

Flexion en précontrainte partielle

Calcul des contraintes en section fissurée

1. Introduction

Le principe de la précontrainte consiste à utiliser au mieux la résistance du béton en le comprimant à l'avance par des forces internes permanentes.

- Précontrainte totale : pas de décompression du béton ou tractions limitées sous les charges extrêmes en service (combinaisons caractéristiques). Si le béton ne se décomprime pas, il n'y a *a priori* pas de risque de fissures. Si les tractions restent limitées (à des valeurs voisines de f_{ctm}), la fissuration n'est pas systématique.
- Le béton résiste à la traction mais, du fait du retrait, de l'existence de reprises de bétonnage, il y a possibilité de fissure dès qu'une traction existe.
- Cependant les fissures ne sont dangereuses en termes de corrosion que si elles restent ouvertes pendant une durée importante. On peut donc admettre l'ouverture de fissures sous des actions de courte durée, pourvu qu'elles se referment convenablement lorsque l'action cesse. Pour cela, il faut :
 - Limiter la traction dans les aciers (pas de plastification).
 - Limiter l'ouverture des fissures (pas de glissement entre acier et béton).
 - Limiter les effets de la répétition d'actions de courte durée provoquant la fissuration (risque de fatigue des armatures tendues traversant la fissure).

Il en découle le principe de la précontrainte partielle.

- L'élément reste comprimé (modérément) sous l'effet des charges permanentes ou des charges de longue durée d'application
- Sous les actions variables de courte durée, le béton peut être tendu et fissuré. Il se comporte comme du béton armé. Il faut donc des armatures passives si l'on veut maîtriser la fissuration.

2. Intérêt de la précontrainte partielle

A condition d'être convenablement appliqué, le principe de la précontrainte partielle présente les avantages suivants :

- Meilleur comportement que le béton armé vis-à-vis de la fissuration.
- Structures de plus grandes portées et plus élancées qu'en béton armé (c'est vrai en général pour le béton précontraint, que la précontrainte soit totale ou partielle).
- Compression à vide (sous combinaison quasi permanente) plus faible que dans le cas de la précontrainte totale. Cela a pour conséquence des déformations de fluage plus réduites et par conséquent mieux maîtrisées.
- Moins de force de précontrainte à ancrer donc moins de problèmes de diffusion d'efforts concentrés.
- Meilleure ductilité que le béton précontraint, en précontrainte totale, grâce à la présence d'aciers passifs.

- Dans les poutres préfabriquées destinées à supporter des flexions importantes, la précontrainte partielle permet, par rapport à la précontrainte totale, de limiter la compression dans le talon pendant les phases de construction. Cette condition est souvent dimensionnante en précontrainte totale.
- Economie d'investissement (discutable).

3. Domaine d'application de la précontrainte partielle

Devant autant d'avantages et si peu d'inconvénients, on peut se demander pourquoi la précontrainte partielle est si peu utilisée. Il y a certainement à cet état de fait des raisons historiques, la précontrainte ayant d'abord été utilisée en précontrainte totale et considérée comme permettant de se passer presque complètement d'armatures passives. Il y a aussi le fait que, plus ou moins consciemment, on a tendance à identifier la fissuration à un désordre et à un risque pour la structure.

Il n'est généralement pas judicieux de décider a priori d'adopter la précontrainte partielle et de dimensionner les structures au plus juste : section minimale de béton et force minimale de précontrainte qui permettent de respecter les conditions de compression à vide et de compression maximale en service et en construction. Le fonctionnement en précontrainte partielle est plutôt la conséquence d'un choix de conception. Ce choix peut consister à essayer d'obtenir le comportement, ou l'état de sollicitations, le plus satisfaisant possible dans la structure à vide. On utilise alors la précontrainte comme un moyen de régler l'état de sollicitation à vide. On peut par exemple chercher à compenser le mieux possible, par la précontrainte, les flexions dues aux charges permanentes. Ainsi, les déformations différées de flexion (déformations de fluage) seront presque nulles et donc beaucoup mieux maîtrisées que si l'on a des flexions importantes à vide. La structure ne fonctionnera alors en précontrainte partielle que si les charges d'exploitation provoquent la fissuration.

