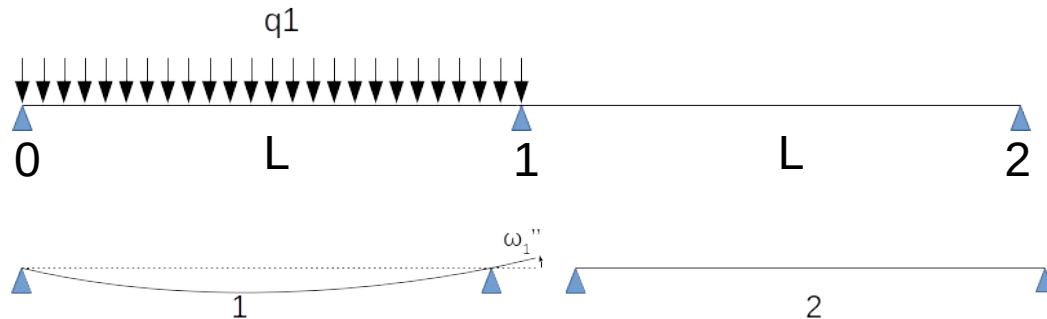


Exercice Pont 2 travées

1 : Calcul des sollicitations

1-1 : charge d'exploitation, superstructures et poids propre

* Effet d'un chargement sur la 1ère travée, utilisons le théorème des 3 moments



$$\omega''_1 = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^L M_1 \frac{x}{L} dx = \frac{L}{EI} \frac{q_1 L^2}{8} * \frac{1}{1} = \frac{q_1 L^3}{24 EI}$$

Puis utilisation de la formule des 3 moments :

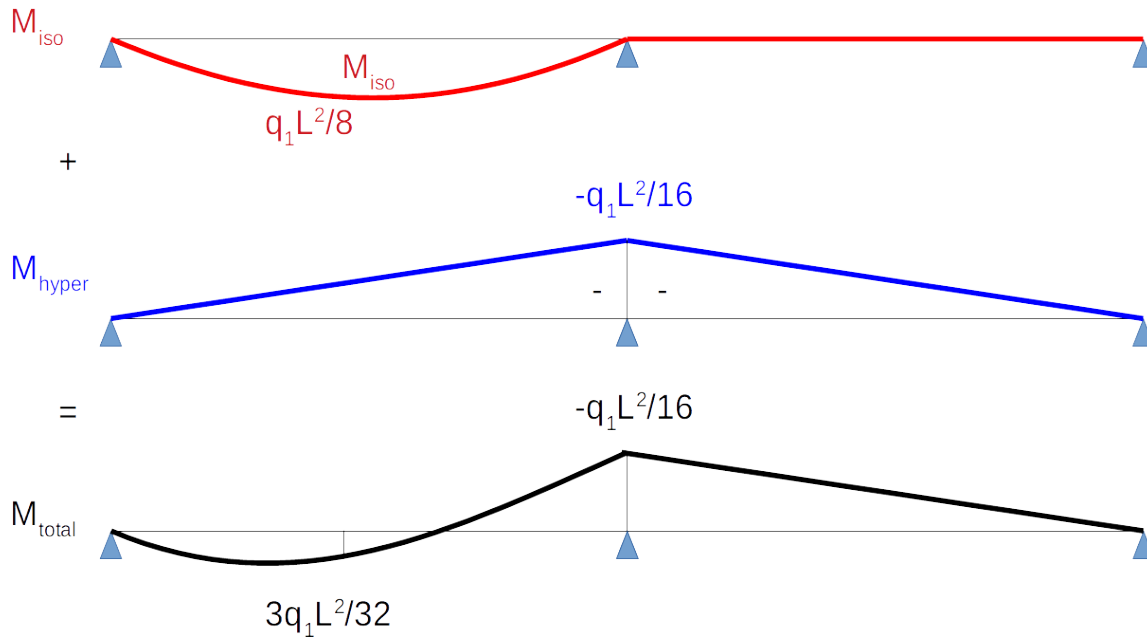
$$b_1 \cancel{M_0} + (c_1 + a_2) M_1 + b_2 \cancel{M_2} = \cancel{\omega_2'} - \omega_1''$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ 0 & \frac{2L}{3EI} & 0 & 0 \end{matrix}$

$\frac{-q_1 L^3}{24 EI}$

➔ $M_1 = \frac{-q_1 L^2}{16}$

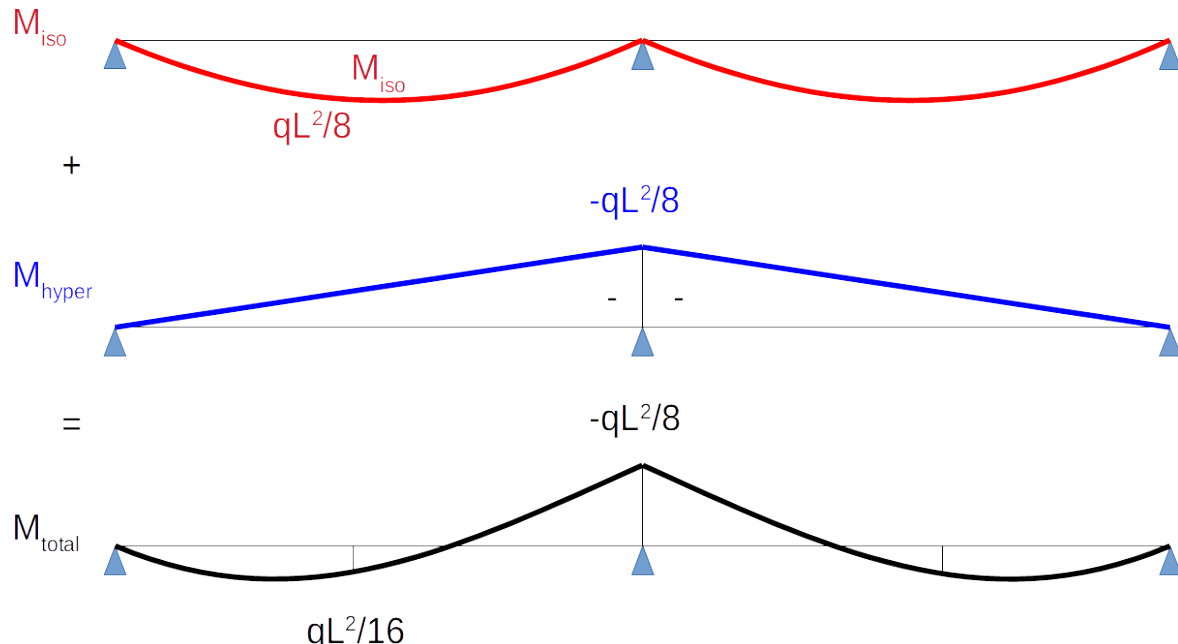
Bilan des moments :



