,k}) + 2\mu\frac{3}{2}\Delta\lambda} \left(1 + 2\mu\frac{3}{2}\frac{\Delta\lambda}{\sigma_Y(p_{cum,k})}\right) \\ &= \boxed{\frac{\underline{s}_k}{\sigma_Y(p_{cum,k})}}\end{aligned}$$

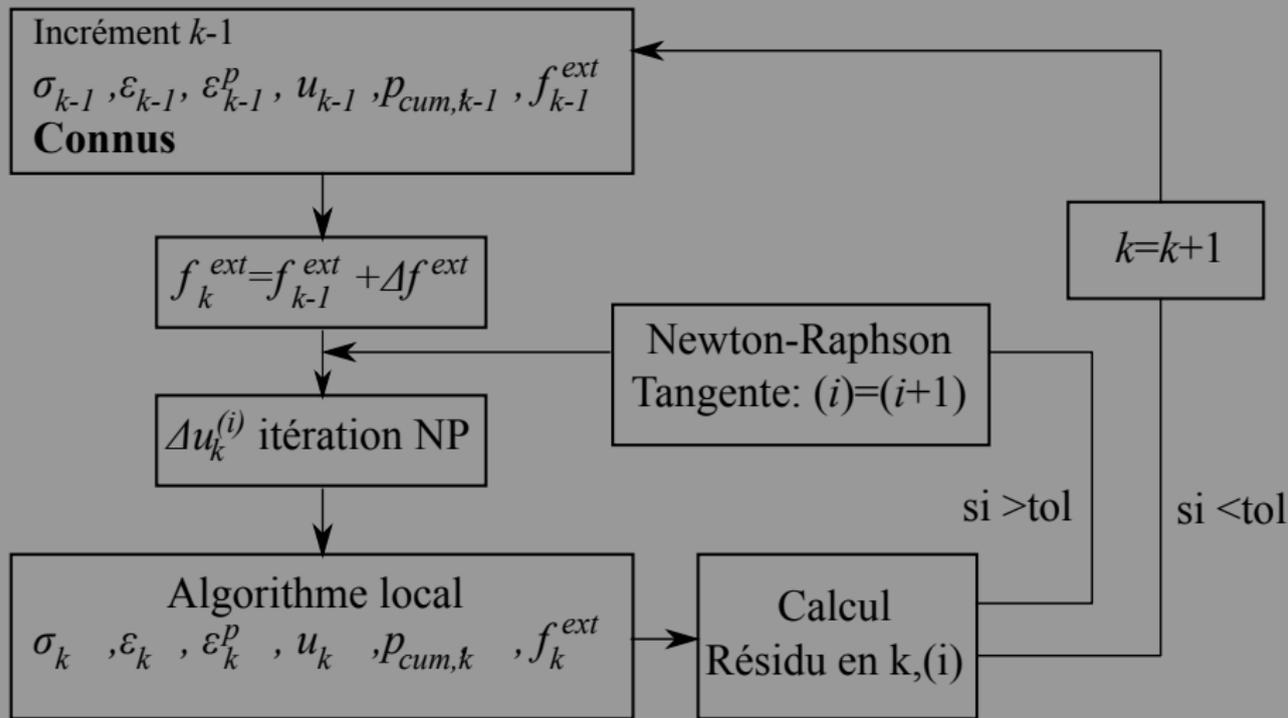
- Ecriture de  $f_k = 0$

$$\begin{aligned}f_k &= \sqrt{\frac{3}{2}\underline{s}_k:\underline{s}_k} - \sigma_Y(p_{cum,k}) = 0 \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}\underline{s}_k^{tr}:\underline{s}_k^{tr}} - 2\mu\frac{3}{2}\Delta\lambda - \sigma_0(1 + \alpha p_{cum,k-1}) - \sigma_0\Delta\lambda = 0 \\ f_k^{tr} - (3\mu + \sigma_0)\Delta\lambda &= 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{f_k^{tr}}{3\mu + \sigma_0}}\end{aligned}$$

