

## Effets hyperstatiques de la précontrainte

### 1. Equilibre d'une structure précontrainte

Soit une structure quelconque précontrainte par câbles. On s'intéresse uniquement aux effets de la précontrainte, on ne considère donc aucune autre action.

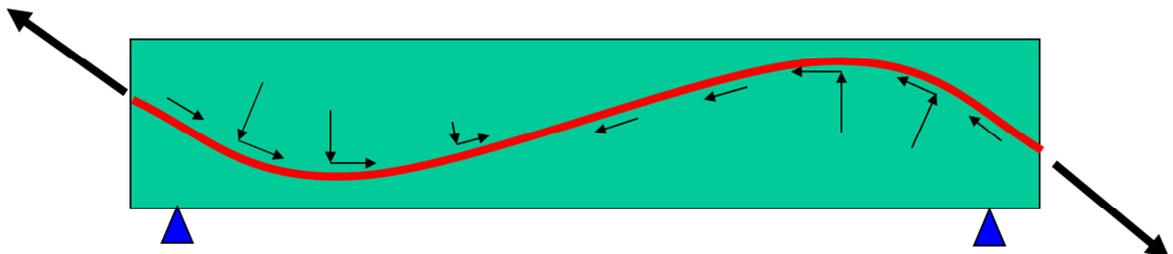
L'ensemble de la structure et des câbles de précontrainte est alors en équilibre sous l'action des seules réactions d'appui  $R_i$  (les réactions  $R_i$  peuvent être des forces ou des moments). Cela implique que le système des forces  $R_i$  est identiquement nul :

$$\text{Sys } (R_i) \sim 0$$

- Si la structure est isostatique, chacune des réactions doit alors être nulle :  $R_i = 0$ .
- Si la structure est hyperstatique, ce n'est en général pas le cas. En l'absence de liaisons surabondantes, le béton de la structure se déformerait librement sous l'effet de la précontrainte. Les réactions d'appui qui apparaissent permettent d'assurer la compatibilité géométrique avec ces liaisons surabondantes. Ces réactions hyperstatiques développent alors dans la structure des sollicitations qui sont les sollicitations hyperstatiques de précontrainte.

### 2. Equilibre d'un câble de précontrainte

- Un câble de précontrainte n'est soumis qu'à son poids (que l'on peut négliger, à juste titre, dans l'étude de l'équilibre du câble) et aux forces  $\Phi_i$  qu'exerce sur lui le béton de la structure, par l'intermédiaire des ancrages aux extrémités et des gaines en partie courante. Pour des armatures de pré-tension, les efforts sont exercés directement par le béton.
- Un câble de précontrainte possède une très faible rigidité de flexion, on peut donc la négliger et assimiler le câble à un fil parfait, qui ne transmet que des efforts de traction simple tangents à son tracé.

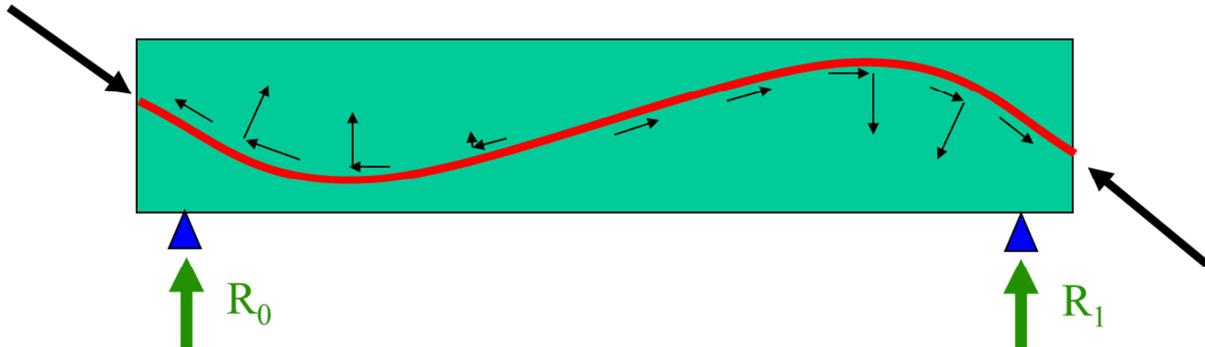


- 
- Dans ces conditions, les forces  $\Phi_i$  sont :
- les forces concentrées aux ancrages :  $P_A$  et  $P_B$ , orientées selon la tangente au tracé.
- les forces réparties le long du câble
  - o Forces radiales, de densité  $P/R$ ,  $P$  désignant l'effort normal à l'abscisse considérée et  $R$  le rayon de courbure. Ces forces sont orientées vers l'extérieur de la courbure.
  - o Forces tangentielles, de densité  $dP/ds$ , dues au frottement, ou à l'adhérence entre acier et béton.

- Comme le câble est en équilibre, le système des forces  $\Phi_i$  est identiquement nul.
- En vertu du principe d'action et de réaction, les forces  $F_i$  exercées par le câble sur le béton sont directement opposées aux forces  $\Phi_i$ :  $F_i = -\Phi_i$ . Il en résulte que le système des forces  $F_i$  est lui aussi identiquement nul.