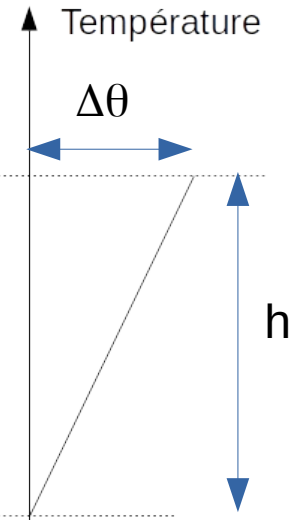
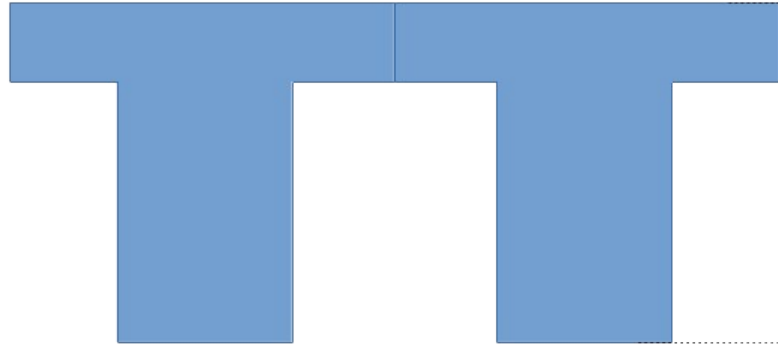
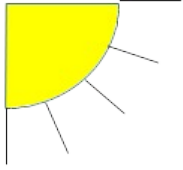
* Effet d'un chargement sur la 2ème travée → moment symétrique

* Effet d'un chargement sur les 2 travées

→ somme des 2 cas précédents (travée 1 chargée + travée 2 chargée)

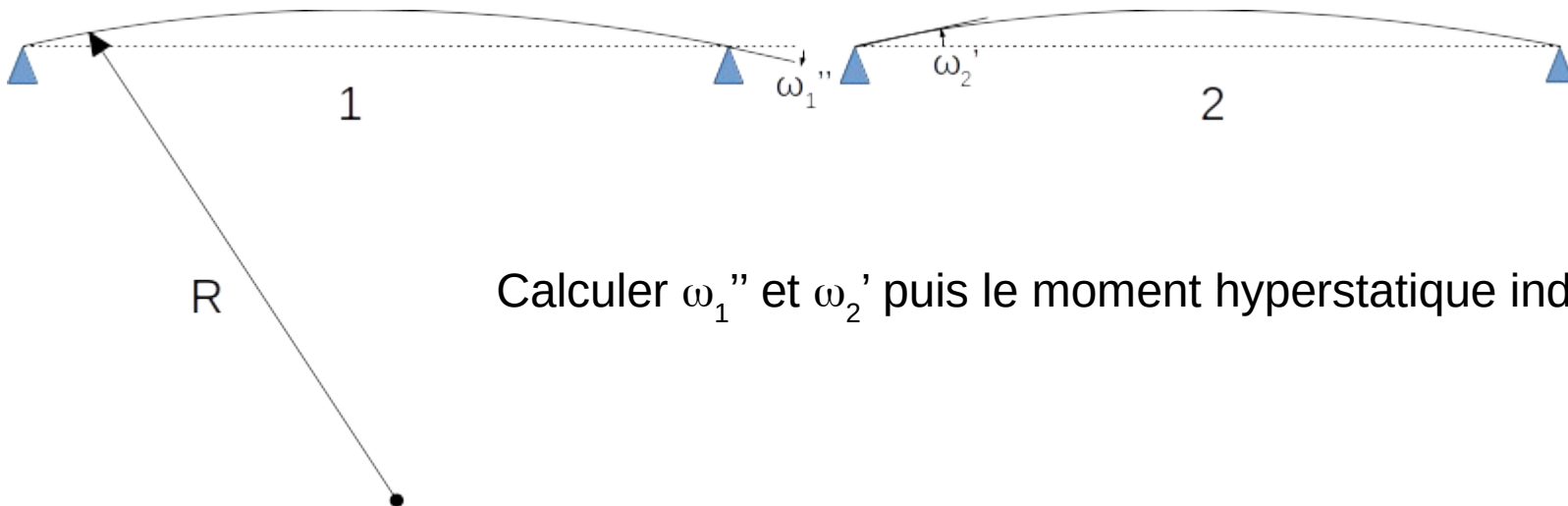


1-2 : gradient thermique



* Le gradient thermique provoque une différence de température entre la fibre inf et sup
→ génération d'une courbure sur la structure isostatique

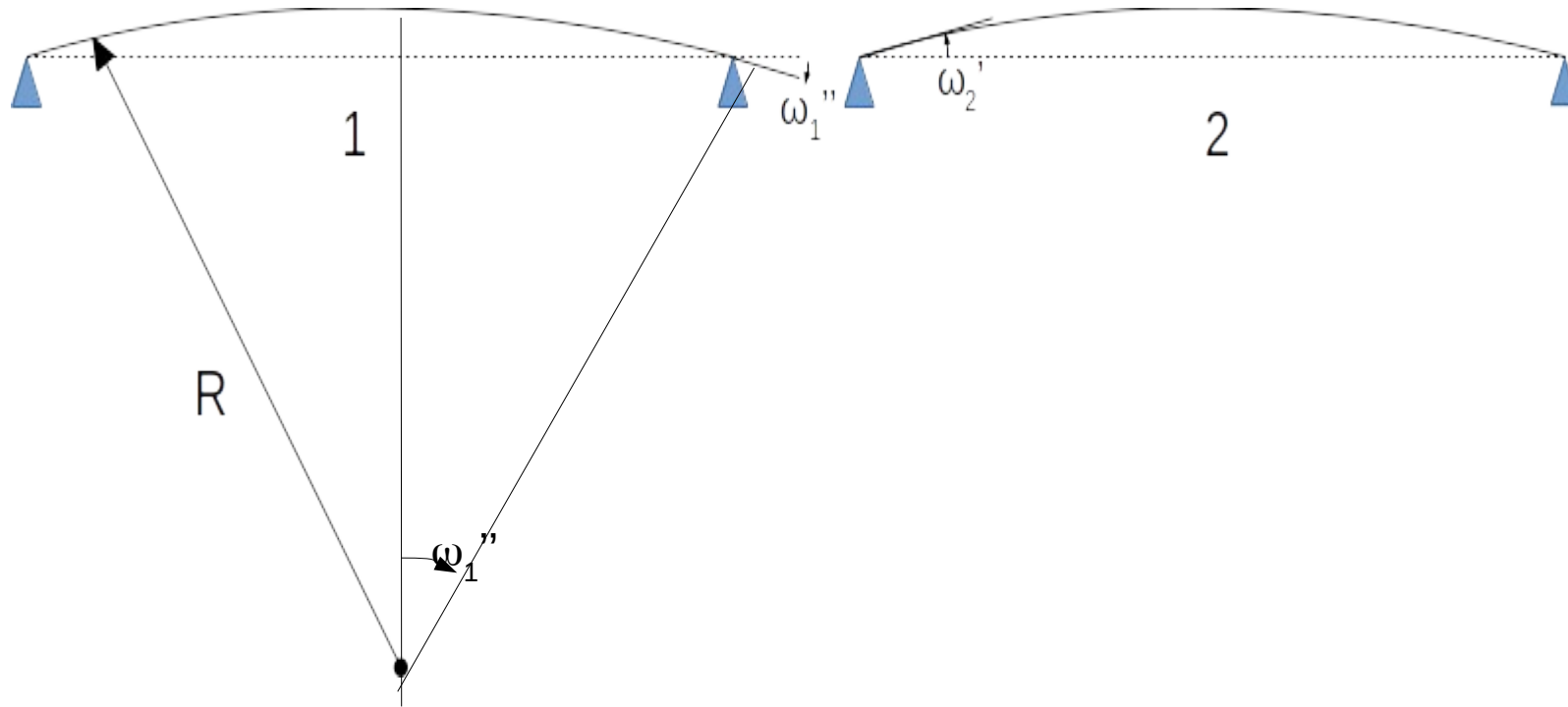
$$\chi = -k \frac{\Delta\theta}{h} = \frac{1}{R}$$