- Mise à jour des variables plastique et des contraintes

# Méthode des éléments finis

## Résumé



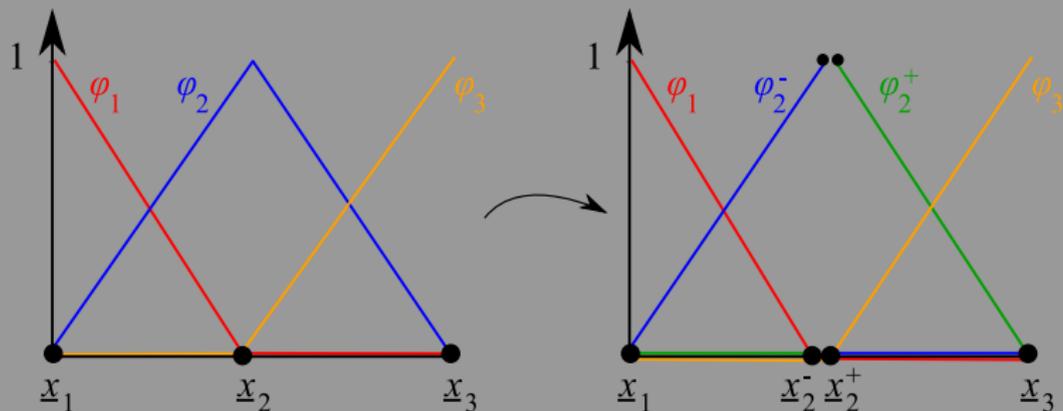
# Plan de le séance

- 1 Rappels
- 2 **Eléments finis étendus : X-FEM**
- 3 Propagation

# Eléments finis étendus : X-FEM

- Cas 1D : fissuration aux noeuds
- Cas 1D : fissuration entre les noeuds
- Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds
- Extension en 2D/3D : cas général
- Introduction aux fonctions de niveaux

# Cas 1D : fissuration aux noeuds



- Déplacement dans les 2 éléments

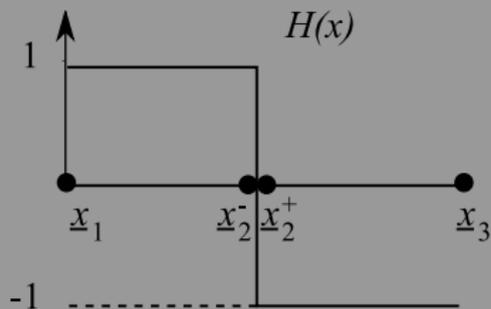
$$u(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2^-\varphi_2^-(x) + u_2^+\varphi_2^+(x) + u_3\varphi_3(x)$$

- Degrés de liberté : déplacement moyen et saut

$$\langle u \rangle = \frac{u_2^- + u_2^+}{2} \quad [u] = \frac{u_2^- - u_2^+}{2}$$

# Cas 1D : fissuration aux noeuds

- Fonction d'Heaviside généralisée



- Déplacement dans les 2 éléments

$$u(x) = u_1 \varphi_1(x) + \langle u \rangle \varphi_2(x) + u_3 \varphi_3(x) + [u] \varphi_2(x) H(x)$$