### 3. Equilibre du béton

Le béton est en équilibre sous l'effet des systèmes de forces  $F_i$  et  $R_i$  tous deux identiquement nuls. La figure ci-dessous représente une travée indépendante, donc isostatique :  $R_0 = R_1 = 0$ .



Deux méthodes peuvent être utilisées pour analyser l'effet de la précontrainte sur le béton de la structure :

- la méthode directe, qui est d'application générale ;
- la méthode interne, utilisable uniquement pour les poutres.

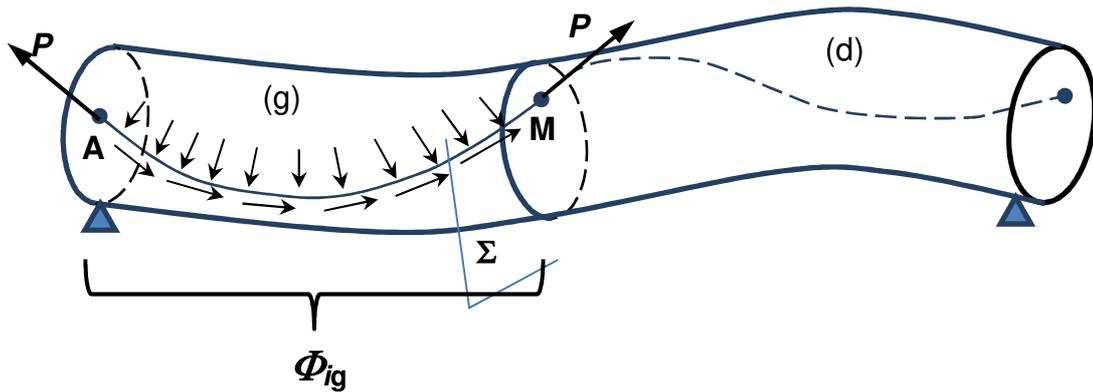
#### 3.1. Méthode directe

On applique les forces  $F_i$  sur la structure et on étudie ce cas de charge par les moyens habituels de calcul des structures. Le calcul donne directement les effets globaux de la précontrainte.

#### 3.2. Méthode interne

Cette méthode ne concerne que les poutres.

Considérons une poutre isostatique précontrainte. Les réactions d'appui sont toutes nulles, de sorte que les seules forces exercées sur le béton sont les forces  $F_i$ . On se propose de déterminer les sollicitations dans une section droite  $\Sigma$  de cette poutre. Cette section découpe cette poutre en deux parties, la partie de gauche (g) et la partie de droite (d). Le câble, dont l'extrémité gauche est au point A, coupe la section  $\Sigma$  au point M.



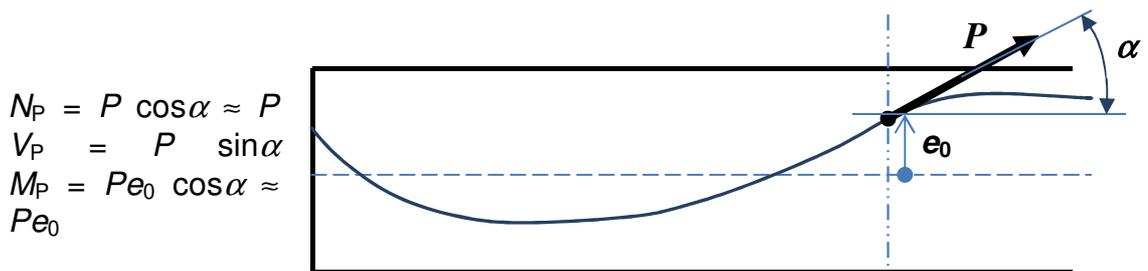
Par définition, le torseur des sollicitations dans la section  $\Sigma$  est le torseur résultant des forces exercées sur la partie de gauche de la poutre :  $S = \text{Sys}(\mathbf{F}_{ig})$ .

Le tronçon  $AM$  de câble est en équilibre sous les forces  $\Phi_{ig}$ , égales à  $-\mathbf{F}_{ig}$ , et sous l'effort  $P(M)\vec{t}$ , traction orientée selon la tangente au tracé en  $M$ .

$$\text{Sys}(-\mathbf{F}_{ig}) + P(M)\vec{t} = 0$$

$$\text{On en déduit : } S = P(M)\vec{t}$$

Les sollicitations dans la section  $\Sigma$  se réduisent donc à la force de tension du câble au point  $M$  :



Si la structure est hyperstatique, en notant  $\mathbf{R}_{ig}$  les réactions appliquées sur la partie gauche de la poutre :

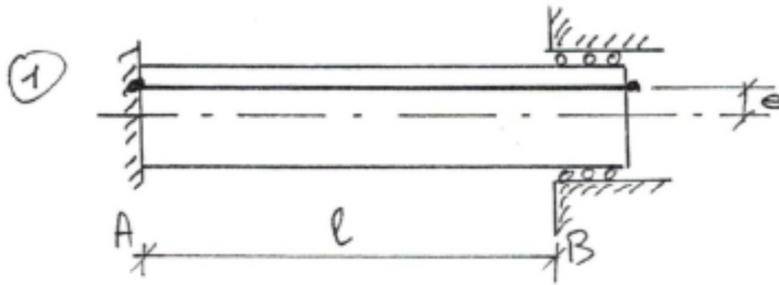
$$S = \text{Sys}(\mathbf{F}_{ig}) + \text{Sys}(\mathbf{R}_{ig}) \quad \text{c'est à dire (car l'égalité } \text{Sys}(\mathbf{F}_{ig}) = P(M)\vec{t} \text{ reste valable) :}$$

$$S = P(M)\vec{t} + S_h \quad S_h \text{ représente les sollicitations hyperstatiques de précontrainte, développées par les réactions hyperstatiques.}$$