Calculer ω_1'' et ω_2' puis le moment hyperstatique induit

$$\omega_1'' = \frac{1}{R} \times \frac{L}{2} = \chi \times \frac{L}{2} = \frac{-k \Delta \theta L}{h} \frac{L}{2}$$

$$\omega_2' = \frac{k \Delta \theta L}{h} \frac{L}{2}$$



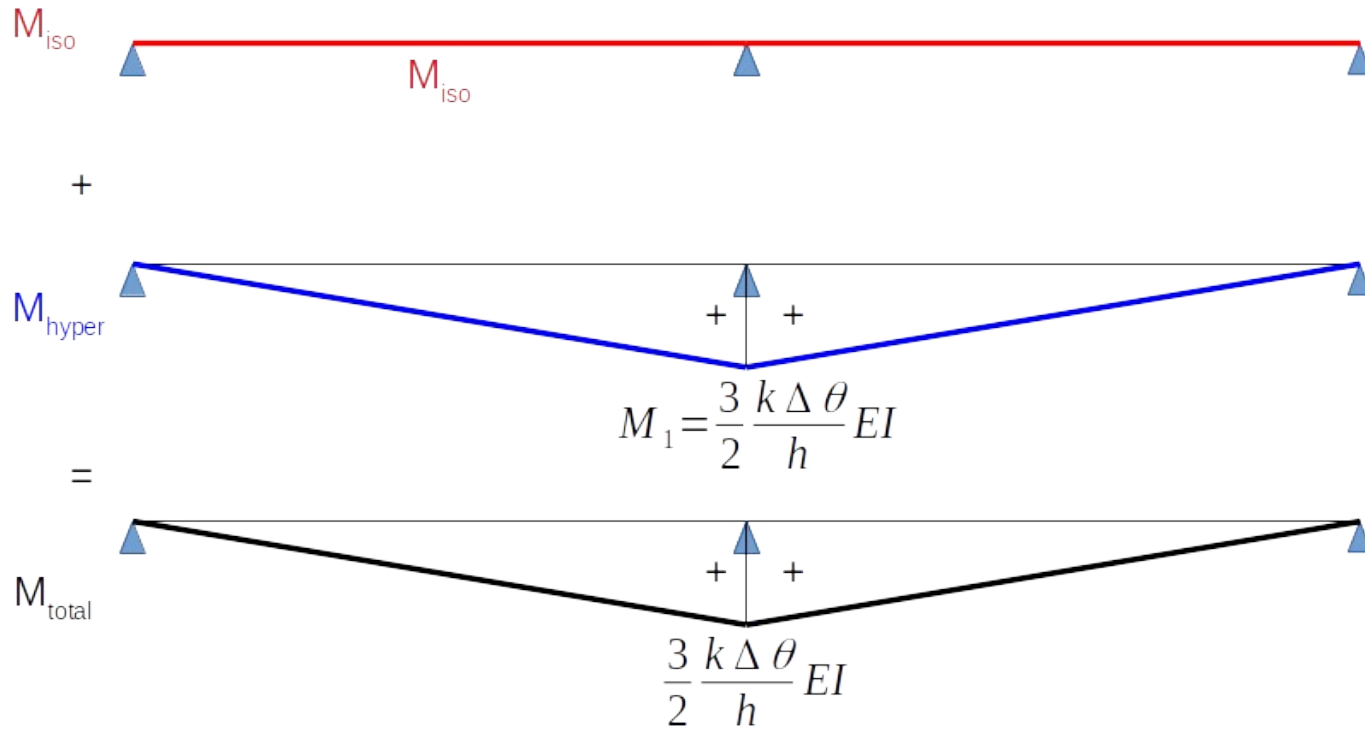
Puis utilisation de la formule des 3 moments :

$$b_1 \cancel{M_0} + (c_1 + a_2) M_1 + b_2 \cancel{M_2} = \omega_2' - \omega_1''$$

$0 \quad \frac{2L}{3EI} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{k \Delta \theta L}{h} L$

$M_1 = \frac{3}{2} \frac{k \Delta \theta}{h} EI$

Bilan des moments :



