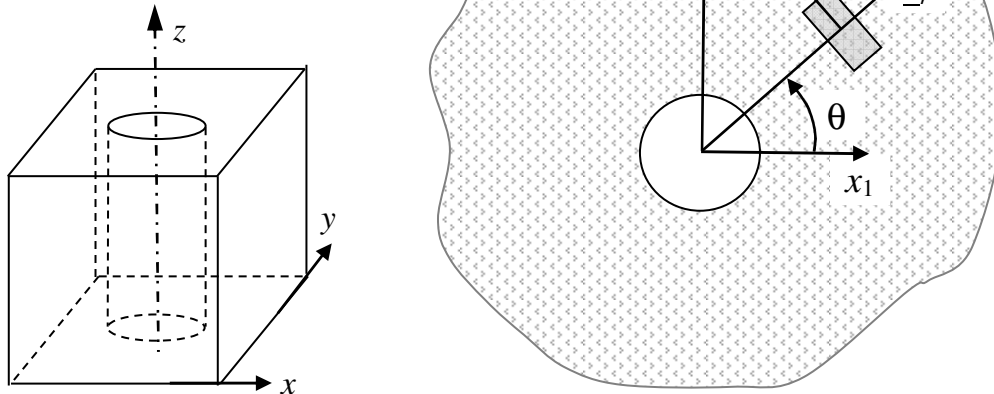


**Champs de contraintes et de déplacements autour des ouvrages souterrains**

Ouvrages cylindriques



- Expressions des champs de déplacements, déformations et contraintes (coordonnées cylindriques, déformations planes):

$$\underline{u} = (u_r, u_\theta, u_z) = [u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), 0], \quad \underline{u}(r, \theta) = u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Equations d'équilibre:

Cas général

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

Problème plan sans force volumique

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

avec  $f$  force volumique.

- Relations contraintes-déformations en élasticité linéaire isotrope :

$$\sigma_{rr} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}$$

avec :

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$$

ou encore:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}$$

### Cas de symétrie axiale

$$\underline{u} = (u_r, 0, 0), \quad u_r = u(r), \quad \underline{u} = u(r) \underline{e}_r$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Equation d'équilibre portant sur le champ de déplacements de symétrie axiale:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \end{cases}$$

avec  $C_1, C_2, A$  et  $B$  des constantes fonctions des conditions aux limites.

- Tube épais sous contraintes normales  $\sigma_i$  et  $\sigma_e$  sur ses parois intérieure ( $r = R_i$ ) et extérieure ( $r = R_e$ ):

$$\sigma_{rr} = \sigma_i + \frac{R_i^2 (\sigma_e - \sigma_i)}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_i + \frac{R_i^2 (\sigma_e - \sigma_i)}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_i^2}{r^2} \right)$$

- Trou circulaire de rayon  $R$  sous pression  $p$  ( $\sigma_i = -p$ ) dans un milieu infini ( $R_e \rightarrow \infty$ ) à contrainte à l'infini isotrope  $\sigma_\infty$ :

$$\sigma_{rr} = -p \frac{R^2}{r^2} + \sigma_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = p \frac{R^2}{r^2} + \sigma_\infty \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

### Cas Général

- Solution des contraintes pour un trou circulaire sous pression interne  $p$  dans un milieu infini à contraintes principales à l'infini ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) dans les directions  $(x, y)$ :

$$\sigma_{rr} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left( 4 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta - p \frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \frac{R^4}{r^4} \cos 2\theta + p \frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left[ 1 + \left( 2 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \right] \sin 2\theta$$

- Contraintes à la paroi ( $r = R$ ):

$$\sigma_{rr} = -p$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (3\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \theta + (3\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \theta + p$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$