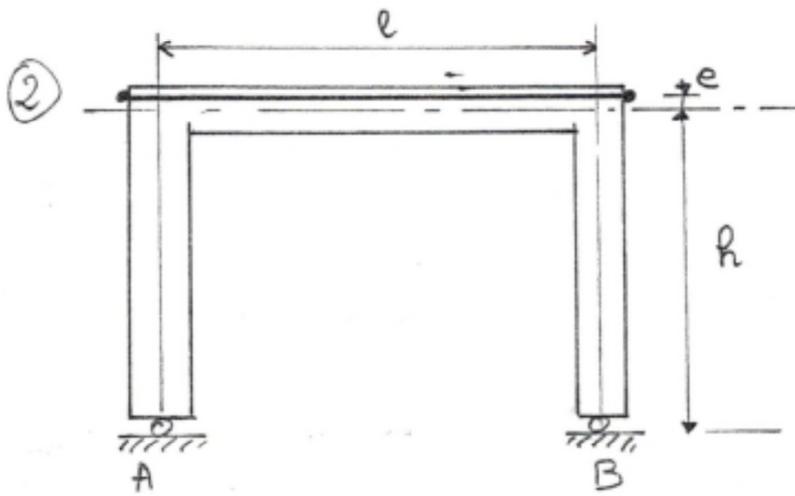
L'analyse d'une structure  $n$  fois hyperstatique s'effectue en choisissant une structure isostatique associée, obtenue en supprimant  $n$  liaisons surabondantes. Les sollicitations isostatiques de précontrainte sont, en toute section, équivalentes aux forces de tension dans les câbles :  $S_i \sim P\vec{t}$

On en déduit les déformations, les déplacements et donc les valeurs des réactions d'appui ou, de manière générale, des inconnues hyperstatiques qui rendent les déformations compatibles avec les liaisons surabondantes.

4. Exemples et exercices

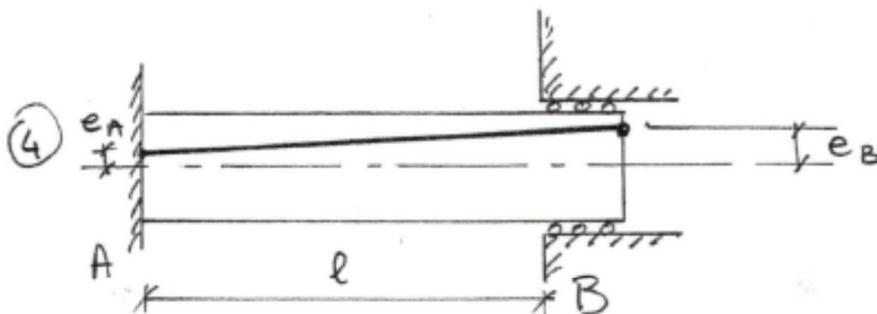
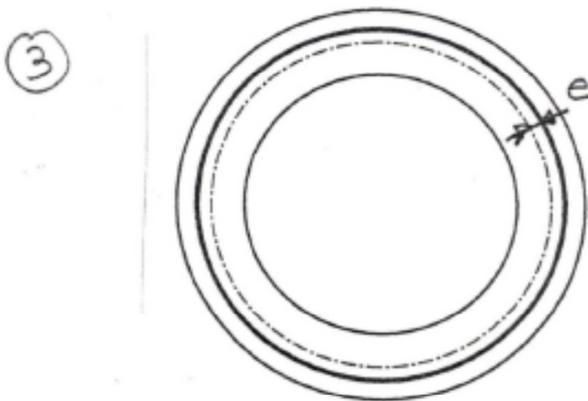