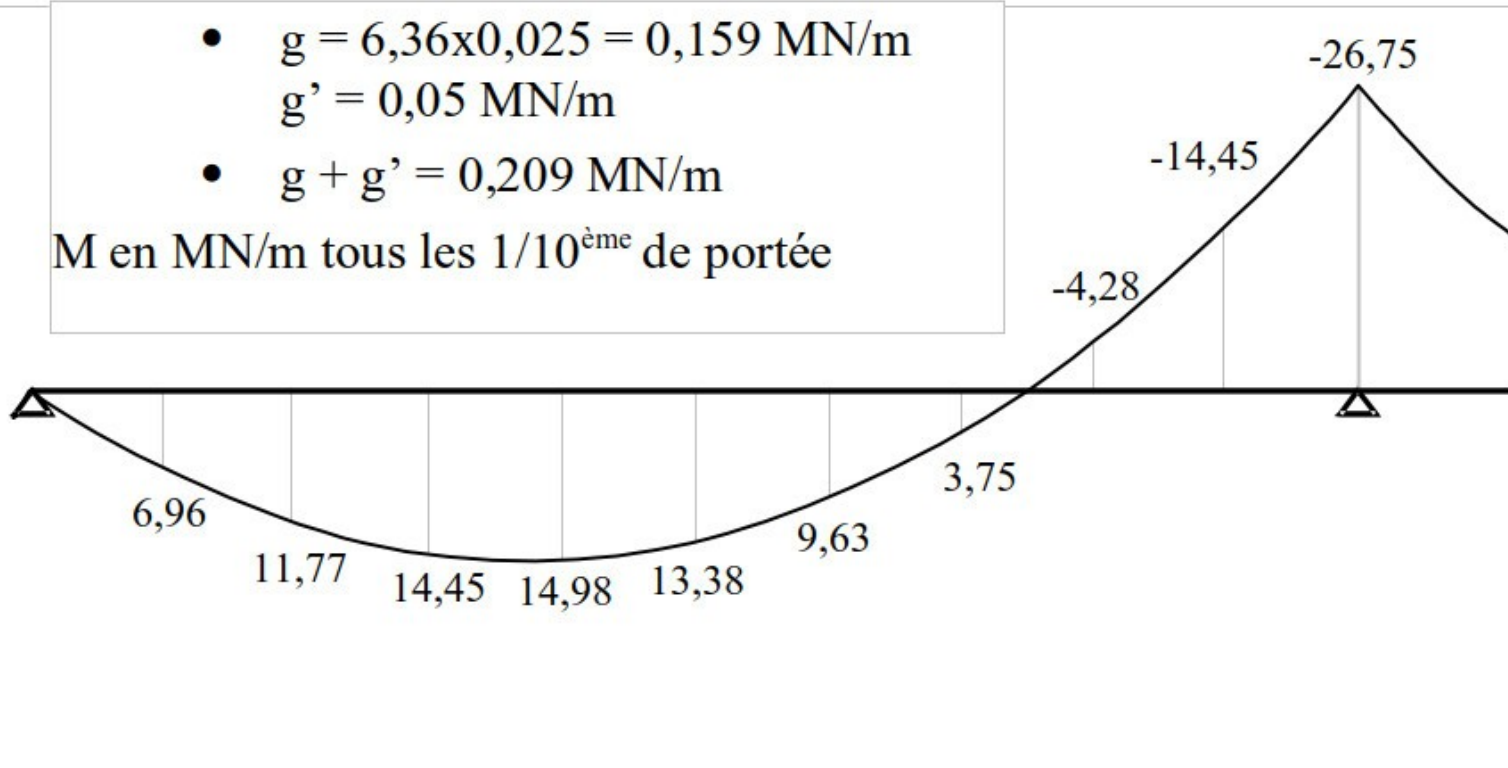
Moment iso nul
(on impose une déformation)

1-3 : Combinaisons et enveloppes

Moments sous charges permanentes

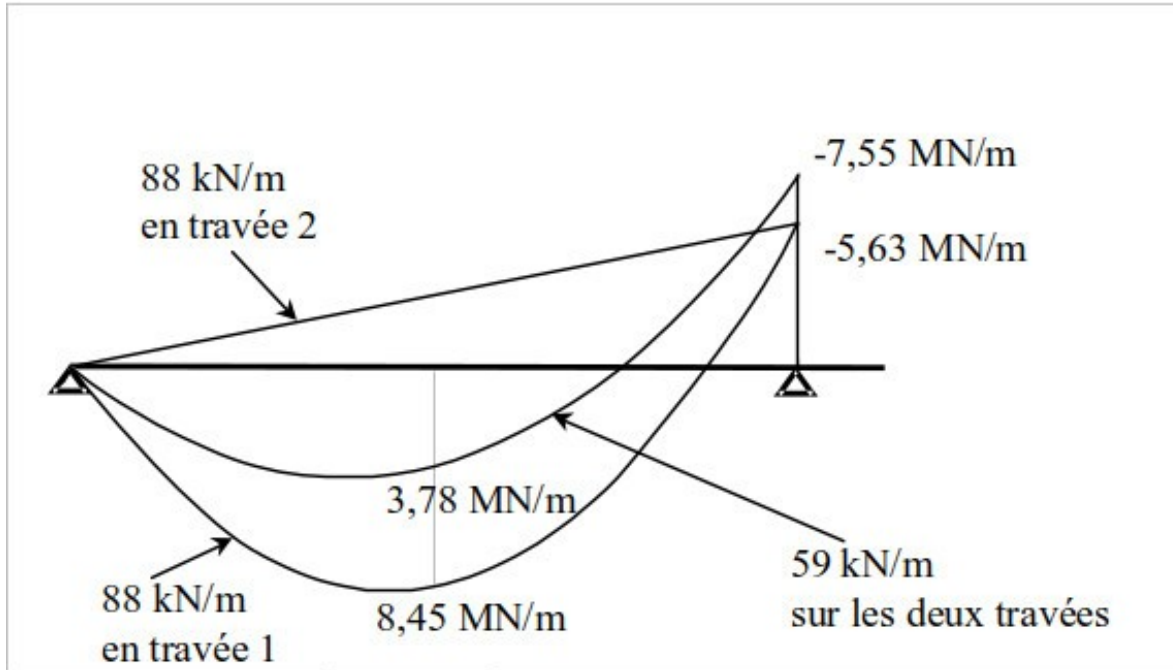
- $g = 6,36 \times 0,025 = 0,159 \text{ MN/m}$
 $g' = 0,05 \text{ MN/m}$
- $g + g' = 0,209 \text{ MN/m}$

