

Ponts nervures à 2 travées

Méthode du câble concordant

1 Calcul des sollicitations

On utilise la méthode des trois moments pour trouver le moment dû à une charge répartie sur les deux travées ou bien le moment dû à une charge appliquée sur une seule travée.

1.1 Charge de poids propre, superstructures, exploitation

Voir énoncé.

1.2 Effet du gradient thermique

Sur la structure rendue hyperstatique, le gradient supposé linéaire conduit à une courbure des deux poutres. La courbure est égale à :

$$\chi = \frac{-k \Delta \theta}{h}$$

avec :

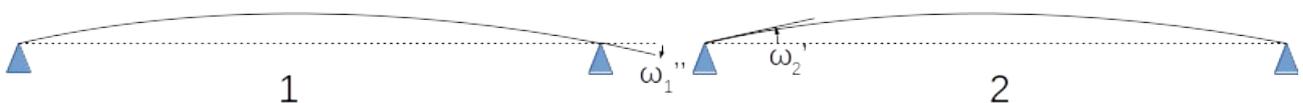
- k le coefficient de dilatation thermique ($k = 1.10^{-5} (^\circ C)^{-1}$)
- $\Delta \theta$ la différence de température entre la fibre supérieure et inférieure
- h la hauteur de la section

Cette courbure conduit à une rotation de l'extrémité droite de la travée 1 égale à :

$$\omega_1'' = \chi \times \frac{l}{2} = \frac{-k \Delta \theta l}{h} \frac{l}{2}$$

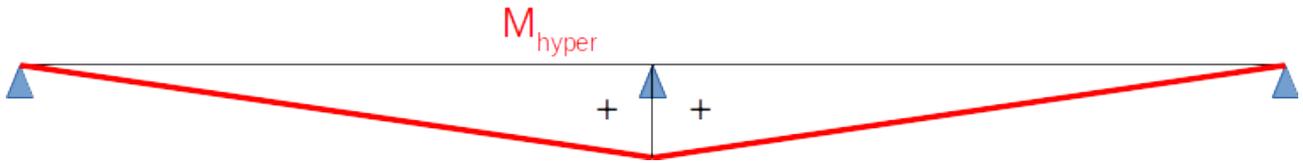
la rotation de l'extrémité gauche de la travée 2 est quant à elle opposée à ω_1'' , soit :

$$\omega_2' = -\omega_1''$$



En appliquant le théorème des trois moments, on trouve un moment hyperstatique sur l'appui 1 (appui central) :

$$M_1 = \frac{3}{2} \frac{k \Delta \theta}{h} EI$$



1.3 Combinaisons et enveloppes:

Voir énoncé

2 Etude en précontrainte totale avec P_m

Hypothèses :

- on impose partout $\sigma \geq 0$ en ELS caractéristique
- on travaille avec P_m (précontrainte moyenne à l'infini, toutes pertes effectuées)
- on ne s'occupe pas des phases de construction

Précontrainte centrée :

dans le cas d'une précontrainte centrée, on a une excentricité de la précontrainte nulle ($e_0=0$), donc il n'y a pas de moment isostatique ni de moment hyperstatique généré par la précontrainte.

Le respect des conditions de traction en fibre sup s'écrit simplement :

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{P}{A_c} + M_{\text{min}} \frac{v}{I} \geq 0$$

$$P \geq -M_{\text{min}} \frac{A_c v}{I} = -\frac{M_{\text{min}}}{\rho v'}$$

avec $\rho = \frac{I}{A_c v v'}$, le rendement géométrique de la section.

En prenant le moment minimum sur appui : $M_{\text{min}} = -34,30 \text{ MN.m}$

on obtient :

$$P \geq 48 \text{ MN}$$

En procédant de même avec le moment maximum en travée ($M_{\text{max}} = 25,36 \text{ MN.m}$), on obtient :

$$P \geq 74 \text{ MN}$$

On verra par la suite que l'on peut diminuer la précontrainte en ondulant le câble.

Calcul de la force minimale de précontrainte avec un câble ondulé.