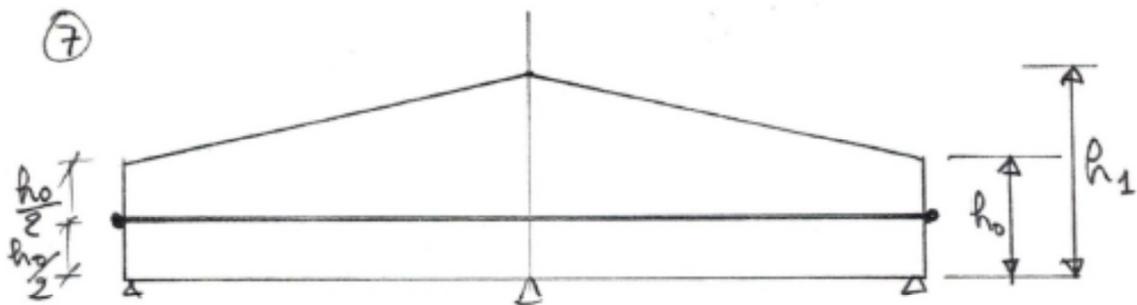
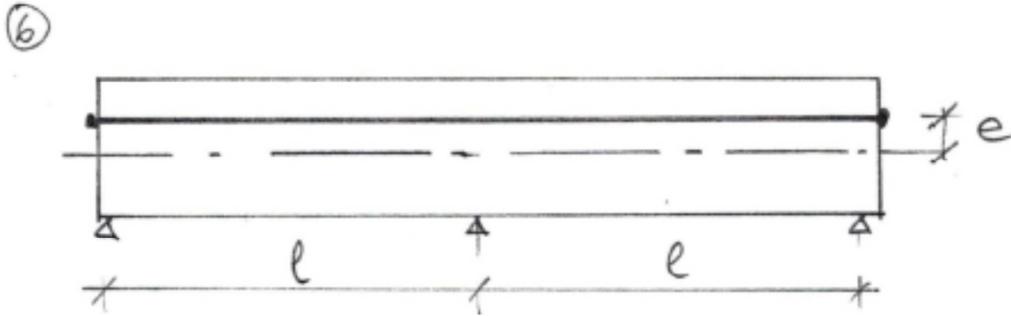
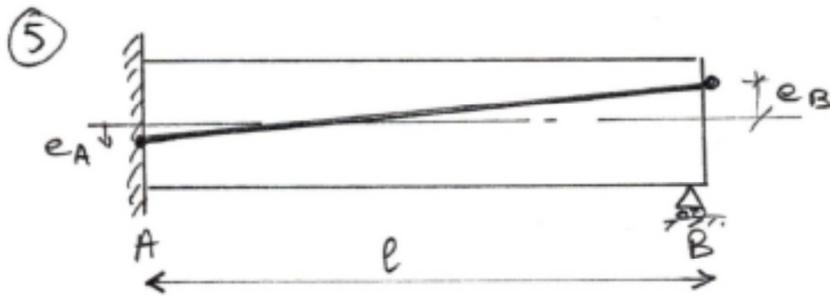
Section constante



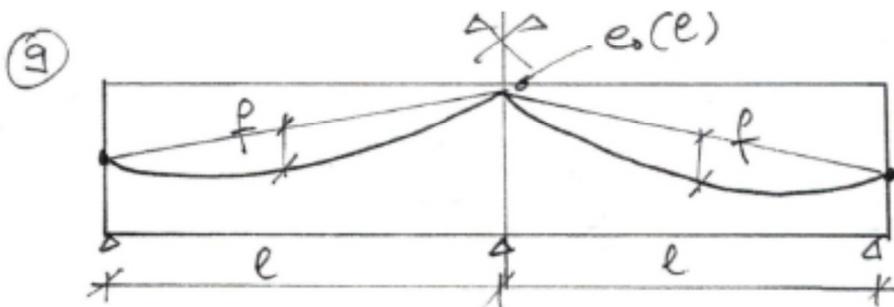
A et B sont fixes, seules les rotations sont possibles.  
Traverse et montants ont même inertie.

- 2.1. Câble rectiligne
- 2.2. Câble parabolique





- ⑧ Section rectangulaire – largeur constante  
 Même structure, câble rectiligne, d'excentricité non nulle aux extrémités

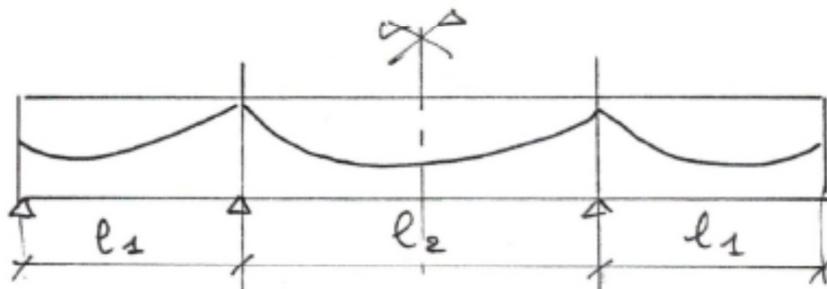


9.1. Cas général : câble symétrique par rapport à l'appui central

9.2. Câbles paraboliques  $e_0(0) = 0$  flèche  $f$  à mi-portée

9.3. Câbles paraboliques  $e_0(0) \neq 0$  flèche  $f$  à mi-portée

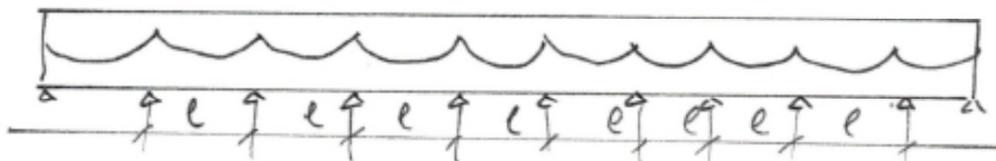
10



Section constante

- Effet du câblage de la travée centrale
- Effet du câblage des travées latérales
- Cas particulier des câbles paraboliques