M en MN/m tous les $1/10^{\text{ème}}$ de portée

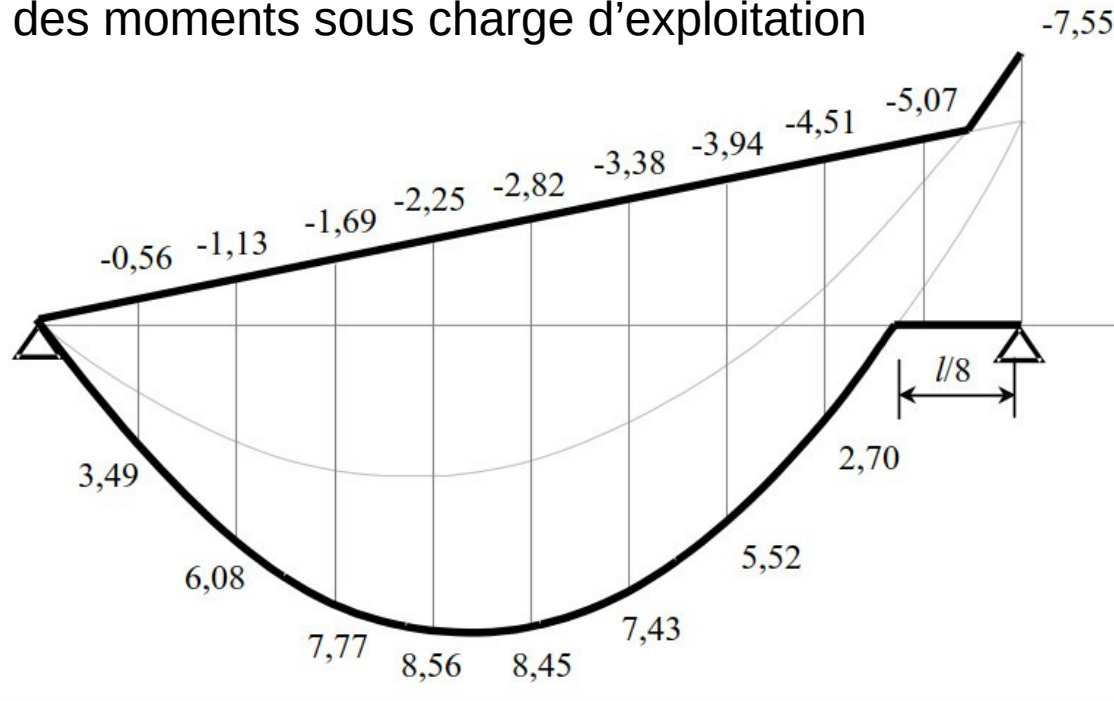


1-3 : Combinaisons et enveloppes

Moments sous charges d'exploitation

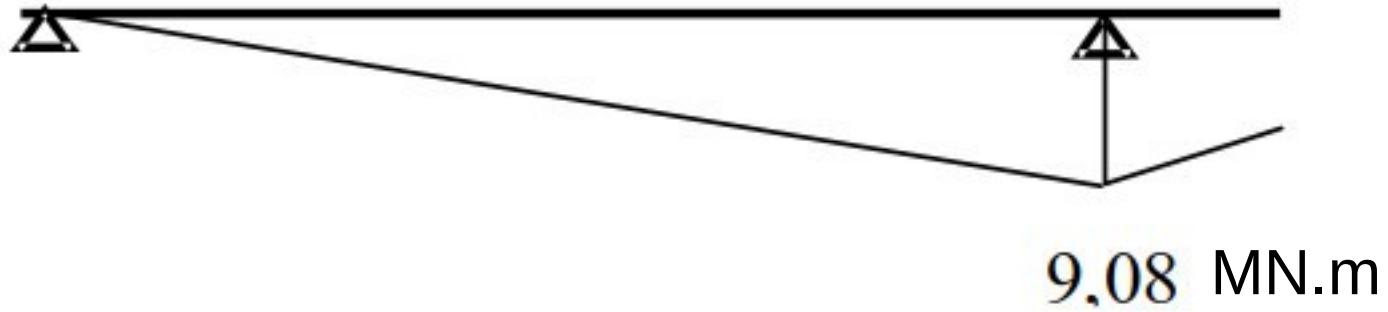


Enveloppe des moments sous charge d'exploitation



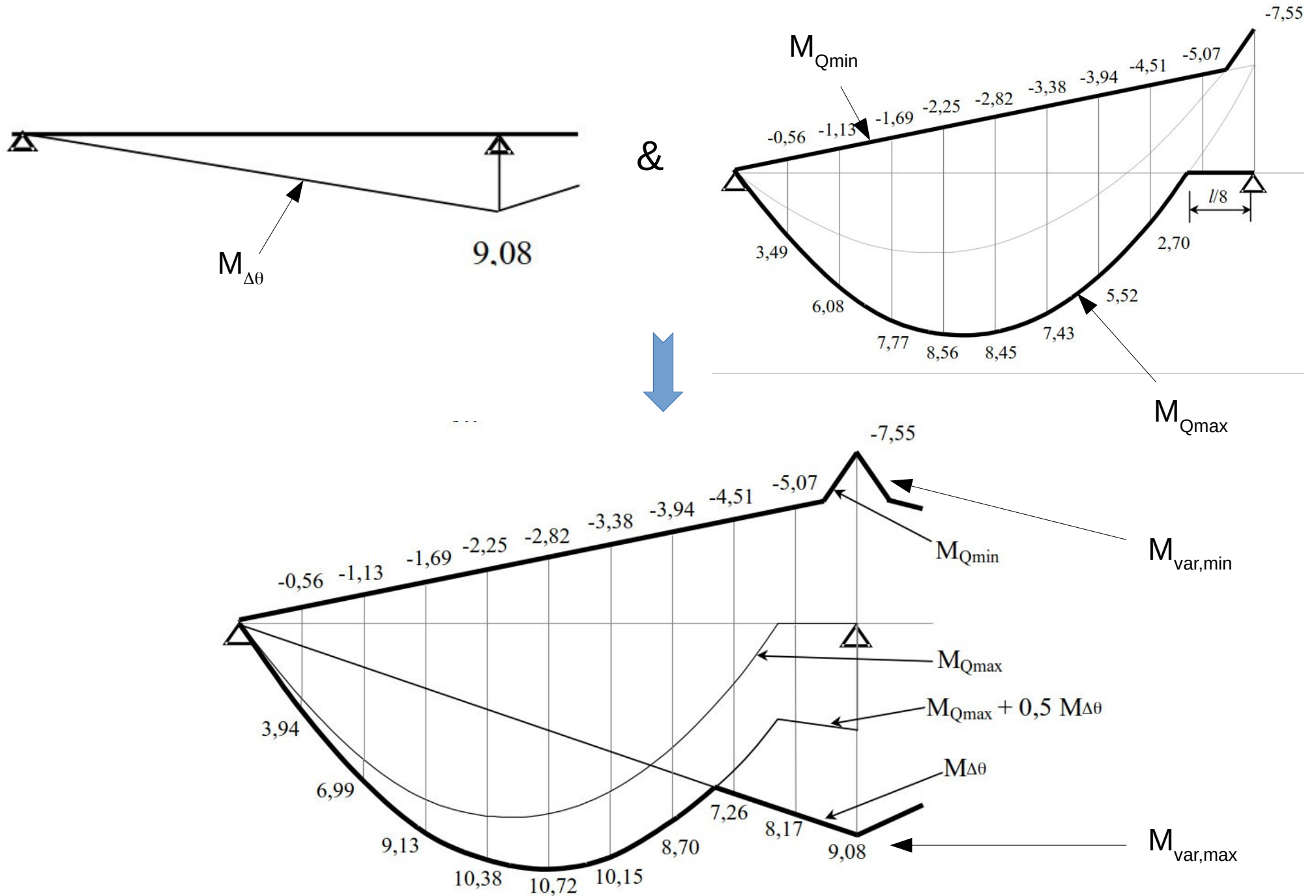
1-3 : Combinaisons et enveloppes

Moments sous gradient thermique avec $\Delta\theta = 12^\circ\text{C}$ et $E_{cm} = 34 \text{ GPa}$