Quelques types d'ouvrages où la précontrainte partielle peut être intéressante :

- Planchers de bâtiments élancés. La précontrainte partielle peut limiter les déformations différées très préjudiciables aux revêtements.
- Tabliers de ponts monolithiques (ponts-dalles, ponts à nervures construits sur cintre général) sauf en atmosphère marine. La précontrainte partielle permet de mettre moins de câbles et donc de réduire les efforts de diffusion aux abouts du tablier, surtout en cas d'ouvrage biais.
- Poutres préfabriquées, dans certains cas, à condition de ne pas en profiter pour réduire exagérément les sections de béton par rapport à un dimensionnement en précontrainte totale.
- Tabliers de ponts à haubans. Le réglage des efforts dans le tablier est fait par les haubans, on équilibre aussi bien que possible les charges permanentes. La précontrainte apporte de l'effort normal centré pour éviter les décompressions à vide, et éventuellement sous une partie des charges d'exploitation. La flexion sous charges variables est reprise en partie par la précontrainte et en partie par les armatures de béton armé.
- Flexion transversale des hourdis de ponts. C'est d'ailleurs un des rares cas où l'on a utilisé assez largement la précontrainte partielle.

4. Principe du calcul en section fissurée

Hypothèses de calcul

- les sections droites restent planes ;
- élasticité des matériaux : $E_p = n_p E_c$ $E_s = n_s E_c$ (on peut prendre égaux les deux coefficients d'équivalence) ;
- non-intervention du béton tendu ;
- non-glissement entre acier et béton.

Conventions de signe

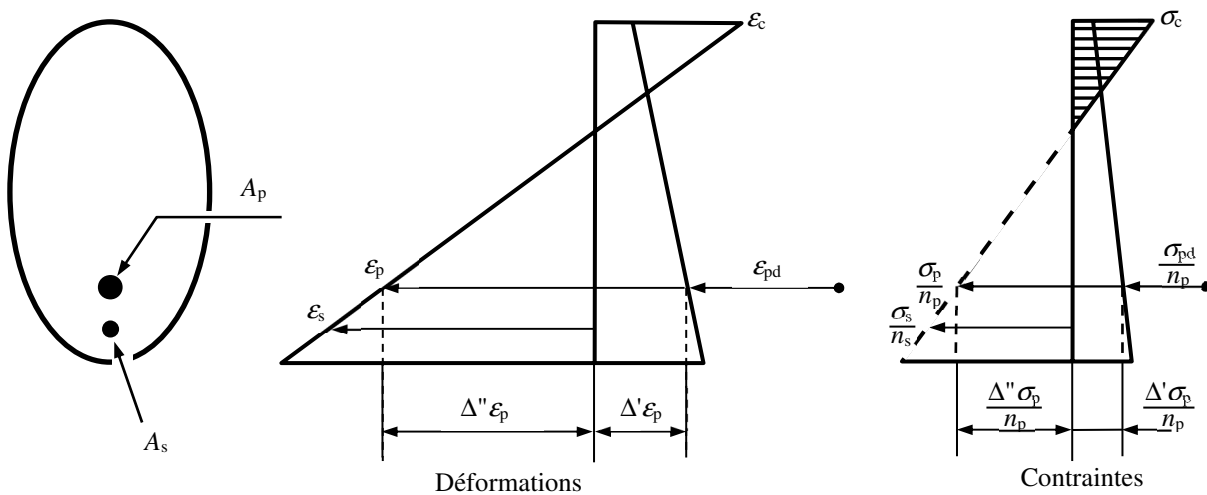
- contraintes et déformations sont comptées positives pour le béton comprimé et pour les aciers tendus ;
- la même convention s'applique aux variations de contraintes ou de déformations.