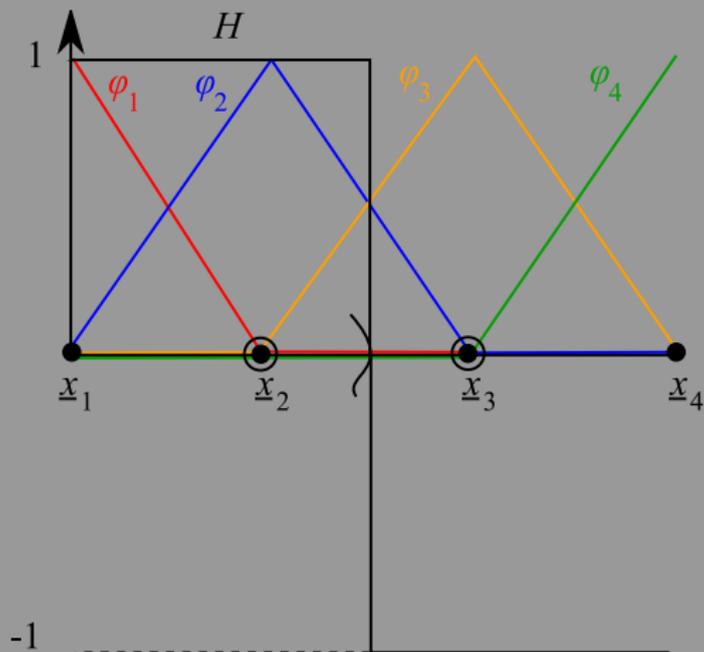
- Avec

$$\varphi_2(x) = \varphi_2^-(x) + \varphi_2^+(x)$$

# Eléments finis étendus : X-FEM

- Cas 1D : fissuration aux noeuds
- **Cas 1D : fissuration entre les noeuds**
- Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds
- Extension en 2D/3D : cas général
- Introduction aux fonctions de niveaux

# Cas 1D : fissuration entre les noeuds



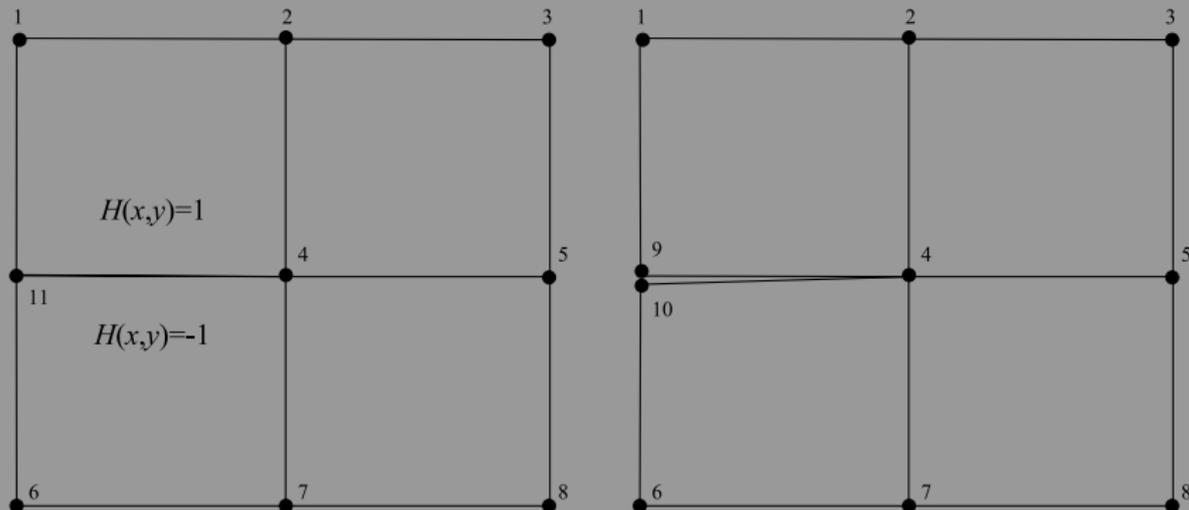
- Déplacement avec enrichissement

$$u = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 + u_4\varphi_4 + \tilde{u}_2\varphi_2H + \tilde{u}_3\varphi_3H$$

# Eléments finis étendus : X-FEM

- Cas 1D : fissuration aux noeuds
- Cas 1D : fissuration entre les noeuds
- **Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds**
- Extension en 2D/3D : cas général
- Introduction aux fonctions de niveaux

# Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds



- Déplacements

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{10} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \varphi_i(x)$$

# Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds

- Degrés de liberté : déplacement moyen et saut

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= \frac{u_9 + u_{10}}{2} & [u] &= \frac{u_9 - u_{10}}{2} \\ \langle v \rangle &= \frac{v_9 + v_{10}}{2} & [v] &= \frac{v_9 - v_{10}}{2}\end{aligned}$$