On a 3 valeurs de précontrainte minimale à trouver :

$$P \geq P_I : \text{condition d'ouverture du fuseau de traction}$$

$P \geq \max(P_{II}, P_{II'})$: condition d'existence d'une ligne de précontrainte (tracé concordant) à l'intérieur du fuseau

$P \geq P_{III}$: condition d'existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau qui donne après transformation linéaire un tracé de câble respectant les contraintes d'enrobage.

2.1 Calcul de P_I

Ecrivons les équations de respect des contraintes de traction à l'ELS caractéristique

en fibre sup : sous $M_{\min, \text{car}}$ que l'on notera M_{\min}

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{P}{A_C} + (P \cdot e_{00} + M_{\min}) \frac{v}{I} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\rho v' - \frac{M_{\min}}{P} \leq e_{00}$$

en fibre inf : sous $M_{\max, \text{car}}$ que l'on notera M_{\max}

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{P}{A_C} - (P \cdot e_{00} + M_{\max}) \frac{v'}{I} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e_{00} \leq \rho v - \frac{M_{\max}}{P}$$

On a donc un encadrement de la ligne de précontrainte e_{00} du même type que l'encadrement de e_0 en isostatique:

$$e_{\min} = -\rho v' - \frac{M_{\min}}{P} \leq e_{00} \leq \rho v - \frac{M_{\max}}{P} = e_{\max}$$

Cette relation doit être valable à chaque abscisse (respect des contraintes de traction partout). On peut donc l'écrire :

$$e_{\min}(x) = -\rho v' - \frac{M_{\min}(x)}{P} \leq e_{00}(x) \leq \rho v - \frac{M_{\max}(x)}{P} = e_{\max}(x)$$

Pour avoir une solution, il faut que :

$$e_{\min}(x) \leq e_{\max}(x) \text{ pour tout } x.$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{M_{\max}(x) - M_{\min}(x)}{\rho v' + \rho v} = \frac{M_{\max}(x) - M_{\min}(x)}{\rho h} = P_I$$

Application numérique :

Sur l'appui central, où la différence de moment $M_{\max} - M_{\min}$ est maximum, on trouve:

$$P_I = \frac{-17,67 + 34,30}{0,439 \times 2,4} = 15,8 \text{ MN}$$

2.2 Calcul de P_{II} et P_{II}'

e_{00} étant une ligne de précontrainte, son tracé doit être concordant, c'est à dire qu'il ne doit pas générer d'effets hyperstatiques (réactions d'appui hyperstatiques et moments hyperstatiques).

Dans notre cas, on ne doit pas avoir de cassure angulaire due à l'effet de $P.e_{00}$ si l'on sépare les deux travées 1 et 2, soit :

$$\omega_2' = \omega_1''$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{l_1} \frac{P \cdot e_{00}(x)}{EI} \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2} \frac{P \cdot e_{00}(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right) dx = 0$$

P étant supposé non nulle, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$J_1(e_{00}) = \int_0^{l_1} \frac{e_{00}(x)}{EI} \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2} \frac{e_{00}(x)}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_2}\right) dx = 0$$

où J_1 est une fonction qui à "un tracé de précontrainte sur les deux travées" associe "un réel".

Remarquons que cette fonction J_1 présente quelques particularités intéressantes :

- c'est une fonction croissante, c'est à dire si l'on prend deux tracés e_A et e_B tels que $e_A(x) \leq e_B(x)$ quel que soit x , alors : $J_1(e_A) \leq J_1(e_B)$
- c'est une fonction linéaire, car si l'on prend deux tracés e_A et e_B ainsi qu'un scalaire λ , alors :

$$J_1(\lambda e_A + e_B) = \lambda J_1(e_A) + J_1(e_B)$$

Sachant que e_{00} est compris entre e_{min} et e_{max} et que $J_1(e_{00}) = 0$ on peut déduire :

$$\begin{matrix} e_{min} \leq e_{00} \leq e_{max} \\ J_1(e_{00}) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} J_1(e_{min}) \leq J_1(e_{00}) = 0 \\ 0 = J_1(e_{00}) \leq J_1(e_{max}) \end{matrix} \text{ en utilisant le fait que } J_1 \text{ est une fonction croissante.}$$

Puis en utilisant le fait que J_1 est une fonction linéaire:

$J_1(e_{min}) \leq 0$ $\Leftrightarrow J_1\left(-\rho v' - \frac{M_{min}}{P}\right) \leq 0$ $\Leftrightarrow -J_1(\rho v') - \frac{J_1(M_{min})}{P} \leq 0$ $\Leftrightarrow P \geq \frac{-J_1(M_{min})}{J_1(\rho v')} = P_{II}'$	$J_1(e_{max}) \geq 0$ $\Leftrightarrow J_1\left(\rho v - \frac{M_{max}}{P}\right) \geq 0$ $\Leftrightarrow J_1(\rho v) \geq \frac{J_1(M_{max})}{P}$ $\Leftrightarrow P \geq \frac{J_1(M_{max})}{J_1(\rho v)} = P_{II}$
---	--

Simplification de J_1 dans le cas de notre exercice:

- la structure est symétrique, le câblage l'est également. Aussi, les rotations ω_1'' et ω_2' sont opposées $\omega_2' = -\omega_1''$. Comme ces deux termes correspondent aux deux intégrales dans l'expression de J_1 , on peut simplifier l'expression de J_1 en :

$$J_1(e) = 2 \int_0^l \frac{e(x)}{EI} \frac{x}{l} dx$$

- utilisant le fait que l'inertie et le module d'Young sont uniformes, on peut mettre en facteur ces deux termes, l'expression de J_1 devient alors :

$$J_1(e) = \frac{2}{EI} \int_0^l e(x) \frac{x}{l} dx$$

Le facteur $\frac{2}{EI}$ peut être omis car au final, J_1 doit être nul.

Ainsi, on peut remplacer J_1 par son expression simplifiée que nous appellerons simplement J :

$$J(e) = \int_0^l e(x) \frac{x}{l} dx$$

Pour calculer P_{II} et P_{II}' , nous devons calculer les expressions suivantes:

- $J(M_{max})$
- $J(M_{min})$
- $J(\rho v)$
- $J(\rho v')$

Remarquons que pour les deux derniers termes, le terme dans J est une constante. Le calcul de l'intégrale n'est donc pas difficile:

$$J(\rho v) = \rho v \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad J(\rho v') = \rho v' \frac{l}{2}$$

Pour les deux premiers termes, c'est un peu plus compliqué, nous allons d'abord scinder M_{max} et M_{min} en un moment créé par les charges permanentes et un moment créé par les charges variables:

$$M_{max} = M_{g+g'} + M_{var,max} \quad \text{et} \quad M_{min} = M_{g+g'} + M_{var,min}$$

Comme $M_{g+g'}$ correspond à un cas de charge réel ne comportant pas de déformation imposée, on a : $J(M_{g+g'}) = 0$ (le moment inclut un moment isostatique et un moment hyperstatique).

Il nous faut donc calculer $J(M_{var,max})$ et $J(M_{var,min})$.

Le calcul exact analytique est fastidieux. Nous pouvons calculer ces expressions de façon approchée en utilisant les intégrales de Mohr ou bien en discrétisant la travée en une dizaine de segments (précision suffisante ici) et en transformant l'intégrale en une somme de trapèze.

Application numérique :

On trouve au final :

- $J(M_{var,max}) = 139 \text{ MN.m}^2$
- $J(M_{var,min}) = -61,5 \text{ MN.m}^2$
- $J(\rho v) = 5,5 \text{ m}^2$
- $J(\rho v') = 11,3 \text{ m}^2$

d'où:

$$P_{II} = 25,3 \text{ MN} \quad P_{II}' = 5,4 \text{ MN}$$

2.3 Calcul de P_{III}

Si on a $P \geq \max(P_I, P_{II}, P_{II}')$, alors on sait que le fuseau de traction est ouvert et qu'on peut trouver une ligne de précontrainte à l'intérieur. Mais rien ne dit que l'on peut trouver un tracé réel de précontrainte qui respecte les enrobages minimaux.

Un tracé réel peut être obtenu en procédant à une transformation linéaire (ajout d'une fonction linéaire à notre ligne de précontrainte). Ainsi, sur la première travée, le tracé e_0 peut s'écrire :

$$e_0(x) = e_{00}(x) + y \frac{x}{l}$$

avec y le décalage entre la ligne de précontrainte et le tracé sur l'appui central.