Analyse des déformations

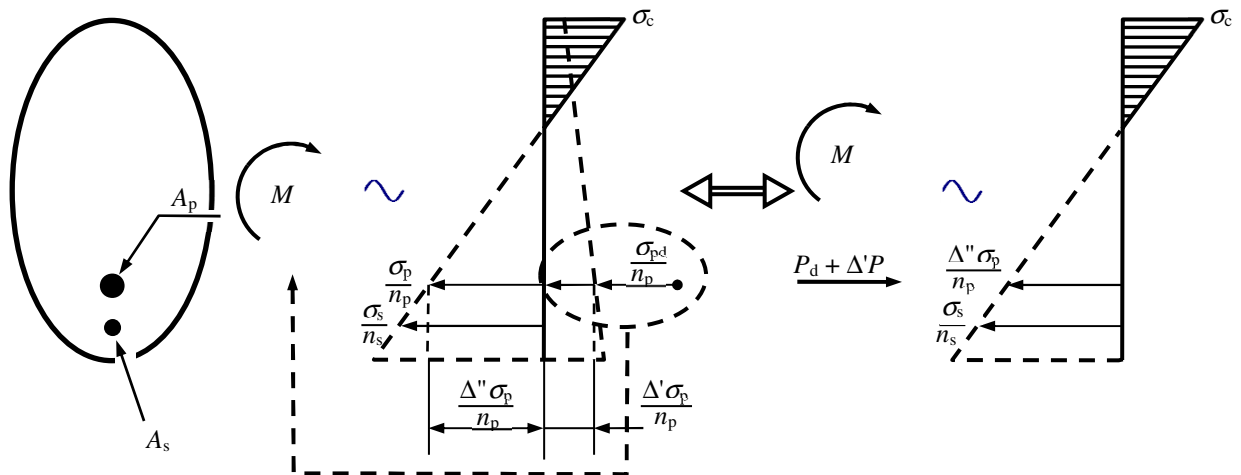
L'allongement total des armatures de précontrainte sous les actions qui provoquent la traction du béton est la somme de trois termes :

- leur allongement à vide (c'est à dire sous combinaison quasi permanente)
- un premier complément d'allongement accompagnant le retour à zéro de la déformation du béton adjacent ;
- un deuxième complément d'allongement au-delà de la décompression du béton

Compte tenu des hypothèses, on en déduit les contraintes.



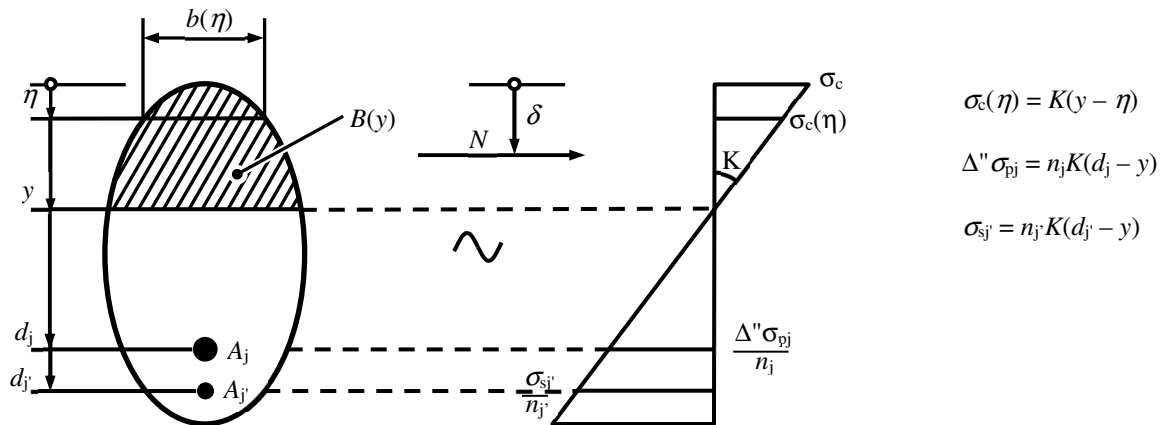
Equilibre des efforts



Le diagramme de contraintes ($\sigma_c, \Delta'' \sigma_p, \sigma_s$) équilibre donc une sollicitation de flexion composée formée par le moment extérieur M (auquel s'ajoute le moment hyperstatique de précontrainte le cas échéant) et la force $P_d + \Delta'P$ appliquée au niveau des aciers de précontrainte.

Cette sollicitation équivaut à l'application d'une force $N = P_d + \Delta'P$ à la distance $\delta = d_p - M/N$ de la fibre supérieure (δ est comptée positive vers le bas). Cela se généralise facilement au cas où l'on doit distinguer plusieurs niveaux j d'armatures de précontrainte.