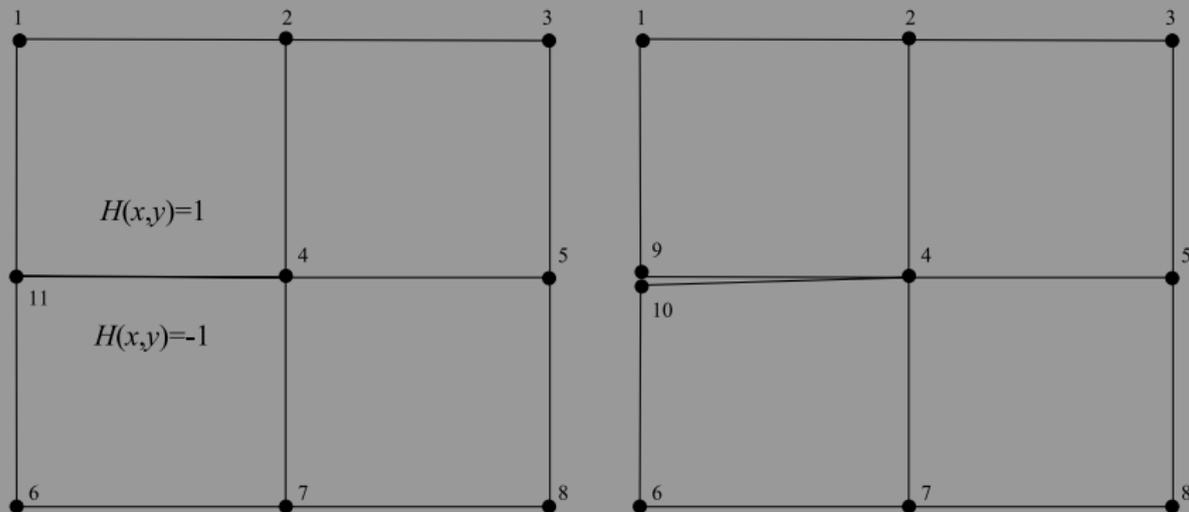
- Enrichissement

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \varphi_i(x) + \begin{pmatrix} \langle u \rangle \\ \langle v \rangle \end{pmatrix} \varphi_{11} + \begin{pmatrix} [u] \\ [v] \end{pmatrix} \varphi_{11} H(x, y)$$

- Avec

$$\varphi_{11}(x, y) = \varphi_9(x, y) + \varphi_{10}(x, y)$$

# Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds

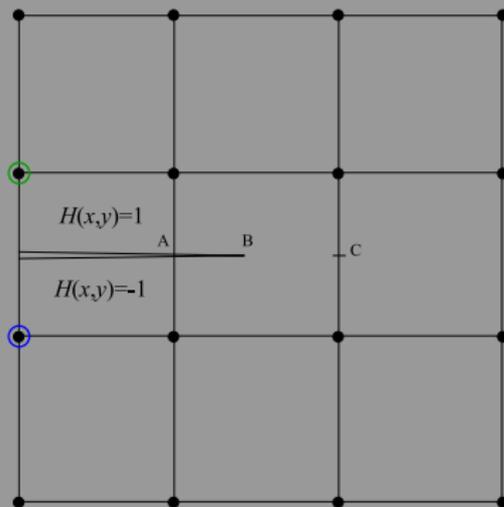
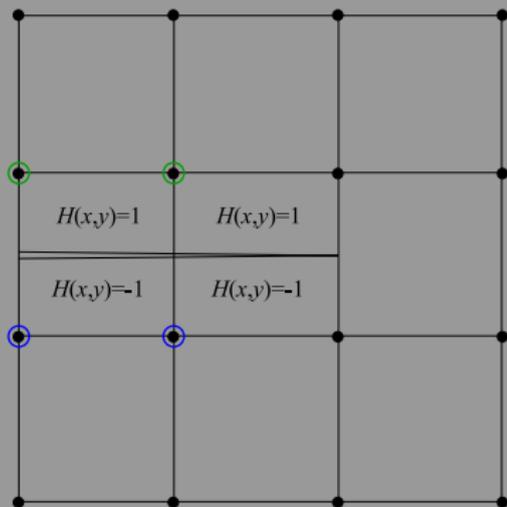