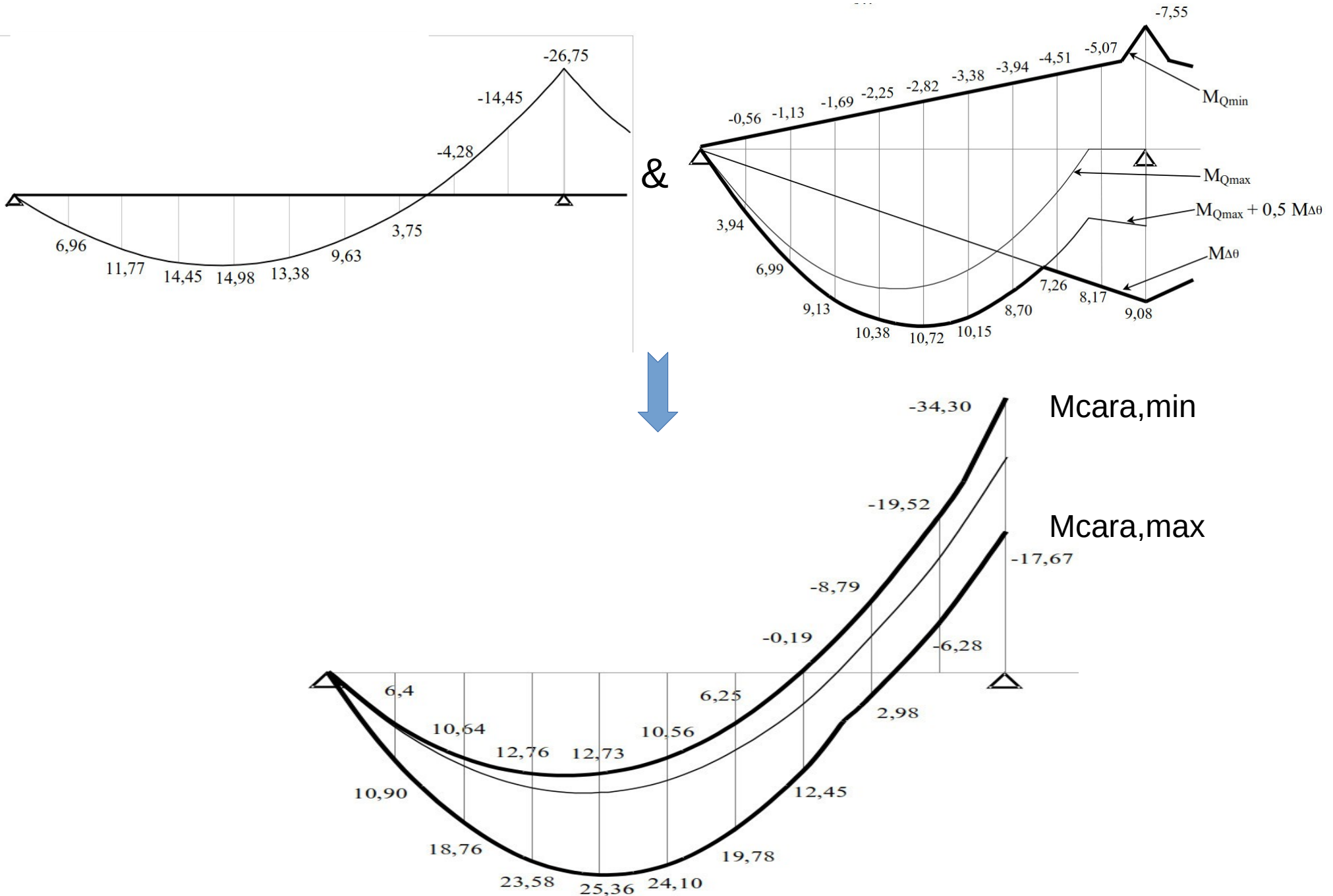
1-3 : Combinaisons et enveloppes

Moments sous charges variables (charges d'exploitation et gradient thermique)



1-3 : Combinaisons et enveloppes

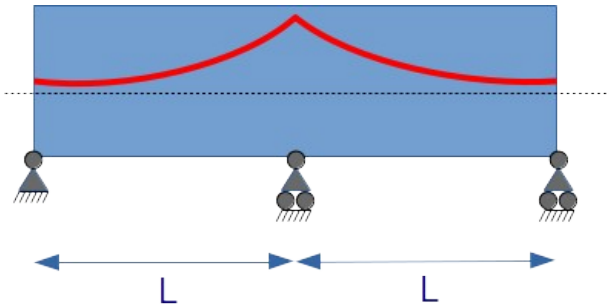
Moments sous ELS cara (charges permanentes + charges variables)



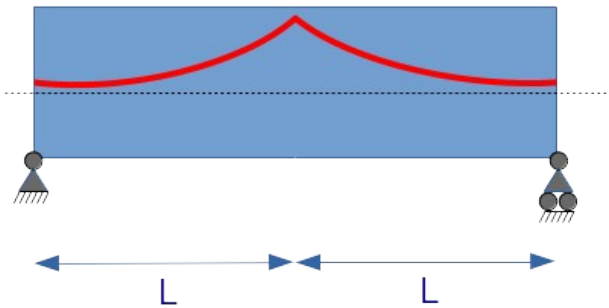
2 : Théorie

Une ligne de précontrainte constitue un tracé concordant, c'est à dire qui ne développe pas d'effets hyperstatiques

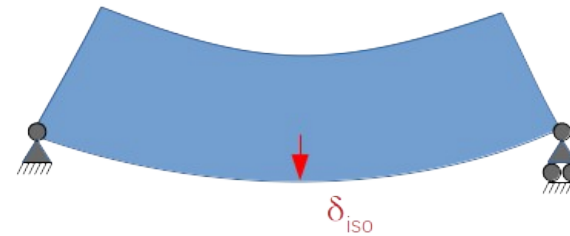
Démo :