Calcul des contraintes



Le diagramme de contraintes est défini par deux paramètres : y (position de l'axe neutre) et K (pente du diagramme). On détermine ces paramètres au moyen de deux équations, l'une exprimant la nullité du moment $M_B + M_A$ de ces contraintes par rapport au point de passage de la force (centre de pression) et l'autre exprimant l'égalité de N et de la résultante $N_B + N_A$ des contraintes.

$$M_B = \int_0^y K(y - \eta)(\delta - \eta)b(\eta) d\eta = K [\delta y B(y) - (y + \delta)S(y) + J(y)]$$

$$M_A = \sum_j n_j K A_j (d_j - y)(d_j - \delta) = K \left[\delta y \sum_j n_j A_j - (y + \delta) \sum_j n_j A_j d_j + \sum_j n_j A_j d_j^2 \right]$$

$$N_B = \int_0^y K (y - \eta) b(\eta) d\eta = K [yB(y) - S(y)]$$

$$N_A = \sum_j n_j K A_j (d_j - y) = K \left[y \sum_j n_j A_j - \sum_j n_j A_j d_j \right]$$

Dans ces formules, on désigne par

$B(y)$ l'aire de la section du béton comprimé

$S(y)$ son moment statique par rapport à l'horizontale de la fibre supérieure

$J(y)$ son moment d'inertie par rapport à cette même horizontale.

Les sommations sont étendues à toutes les armatures, qu'elles soient passives ou de précontrainte.

On pose :

$$B^*(y) = B(y) + \sum n_j A_j$$

$$S^*(y) = S(y) + \sum n_j A_j d_j$$

$$J^*(y) = J(y) + \sum n_j A_j d_j^2$$

(remarque : l'indice j désigne ici indifféremment une armature de précontrainte ou une armature passive)

$B^*(y)$, $S^*(y)$ et $J^*(y)$ sont les caractéristiques (aire, moment statique et inertie par rapport à l'axe horizontal de la fibre supérieure) de la section fissurée homogénéisée.

La nullité du moment par rapport au point de passage de la force s'écrit, en divisant par K , non nul :

$$\delta y B^*(y) - (y + \delta) S^*(y) + J^*(y) = 0$$

équation permettant de calculer y (équation du troisième degré si la section est composée de rectangles).

K est alors donné par l'équation :

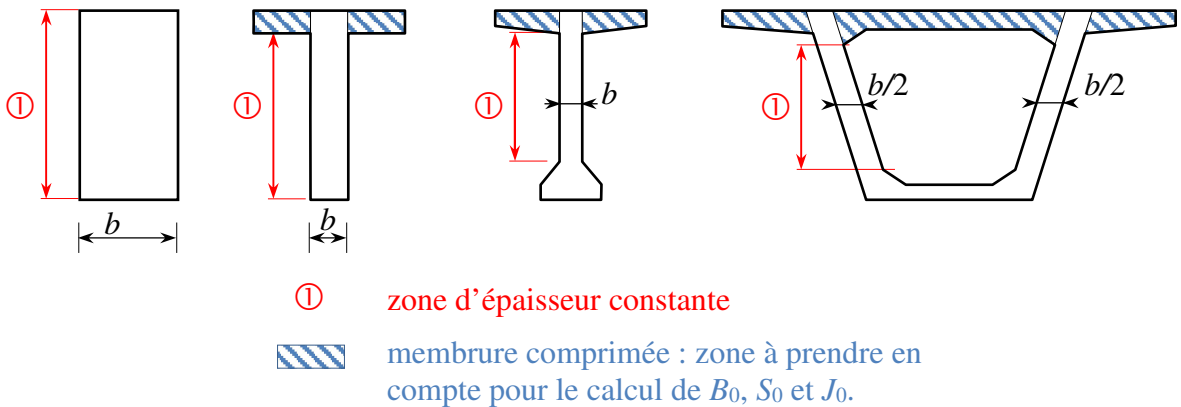
$$N = K[yB^*(y) - S^*(y)]$$

On peut ainsi déterminer les contraintes.