- Equivalence entre dédoubler les noeuds et enrichir les fonctions de forme

# Eléments finis étendus : X-FEM

- Cas 1D : fissuration aux noeuds
- Cas 1D : fissuration entre les noeuds
- Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds
- **Extension en 2D/3D : cas général**
- Introduction aux fonctions de niveaux

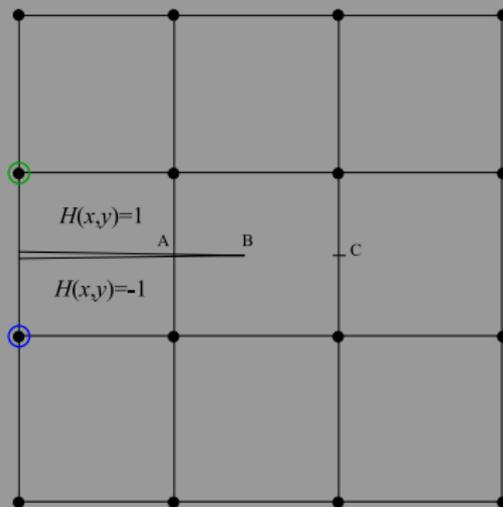
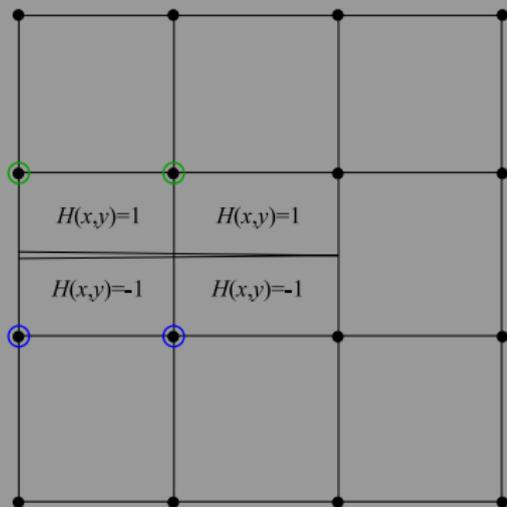
# Extension en 2D/3D : cas général



- $I$  indices non encerclés
- $J$  indices encerclés

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \varphi_i + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{pmatrix} \varphi_j H(x, y)$$

# Extension en 2D/3D : cas général



- Enrichissement avec la fonction  $H$  sur les noeuds encerclés
- **Problème** de la longueur de fissure
- **Fissure s'arrête soit en A soit en C**

# Extension en 2D/3D : cas général

- Solution la plus singulière en plan : Westergaard

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

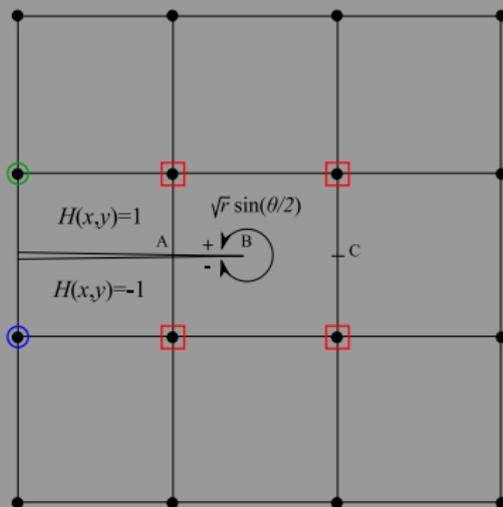
$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (2 + \kappa + \cos(\theta))$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (2 - \kappa - \cos(\theta))$$

- Fonctions de forme additionnelles : repère local en tête de fissure

$$(F_l)_{1 \leq l \leq 4} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \right\}$$