Les points les plus critiques pour le respect de l'enrobage sont :

- la mi-travée ($x = 0,4l$ dans notre cas) pour le respect de l'enrobage en fibre inf

$$e_0(0,4l) \geq -v' + d'$$

- l'appui central pour le respect de l'enrobage en fibre sup

$$e_0(l) \leq v - d$$

On sait par ailleurs que $e_{00}(x)$ doit rester dans le fuseau de traction :

$$e_{min}(x) = -\rho v' - \frac{M_{min}(x)}{P} \leq e_{00}(x) \leq \rho v - \frac{M_{max}(x)}{P} = e_{max}(x)$$

En se mettant dans le cas le plus favorable avec :

- en travée à $x=tl=0,4l$: $e_{00}(tl)=\rho v - \frac{M_{max}(tl)}{P} = e_{max}(tl)$
- sur appui central $x=l$: $e_{00}(l)=-\rho v' - \frac{M_{min}(l)}{P} = e_{min}(l)$

Les conditions de respect d'enrobage deviennent :

- en travée :

$$e_{00}(tl)+t y=\rho v - \frac{M_{max}(tl)}{P} +t y \geq -v'+d'$$

$$\Leftrightarrow t y \geq -(\rho v+v'-d') + \frac{M_{max}(tl)}{P}$$

- sur appui central :

$$e_{00}(l)+y=-\rho v' - \frac{M_{min}(l)}{P} +y \leq v-d$$

$$\Leftrightarrow y \leq \rho v'+v-d + \frac{M_{min}(l)}{P}$$

En utilisant ces deux équations de respect des enrobages, on obtient :

$$-(\rho v+v'-d') + \frac{M_{max}(tl)}{P} \leq t(\rho v'+v-d) + \frac{t M_{min}(l)}{P}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_{max}(tl)-t M_{min}(l)}{P} \leq t(\rho v'+v-d) + (\rho v+v'-d') = tK+K'$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{M_{max}(tl)-t M_{min}(l)}{tK+K'} = P_{III}$$

Application numérique :

$$M_{max}(tl)=M_{max}(0,4l)=25,36 \text{ MN} \cdot m$$

$$M_{min}(l)=M_{min}(l)=-34,30 \text{ MN} \cdot m$$

en prenant $d=d'=0,2 \text{ m}$, on obtient :

$$K=1,293 \text{ m}$$

$$K'=1,760 \text{ m}$$

d'où :

$$P_{III}=17,2 \text{ MN}$$

2.4 Choix d'un tracé:

P_{II} est déterminant. La difficulté principale est donc de trouver une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau de traction.

Nous disposons de câbles 12T15 développant un effort de 1,9 MN au temps infini.

En théorie 14 câbles suffisent (7 câbles dans chaque nervure), mais nous prendrons un peu de marge avec 16 câbles (8 câbles dans chaque nervure) → $P=30,4 \text{ MN}$

2.4.1 Ligne de précontrainte théorique

Avec la valeur de P choisie, nous pouvons calculer :

$$J(e_{max}) = J(\rho v) - \frac{J(M_{max})}{P} = 0,93 \text{ MN.m}^2$$

$$J(e_{min}) = -J(\rho v') - \frac{J(M_{min})}{P} = -9,28 \text{ MN.m}^2$$

Une ligne de précontrainte possible est le barycentre de e_{min} et e_{max} défini par :