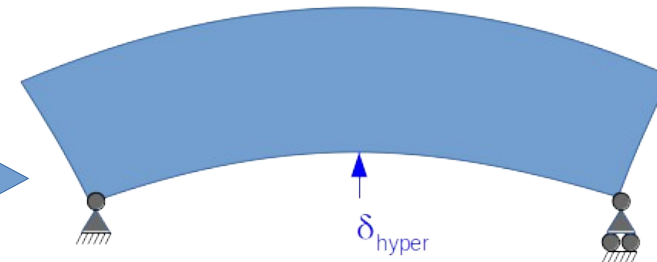
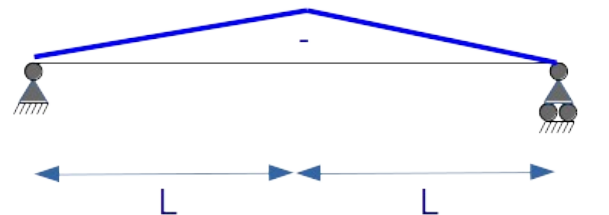
Structure iso



Miso = P e0



Mhyper

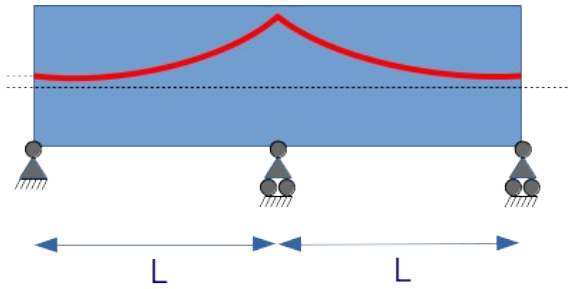


Sous $P.e_{00} = P.e_0 + M_{hyper}$, on obtient $\delta_{iso} + \delta_{hyper} = 0 \rightarrow$ pas d'effet hyperstatique

2 : Théorie

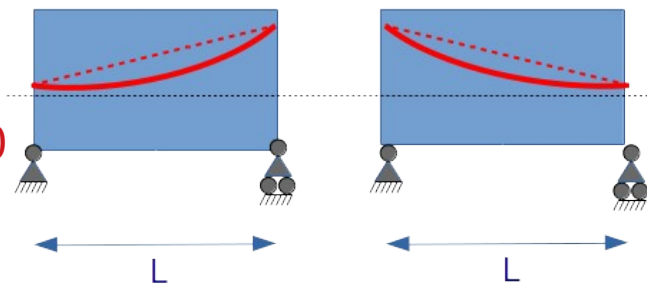
Une ligne de précontrainte constitue un tracé concordant, c'est à dire qui ne développe pas d'effets hyperstatiques

Démo (th des 3 moments):



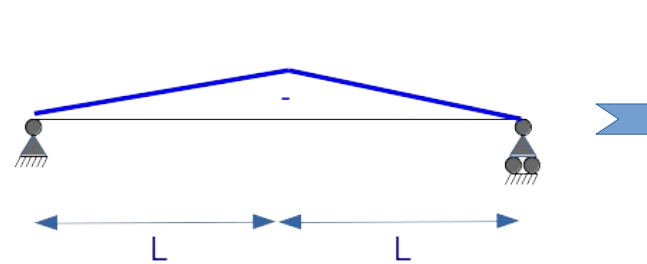
$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' \quad (\text{ouverture angulaire})$$

Structure iso



Miso = P e0

$$\Delta\omega_{iso} > 0$$



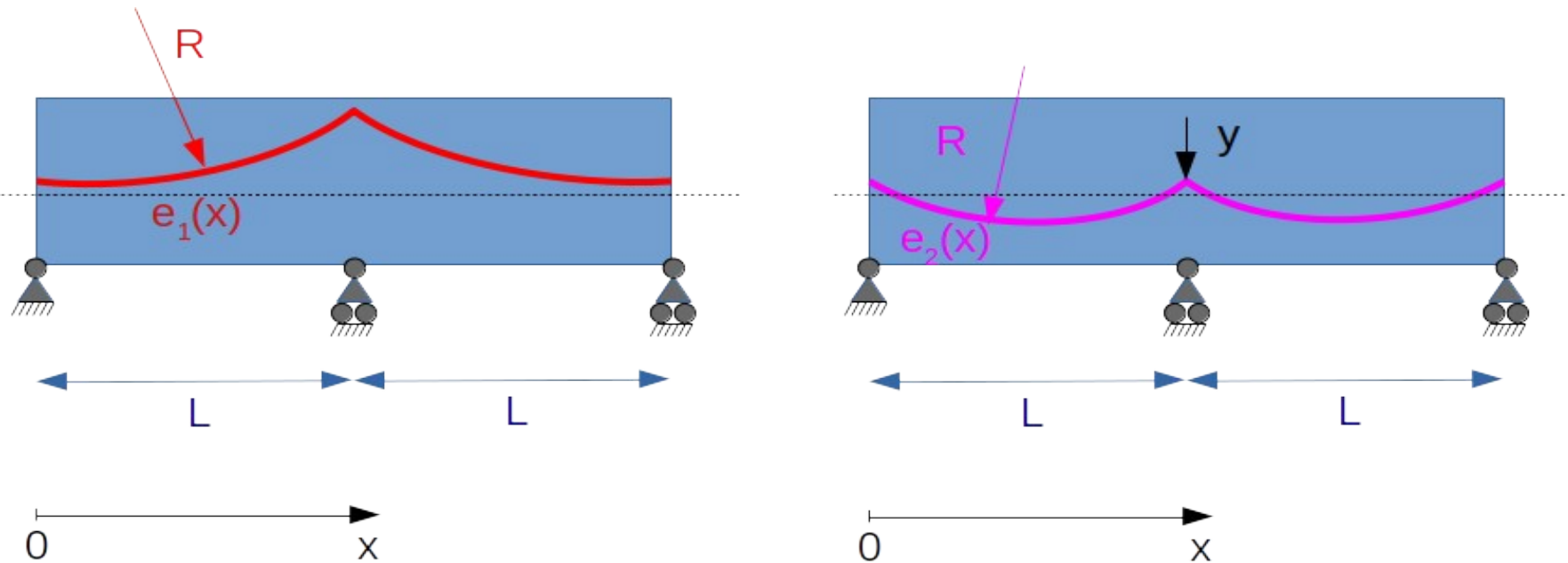
Mhyper

$$\Delta\omega_{hyper} < 0$$

Sous $P.e_{00} = P.e_0 + M_{hyper}$, on obtient $\Delta\omega_{iso} + \Delta\omega_{hyper} = 0 \rightarrow$ pas d'effet hyperstatique