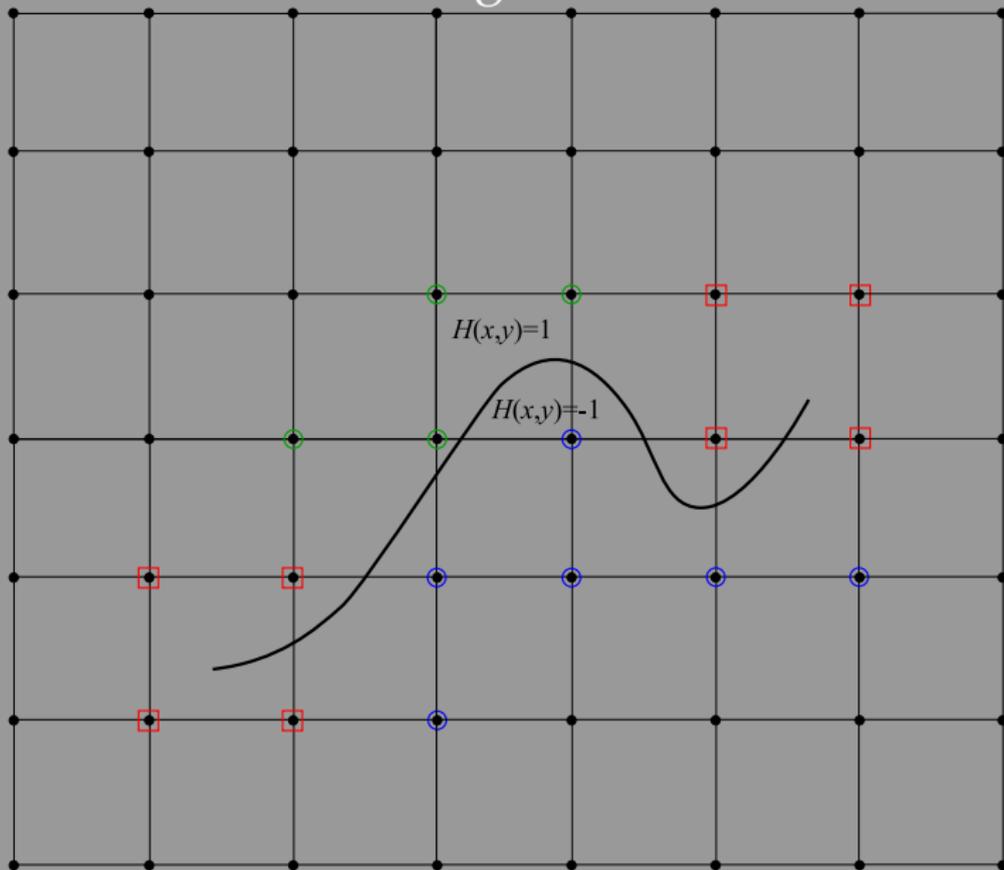
# Extension en 2D/3D : cas général



- $I$  tous les noeuds,  $J$  encerclés,  $K$  encadrés
- Enrichissement

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \varphi_i + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{pmatrix} \varphi_j H + \sum_{k \in K} \varphi_k \sum_{l=1}^4 \begin{pmatrix} \hat{u}_{k,l} \\ \hat{v}_{k,l} \end{pmatrix} F_l$$

# Extension en 2D/3D : cas général



# Eléments finis étendus : X-FEM

- Cas 1D : fissuration aux noeuds
- Cas 1D : fissuration entre les noeuds
- Extension en 2D/3D : fissuration aux noeuds
- Extension en 2D/3D : cas général
- **Introduction aux fonctions de niveaux**

# Introduction aux fonctions de niveaux

- Description géométrique de la fissure
- Essentiel pour évaluer  $H$
- Décorrélé du maillage
- Description explicite **difficile**
  - Automatisation du maillage de la fissure
  - Forme de fissure complexe : maillage distordu
  - Branchement de fissures
- Description implicite : **fonctions de niveaux**

# Introduction aux fonctions de niveaux

- Projection sur  $\Gamma(t)$

$$\underline{x}_p(t) = \operatorname{argmin}_{\underline{x}^* \in \Gamma(t)} \|\underline{x}^* - \underline{x}\|$$

- **Fonction de niveau** : distance (signée) entre  $\Gamma(t)$  et  $\underline{x}$

$$\psi(\underline{x}, t) = \operatorname{sign} [(\underline{x} - \underline{x}_p(t)) \cdot \underline{n}] \|\underline{x} - \underline{x}_p(t)\|$$