En résumé, après avoir calculé $\Delta'P$, on est ramené à un calcul de béton armé en flexion composée

Cas particulier fréquemment rencontré

La grande majorité des poutres a une section comportant une zone d'épaisseur constante b sur une partie de la hauteur. La section peut être rectangulaire, en T avec ou sans talon, en I ou en caisson. La zone d'épaisseur constante est l'âme de la poutre (ou l'ensemble des âmes si l'on considère un caisson). Supposons que l'axe neutre se situe dans la zone d'épaisseur constante. On peut décomposer la partie comprimée de la section en deux éléments: un élément de largeur b et de hauteur y , qui comprend la partie comprimée de l'âme et le prolongement de l'âme ou des âmes jusqu'à la fibre comprimée, et un élément qui représente la partie de la membrure comprimée extérieure au prolongement de l'âme ou des âmes jusqu'à la fibre comprimée (voir figure). Les caractéristiques (aire, moment statique et moment quadratique par rapport à l'horizontale de la fibre comprimée) de ce dernier élément sont notés B_0 , S_0 et J_0 .



On a :	On pose :	On en déduit :
$B(y) = B_0 + by$	$B_0^* = B_0 + \sum n_j A_j$	$B^*(y) = B_0^* + by$
$S(y) = S_0 + by^2/2$	$S_0^* = S_0 + \sum n_j A_j d_j$	$S^*(y) = S_0^* + by^2/2$
$J(y) = J_0 + by^3/3$	$J_0^* = J_0 + \sum n_j A_j d_j^2$	$J^*(y) = J_0^* + by^3/3$

L'équation d'équilibre des moments :

$$\delta y B^*(y) - (y + \delta) S^*(y) + J^*(y) = 0$$

s'écrit alors :

$$-\frac{b}{6} y^3 + \delta \frac{b}{2} y^2 + (\delta B_0^* - S_0^*) y + J_0^* - \delta S_0^* = 0$$

C'est une équation du troisième degré en y . Elle a une solution et une seule comprise entre 0 et h . Cette solution correspond à la position de l'axe neutre si elle est comprise dans la zone d'épaisseur constante de la section. Dans le cas contraire, il faut modifier l'hypothèse de départ. Les expressions sont alors plus complexes.

5. Règles de calcul

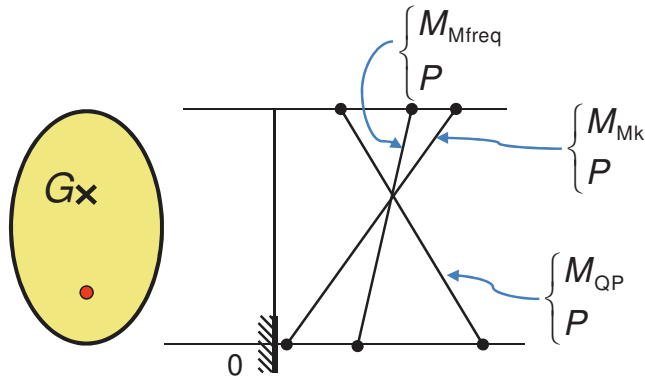
BPEL

- Pour le calcul de $\Delta'P$, on prend $n_p = 5$ (sauf si les armatures ne sont pas adhérentes)
- Pour le calcul en section fissurée (calcul de σ_s et $\Delta''\sigma_p$) on prend $n_p = n_s = 15$ (ce qui est discutable)
- Pour tenir compte de l'adhérence moins bonne des aciers de précontrainte, le calcul des caractéristiques de la section fissurée homogénéisée est fait en ne prenant qu'une fraction ρ de A_p : $\rho = 0$ si les armatures de précontrainte ne sont pas adhérentes, $\rho = 0,5$ avec des armatures de post-tension adhérentes (injection au coulis de ciment et gaine présentant une adhérence de forme) et $\rho = 1$ dans le cas de la pré-tension. *Nota : cela s'applique au calcul de la section fissurée mais pas au calcul de $\Delta'P$.*
- Un ferrailage minimal est exigé :
 - Ferrailage de peau : 3cm^2 par mètre de parement dans le sens longitudinal et 2cm^2 dans le sens transversal.
 - Ferrailage de maîtrise de la fissuration, section minimale à placer dans les zones tendues, calculé sur la base de la distribution de contraintes en section non fissurée.