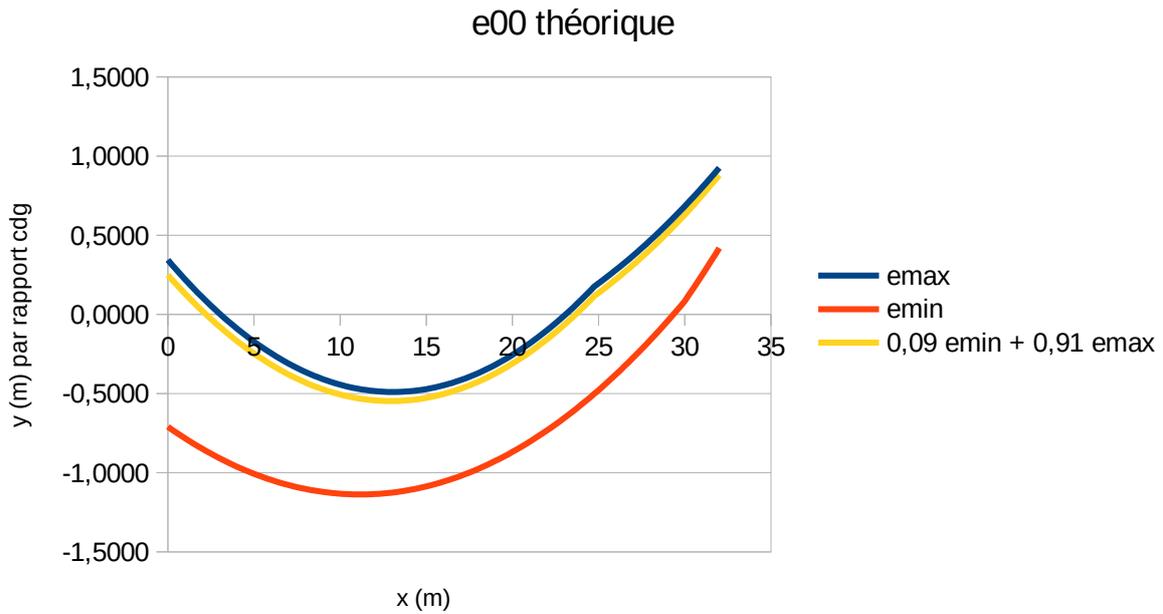
$$e_{00} = \frac{J(e_{max})}{J(e_{max}) - J(e_{min})} e_{min} + \frac{-J(e_{min})}{J(e_{max}) - J(e_{min})} e_{max}$$

vérifiant $e_{min} \leq e_{00} \leq e_{max}$ et $J(e_{00}) = 0$

Numériquement, on trouve :

$$e_{00} = 0,09 e_{min} + 0,91 e_{max}$$

Le graphique ci-dessous donne un aperçu de cette ligne de précontrainte théorique :



2.5 Ligne de précontrainte et tracé réel

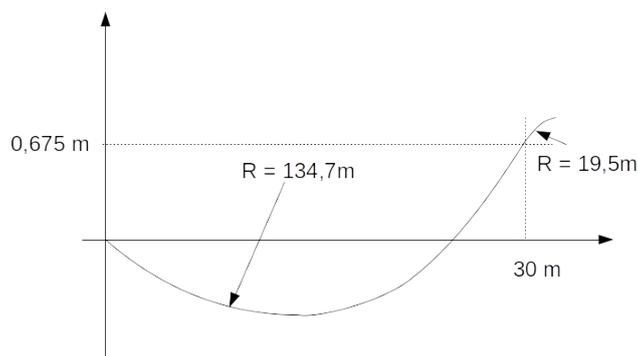
Cette ligne de précontrainte doit toutefois subir une transformation linéaire pour respecter l'enrobage sur appui. Nous prendrons $y = -1$ m ici.

Après transformation linéaire, le tracé de précontrainte obtenu ne doit pas présenter de rupture angulaire, y compris sur appui central.