11

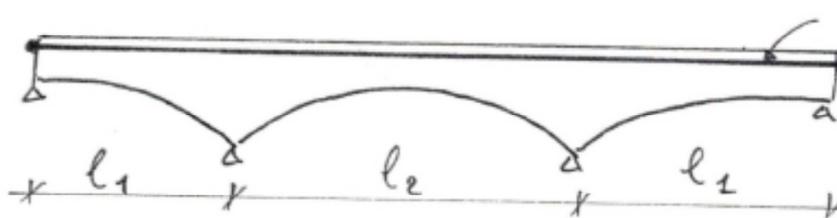


Section constante

- Toutes les travées intermédiaires sont identiques
- Effet hyperstatique dans une travée intermédiaire (loin des extrémités) :
  - du câblage dans cette seule travée
  - du câblage complet, identique dans toutes les travées

12

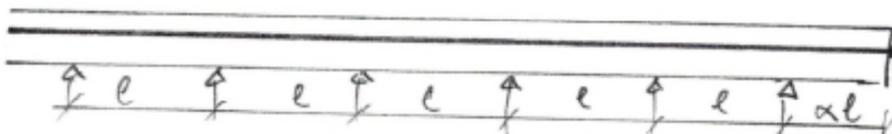
Tablier de hauteur variable



Câble rectiligne

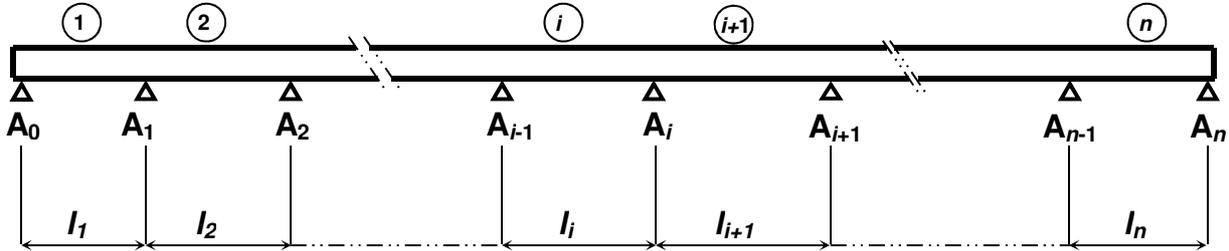
13

Pont poussé – câblage rectiligne en construction



## 5. Poutres continues

### 5.1. Sollicitations hyperstatiques de précontrainte



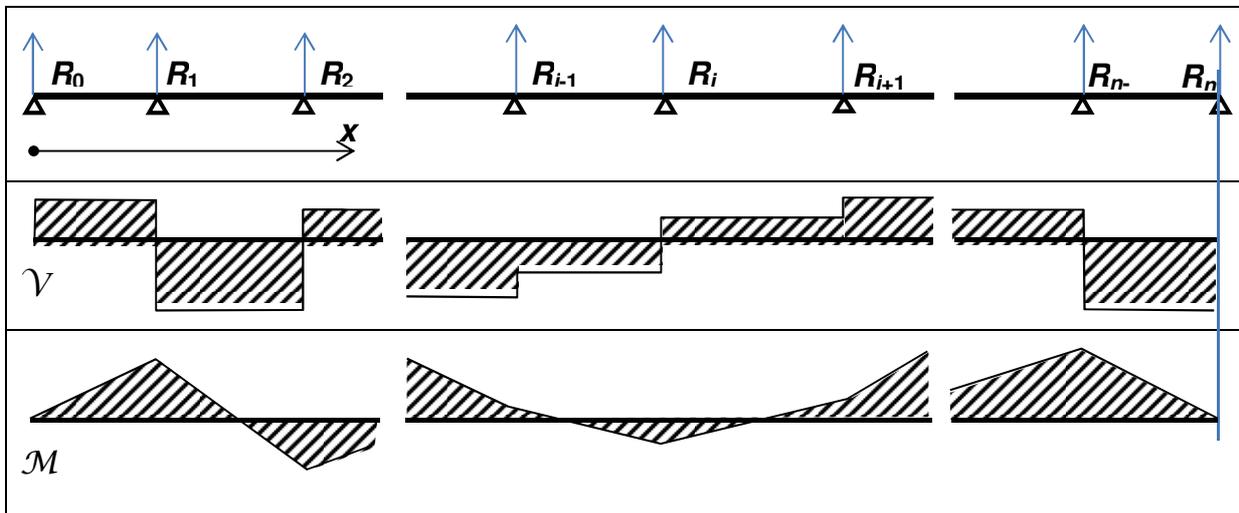
Poutre continue sur  $n+1$  appuis simples. Un des appuis est fixe, tous les autres sont libres de se déplacer horizontalement. Dans une section Les réactions hyperstatiques de précontrainte  $R_i$  sont verticales. Les sollicitations hyperstatiques  $S_h$  qu'elles engendrent valent :

$$\mathcal{N}(x) = 0$$

$$\mathcal{V}(x) = \sum_{i: x_i \leq x} R_i$$

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{i: x_i \leq x} R_i (x - x_i)$$

L'effort tranchant hyperstatique est constant par travée. Le moment hyperstatique de précontrainte est linéaire par travée : il peut être représenté par une ligne polygonale dont les sommets sont au droit des appuis et qui passe par 0 au droit des appuis extrêmes.