Eurocode 2

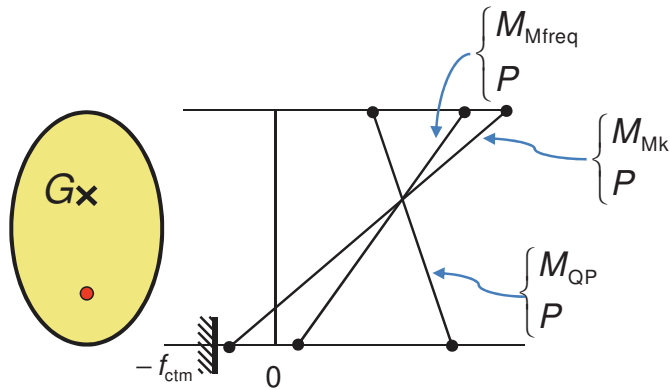
- Pas de prescription particulière pour n (noté α_e dans l'Eurocode) mais il est logique de prendre la valeur instantanée du coefficient d'équivalence, contrairement à ce que l'on fait en béton armé en flexion simple.
- Différences de comportement en adhérence entre armatures de précontrainte et armatures de béton armé :
 - Pour le calcul des contraintes en section fissurée dans les armatures tendues en vue des vérifications à la fatigue (Clause 6.8.2 (2)P) l'Eurocode 2 applique une correction sur les contraintes calculées dans l'hypothèse d'une adhérence parfaite. Cette correction dépend du type d'armature de précontrainte et du rapport des diamètres entre armatures de précontrainte et de béton armé.
 - Pour le calcul des contraintes en section fissurée pour les justifications relatives à la fissuration, aucune correction n'est spécifiée (cela signifie-t-il qu'il est interdit de faire une correction ?) mais dans la plupart des cas, seuls les aciers passifs sont susceptibles de contribuer à la maîtrise de la fissuration. Le fait de ne pas prendre en compte le comportement en adhérence entraîne une sous-estimation des contraintes dans les armatures passives.
- Ferrailage minimal : selon le texte européen, il n'est pas prévu systématiquement un ferrailage de peau, les annexes nationales françaises donnent des règles complémentaires sur les armatures de peau. L'annexe nationale de l'EC2-2 prévoit notamment (article 9.1) un ferrailage de peau systématique pour les poutres précontraintes. En outre, de même qu'avec le BPEL, il faut placer un ferrailage longitudinal minimal dans les zones où des tractions peuvent apparaître. Les principes de détermination de ce ferrailage sont similaires à ceux du BPEL (équilibrer par les armatures tendues les tractions qui passaient dans le béton juste avant fissuration) mais les modalités pratiques de calcul sont plus complexes.
- Justifications : il n'y a pas uniquement des limites de contraintes à vérifier, il faut également contrôler les valeurs de calcul des ouvertures de fissures (il s'agit d'un calcul conventionnel car on ne sait pas prévoir de manière précise par le calcul les ouvertures de fissures). Cette vérification nécessite le calcul des contraintes dans les armatures.

Précontrainte totale



Sans traction

sous combinaison caractéristique

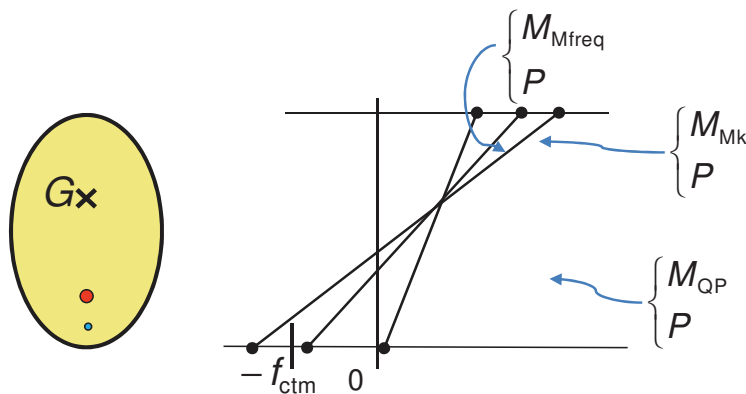


Avec tractions limitées

$\sigma_c \geq -f_{ctm}$ sous combinaison caractéristique. On admet qu'il n'y a pas de fissuration.