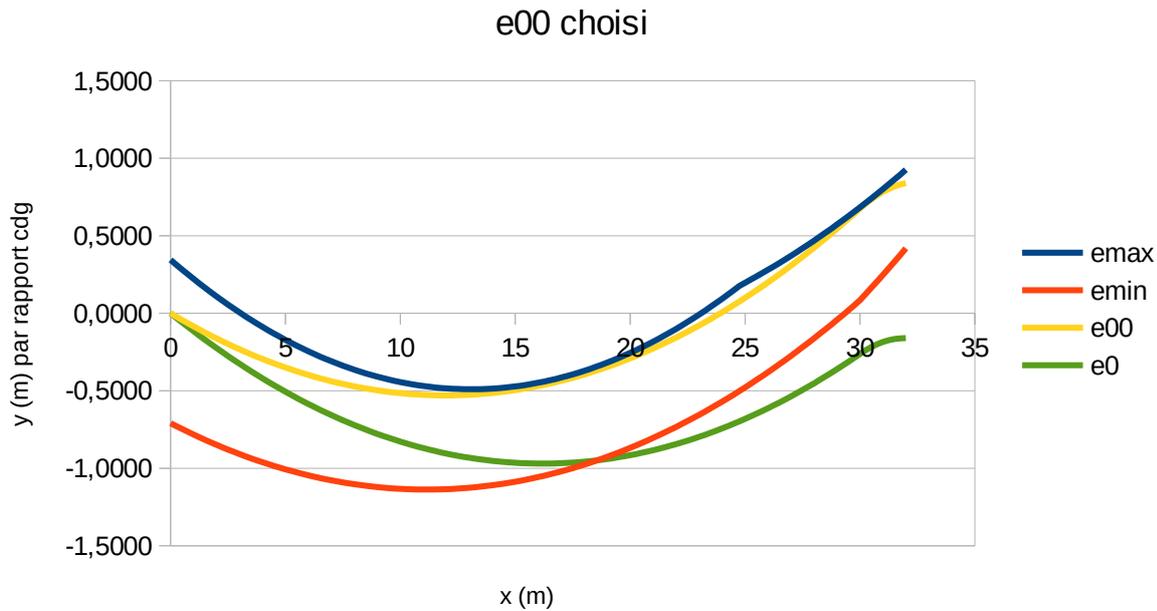
En outre, le respect des distances entre axes des ancrages nous impose d'avoir un tracé qui ne passe pas plus haut que le cdg sur l'appui de rive.

Avec ces deux contraintes, il nous faut retravailler la forme de e_{00} , en veillant à rester entre e_{min} et e_{max} et à garder $J(e_{00}) = 0$. Ce travail peut être effectué sous Excel.

Une ligne de précontrainte possible est la suivante :



Le graphique ci-dessous montre cette ligne de précontrainte, le tracé issu de la transformation linéaire ainsi que e_{min} et e_{max} .



3 Etude en autorisant la traction

La limite de traction à respecter est maintenant $\sigma \geq -f_{ctm}$. avec $f_{ctm} = 2,4 \text{ MPa}$

Les équations de respect des contraintes de traction en fibre sup et fibre inf deviennent :

$$\sigma_{sup} = \frac{P}{A_C} + (P \cdot e_{00} + M_{min}) \frac{v}{I} \geq -f_{ctm} = \bar{\sigma}_1$$

$$\sigma_{inf} = \frac{P}{A_C} - (P \cdot e_{00} + M_{max}) \frac{v'}{I} \geq -f_{ctm} = \bar{\sigma}_2'$$

L'encadrement de e_{00} peut maintenant s'écrire :

$$e_{min} = -\rho v' - \frac{M_{min}^*}{P} \leq e_{00} \leq \rho v - \frac{M_{max}^*}{P} = e_{max}$$

avec :

$$M_{min}^* = M_{min} - \bar{\sigma}_1 \frac{I}{v}$$

$$M_{max}^* = M_{max} + \bar{\sigma}_2' \frac{I}{v'}$$

Le recalcul de P_I , P_{II} , P_{II}' et P_{III} se fait très rapidement en se ramenant aux valeurs trouvées précédemment :

$$P_I = \frac{M_{max}^* - M_{min}^*}{\rho h} = \frac{M_{max} - M_{min}}{\rho h} + \frac{\bar{\sigma}_2' \frac{I}{v'} + \bar{\sigma}_1 \frac{I}{v}}{\rho h} = 0,5 \text{ MN}$$

$$P_{II} = \frac{J(M_{max}^*)}{J(\rho v)} = \frac{J(M_{max} + \bar{\sigma}_2' \frac{I}{v'})}{J(\rho v)} = \frac{J(M_{max})}{J(\rho v)} + \bar{\sigma}_2' A_C = 9,93 \text{ MN}$$

$$P_{II}' = \frac{-J(M_{min}^*)}{J(\rho v')} = \frac{-J(M_{min} - \bar{\sigma}_1' \frac{I}{v'})}{J(\rho v')} = \frac{-J(M_{min})}{J(\rho v')} + \bar{\sigma}_1' A_C = -9,73 \text{ MN}$$