Dans la travée  $i$  ( $A_{i-1}$  ;  $A_i$ ), on repère l'abscisse de la section courante à partir de l'appui  $A_{i-1}$ . On désigne par  $\mathcal{M}_i$  le moment hyperstatique sur l'appui  $A_i$ . On peut écrire :

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \mathcal{M}_i \left(\frac{x}{l_i}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(x) = (\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i-1})/l_i$$

Les effets hyperstatiques de la précontrainte sont entièrement déterminés dès que l'on connaît les  $(n - 1)$  valeurs de  $\mathcal{M}_i$  au droit des appuis intermédiaires.

## 5.2. Ligne de précontrainte

Sous l'effet de la seule précontrainte, les sollicitations dans une section d'abscisse  $x$  valent :

$$N_P(x) = P(x)$$

$$M_P(x) = P(x)e_0(x) + \mathcal{M}(x)$$

L'ordonnée du centre de pression vaut alors :

$$e_{00}(x) = M_P(x)/N_P(x) = e_0(x) + \mathcal{M}(x)/P(x)$$

On appelle ligne de précontrainte (LP) le lieu du centre de pression,  $e_{00}(x)$ , sous l'effet de la seule précontrainte, lorsque la section décrit la poutre. Dans une structure isostatique, la ligne de précontrainte est confondue avec le tracé du câble,  $e_0(x)$ . Ce n'est en général pas le cas dans une poutre continue hyperstatique. Le moment total de précontrainte s'écrit :

$$M_P(x) = P(x)e_{00}(x)$$

Dans une poutre continue, la ligne de précontrainte joue le même rôle que le tracé du câble dans une poutre isostatique. Pour que soient respectées les contraintes limites de traction, la ligne de précontrainte doit se trouver à l'intérieur du fuseau de passage :

$$e_2 = -c' - \frac{M_m}{P} \leq e_{00} \leq c - \frac{M_M}{P} = e_1 \quad \text{ce qui se traduit par les conditions suivantes}$$

sur le tracé  $e_0$  :

$$-c' - (M_m + \mathcal{M})/P \leq e_0 \leq c - (M_M + \mathcal{M})/P$$

Le câble doit respecter les limites pratiques d'enrobage :

$$-(v-d) \leq e_0 \leq v-d$$

La condition d'ouverture du fuseau ( $e_2 \leq e_1$ ) entraîne :

$$P \geq P_I = \Delta M / (c + c')$$

Les conditions de respect des enrobages donnent :

$$P \geq P_{II} = (M_M + \mathcal{M}) / (c + v - d) \quad \text{et}$$

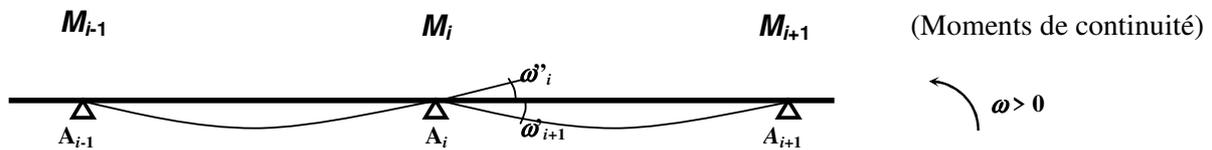
$$P \geq P_{III} = -(M_m + \mathcal{M}) / (c' + v - d)$$

Ces expressions sont semblables à celles établies pour les poutres isostatiques mais le moment hyperstatique de précontrainte intervient. Le moment hyperstatique dépend du tracé du câble sur l'ensemble de la poutre et on ne peut donc pas utiliser ces expressions pour déterminer directement la précontrainte minimale section par section. Il faut faire des hypothèses sur les tracés de câbles pour aller plus loin. Des méthodes générales de dimensionnement existent pour certains types de structures (poutres continues à câbles filants, poutres construites à l'avancement) ou pour certaines méthodes de construction (tabliers de ponts construits par encorbellements successifs, tabliers de ponts poussés). Ces méthodes permettent de déterminer la force minimale de précontrainte nécessaire mais demandent souvent plusieurs itérations pour mettre au point la répartition et le tracé final des câbles de précontrainte.

## 5.3. Calcul des moments hyperstatiques de précontrainte

On utilise la méthode interne en adoptant, pour structure isostatique associée, la structure obtenue en rendant toutes les travées indépendantes, par libération de la

rotation au droit des  $(n - 1)$  appuis intermédiaires. Les inconnues hyperstatiques sont les  $(n - 1)$  moments de continuité  $M_i$  au droit de ces appuis. Le moment isostatique de précontrainte est noté  $m(x)$ . Les moments de continuité à appliquer au droit des appuis intermédiaires pour rétablir la compatibilité des rotations sont les moments hyperstatiques de précontrainte  $\mathcal{M}_i$ .



On peut donc appliquer la relation des trois moments au droit de chaque appui intermédiaire :

$$b_i \cdot M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) \cdot M_i + b_{i+1} \cdot M_{i+1} = \omega_{i+1}' - \omega_i''$$

- $\omega_i''$  et  $\omega_{i+1}'$  sont les rotations isostatiques sous le chargement réel :

$$\omega_i'' = \int_0^{l_i} m(x) \cdot \frac{x}{l_i} \cdot \frac{dx}{EI} \quad \omega_i' = -\int_0^{l_i} m(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{EI} \quad \text{où } m(x) \text{ est le moment}$$

isostatique, qui vaut ici  $P(x)e_0(x)$ .