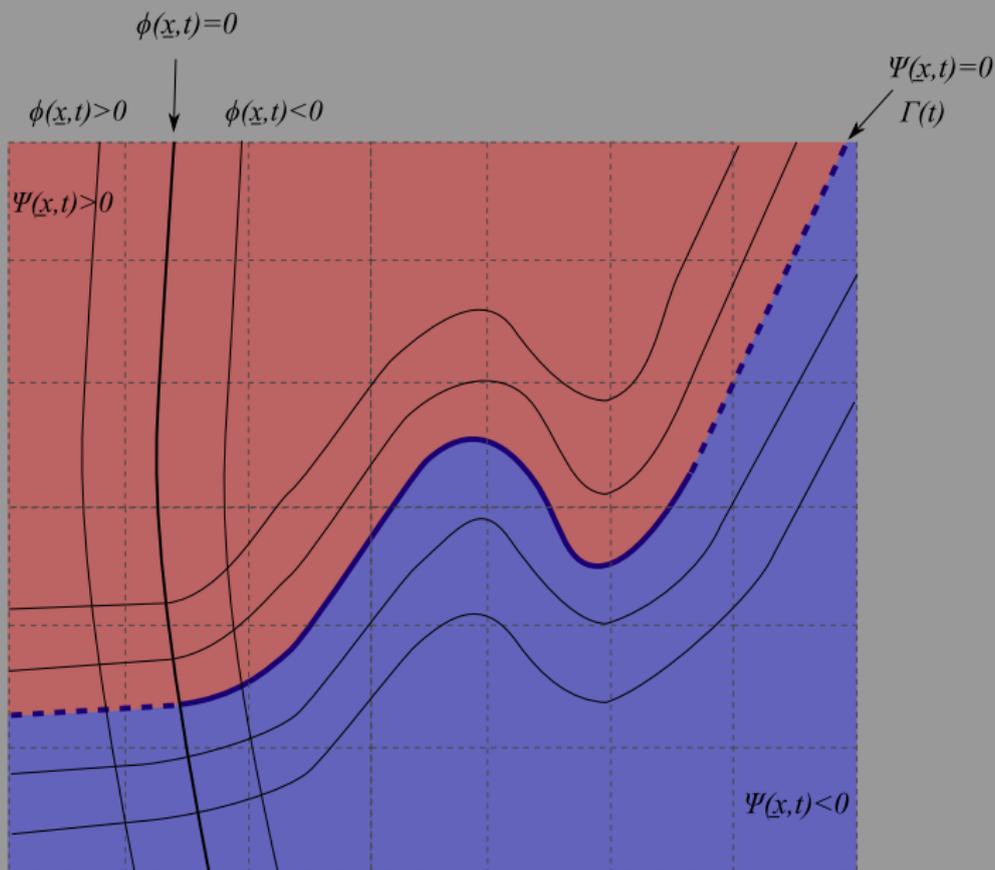
- Par définition

$$\Gamma(t) = \{\underline{x} \in \Omega_t / \psi(\underline{x}, t) = 0\}$$

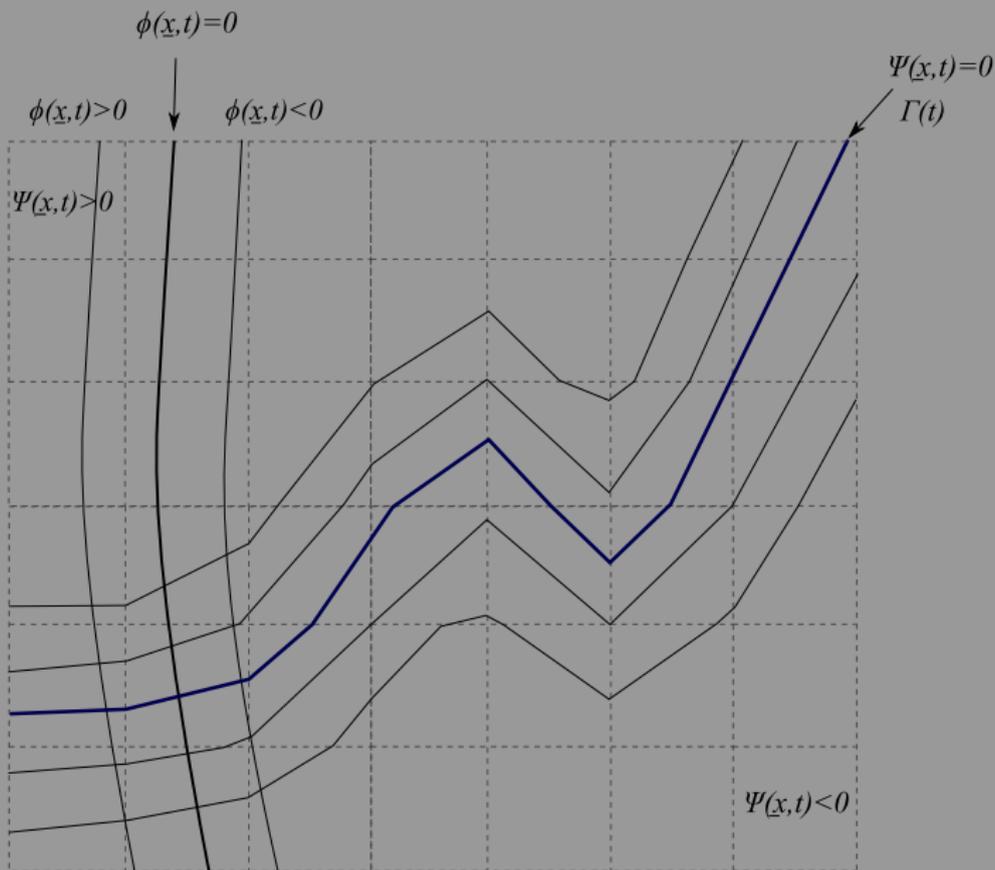
- $\phi$  fonction de niveau orthogonale à  $\psi$
- Description **implicite**
- Interpolation sur la base élément finis

$$\psi(x, y, t) = \sum_{i \in I} \psi_i(t) \varphi_i(x, y)$$

# Introduction aux fonctions de niveaux



# Introduction aux fonctions de niveaux



# Plan de le séance

- 1 Rappels
- 2 Eléments finis étendus : X-FEM
- 3 Propagation

# Propagation

- **Bifurcation**
- Critère énergétique de Francfort et Marigo

# Bifurcation

- Branche bifurquée peut avoir une longueur **infinitésimale**
- Calcul différentiel
- Directions courantes de bifurcation
  - 1) Contrainte circonférentielle maximale

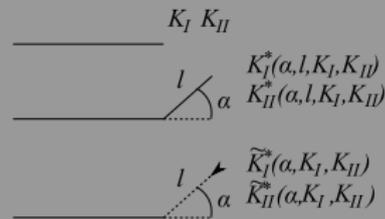
$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial^2 \theta} < 0$$

- 2) Taux de restitution d'énergie maximal

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \theta} < 0$$

- 3) Critère mode I.  $\alpha$  angle de bifurcation,  $l$  longueur de bifurcation

$$\begin{cases} (K_I^*(\alpha, l), K_{II}^*(\alpha, l)) \xrightarrow{l \rightarrow 0} (\tilde{K}_I^*(\alpha), \tilde{K}_{II}^*(\alpha)) \\ \tilde{K}_{II}^*(\alpha) = 0 \end{cases}$$



# Propagation

- Bifurcation
- Critère énergétique de Francfort et Marigo

# Critère énergétique de Francfort et Marigo

- Instabilité de la propagation
- On ne modélise pas les effets dynamiques entre deux instants
- Propagation de taille finie

$$\mathcal{F}[\alpha, l] = \mathcal{E} - \mathcal{W} + \mathcal{D}$$

- $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega$  : énergie élastique
- $\mathcal{W} = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{u} \, dS$  : potentiel des efforts extérieurs
- $\mathcal{D} = l G_c$  énergie dissipée en fissurant
- Minimisation

$$(\alpha, l) = \underset{(\alpha^*, l^*)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{F}[\alpha^*, l^*]$$

- $\mathcal{D}$  : coût pour aller vers un état énergétique plus faible