2 : Théorie

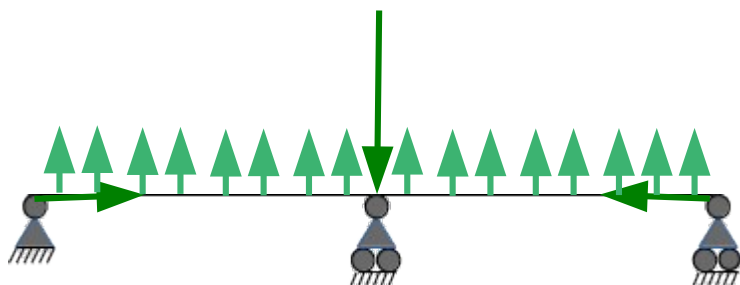
Un tracé peut être défini à une transformée linéaire près



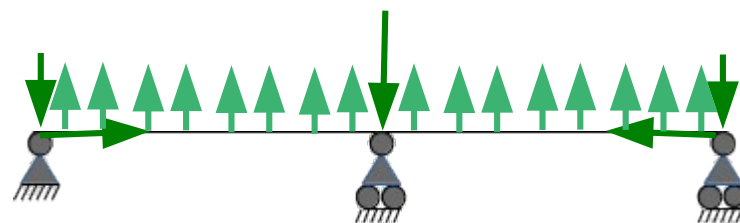
$$e_2(x) = e_1(x) + y \frac{x}{L} \quad (\text{équation sur la première travée})$$

Les deux tracés ont le même effet, c'est à dire conduisent au même moment total ou à la même ligne de précontrainte.

Démo (voir exercice 3 séance 1, ou démo immédiate avec méthode externe) :



Efforts externes avec tracé e_1



Efforts externes avec tracé e_2

3 : Etude en précontrainte totale

Hypothèses :

- on impose partout $\sigma \geq 0$ en ELS caractéristique
- on travaille avec P_m (précontrainte moyenne à l'infini, toutes pertes effectuées)
- on ne s'occupe pas des phases de construction

Cas de la précontrainte centrée :

dans le cas d'une précontrainte centrée, on a une excentricité de la précontrainte nulle ($e_0 = 0$), donc il n'y a pas de moment isostatique ni de moment hyperstatique généré par la précontrainte.

Calculer P minimal pour respecter les conditions de traction

Équation en fibre sup :

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{P}{A_C} + M_{\text{min}} \frac{v}{I} \geq 0$$

Qui s'écrit aussi :

$$P \geq -M_{\text{min}} \frac{A_C v}{I} = -\frac{M_{\text{min}}}{\rho v'} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{I}{A_C v v'}$$

Prenant $M_{\text{min}} = -34,3 \text{ MN.m}$, on obtient **$P \geq 48 \text{ MN}$**

Avec le même raisonnement en fibre inférieure et en prenant $M_{\text{max}} = 25,36 \text{ MN.m}$, on obtient **$P \geq 74 \text{ MN}$**

3 : Etude en précontrainte totale

Détermination de P avec câble ondulé

On a 3 valeurs de précontrainte minimale à trouver :

* P1 : condition d'ouverture du fuseau de traction (// P sous-critique en isostatique)

* Max (P2, P2') : condition d'existence d'une ligne de précontrainte (tracé concordant) à l'intérieur du fuseau

* P3 : condition d'existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau qui donne après transformation linéaire un tracé de câble respectant les contraintes d'enrobage

3-1 : calcul de P1

Écrivons les équations de respect des contraintes de traction en fibre supérieure et en fibre inférieure :

en fibre sup : sous $M_{\min,car}$ que l'on notera M_{\min}

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{P}{A_C} + (P \cdot e_{00} + M_{\min}) \frac{v}{I} \geq 0 \Leftrightarrow -\rho v' - \frac{M_{\min}}{P} \leq e_{00}$$

en fibre inf : sous $M_{\max,car}$ que l'on notera M_{\max}

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{P}{A_C} - (P \cdot e_{00} + M_{\max}) \frac{v'}{I} \geq 0 \Leftrightarrow e_{00} \leq \rho v - \frac{M_{\max}}{P}$$

$$e_{\min} = -\rho v' - \frac{M_{\min}}{P} \leq e_{00} \leq \rho v - \frac{M_{\max}}{P} = e_{\max}$$

3-1 : calcul de P1

Cette relation doit être valable à chaque abscisse (respect des contraintes de traction partout). On peut donc l'écrire :

$$e_{min}(x) = -\rho v' - \frac{M_{min}(x)}{P} \leq e_{00}(x) \leq \rho v - \frac{M_{max}(x)}{P} = e_{max}(x)$$

Pour avoir une solution, il faut que :

$$e_{min}(x) \leq e_{max}(x) \text{ pour tout } x$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{M_{max}(x) - M_{min}(x)}{\rho v' + \rho v} = \frac{M_{max}(x) - M_{min}(x)}{\rho h} = P_I$$

Application numérique :

Sur l'appui central, où la différence de moment est maximal, on trouve

$$P_I = \frac{-17,67 + 34,30}{0,439 \times 2,4} = 15,8 \text{ MN}$$

3-2 : calcul de P2 et P2'

e_{00} étant une ligne de précontrainte, son tracé doit être concordant, c'est à dire qu'il ne doit pas générer d'effets hyperstatiques

Dans notre cas, on ne doit pas avoir de cassure angulaire $\Delta\omega$ due à l'effet de $P.e_{00}$ si l'on sépare les deux travées 1 et 2, soit :

$$\omega_2' = \omega_1'' \quad \Leftrightarrow \omega_1'' - \omega_2' = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{L_1} \frac{P \cdot e_{00}(x)}{EI} \frac{x}{L_1} dx + \int_0^{L_2} \frac{P \cdot e_{00}(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right) dx = 0$$

P étant supposé non nulle, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$J_1(e_{00}) = \frac{\omega_1'' - \omega_2'}{P} = \int_0^{L_1} \frac{e_{00}(x)}{EI} \frac{x}{L_1} dx + \int_0^{L_2} \frac{e_{00}(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right) dx = 0$$

où J_1 est une fonction :

Tracé de précontrainte	$\xrightarrow{J_1}$	Réel
$e(x)$		(proportionnel à ouv angulaire $\Delta\omega$)

J_1 a deux propriétés sympathiques :

* c'est une fonction croissante : si $e_A(x) \leq e_B(x)$ pour tout x , alors $J_1(e_A) \leq J_1(e_B)$

* c'est une fonction linéaire $J_1(\lambda e_A + e_B) = \lambda J_1(e_A) + J_1(e_B)$