- $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont les coefficients de souplesse de la travée  $i$  (ou les rotations unitaires) :

$$a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad b_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI} \quad c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

$$\text{pour une travée d'inertie constante : } a_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad ; \quad b_i = \frac{l_i}{6EI}$$

Le système de  $(n - 1)$  équations peut être résolu par la méthode des foyers, résumée ci-après.

Si seule la travée  $i$  est chargée, la résolution du système donne :

$$M_{i-1} = \frac{1}{b_i} \cdot \frac{\varphi_i \cdot (\omega_i' + \varphi_i' \cdot \omega_i'')}{(1 - \varphi_i \cdot \varphi_i')} \quad M_{i-2} = -\varphi_{i-1} \cdot M_{i-1} \quad \text{etc.}$$

$$M_i = -\frac{1}{b_i} \cdot \frac{\varphi_i' \cdot (\omega_i'' + \varphi_i \cdot \omega_i')}{(1 - \varphi_i \cdot \varphi_i')} \quad M_{i+1} = -\varphi_{i+1}' \cdot M_i \quad \text{etc.}$$

où  $\varphi_i$  (resp.  $\varphi_i'$ ) est le rapport focal de gauche (resp. de droite) de la travée  $i$ .

Les rapports focaux vérifient les relations de récurrence :

$$\varphi_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{c_i + a_{i+1} - b_i \cdot \varphi_i} \quad \text{avec } \varphi_1 = 0$$

$$\varphi_{i-1}' = \frac{b_{i-1}}{c_{i-1} + a_i - b_i \cdot \varphi_i'} \quad \text{avec } \varphi_n' = 0$$

Dans le cas d'une poutre de section constante et dont les portées sont toutes égales à  $l$  :

$$\varphi_{i+1} = \frac{1}{4 - \varphi_i} \qquad \varphi'_{i-1} = \frac{1}{4 - \varphi'_i}$$

pour les travées courantes (loin des extrémités) :

$$\varphi_i = \varphi'_i = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$$

Pour un chargement appliqué sur plusieurs travées, ce qui est en général le cas pour la précontrainte, il suffit de décomposer le chargement travée par travée et des superposer les résultats. Bien entendu, en fonction des conditions de régularité et de symétrie de la poutre, le système d'équations peut parfois se simplifier.

**Remarque :**

Dans la poutre continue soumise au moment total de précontrainte,  $M_P = Pe_{00}$ , on peut écrire, dans chaque travée :

$$\Omega'_i = -\int_0^{l_i} P(x) e_{00}(x) \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI} \qquad \text{(rotation à gauche)}$$

$$\Omega''_i = \int_0^{l_i} P(x) e_{00}(x) \left(\frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI} \qquad \text{(rotation à droite)}$$

Comme la poutre est continue, on a  $\Omega''_i = \Omega'_{i+1}$  au droit de chaque appui intermédiaire, ce qui s'écrit encore :

$$J_i(M_P) = \int_0^{l_i} P(x) e_{00}(x) \left(\frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI} + \int_0^{l_{i+1}} P(x) e_{00}(x) \left(1 - \frac{x}{l_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI} = 0$$

C'est la relation de concordance au droit de l'appui  $i$ . On vérifie facilement, en développant  $e_{00}$  :  $e_{00} = e_0 + \mathcal{M}/P$  et en utilisant  $\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \mathcal{M}_i \left(\frac{x}{l_i}\right)$  que cette équation est équivalente à la relation des trois moments présentée plus haut.

**5.4. Calcul des rotations isostatiques**

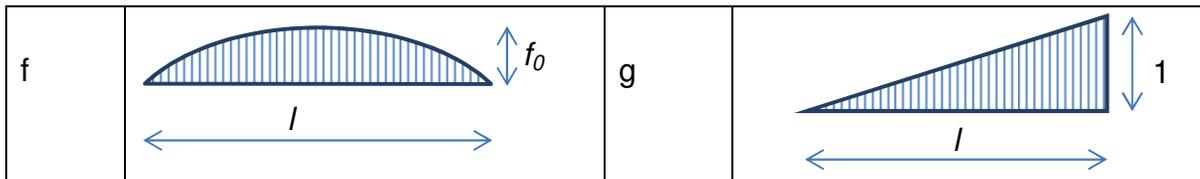
La détermination du moment total de précontrainte par l'utilisation de la relation des trois moments suppose le calcul des coefficients de souplesse des travées et des rotations isostatiques dues à la précontrainte, qui s'expriment comme intégrales le long d'une travée. Si l'on dispose d'une expression analytique des différentes fonctions intervenant dans le calcul –  $l$ ,  $P$ ,  $e_0$  – il est possible de calculer analytiquement l'intégrale. Mais, très souvent, on n'a pas d'expression analytique, ou alors ces expressions conduisent à des calculs complexes et interminables présentant d'importants risques d'erreurs. Il vaut mieux alors calculer les intégrales numériquement. Cela peut se faire dans tous les cas au moyen de techniques générales d'intégration numérique, qui donnent une très bonne précision pour peu que l'on adopte un pas de discrétisation suffisamment petit.