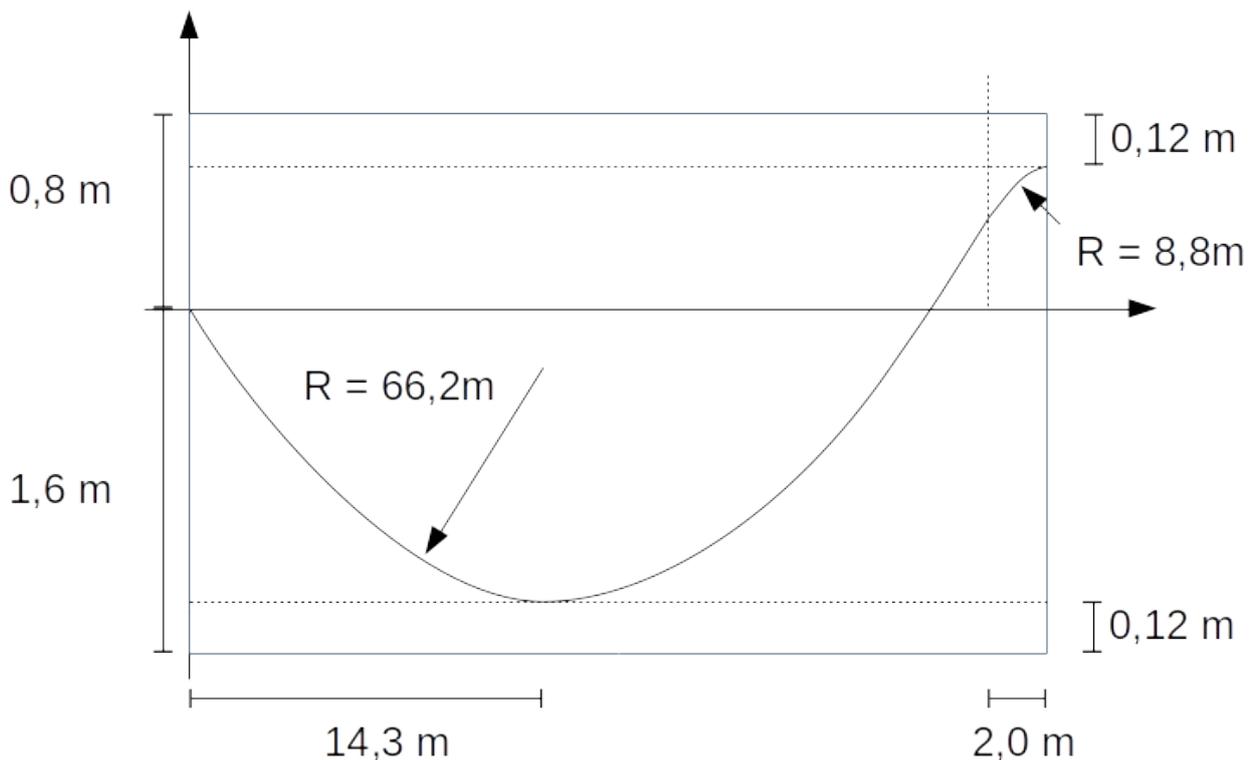
$$P_{III} = \frac{M_{max}^*(tl) - t M_{min}^*(l)}{tK + K'} = \frac{M_{max}(tl) - t M_{min}(l)}{tK + K'} + \frac{\bar{\sigma}_2' \frac{I}{v'} + \bar{\sigma}_1' \frac{I}{v'}}{tK + K'} = 12,99 \text{ MN}$$

Le nombre de câbles étant inférieur, nous prenons pour valeur de limite d'enrobage $d = d' = 0,12 \text{ m}$ pour le calcul de K et K'.

Nous choisissons de prendre 8 câbles (4 par nervure) : $P = 15,2 \text{ MN}$.

Dans ce cas, P_{III} est déterminant. La principale difficulté consiste à trouver un tracé qui respecte l'enrobage. Nous optons pour un tracé qui passe à la limite de l'enrobage en travée et sur appui central.

Le profil du tracé est le suivant:



Lorsqu'on recalcule la ligne de précontrainte e_{00} et que l'on remplace e_{min} et e_{max} , on trouve le diagramme suivant :

e0 et e00 avec traction autorisée