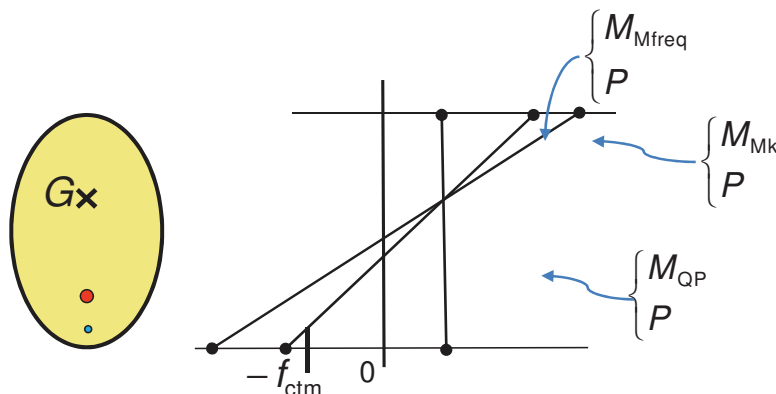
On peut ou non interdire les décompressions sous combinaison fréquente

Précontrainte partielle



P minimale

Pas de traction à vide (sous combinaison QP) . Fissuration possible sous actions variables



Autre choix de dimensionnement : on privilégie le fonctionnement à vide, en limitant notamment les déformations de fluage

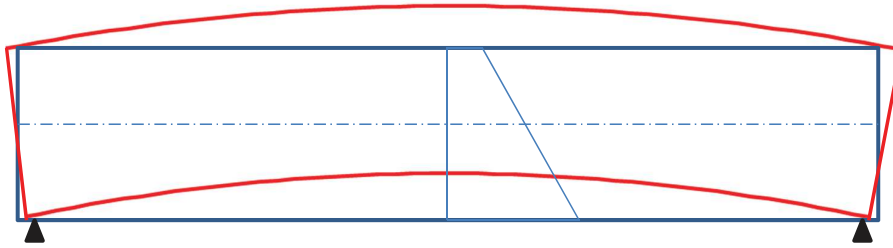
$$Pe_0 + M_{QP} \approx 0$$

(Ce que l'on ne peut pas avoir sur toute la vie de l'ouvrage, à cause des pertes différées)

Précontrainte totale

$$Pe_0 + M_{QP} < 0$$

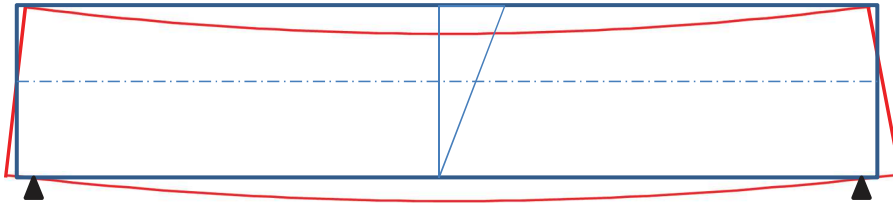
Fibre inférieure beaucoup plus comprimée à vide que la fibre supérieure