Un cas très courant est celui où la poutre est d'inertie constante. Les coefficients de souplesse s'expriment très simplement (voir plus haut). Les intégrales à calculer pour obtenir les rotations isostatiques sont de la forme  $\int_0^l M(x) \bar{M}(x) dx$ , où  $M$  est le moment isostatique et où  $\bar{M}$  vaut  $x/l$  ou  $(1 - x/l)$ . Très souvent, notamment lorsque l'on suppose  $P$  constant, la courbe représentative du moment isostatique de précontrainte est très simple : succession de segments de droite et d'arcs de

parabole et peut donc se décomposer en formes élémentaires : rectangles, triangles, arc de paraboles, etc. On peut alors généralement calculer l'intégrale en utilisant la propriété suivante :

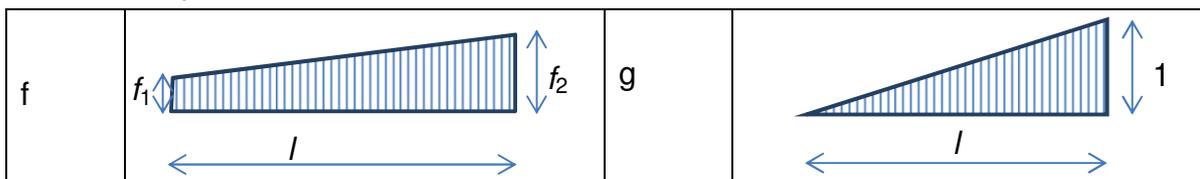
- si la fonction  $g(x)$  est affine (c'est à dire de la forme  $g(x) = ax + b$ ), alors l'intégrale

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx$  est égale à  $\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right)g(x_G)$  où  $x_G$  désigne l'abscisse du centre de gravité de l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la courbe  $f(x)$  entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$ . Autrement dit, l'intégrale est égale à l'aire délimitée par  $f$  multipliée par la valeur de  $g$  à l'abscisse du centre de gravité de l'aire précédente. Par exemple, si  $f$  est parabolique et  $g(x) = x/l$ , leurs courbes représentatives ont les allures suivantes



- l'aire délimitée par  $f$  vaut  $2/3 f_0 l$  (deux tiers de l'aire du rectangle circonscrit) ; par raison de symétrie, l'abscisse du centre de gravité vaut  $l/2$  et donc  $g(x_G) = 1/2$  et donc :  $\int_0^l f(x)g(x)dx = \frac{f_0 l}{3}$

- autre exemple



- ici, la position du centre de gravité de l'aire délimitée par  $f$  demande un peu de calcul. Mais celui de l'aire délimitée par  $g$  est bien connu ( $2/3$ ). Comme  $f$  est affine, l'intégrale de  $fg$  peut s'exprimer comme le produit de l'aire délimitée par  $g$  (c'est à dire  $l/2$ ) par la valeur de  $f$  à l'abscisse  $2/3$  :  $(f_1 + 2f_2)/3$

Pour des formes courantes de fonctions  $f$  et  $g$  (dont celles données ici en exemple), on trouve des tables donnant l'intégrale du produit, appelées tables des intégrales de Mohr.

Une autre méthode d'intégration numérique peut être utilisée lorsque l'intervalle d'intégration peut être découpé en tronçons sur chacun desquels la fonction à intégrer (c'est à dire le produit  $h(x) = f(x)g(x)$ ) peut s'exprimer comme un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Sur un tel tronçon  $[a; b]$  on a

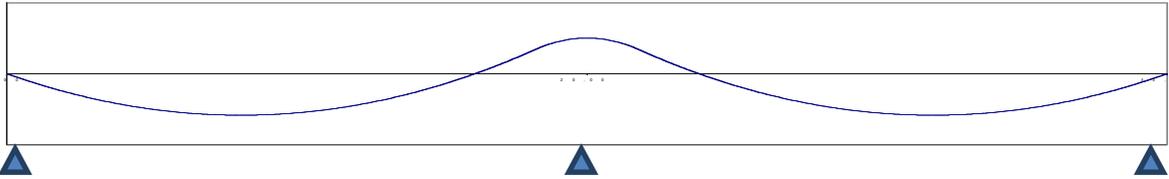
$$\int_a^b h(x)dx = \frac{b-a}{6} \left( h(a) + 4h\left(\frac{a+b}{2}\right) + h(b) \right).$$

C'est cette relation qui est utilisée lorsque l'on calcule numériquement une intégrale par la méthode de Simpson.

On rencontre souvent ce cas lorsque le tracé de la précontrainte est une succession d'arcs de paraboles et de segments de droite. L'exemple suivant en est une illustration :

Poutre continue en béton à deux travées égales de portées  $l = 20$  m et de section constante.

## ENPC – BAEP3 – Effets hyperstatiques de la précontrainte



Précontrainte par câbles filants dont le tracé moyen est constitué de trois tronçons de paraboles :

	Tronçon 1			Tronçon 2			Tronçon 3		
Abscisse	0,00	9,00	18,00	18,00	20,00	22,00	22,00	31,00	40,00
$e_0$ (m)	0,000	-0,575	0,300	0,300	0,500	0,300	0,300	-0,575	0,000

On se propose de déterminer le moment hyperstatique de précontrainte sachant que l'effort normal de précontrainte est constant, égal à 10 MN.