Précontrainte minimale : $P = M_{QP}/(\rho v + v' - d')$

$$Pe_0 + M_{QP} > 0$$

Fibre inférieure très peu comprimée à vide

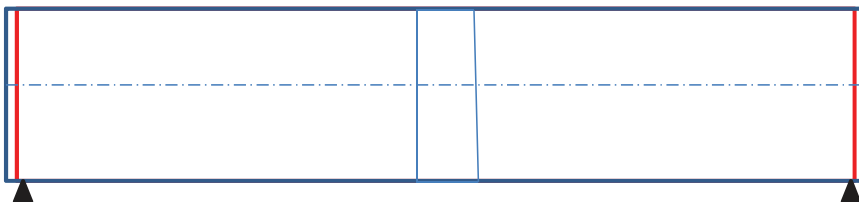


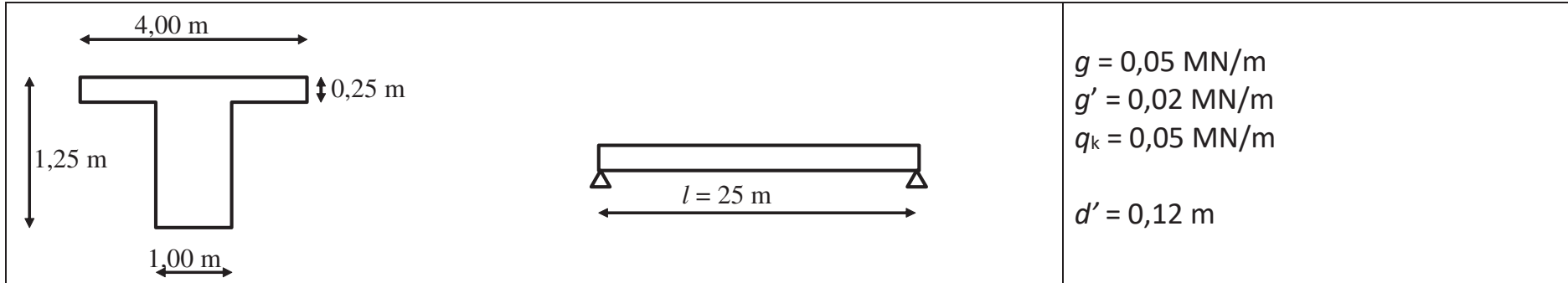
Précontrainte funiculaire des charges permanentes :

$$Pe_0 + M_{QP} \approx 0$$

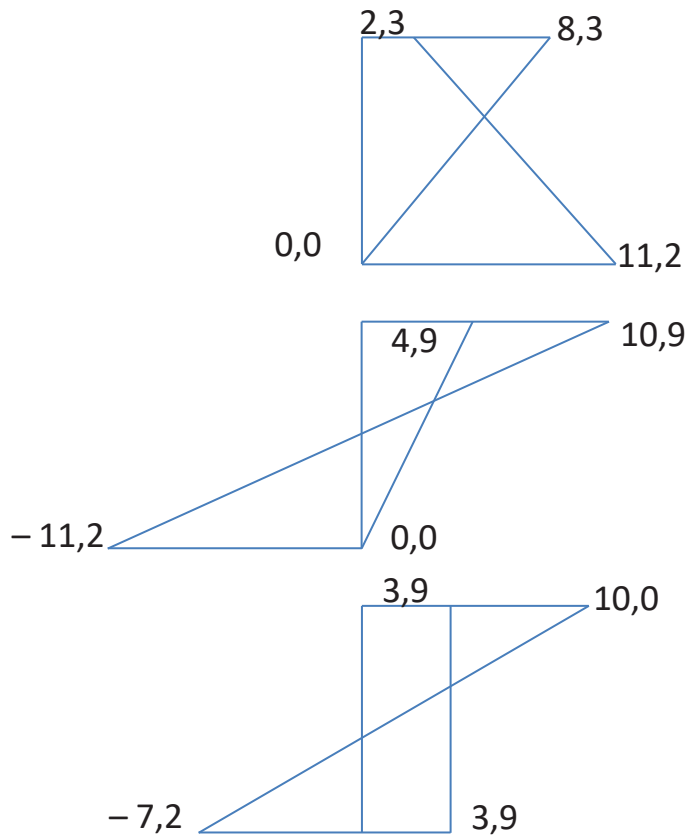
Compression centrée sous charges permanentes

La déformation de fluage se réduit à un raccourcissement de la poutre





$g = 0,05 \text{ MN/m}$
 $g' = 0,02 \text{ MN/m}$
 $q_k = 0,05 \text{ MN/m}$
 $d' = 0,12 \text{ m}$



<p>Précontrainte totale : pas de décompression sous combinaison caractéristique. La section est sur-critique</p>	$P = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'} = 10,8 \text{ MN}$
<p>Précontrainte minimale : pas de décompression sous combinaison quasi permanente. Fonctionnement en précontrainte partielle</p>	$P = \frac{M_{\text{QP}}}{\rho v + v' - d'} = 6,3 \text{ MN}$
<p>Précontrainte dimensionnée pour atteindre un état de contrainte proche de la compression simple sous combinaison quasi permanente. Fonctionnement en précontrainte partielle</p>	$P = \frac{M_{\text{QP}}}{v' - d'} = 7,9 \text{ MN}$